

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВЫСОКОВСКАЯ  
СРЕДНЯЯ ШКОЛА» КАМЕНЕЦКОГО РАЙОНА

Секция «Алгебра, геометрия и математический анализ»

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТЕЙ ШТЕЙНЕРА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ  
УЧАСТКА ДОРОГИ «АВТОМОБИЛЬНАЯ ДОРОГА Р-16  
ТЮХИНИЧИ — ВЫСОКОЕ — ГРАНИЦА РЕСПУБЛИКИ ПОЛЬША  
(ПЕСЧАТКА), КМ 20,000 — КМ 41,000»**

Кондратюк Мария Владимировна, 10 класс,  
Сацута Дмитрий Владимирович, 10 класс

Лешкевич Александр Николаевич, учитель  
математики, информатики

г. Высокое, 2020 г.

## Оглавление

Введение.....	3
Основная часть ..	5
1. Задача Штейнера и методы её решения.....	5
2. Построение сети Штейнера при проектировании «Автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи — Высокое — граница Республики Польша (Песчатка), км 20,000 — км 41,000».....	7
3. Анализ проектных решений и построенной сети Штейнера .....	11
Заключение .....	13
Список использованных источников .....	14
Приложение 1 ..	15

## Введение

В любой стране дороги были и остаются одним из важных показателей экономики. Автомобильный транспорт, как известно, самый удобный вид местных перевозок. Железнодорожный транспорт, выполняющий сегодня основную массу грузовых и пассажирских перевозок на дальние расстояния, нуждается в подъездных путях. А роль последних выполняют автомобильные дороги. К тому же автомобильный транспорт имеет ряд преимуществ по сравнению с другими видами транспорта:

во-первых, он самый маневренный, так как способен доставлять грузы «от двери до двери»;

во-вторых, наиболее эффективен для перевозок скоропортящихся и срочных грузов не только на короткие, но и дальние расстояния;

в-третьих сегодня развитие экономики связывают с малым предпринимательством. Но малый бизнес не желает идти в глубинку, поскольку из-за отсутствия транспортно-коммуникативной сети предприниматели не могут сбыть свою продукцию.

Из выше изложенного следует, что за автомобильным транспортом будущее. Однако экономический эффект перевозок напрямую зависит от состояния дорог. Последние должны обеспечивать высокую скорость движения и пропускную способность.

Состояние дорожного хозяйства в настоящее время не позволяет в полном объеме обеспечивать потребности белорусской экономики и конкурентоспособность международных грузоперевозок, проходящих через территорию Республики Беларусь. Нахождение кратчайшего пути является важнейшей задачей при проектировании и реконструкции автомобильных и железных дорог. Развитие современной и эффективной транспортной инфраструктуры, обеспечивающей ускорение товародвижения и снижение транспортных издержек в экономике, является одной из приоритетных задач государства на ближайшие годы. Активный рост экономики государства невозможен в условиях инфраструктурных ограничений, связанных с низким качеством дорог и низкой пропускной способностью инфраструктурных объектов дорожной сети (мостов, переездов и др.).

С развитием дорожных сетей все чаще возникают задачи присоединения новых участков к уже имеющимся. Одной из подобных задач является задача соединения нескольких населенных пунктов кратчайшей системой дорог таким образом, чтобы по этим дорогам можно было добраться до каждого пункта.

В работе предлагается рассмотреть решение данной задачи на однородном участке строительства. В этом случае задача принимает вид задачи Штейнера на евклидовой плоскости.

Таким образом, *актуальность темы исследования* определена выбором оптимального проекта при строительстве участка дороги.

*Целью* данной работы является построение модели дороги «Автомобильная дорога Р-16 Тяхиничи — Высокое — граница Республики Польша (Песчатка), км 20,000 — км 41,000» с использованием сетей Штейнера.

*Задачи работы:*

1) применить сети Штейнера для построения участка дороги «Автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи — Высокое — граница Республики Польша (Песчатка), км 20,000 — км 41,000»;

2) оптимизировать полученную сеть Штейнера с учетом природного ландшафта конкретной местности;

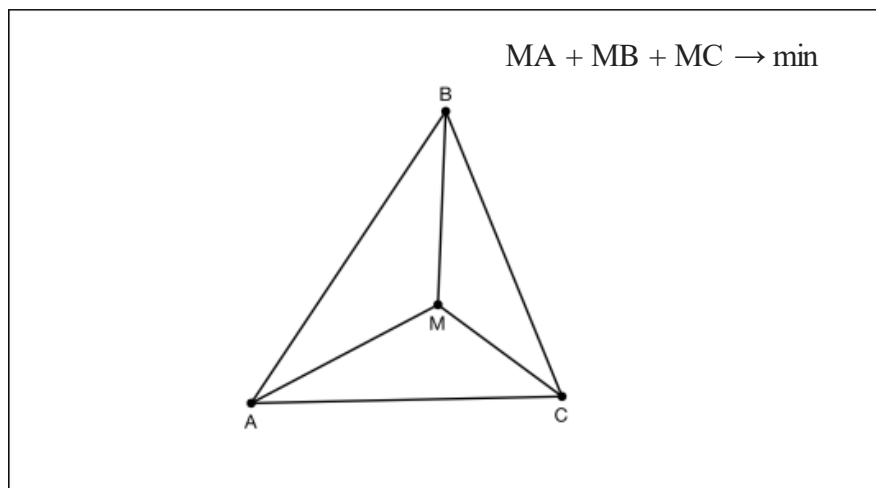
3) сравнить полученные результаты с проектами, принятыми для рассмотрения.

*Методы исследования:* анализ, сравнение, измерение, моделирование.

## Основная часть

### 1. Задача Штейнера и методы её решения

Задача Штейнера состоит в поиске минимального дерева Штейнера — кратчайшей сети, соединяющей заданный конечный набор точек плоскости. Свое название получила в честь Якоба Штейнера (1796—1863). Для трех точек на плоскости она формулируется следующим образом: в заданном треугольнике нужно найти точку на плоскости, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.



В задаче Штейнера допускается при необходимости введение новых вершин дерева, отличных от заданных. Эти вершины называют точками Штейнера.

Хорошо известны достаточные условия: в решение могут входить промежуточные точки, и все соединения должны быть отрезками, соединяющими точки (исходные и промежуточные). В каждой промежуточной точке должны сходиться три отрезка, а в исходных точках — более трех. Угол между отрезками, сходящимися в данной точке, не должен быть меньше  $120^\circ$ . Основное внимание следует уделять поиску абсолютно минимальной сети среди всех имеющихся сетей, использующих фиксированное конечное множество  $N$  точек плоскости. Существует несколько подходов к указанной проблеме Штейнера.

Один из них предполагает поиск абсолютно минимальной сети в классе сетей, все вершины которых принадлежат  $N$ . В этом случае минимальная сеть является деревом (не имеет циклов), которое называется минимальным деревом. Э. Гилберт и Г. Поллак показали, что дерево Штейнера не более чем на 13,4% короче минимального остова дерева.

Однако, как было доказано группой ученых, эта проблема является  $NP$ -трудной. Это означает, что нахождение ее решения за полиномиальное время затруднительно. По мнению М. Херринга, текущим наиболее оптимальным и интересным алгоритмом, решающим задачу Штейнера, является алгоритм GeoSteiner до 2 000 точек, реализованный Д. Вармом, П. Винтером и М. Захариасеном.

Наиболее простой задачей является задача нахождения точки Штейнера для трех точек (трехточечная задача Штейнера). Существуют следующие варианты решения данной задачи.

1. Если каждый из углов между отрезками, соединяющий точку Штейнера с каждой из заданных точек (вершин треугольника), составляет  $120^\circ$ , тогда точка Штейнера либо лежит внутри данного треугольника, либо совпадает с одной из этих вершин.

2. Угол, образованный отрезками, соединяющими эту точку с другими заданными, равен или больше  $120^\circ$ . Если же один из углов треугольника с вершинами в этих точках больше или равен  $120^\circ$ , то сеть состоит из 2 ребер (сторон этого угла). Если все углы меньше  $120^\circ$ , т.е. точка Штейнера состоит из 3 ребер, соединяющих дополнительную точку Штейнера с тремя вершинами.

Указанный алгоритм решения трехточечной задачи Штейнера рассмотрен на примере строительства нового дорожного участка автомобильной дороги «Автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи — Высокое — граница Республики Польша (Песчатка), км 20,000 — км 41,000».

## 2. Построение сети Штейнера при проектировании «Автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи — Высокое — граница Республики Польша (Песчатка), км 20,000 — км 41,000»

Для решения задачи строительства автомобильной дороги «Автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи — Высокое — граница Республики Польша (Песчатка), км 20,000 — км 41,000» использовалась трехточечная задача Штейнера. Часть автомобильной дороги Р-16 «Граница Республики Польша (Песчатка) – Волковичи» уже реконструирована. Поэтому необходимо было соединить сетью дорог только три точки: д. Волковичи, г. Высокое, автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи. Строение местного рельефа определяется расположением ее в пределах Восточно-Европейской равнины. Рельеф территории представляет собой слабо приподнятую, слегка волнистую, наклоненную на север и запад равнину. Такие свойства территории позволяют рассматривать ее как однородную.

В настоящий момент населенные пункты соединены между собой дорогой, суммарная длина которой составляет 8,8 км, по данным карт Яндекс. Карты. Предлагается рассмотреть возможность соединения указанных населенных пунктов другой, более короткой дорогой.

Так как все углы треугольника  $ABC$ , вершины которого находятся в данных населенных пунктах, меньше  $120^\circ$ , то точка Штейнера лежит внутри треугольника  $ABC$ . Для ее нахождения воспользуемся следующим алгоритмом.

*Шаг 1.* На одной из сторон треугольника  $ABC$  построим равносторонний треугольник. Например, возьмем сторону  $BC$  и строим равносторонний треугольник  $BCD$ , причем точка  $A$  не принадлежит этому треугольнику.

*Шаг 2.* Опишем вокруг треугольника  $BCD$  окружность.

*Шаг 3.* Найдем точку Штейнера ( $T$ ) как точку пересечения описанной окружности с отрезком  $AD$ .

Для соединения автомобильной дорогой д. Волковичи, г. Высокое и автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи взяли следующие точки: д. Волковичи (точка  $K$ ), д. Оберовщина (точка  $M$ ), поворот на д. Мыкшицы со стороны г. Высокое ( $B$ ), г. Высокое (точка  $A$ ) и автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи ( $C$ ).

При нахождении точки Штейнера треугольника  $ABC$  были выполнены следующие построения:

Шаг 1. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  построили равносторонний треугольник, причем точка  $A$  не принадлежит этому треугольнику. Для этого провели дуги радиуса  $BC$  из каждой точки  $B$  и  $C$ . Точку пересечения дуг обозначили точкой  $D$ . Получился треугольник  $BCD$ .

Шаг 2. Для нахождения центра окружности, проходящей через точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  построили серединные перпендикуляры сторон треугольника  $BCD$ . Точка пересечения данных серединных перпендикуляров  $O$  – центр искомой окружности.

Шаг 3. Вокруг треугольника  $BCD$  описали окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $OD$  (Рис. 1).

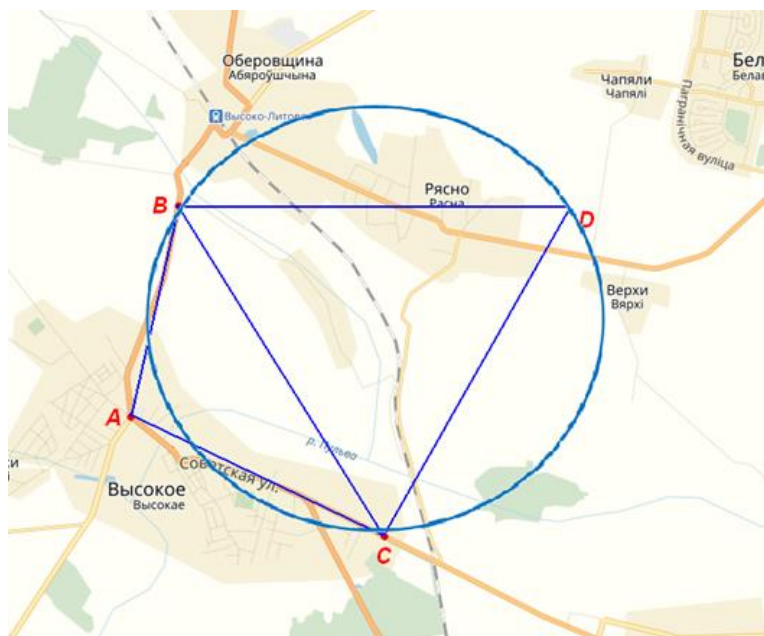


Рис. 1

Шаг 4. Для нахождения точки Штейнера нашли точку пересечения описанной окружности с отрезком AD. Искомая точка Т является точкой Штейнера (Рис. 2).

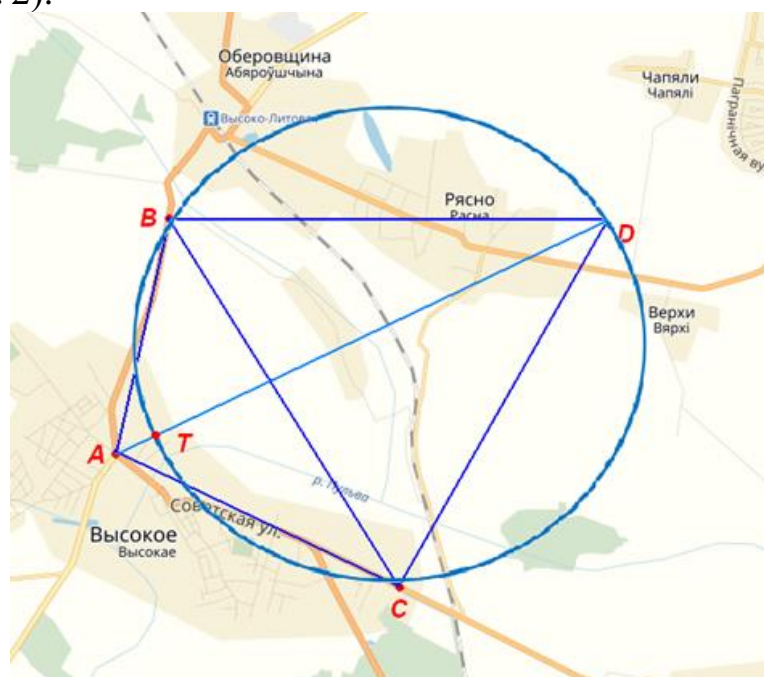


Рис. 2

Шаг 5. Соединив точки В, Т и С получим минимальный путь между населенными пунктами д. Оберовщина, г. Высокое и автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи.

Так как часть дороги ТС проходит на местности по пойме реки Пульва и является заболоченной местностью, то строительство такой дороги является нецелесообразным. Изменим направление оптимального пути без изменения его протяженности.

Шаг 6. Проведем через точки В и С прямую – ось симметрии.



Шаг 7. Относительно оси симметрии ВС построим точку  $T'$  симметричную точке  $T$ . Длина ломанной  $BT'S$  сравна длине ломанной  $BTC$  (Рис. 3).

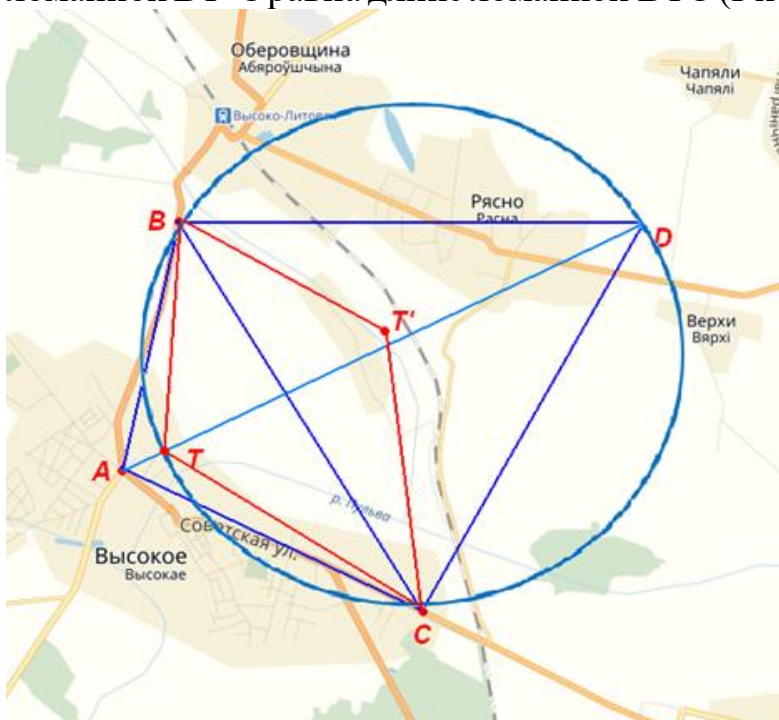


Рис. 3

На местности отрезок  $BT'$  является частью существующей дороги, соединяющей д. Оберовщина и д. Мыкшицы.

В треугольнике  $KMB$  градусная мера угла  $KMB$  оказалась равна больше  $120^\circ$ , поэтому точка Штейнера при совпадёт с точкой  $M$ , и кратчайший путь будет представлять собой ломанную  $KMB$ . Изменим направление пути, не изменяя длину пути. Для этого построим точку  $T''$  симметричную точке  $M$  относительно прямой  $BK$ .

Соединив последовательно точки  $K$ ,  $T''$ ,  $B$ ,  $T'$  и  $C$  получим необходимый минимальный путь между точками: д. Волковичи, г. Высокое, автомобильная дорога Р-16 Тяхиничи (Рис. 4).

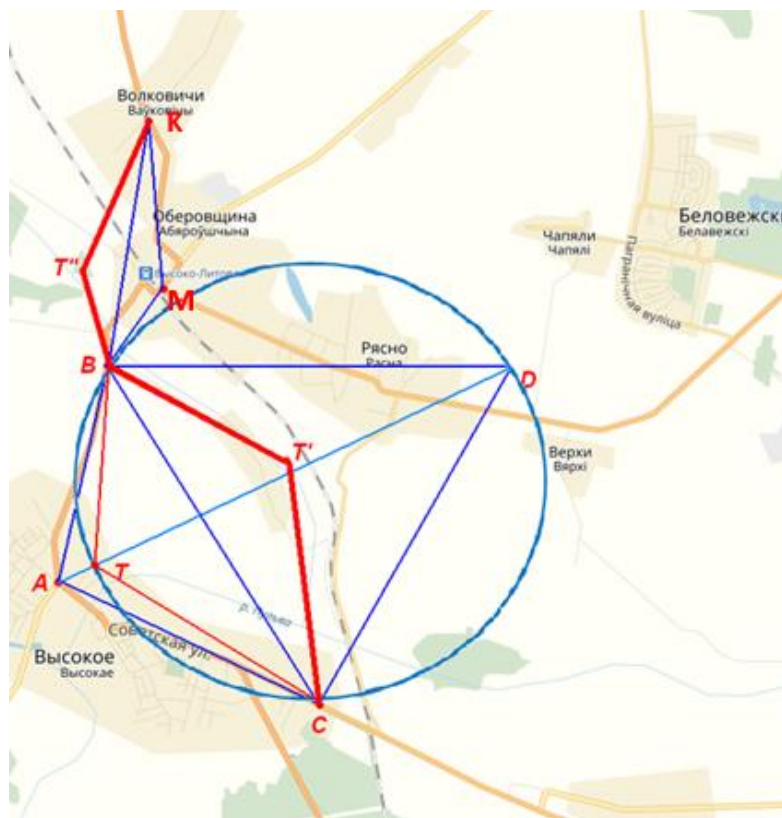


Рис. 4

### **3. Анализ проектных решений и построенной сети Штейнера**

Республиканская автомобильная дорога Р-16 Тюхиничи-Высокое-граница Республики Польша (Песчатка) связывает областной центр г. Брест, г. Высокое и является подъездным путем к пункту пропуска «Песчатка».

В связи с модернизацией пункта пропуска «Песчатка» ожидается регулярное интенсивноэтранзитное движение тяжелого грузового автотранспорта, выполняющего международные перевозки по направлению Республика Польша и страны ЕС – Российская Федерация и страны СНГ, в связи с чем требуется реконструкция подъездного пути к пункту пропуска – автомобильной дороги Р-16.

На указанном участке существующая автомобильная дорога Р-16 проходит непосредственно через населенные пункты: Высокое, Оберовщина и Волковичи, а также вблизи жилой застройки населенных пунктов Сегеневщина и Плянта.

По данным учета интенсивности движения, выполненного специалистами Государственного предприятия «Белгипродор» в ноябре 2015 года на автомобильной дороге Р-16 Тюхиничи-Высокое-граница Республики Польша (Песчатка), км 20,000 – км 41,000, существующая интенсивность движения составляет от 1430 до 4316 автомобилей в сутки. В составе движения преобладает легковой транспорт, который составляет около 68,5% общего потока. Движение тяжеловесных автопоездов составляет около 10%.

В настоящее время рассматриваемый участок автомобильной дороги Р-16 перегружен вследствие недостаточной пропускной способности, что ведет к потерям времени в пути, росту транспортных затрат, а также увеличению уровня загрязнения атмосферного воздуха, почвы и растительности. Вследствие большого числа грузовых транспортных средств и ограниченной возможности для обгона, участок характеризуется высоким числом дорожно-транспортных происшествий.

В результате анализа транспортно-эксплуатационного состояния существующей дороги, оценки её пропускной способности, анализа природоохранных мероприятий и степени воздействия на окружающую среду установлено, что параметры дороги на сегодняшний день не соответствуют своим функциональным требованиям.

Существующая автомобильная дорога Р-16 пересекает г. Высокое, где жилая застройка находится в непосредственной близости от дороги. Воздействие транспортных потоков, включающих большегрузный транспорт, отрицательно сказывается и на экологической обстановке в городе вследствие загрязнения атмосферного воздуха отработавшими газами двигателей автомобилей и акустического воздействия грузового автотранспорта. Транзитный транспорт большой грузоподъемности вызывает повышенный износ и деформирование дорожного покрытия городских улиц, повышает аварийность на улицах города.

Также существующая автодорога пересекает и деревню Оберовщина, где некоторые жилые дома находятся на расстоянии менее 12 м от автомобильной дороги.

При выборе оптимального расположения автомобильной дороги Р-16 учитывались существующая транспортная сеть автомобильных дорог в

пригородной зоне, их состояние, интенсивность движения, существующая жилая застройка, инженерные коммуникации (газопроводы, нефтепродуктопроводы, линии электропередач), границы рекреационных зон, природоохранные территории и другие факторы.

К рассмотрению было предложено 5 вариантов прохождения трассы в регионе расположения г. Высокое и д. Оберовщина:

*Вариант 1.* Трасса проходит по существующему направлению через населенные пункты: г. Высокое, д. Оберовщина и д. Волковичи. Протяжение трассы – 21,062 км.

*Вариант 2.* Предусматривает обход г. Высокое с востока, а д. Оберовщина – с западной стороны, проходя западнее д. Мыкшицы. Протяженность трассы – 21,781 км.

*Вариант 3.* Предусматривает обход г. Высокое с востока между д. Мыкшицы и д. Новая Рясна, восточнее д. Оберовщина и через д. Волковичи в существующем разрыве между жилой застройкой. Протяженность трассы – 20,641 км.

*Вариант 4.* Трасса автомобильной дороги более глубоко обходит г. Высокое, д. Оберовщина и д. Новая Рясна с востока, проходит юго-западнее д. Лесок и через д. Волковичи в существующем разрыве между жилой застройкой. Протяженность трассы – 22,476 км.

*Вариант 5.* Трасса автомобильной дороги обходит г. Высокое с востока с частичным прохождением по населенному пункту (км 33,0 – км 33,7) и обходит д. Мыкшицы и д. Оберовщина с западной стороны. Протяженность трассы – 21,136 км.

Совмещая предложенные проектные решения и построенную сеть Штейнера можно заметить, что наиболее близким вариантом является вариант 2. Именно этот вариант целесообразнее положить в основу реконструкции. Кроме того, прохождение трассы по данному варианту имеет наибольшее приближение к существующей сети дорог по сравнению с другими вариантами. (Приложение 1)

Имеющийся путь, соединяющий данные населенные пункты, составляет 8,9 км. Новый путь, найденный по методу Штейнера, составляет 6,9 км. Благодаря методу Штейнера, удалось сократить длину пути на 2 км.

### **Заключение**

С помощью трехточечной задачи Штейнера был спроектирован участок дороги, соединяющий три контрольные точки кратчайшей сетью дорог. Длина полученного пути на 2 км меньше существующей дороги.

В нашем случае математическая модель построения совпала с проектным решением, утвержденным для строительства.

Уменьшение длины пути отражается на расходах по его строительству. При масштабном внедрении данной методики можно ожидать значительной экономии ресурсов (финансовых, людских и временных).

### **Список использованных источников**

1. Алгоритмы о выборе дороги и сетях. Сети Штейнера. Лекция Владимира Протасова в Яндексе [Электронный ресурс]. – 2017. – Режим доступа: <https://habrahabr.ru/company/yandex/blog/215931/>. – Дата доступа: 20.11.2017.
2. Роль автомобильных дорог в развитии экономики [Электронный ресурс]. – 2017. – Режим доступа: <http://www.cs-alternativa.ru/text/1631>. – Дата доступа: 15.11.2017.
3. Алгоритм Штейнера (Поиск кратчайших сетей) [Электронный ресурс]. – 2017. – Режим доступа: [http://lmatrix.ru/news/practice/algorithm-shtejnera-poisk-kratchajshikh-setej\\_137.html](http://lmatrix.ru/news/practice/algorithm-shtejnera-poisk-kratchajshikh-setej_137.html). – Дата доступа: 20.11.2017.
4. Каким путем пойдет дорога от Бреста к "Песчатке"? [Электронный ресурс]. – 2017. – Режим доступа: <https://auto.tut.by/news/road/490058.html>. – Дата доступа: 18.11.2017.
5. Построение кратчайшей сети дорог на однородной территории с использованием трехточечной задачи Штейнера [Электронный ресурс]. – 2017. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/postroenie-kratchayshey-seti-dorog-na-odnorodnoy-territorii-s-ispolzovaniem-trehtochey-zadachi-shteynera-na-primere-chistopolskogo>. – Дата доступа: 18.11.2017.
6. Дорожное строительство: как будет развиваться сеть автодорог в Беларуси? [Электронный ресурс]. – 2017. – Режим доступа: <http://arcp.by/ru/article/nam-lyubye-dorogi-dorogi>. – Дата доступа: 15.11.2017.

## Приложение 1

