



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа
«Динамические системы и биоматематика»

Студентка 315 группы
П. С. Воронкова

Руководитель
д.ф.— м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2016

Содержание

1	Динамические задачи с дискретным временем	3
1.1	Постановка задачи	3
2	Динамическая система с дискретным временем	4
2.1	Неподвижные точки системы	4
2.2	Построение бифуркационной диаграммы	5
2.3	Исследование существования циклов длины 2 и 3	5
2.4	Показатель Ляпунова	7
3	Исследование дискретных изображений с запаздыванием	8
3.1	Исследование неподвижных точек	9
3.2	Бифуркация Неймарка – Сакера	10
4	Динамическая система с непрерывным временем	12
4.1	Постановка задачи	12
4.2	Биологическая интерпретация системы	13
4.3	Введение безразмерных переменных	14
4.4	Исследование неподвижных точек	15
4.4.1	Поиск неподвижных точек	15
4.4.2	Исследование характера неподвижных точек	15
4.4.3	Фазовые портреты	17
4.5	Бифуркация Андронова –Хопфа	19
4.5.1	Теоретические сведения	19
4.5.2	Вычисление первой ляпуновской величины	20
5	Биологическая интерпретация поведения системы	22

1 Динамические задачи с дискретным временем

1.1 Постановка задачи

Для динамической системы с дискретным временем

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - u_t), \quad 0 < u_t < 1, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

- Найти неподвижные точки.
- Исследовать устойчивость неподвижных точек.
- Доказать существование цикла длины 2.
- Найти цикл длины 3 и построить бифуркационную диаграмму.
- Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметра ($r > 0$).

Для дискретных изображений с запаздыванием

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - u_{t-1}), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

- Найти неподвижные точки.
- Исследовать устойчивость неподвижных точек.
- Построить бифуркационную диаграмму.
- Проверить существование бифуркаций Неймарка — Сакера. Если бифуркация возможна, построить инвариантную кривую.

2 Динамическая система с дискретным временем

2.1 Неподвижные точки системы

$$f(u_t) = r\sqrt{u_t}(1 - u_{t-1}), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Опр. Неподвижной точкой системы $u_{t+1} = f(u_t)$ называется u^* : $f(u^*) = u^*$.
Найдем эти точки.

$$\begin{aligned} r\sqrt{u^*}(1 - u^*) = u^* &\Rightarrow r\sqrt{u^*}^3 + \sqrt{u^*}^2 - r\sqrt{u^*} = 0 \\ \Rightarrow u^* = 0, \quad u_{1,2}^* &= \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4r^2}}{2r}\right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

По условию $0 < u_t < 1$, а один полученных корней из корней больше единицы, поэтому:

$$u_0^* = 0, \quad u_1^* = \frac{2r^2 + 1 - \sqrt{1 + 4r^2}}{2r^2}.$$

Исследуем на устойчивость в этих точках.

Теорема Пусть u^* — неподвижная точка системы $u_{t+1} = f(u_t)$, и $f \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда если $|f'(u^*)| < 1$, то u^* устойчива по Ляпунову, при $|f'(u^*)| > 1$ неустойчива.

$$f'(u) = \frac{r(1 - 3u)}{2\sqrt{u}} \Rightarrow f'(u^*) = \frac{4r^2 + 3 - 3\sqrt{4r^2 + 1}}{2\sqrt{4r^2 + 1} - 2} \quad (2)$$

$$\frac{4r^2 + 3 - 3\sqrt{4r^2 + 1}}{2\sqrt{4r^2 + 1} - 2} = -1 \Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{15}}{2}, r_2 = -0.5i; \quad (3)$$

$$\frac{4r^2 + 3 - 3\sqrt{4r^2 + 1}}{2\sqrt{4r^2 + 1} - 2} = 1 \Rightarrow r_1 = -\frac{\sqrt{15}}{2}, r_2 = 0.5i \quad . \quad (4)$$

Условие $|f'(u^*)| < 1$ выполняется при $r < \frac{\sqrt{15}}{2}$ (u^* ненулевое, $r > 0$). В таком случае u^* устойчива по Ляпунову и является аттрактором системы. В нуле производная уходит на бесконечность \Rightarrow неустойчива (репеллер).

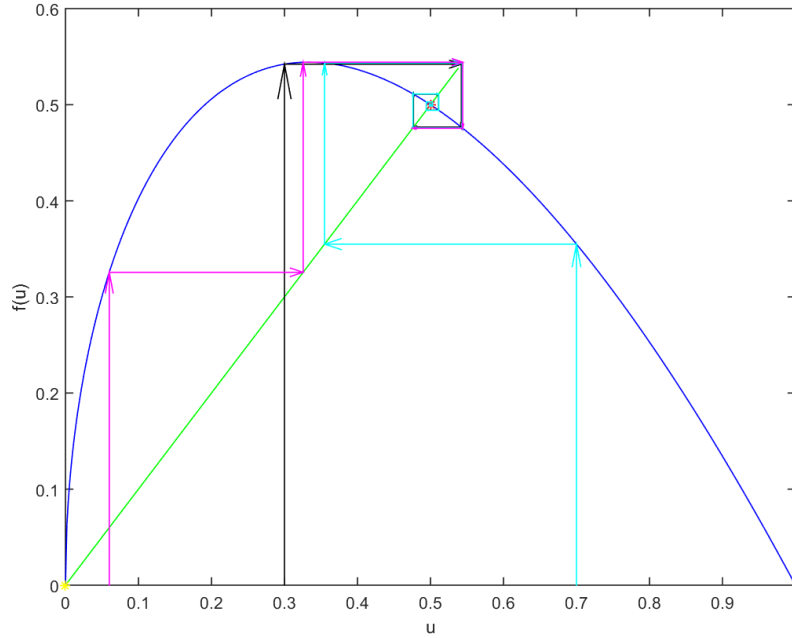


Рис. 1: В данном примере $u_0 = 0.00001, r = \sqrt{2}$

2.2 Построение бифуркационной диаграммы

Опр. Динамическая система $u \mapsto f(u)$ называется топологически эквивалентной в области $U \subset X$ динамической системе $v \mapsto f(v)$ в области $V \subset X$, если существует гомеоморфизм $h : X \Rightarrow X, h(U) = V$, отображающий орбиты первой системы в U на орбиты второй системы в V , сохраняя ориентацию во времени.

Опр. Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении вектора параметров рассматриваемой динамической системы называется бифуркацией.

Опр. Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров, индуцированное отношением топологической эквивалентности вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Бифуркационная диаграмма считалась в Matlab путем разбиения возможных значений радиуса по сетке и подсчета для каждого значения u_t , причем сначала для стабилизации значений высчитывалось около 500 точек, а следующие 200 уже отображались на диаграмму.

2.3 Исследование существования циклов длины 2 и 3

Опр. Множество точек u_1, u_2, \dots, u_k , являющихся траекторией системы $u_{t+1} = f(u_t)$, образует цикл, если $u_2 = f(u_1), \dots, u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k)$.

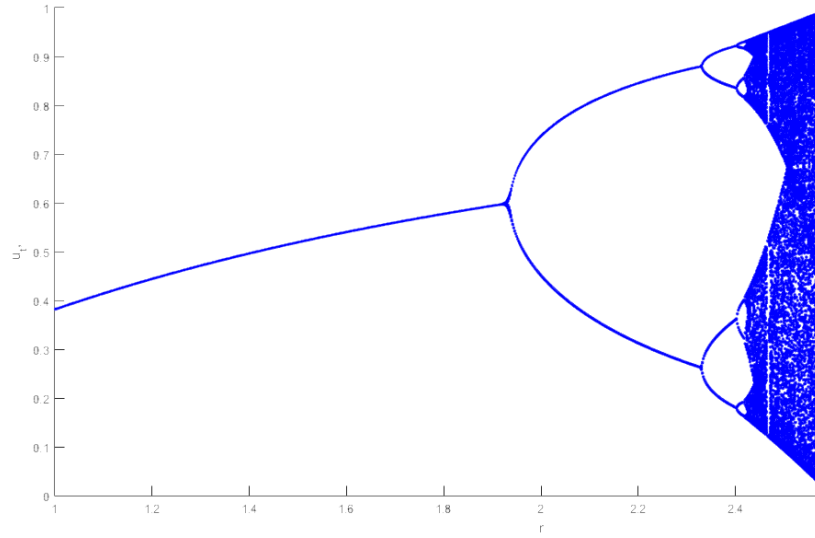


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма

Опр. Натуральные числа называются упорядоченными по Шарковскому, если

$$\begin{aligned}
 &3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ \\
 &\succ 2 * 3 \succ 2 * 5 \succ 2 * 7 \succ \dots \succ \\
 &\succ 2^2 * 3 \succ 2^2 * 5 \succ 2^2 * 7 \succ \dots \succ \\
 &\succ \dots \succ \\
 &\succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
 \end{aligned}$$

Теорема (Шарковского) Пусть $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, имеющее цикл длины k . Тогда f имеет цикл длины m для всех таких m , что $k \succ m$ в указанном выше порядке.

Замечание Любая точка цикла является неподвижной точкой отображения $f^{(k)} = f(f(\dots(f(u))\dots))$.

Следствие Если отображение имеет цикл длины 3, то существуют циклы любой длины. Если отображение не имеет цикла длины 2, то циклы отсутствуют в принципе.

Наличие цикла длины 2 вытекает из вида бифуркационной диаграммы. Наличие цикла длины 3 необходимо проверить при помощи решения системы:

$$\begin{cases} f^{(3)}(u) = u, \\ f'(u) = 1. \end{cases}$$

Опытным путем при помощи численных методов в среде Matlab было установлено, что при $r = 2.5815$ наблюдается цикл длины 3.

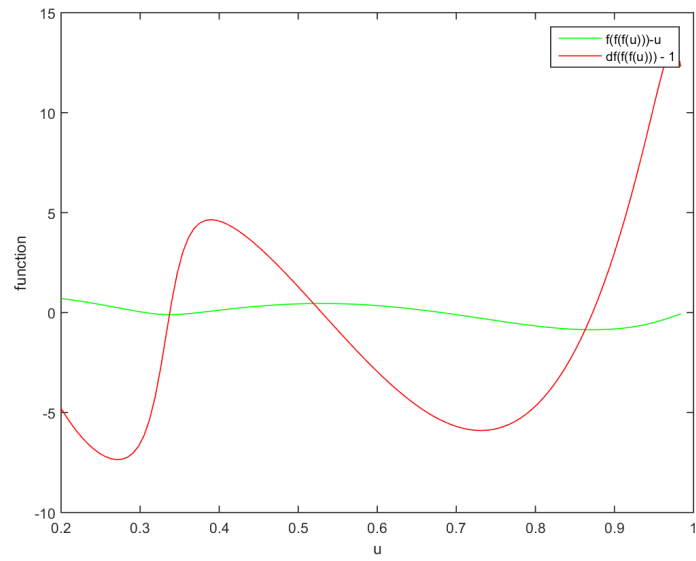


Рис. 3: Поиск цикла длины 3

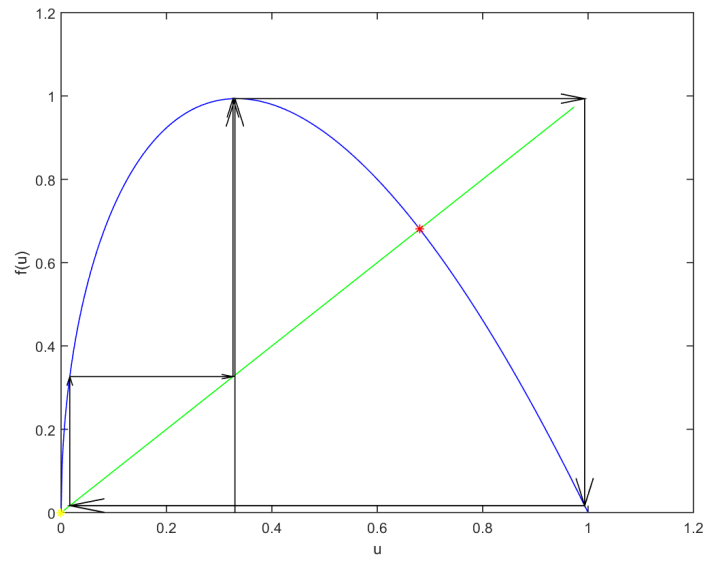


Рис. 4: Цикл длины 3

2.4 Показатель Ляпунова

Опр. Показателем Ляпунова системы $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется величина

$$h(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_1)| + \ln |f'(u_2)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n}$$

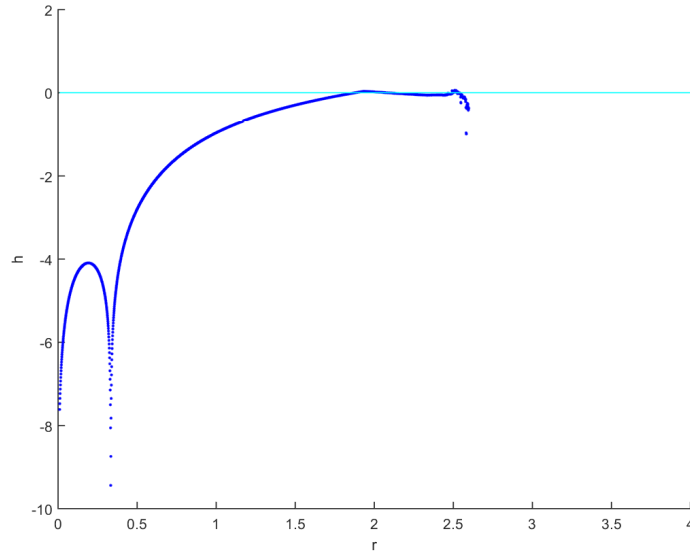


Рис. 5

Показатель Ляпунова характеризует поведение близких вначале траекторий при дискретном изменении времени t . Если $h(u) > 0$, то близкие траектории будут разбегаться и может наблюдаться хаос. В противном случае расстояние между близкими траекториями уменьшается от итерации к итерации.

В текущей задаче показатель может быть положительным, и при больших r поведение системы можно считать хаотическим. Однако, в основном показатель Ляпунова отрицательный.

3 Исследование дискретных изображений с запаздыванием

$$u_{t+1} = r\sqrt{u_t}(1 - u_{t-1}), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Перепишем в виде системы:

$$\begin{cases} u_{t+1} = f(u_t, v_t) = r\sqrt{u_t}(1 - v_t), \\ v_{t+1} = g(u_t, v_t) = u_t. \end{cases}$$

3.1 Исследование неподвижных точек

Неподвижные точки находятся из системы

$$\begin{cases} u = r\sqrt{u}(1-v), \\ v = u. \end{cases}$$

Первая неподвижная точка $(u_1^*, v_1^*) = (0, 0)$. Вторая $-(u_2^*, v_2^*) = (\frac{2r^2+1-\sqrt{1+4r^2}}{2r^2}, \frac{2r^2+1-\sqrt{1+4r^2}}{2r^2})$. Исследуем их на устойчивость.

Теорема. Пусть дана дискретная динамическая система $u_{t+1} = f(u_t)$, $u_t \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{N}$. Пусть f – гладкое отображение, а $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – собственные значения матрицы Якоби функции F в неподвижной точке u^* .

1. Если $|\mu_i| < 1$, $\forall i = 1, \dots, n$, то неподвижная точка u^* асимптотически устойчива;
2. Если $\exists i : |\mu_i| > 1$, то точка неустойчива.

Выпишем матрицу Якоби:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r(1-v)}{2\sqrt{u}} & -r\sqrt{u} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В точке $(u_1^*, v_1^*) = (0, 0)$ якобиан не определен, исследуем его в другой: $(u_2^*, v_2^*) : u_2^* = v_2^* = (\frac{-1+\sqrt{1+4r^2}}{2r})^2$

$$J(u_2^*, v_2^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{1+4r^2}}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения:

$$\det(J - \lambda * I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 0.5\lambda + \frac{\sqrt{4r^2+1}-1}{2} = 0 \quad (5)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9 - 8\sqrt{4r^2+1}}}{4}$$

- При $r = \frac{\sqrt{17}}{16}$ оба собственных значения равны $\frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ точка устойчива.
- При $r > \frac{\sqrt{17}}{16}$ дискриминант отрицательный, а модули комплексных λ совпадают:
 $|\lambda| = \frac{1}{4}\sqrt{1 + 8\sqrt{4r^2+1} - 9} = \sqrt{\frac{\sqrt{4r^2+1}-1}{2}} \Rightarrow$ по теореме об устойчивости $|\lambda| < 1$ при $r < \sqrt{2} \Rightarrow$ при $r \in (\frac{\sqrt{17}}{16}, \sqrt{2})$. точка устойчива, при $r > \sqrt{2}$ неустойчива.
- При $r < \frac{\sqrt{17}}{16}$ модули собственных значений не превышают 1 \Rightarrow точка устойчива.

Таким образом

- $(u_2^*, v_2^*) : u_2^* = v_2^* = \left(\frac{-1+\sqrt{1+4r^2}}{2r}\right)^2$ при $r \in (0, \sqrt{2})$ асимптотически устойчива, при $r > \sqrt{2}$ точка (u_2^*, v_2^*) неустойчива.
- $(u_1^*, v_1^*) = (0, 0)$ не существует

3.2 Бифуркация Неймарка – Сакера

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем:

$$u \mapsto f(u, r), \quad u \in \mathbb{R}^2$$

Опр. Бифуркацией Неймарка – Сакера называется бифуркация положения равновесия в исходной динамической системе, соответствующая появлению собственных значений $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$.

Исходя из результатов предыдущего пункта, получим, что единственное возможное значение параметра r , при котором возможно $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, это $r = \sqrt{2}$.

При прохождении параметром бифуркационного значения, очевидно, происходит смена устойчивости неподвижной точки. Из неустойчивой эта точка становится устойчивой или наоборот. При $r = \sqrt{2}$ сказать о характере неподвижной точки по первому приближению нельзя. Поэтому ниже рассмотрены 3 поведения системы в окрестности и в самой неподвижной точке при $r = \sqrt{2}$.

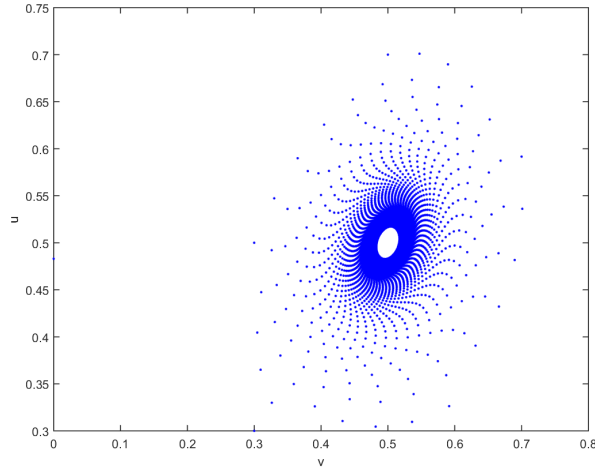


Рис. 6: $r = \sqrt{2}$

При $r > \sqrt{2}$ точка (u_2^*, v_2^*) неустойчива и окружена единственной замкнутой инвариантной кривой. Все траектории, начинающиеся внутри или снаружи этой кривой стремятся к ней при $t \rightarrow \infty$. Таким образом можно наблюдать зарождение устойчивой замкнутой инвариантной кривой, следовательно происходит мягкая потеря устойчивости (если бы кривая была неустойчивой, то мы получили бы жесткую потерю устойчивости):

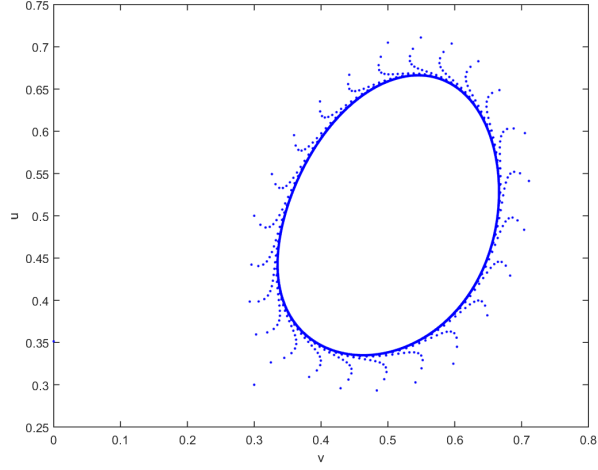


Рис. 7: $r = \sqrt{2} + \varepsilon$

При $r \in (0, \sqrt{2})$ точка (u_2^*, v_2^*) асимптотически устойчива:

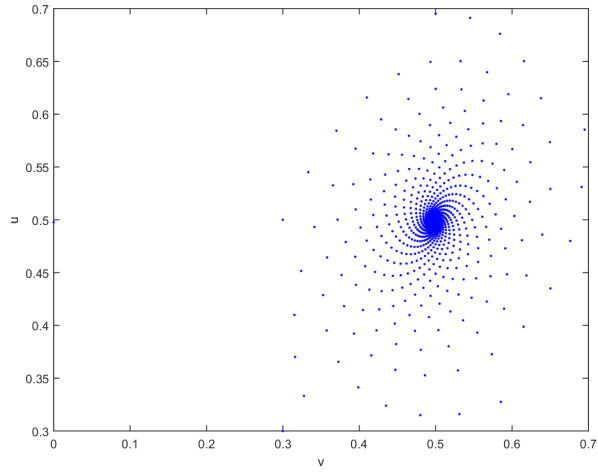


Рис. 8: $r = \sqrt{2} - \varepsilon$

4 Динамическая система с непрерывным временем

4.1 Постановка задачи

Для динамической системы с непрерывным временем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{ax(K-x)}{K} - \frac{bxy}{1+Ax}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1+Ax}, \end{cases}$$

$$x, y \in \mathbb{R}_+^2; \quad a, b, c, d, K, A > 0.$$

- Дать интерпретацию системы
- Ввести безразмерные параметры, максимально уменьшив число входящих в систему параметров
- Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Построить параметрический портрет системы.
- Для каждой характерной области фазового портрета построить фазовый портрет системы.
- Исследовать возможность появления предельного цикла и установить его характер. В положительном случае вычислить первое число Ляпунова
- Дать биологическую интерпретацию полученных результатов

4.2 Биологическая интерпретация системы

Исследуемая динамическая система является математической моделью взаимодействующих популяций, одна из которых состоит из хищников, а другая — из жертв. В общем виде система, характеризующая их взаимодействие, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) - B(x, y), \\ \dot{y} = -C(y) + D(x, y), \end{cases}$$

Величина $x(t)$ — численность популяции жертв в момент времени t , а величина $y(t)$ — численность популяций хищников в тот же момент времени. Соотнесем исходную систему с (2):

$$\begin{cases} A(x) &= ax(1 - \frac{x}{K}), \\ B_1(x) &= \frac{bx}{1+Ax}, \\ B_2(y) &= y, \\ B(x, y) &= B_1(x)B_2(y), \\ C(y) &= cy, \\ D_1(x) &= \frac{dx}{1+Ax}, \\ D_2(y) &= y, \\ D(x, y) &= D_1(x)D_2(y). \end{cases}$$

Функция $A(x)$ есть ничто иное, как скорость размножения жертв в отсутствие хищников. В рассматриваемой задаче эта скорость задаётся логистическим законом. Это значит, что модель учитывает внутривидовую конкуренцию жертв. Максимальное возможное число жертв задаётся параметром K . Параметр a отвечает за интенсивность размножения жертв.

Функция $B(x, y)$ называется функцией выедания жертв хищниками. Чем большее значение она принимает, тем интенсивнее хищники поедают жертв.

Функция $B_1(x)$ представляет собой эффективность выедания жертв хищниками при фиксированном значении популяции хищников и носит название трофической функции хищника. В изучаемой модели при малых значениях популяции жертв потребление жертв хищниками пропорционально количеству жертв. С ростом же популяции жертв возникает эффект насыщения хищников. При больших значениях популяции жертв эффективность потребления приближается к величине $\frac{b}{A}$. Коэффициент b отвечает за интенсивность выедания жертв, а коэффициент A отвечает за скорость насыщения хищников.

Функция $B_2(y)$ имеет смысл эффективности выедания жертв хищниками при фиксированной популяции жертв и в зависимости от популяции хищников. В рассматриваемой модели эта зависимость линейна. Увеличение числа хищников в 2 раза приводит к

увеличению потребления жертв в 2 раза. Таким образом, не учитывается конкуренция хищников за жертв. Значит, имеет смысл использовать эту модель при исследовании относительно небольших популяций хищников и относительно больших популяций жертв.

Функция $C(x)$ имеет смысл смертности хищников в зависимости от числа хищников без учёта конкуренции за жертв. В рассматриваемой модели эта зависимость линейна. Таким образом, хищники не конкурируют за ресурсы, отличные от жертв (территория, альтернативная пища). Такая функция укладывается в рамки модели взаимодействия популяций при небольшой численности хищников. Параметр c отвечает за продолжительность жизни хищников. Чем он больше, тем быстрее хищники умирают.

Функция $D(x, y)$ называется эффективностью употребления жертв хищником. Чем больше её значение, тем сильнее увеличивается популяция хищников за счёт потребления жертв.

Функция $D_1(x)$ является своеобразной мерой пользы для хищников употребления жертв в зависимости от количества жертв. В нашей модели при малом количестве жертв (например, когда имеет место голод среди хищников) польза от потребления пищи хищниками линейно зависит от числа потреблённой пищи. С ростом же доступного числа жертв хищники начинают насыщаться и получают меньшую пользу от потребления дополнительной пищи.

Параметр A отвечает за скорость насыщения хищников, а параметр d за интенсивность влияния пищи на прирост популяции.

Функция $D_2(y)$ измеряет влияние численности популяции хищников на эффективность потребления ими жертв. В нашей задаче прирост числа хищников в связи с потреблением жертв линейно зависит от числа хищников. Это может иметь место при отсутствии конкуренции за жертв.

Таким образом, исследуемая система может быть использована при моделировании межпопуляционных отношений хищников и жертв при условии, что число хищников достаточно мало, либо по каким-то другим причинам между ними отсутствует конкуренция за жертв и прочие ресурсы.

4.3 Введение безразмерных переменных

Сделаем в исходной системе замену переменных:

$$x = pu, \quad y = qv, \quad t = \frac{\tau}{T}.$$

Тогда система перепишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u \left(\frac{Ta(K-pu)}{K} - \frac{Tbqv}{1+Apv} \right), \\ \frac{dv}{d\tau} = v \left(-Tc + \frac{Tdpu}{1+Apv} \right). \end{cases}$$

Потребуем выполнения следующих неравенств:

$$Tap = K, \quad Ap = 1, \quad T bq = 1,$$

а затем введем новые параметры:

$$\alpha = AK, \quad \beta = \frac{cKA}{a}, \quad \gamma = \frac{dK}{a}.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, переобозначив $u \rightarrow x$, $v \rightarrow y$, $\tau \rightarrow t$, получим новую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha - x - \frac{y}{1+x}), \\ \dot{y} = y(-\beta + \gamma \frac{x}{1+x}). \end{cases} \quad (6)$$

4.4 Исследование неподвижных точек

4.4.1 Поиск неподвижных точек

Неподвижные точки (6) находятся из системы:

$$\begin{cases} x(\alpha - x - \frac{y}{1+x}) = 0, \\ y(-\beta + \gamma \frac{x}{1+x}) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Это точки: $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $M(x^*, y^*)$:

$$\begin{cases} x^* = \frac{\beta}{\gamma - \beta}, \\ y^* = (\alpha - \frac{\beta}{\gamma - \beta})(1 + \frac{1}{\gamma - 1}). \end{cases} \quad (8)$$

Зафиксируем $\beta = 1$. Т.к. система рассматривалась в \mathbb{R}_+^2 , то это условие выполнится при $\gamma > 1$, $\alpha > \frac{1}{1-\gamma}$, иначе $M(x^*, y^*)$ не существует.

4.4.2 Исследование характера неподвижных точек

Опр. Положение равновесия динамической системы называется гиперболическим, если количество собственных значений матрицы Якоби с нулевой вещественной частью равно нулю.

Теорема (Ляпунова – Пуанкаре). Пусть u^* — гиперболическое положение равновесия динамической системы. Тогда, если количество собственных значений матрицы Якоби с положительной вещественной частью равно нулю, то положение равновесия u^* асимптотически устойчиво, иначе неустойчиво.

Для исследования характера неподвижных точек нам потребуется посчитать матрицу Якоби системы (7) с учётом того, что было зафиксировано значение $\beta = 1$. Начнём с точки $(0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы Якоби имеют противоположные знаки. Это значит, что точка $(0, 0)$ – седло. Устойчивая сепаратриса входит в точку вертикально, а неустойчивая выходит из точки горизонтально. Это следует из того, что собственный вектор, отвечающий собственному значению α есть $(1, 0)$, а собственный вектор, отвечающий собственному значению -1 есть $(0, 1)$.

Рассмотрим теперь точку $(\alpha, 0)$. Посчитаем матрицу Якоби:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{-\alpha}{1+\alpha} \\ 0 & -1 + \frac{\gamma\alpha}{1+\alpha} \end{pmatrix}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = -1 + \frac{\gamma\alpha}{1+\alpha}$. При $\gamma > 1 + \frac{1}{\alpha}$, $\lambda_2 > 0$ и точка $(\alpha, 0)$ – седло. При $\gamma < 1 + \frac{1}{\alpha}$, $\lambda_2 < 0$ эта точка будет устойчивым узлом (стоком).

И, наконец, рассмотрим (x^*, y^*) :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} x^*(-1 + \frac{y^*}{(1+x^*)^2}) & \frac{-x^*}{1+x^*} \\ \frac{y^*\gamma}{(1+x^*)^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma}(1 + \frac{2}{\gamma-1} - \alpha) & \frac{-1}{\gamma} \\ \alpha(\gamma-1) - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение для матрицы Якоби:

$$\det(J(x^*, y^*) - \lambda * E) = 0,$$

$$\lambda(\lambda + \frac{1}{\gamma}(1 + \frac{2}{\gamma-1} - \alpha)) + \frac{1}{\gamma}(\alpha(\gamma-1) - 1) = 0$$

Откуда получаем выражение для собственных значений:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2\gamma}(1 + \frac{2}{\gamma-1} - \alpha) \pm \frac{1}{2}\sqrt{D},$$

$$D = \frac{1}{\gamma^2}(1 + \frac{2}{\gamma-1} - \alpha)^2 - \frac{4}{\gamma}(\alpha(\gamma-1) - 1)$$

Точка (x^*, y^*) существует при $\alpha > \frac{1}{\gamma-1}$. Из этого следует, что действительные части $\lambda_{1,2}$ имеют один и тот же знак (если корни действительные – очевидно, если комплексные, то $\frac{D}{4}$ представляет собой квадрат числа, стоящего перед знаком « \pm », уменьшенный на некоторую положительную величину).

Исследуем знак дискриминанта:

$$\frac{1}{\gamma^2}(1 + \frac{2}{\gamma-1} - \alpha)^2 - \frac{4}{\gamma}(\alpha(\gamma-1) - 1) = 0$$

$$\alpha_{1,2} = 1 + \frac{2}{\gamma-1} + 2\gamma(\gamma-1) \pm 2\gamma\sqrt{(\gamma-1)^2 + 1}$$

Таким образом, при $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ точка (x^*, y^*) будет являться центром или фокусом. Допустим, что точка – центр, тогда

$$\alpha = 1 + \frac{2}{\gamma-1}$$

Подставим это значение в выражение дискриминанта D и получим, что $D = -4$. Таким образом, при фиксированном значении $\gamma > 1$ и при $\alpha = 1 + \frac{2}{\gamma-1}$ фокус $M = (x^*, y^*)$ теряет устойчивость. В точке M имеет место бифуркация Андронова –Хопфа.

4.4.3 Фазовые портреты

Разобьем область значений параметров на несколько областей по характеру неподвижных точек:

- A : $(0, 0)$ – седло, $(\alpha, 0)$ – сток, (x^*, y^*) – не существует
- B : $(0, 0)$ – седло, $(\alpha, 0)$ – седло, (x^*, y^*) – сток
- C : $(0, 0)$ – седло, $(\alpha, 0)$ – седло (x^*, y^*) – устойчивый фокус
- D : $(0, 0)$ – седло, $(\alpha, 0)$ – седло (x^*, y^*) – неустойчивый фокус
- E : $(0, 0)$ – седло, $(\alpha, 0)$ – седло (x^*, y^*) – неустойчивый узел

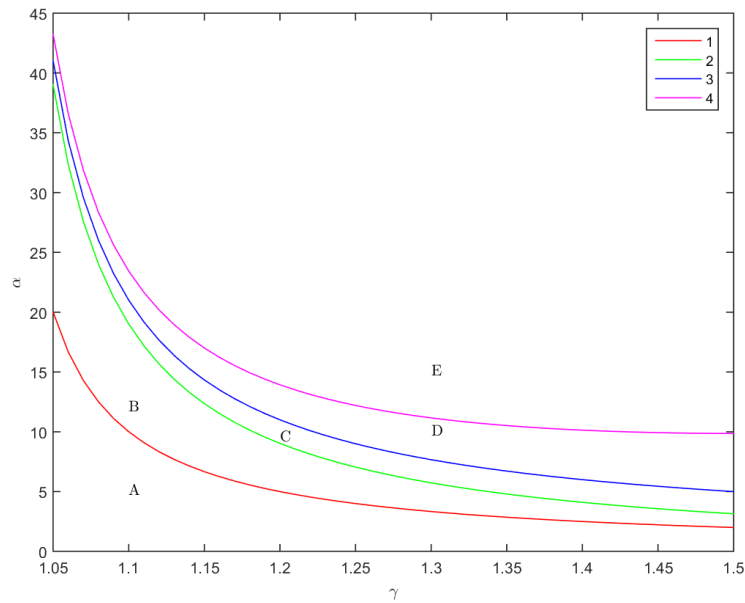


Рис. 9:

$$1 : \alpha = \frac{1}{\gamma-1}$$

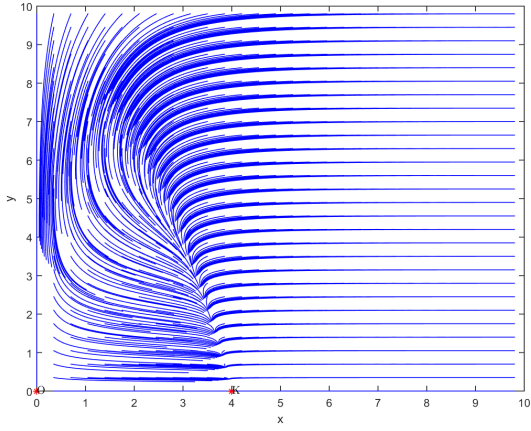
$$2 : \alpha = 1 + \frac{2}{\gamma-1} + 2\gamma(\gamma-1) - 2\gamma\sqrt{(\gamma-1)^2 + 1}$$

$$3 : \alpha = 1 + \frac{2}{\gamma-1}$$

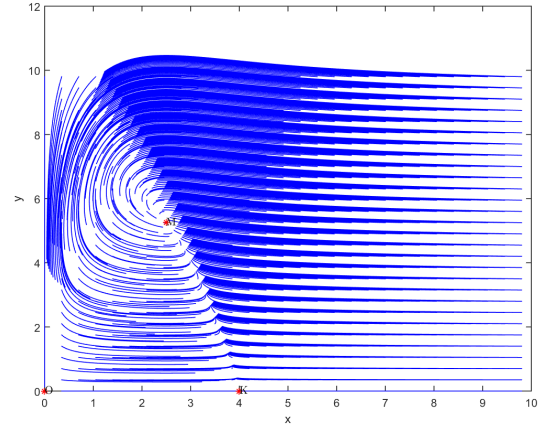
$$4 : \alpha = 1 + \frac{2}{\gamma-1} + 2\gamma(\gamma-1) + 2\gamma\sqrt{(\gamma-1)^2 + 1}$$

$$O(0, 0), K(\alpha, 0), M(x^*, y^*)$$

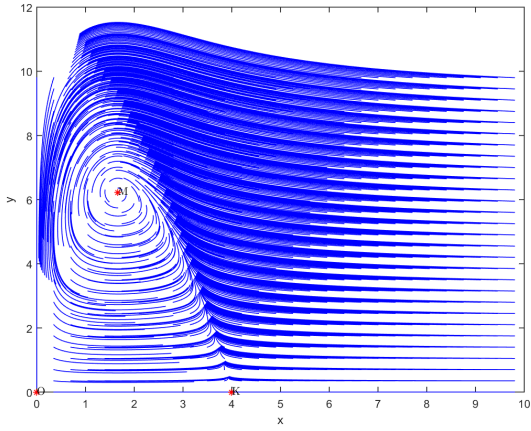
Фазовые портреты плоскости:



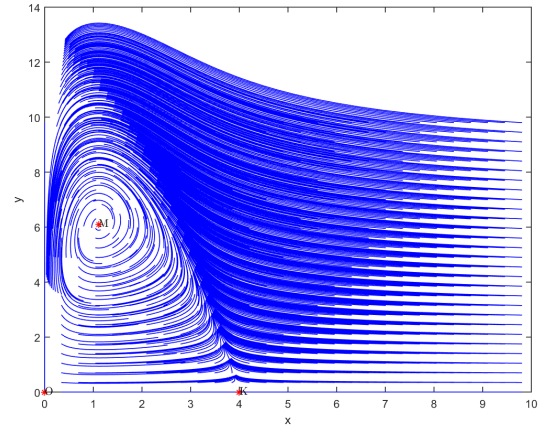
(a) Область A, $\alpha = 4$, $\gamma = 1.1$



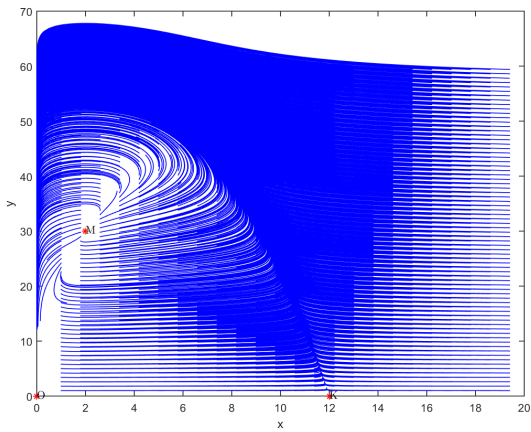
(b) Область B, $\alpha = 4$, $\gamma = 1.4$



(c) Область C, $\alpha = 4$, $\gamma = 1.6$



(d) Область D, $\alpha = 4$, $\gamma = 1.9$



(e) Область E, $\alpha = 12$, $\gamma = 1.5$

4.5 Бифуркация Андронова –Хопфа

4.5.1 Теоретические сведения

Как было выяснено выше и проиллюстрировано фазовыми портретами в системе имеется бифуркация Андронова –Хопфа: фокус теряет устойчивость. Фазовый портрет области D показывает, что при пересечении парой параметров (α, γ) кривой

$$\alpha = 1 + \frac{2}{\gamma - 1}$$

в направлении из области C в область D возникает устойчивый предельный цикл, то есть имеет место мягкая потеря устойчивости. Сейчас это будет показано строго. Для этого нам понадобится одна теорема. Рассмотрим систему

$$\dot{u} = f(u; \alpha), \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

имеющую при $\alpha = 0$ положение равновесия $u = 0$ с собственными числами $\lambda_{1,2} = \pm iw_0$, $w_0 > 0$. Без потери общности предположим, что система имеет положение равновесия $u = 0$ при малых $|\alpha|$. Тогда система представима в виде

$$\dot{u} = A(\alpha)u + F(u; \alpha),$$

где F – вектор-функция, имеющая разложение в ряд Тейлора, начинающееся по крайней мере с квадратичных членов. По предположению матрица $A(\alpha)$ имеет собственные числа $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm iw(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $w(0) = w_0 > 0$. Обозначим $\lambda(\alpha) = \lambda_1(\alpha) = \overline{\lambda_2(\alpha)}$. Пусть также $g(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ – собственный вектор $A(\alpha)$, отвечающий отвечающий собственному числу $\lambda(\alpha)$, а $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ – собственный вектор $A^T(\alpha)$, отвечающий отвечающий собственному числу $\overline{\lambda(\alpha)}$. Для этой системы можно сформулировать теорему:

Теорема. *Любая двумерная однопараметрическая система $\dot{u} = f(u; \alpha)$, имеющая при достаточно малых $|\alpha|$ положение равновесия $u = 0$ с собственными числами $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm iw(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $w(0) = w_0 > 0$ и удовлетворяющая условиям невырожденности*

$$\frac{d}{d\alpha}\mu(\alpha) \neq 0$$

при $\alpha = 0$, $l_1(0) \neq 0$, где

$$l_1(0) = \frac{1}{2w_0} \operatorname{Re}(ig_{20}(0)g_{11}(0) + w_0g_{21}(0)), \quad (9)$$

в окрестности начала координат локально топологически эквивалентна одной из двух следующих нормальных форм

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_1\alpha - v_2 + \operatorname{sgn}(l_1(0))v_1(v_1^2 + v_2^2), \\ \dot{v}_2 = v_1 + v_2\alpha + \operatorname{sgn}(l_1(0))v_2(v_1^2 + v_2^2), \end{cases} \quad (10)$$

Величина $l_1(0)$ называется первой ляпуновской величиной и может быть вычислена следующим образом. Определим комплекснозначную функцию

$$G(z, w) = \langle p, F(zq_1 + w\bar{q}_1, zq_2 + w\bar{q}_2) \rangle,$$

и вычислим ее частные производные по z и w при $z = w = 0$:

$$g_{20} = G_{zz}, \quad g_{11} = G_{zw}, \quad g_{21} = G_{zzw}.$$

Далее подставляем полученные значения в формулу (9). Если $l_1(0) < 0$, то в исследуемой системе имеет место мягкая потеря устойчивости, т.к. она имеет место в системе (10).

4.5.2 Вычисление первой ляпуновской величины

Проверим условия применимости теоремы. Для начала нужно проверить условие

$$\frac{d}{d\alpha}\mu(\alpha) \neq 0$$

при $\alpha = 0$. С учётом выражения для собственных чисел $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm iw(\alpha)$ матрицы Якоби в точке M получим

$$\mu(\alpha) = -\frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} - \alpha\right),$$

откуда

$$\frac{d}{d\alpha}\mu(\alpha) = \frac{1}{2\gamma} \neq 0$$

при $\alpha = 0$.

Таким образом, первое условие применимости теоремы выполнено. Далее, нам нужно узнать собственные векторы матриц $J(M)$ и $J^T(M)$, отвечающие каким собственным значениям $\lambda = iw_0$ и $\bar{\lambda}$. Выше было показано, что $w_0 = 1$. Матрица Якоби $J(M)$ при бифуркационных значениях параметров ($\alpha = 1 + \frac{2}{\gamma-1}$) принимает вид:

$$J(M) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\gamma} \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что собственному значению i отвечает собственный вектор $q = (i, \gamma)$. Так же получаем собственный вектор матрицы $J^T(M)$, отвечающий собственному значению $-i$: $p = (\gamma, -i)$. Используется следующий алгоритм:

- Вводим систему при бифуркационных значениях параметров

$$f_1 := (x, y) \rightarrow x\left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} - x - \frac{y}{1 + x}\right)$$

$$f_2 := (x, y) \rightarrow y\left(-1 + \frac{x\gamma}{1 + x}\right)$$

- Переносим неподвижную точку M в точку $(0, 0)$

$$h_1 := (x, y) \rightarrow f_1(x + \frac{1}{\gamma - 1}, y + (1 + \frac{1}{\gamma - 1})^2)$$

$$h_2 := (x, y) \rightarrow f_2(x + \frac{1}{\gamma - 1}, y + (1 + \frac{1}{\gamma - 1})^2)$$

- Оставляем члены, начиная с квадратичных

$$F_1 := (x, y) \rightarrow h_1(x, y) - \text{subs}([u = x, v = y], \text{mtaylor}(h_1(u, v), [u, v], 2))$$

$$F_2 := (x, y) \rightarrow h_2(x, y) - \text{subs}([u = x, v = y], \text{mtaylor}(h_2(u, v), [u, v], 2))$$

- Составляем функцию G и дифференцируем

$$G := (z, w) \rightarrow \gamma * F_1(iz - iw, z\gamma + w\gamma) - i * F_2(iz - iw, z\gamma + w\gamma)$$

$$g_{20} := \text{subs}([z = 0, w = 0], \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(z, w))$$

$$g_{11} := \text{subs}([z = 0, w = 0], \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} G(z, w))$$

$$g_{21} := \text{subs}([z = 0, w = 0], \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial w} G(z, w))$$

- Получаем выражение для ляпуновского числа и упрощаем

$$l_1 := \text{simplify}(\frac{1}{2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + g_{21}))$$

Программа возвращает результат

$$l_1 = -(\gamma - 1)(3 + 2\gamma^2 - 3\gamma + \frac{2}{\gamma})$$

Видно, что это выражение всегда отрицательно. В самом деле, левая скобка всегда положительна, а квадратный трёхчлен

$$2\gamma^2 - 3\gamma + 3$$

достигает минимального значения в точке $\gamma = \frac{3}{4}$, где он равен $\frac{15}{8}$, таким образом, и правая скобка всегда больше нуля. Значит, в системе имеет место мягкая потеря устойчивости при $\alpha = 1 + \frac{2}{\gamma - 1}$. Устойчивый фокус становится неустойчивым и возникает предельный цикл, который существует при больших значениях α , то есть бифуркация является суперкритической.

5 Биологическая интерпретация поведения системы

Качественно поведение системы, как было выяснено, зависит от того, в какую область параметрического портрета попадают параметры, описывающие систему. Дадим интерпретацию поведения системы для каждой из подобластей параметрического портрета.

Область А. Система не является биологически устойчивой. Вымирают всех хищники, остаются только жертвы. При этом, если изначально популяции хищников и жертв очень велики, то первое время количество хищников фактически не изменяется, зато резко снижается количество жертв. Потом жертв становится недостаточно для пропитания хищников и все хищники вымирают.

Область В. В данном случае ситуация более благоприятна с точки зрения экологии. Каково бы ни было начальное число хищников и жертв (лишь бы оно было отлично от нуля), в конце концов ситуация стабилизируется и значение популяций обоих видов выходит на постоянный уровень. Если изначально хищников и жертв очень много, то сначала хищники выедают жертв, практически не меняя свою численность, до тех пор, пока жертв не станет недостаточно для их пропитания. Как только жертв стало мало, число хищников снижается, а число жертв увеличивается, но до фиксированного уровня. На этом численности обоих видов приходят в стабильное состояние.

Область С. Ситуация схожа с предыдущим случаем. Единственное существенное отличие заключается в том, что численности обоих видов стабилизируются на некотором значении, бесконечно осциллируя около него: периодически популяция хищников становится велика и хищники выедают настолько много жертв, что им нечем питаться, после чего часть хищников умирает и у жертв появляется возможность увеличить свою популяцию. Опять же у хищников появляется много еды и их численность растёт, а численность жертв падает. И этот процесс продолжается.

Область D. В этом случае возникают автоколебания. Независимо от начальных значений популяций хищников и жертв (лишь бы они были ненулевые) с течением времени в системе возникнет автоколебательное движение. Популяции хищников и жертв будут меняться сезонно. В пределе численности жертв и хищников будут меняться с одинаковым периодом.

Область Е. В этом случае снова возникают автоколебания, но они имеют одну отчетливую особенность. Одна из частей колебательного цикла связана с колоссальным уменьшением численности хищников при практически полном отсутствии жертв. После уменьшения численности хищников численность жертв начинает расти и жертвы достигают своей максимальной численности, а численность хищников не меняется до некоторого момента. Но настает момент, когда популяция хищников снова начинает расти с огромной скоростью, популяция жертв начинает падать. Рост продолжается до тех пор, пока почти все жертвы не вымрут. И всё повторяется снова.

Список литературы

- [1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. «Динамические системы и модели биологии»
- [2] Федорюк М. В. «Обыкновенные дифференциальные уравнения»