Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум № 2 по курсу
Динамическое программирование и процессы управления

Студентка 415 группы
П. С. Воронкова

Руководитель
А. И. Месяц

Москва, 2016

Содержание

1 Постановка задачи

Дана система с управлением u и помехой v:

$$\begin{cases} \dot{x(t)} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) \in \mathcal{E}(x_0, X_0) \\ u(t) \in \mathcal{E}(p(t), P(t)) \\ v(t) \in \mathcal{E}(q(t), Q(t)) \\ u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}, \ v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}, \ x(t) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Построить внешние эллипсоидальные оценки множества и трубки достижимости системы.

2 Теоретические выкладки

2.1 Оценка суммы эллипсоидов

Определение 1. *Эллипсоидом $\mathcal{E}(q, Q)$, $Q = Q^T \geqslant 0$ называется замкнутое выпуклое множество с опорной функцией*

$$\rho(l|\mathcal{E}(q, Q)) = \langle l, q \rangle + \langle l, Ql \rangle^{1/2}.$$

Причем, если $Q > 0$, то верно следующее: *эллипсоидом $\mathcal{E}(q, Q)$, $Q = Q^T > 0$ называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству*

$$\left\langle x - q, Q^{-1}(x - q) \right\rangle \leqslant 1$$

Утверждение 1. *Для эллипсоида верна формула афинного преобразования:*

$$A\mathcal{E}(z, Z) + b = \mathcal{E}(Az + b, AZA^T), \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Доказательство. Запишем опорную функцию эллипсоида:

$$\rho(l|A\mathcal{E}(z, Z) + b) = \sup_{x \in A\mathcal{E}(z,Z)+b} \langle l, x \rangle = \sup_{x \in \mathcal{E}(z,Z)} \langle l, Ax + b \rangle = \langle l, b \rangle + \sup_{x \in \mathcal{E}(z,Z)} \left\langle A^T l, x \right\rangle =$$

$$= \langle l, b \rangle + \left\langle A^T l, z \right\rangle + \left\langle A^T l, ZA^T l \right\rangle^{1/2} = \langle l, Az + b \rangle + \left\langle l, AZA^T l \right\rangle^{1/2} = \rho(l|\mathcal{E}(Az + b, AZA^T)).$$

Поскольку линейное преобразование сохраняет свойство выпуклости, то из равенства опорных функций выпуклых множеств следует равернство этих множеств (свойство взаимно однозначного соответствия между множествами и опорныыми функциями).

□

Определение 2 *Суммой множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ по Минковскому называется множество*

$$S = \bigcup_{a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n} \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$$

Рассмотрим сумму двух эллипсоидов $\mathcal{E}_1(q_1, Q_1)$ и $\mathcal{E}_2(q_2, Q_2)$. Оценим сверху эту сумму эллипсоидом $\mathcal{E}_+(q_+, Q_+) \supseteq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, который будет касаться суммы в направлении вектора $l \in \mathbb{R}^n,\ ||l|| = 1$.

Утверждение 2.

$$q_+ = q_1 + q_2,\ Q_+ = (p_1 + p_2)\left(\frac{Q_1}{p_1} + \frac{Q_2}{p_2}\right),$$

причем, если зафиксировать направление l, то можно положить p_1, p_2 равными следующему:

$$p_1 = (l, Q_1 l)^{1/2},\ p_2 = (l, Q_2 l)^{1/2}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\rho(l, |\mathcal{E}_+(q_+, Q_+)) &= \langle q_1 + q_2, l\rangle + \sqrt{\left\langle l, (p_1 + p_2)\left(\frac{Q_1}{p_1} + \frac{Q_2}{p_2}\right)\right\rangle} \\
&= \langle q_1, l\rangle + \langle q_2, l\rangle + \sqrt{\langle l, Q_1 l\rangle + \langle l, Q_2 l\rangle + \frac{p_1}{p_2}\langle l, Q_1 l\rangle + \frac{p_2}{p_1}\langle l, Q_2 l\rangle} \\
&\geqslant \{\text{Среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического}\} \\
&\geqslant \langle q_1, l\rangle + \langle q_2, l\rangle + \sqrt{\langle l, Q_1 l\rangle + \langle l, Q_2 l\rangle + 2\langle l, Q_1 l\rangle^{1/2}\langle l, Q_2 l\rangle^{1/2}} \\
&= \langle q_1, l\rangle + \langle q_2, l\rangle + \langle l, Q_1 l\rangle^{1/2} + \langle l, Q_2 l\rangle^{1/2} \\
&= \rho(l, |\mathcal{E}_1) + \rho(l, |\mathcal{E}_2) = \rho(l, |\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2).
\end{aligned}$$

При фиксированном l, подставляя p_1, p_2, неравенство превращается в равенство, ч.т.д.

$\square$

Аналогично рассматривается случай, когда эллипсоидов $n > 2$.

Утверждение 3. *Рассмотрим эллипсоиды $\mathcal{E}_i(q_i, Q_i),\ i = 1, \ldots, n$. Положим*

$$p_i = \langle l, Q_i l\rangle.$$

Тогда $\mathcal{E}_+ \supseteq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_n$, причем $\rho(l|\mathcal{E}_+) = \rho(l|\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_n)$, где

$$q_+ = \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad Q_+ = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{p_j}\right).$$

Отсюда вытекает следующий факт:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_n = \bigcup_{||l||=1} \mathcal{E}_+ l$$

2.2 Внешняя оценка геометрической разности эллипсоидов

Определение 3. *Геометрической разностью множеств A и B(разностью Минковского) называется следующее множество:*

$$A \dot{-} B = \{c : c + B \subseteq A\}$$

Выражение для опорной функции:

$$\rho(l|A \dot{-} B) = \mathrm{conv}(\rho(l|A) - \rho(l|B)),$$

где под операцией conv понимается овыпукление функций, т.е. наибольшая выпуклая функция, не превосходящая данную.
Как и сумма эллипсоидов, результат геометрической разности $\mathcal{E}_1(q_1, Q_1), \mathcal{E}_2(q_2, Q_2)$, вообще говоря, не является эллипсоидом. Однако существует внешняя эллипсоидальная аппроксимация $\mathcal{E}_+ \supseteq \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$.

Утверждение 4. *Параметры эллипсоида $\mathcal{E}_+(q_+, Q_+)$ определяются следующим образом:*

$$q_+ = q_1 - q_2, \quad Q_+ = Q_*^T Q_*,$$

где

$$Q_* = S_1 Q_1^{1/2} - S_2 Q_2^{1/2},\ S_i S_i^T = S_i^T S_i = I.$$

Доказательство. Покажем, что

$$\rho(l|\mathcal{E}_+) \geqslant \mathrm{conv}(\rho(l|\mathcal{E}_1) - \rho(l|\mathcal{E}_2)) = \rho(l|\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2).$$

Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$(\rho(l|\mathcal{E}_+) - \langle l, q_+\rangle)^2 = \langle l, Q_1 l\rangle + \langle l, Q_2 l\rangle - 2\left\langle S_1 Q_1^{1/2} l, S_2 Q_2^{1/2} l\right\rangle \geqslant \{\text{Неравенство Коши-Буняковского}\}$$
$$\geqslant \langle l, Q_1 l\rangle + \langle l, Q_2 l\rangle - 2\langle l, Q_1 l\rangle^{1/2}\langle l, Q_2 l\rangle^{1/2} = (\langle l, Q_1 l\rangle^{1/2} - \langle l, Q_2 l\rangle^{1/2})^2 = \rho(l|\mathcal{E}_1 \dot{-} \mathcal{E}_2)^2.$$

Условие касания по заданному направлению задается следующим образом:

$$S_1 Q_1^{1/2} l = \lambda S_2 Q_2^{1/2} l,\ \lambda > 0.$$

Учитывая данное выражение, неравенство выше обращается в равенство.

$\square$

2.3 Уравнение интегральных воронок

Определение 4. *Полурасстоянием по Хаусдорфу между множествами A и B называется*

$$h_-(A, B) = \inf\{\varepsilon : B \subseteq A + \mathrm{B}_\varepsilon(0)\}.$$

Определение 5. *Множеством достижимости $\mathcal{X}(t, t_0, \mathcal{X}_0)$ в момент времени t для системы с неопределенностью (1) и начального множества $\mathcal{X}_0 = \mathcal{E}(x_0, t_0)$ назовем* *множество всех состояний* x*: для любой помехи* $v(\tau)$ *существует управление* $u(\tau) \in \mathcal{E}(p(\tau), P(\tau))$ *и* $x_0 \in \mathcal{X}_0, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t$*, которые переводят систему из положения* $x(t_0) = x_0$ *в* $x(t) = x$.

Определение 6. *Трубкой достижимости задачи оптимального управления (1) называется многозначное отображение, элементом которого в момент времени* t *является множество достижимости в этот момент времени:*

$$\mathcal{X}[t] = X(t, t_0, \mathcal{X}_0).$$

Из курса динамического программирования известно, что трубка достижимости будет удовлетворять следующему уравнению интегральных воронок:

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma^{-1} h_-(\mathcal{X}[t+\sigma], (I + \sigma A(t))\mathcal{X}[t] \dot{-} (-\sigma C(t)\mathcal{E}(q(t), Q(t))) + \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t))) = 0,$$

$$\mathcal{X}[t_0] = \mathcal{E}(x_0, \mathcal{X}_0).$$

При малом σ можно приближенно приравнять множества, являющиеся аргументами полурасстояния по Хаусдорфу. Мы же заменим множество $\mathcal{X}[t]$ на его внешнюю эллипсоидальную апроксимацию $\mathcal{E}(x_+(t), X_+(t))$:

$$\mathcal{E}(x_+(t+\sigma), X_+(t+\sigma)) \approx (I+\sigma A(t))\mathcal{E}(x_+(t), X_+(t)) \dot{-} (-\sigma C(t)\mathcal{E}(q(t), Q(t))) + \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t)),$$

$$\mathcal{E}(x_+(t_0), X_+(t_0)) \approx \mathcal{E}(x_0, \mathcal{X}_0).$$

2.4 Оценка геометрической разности эллипсоидов

Найдем параметры эллипсоида $\mathcal{E}(x_1(t), X_1(t))$, являющийся внешней аппроксимацией геометрической разности $(I + \sigma A(t))\mathcal{E}(x_+(t), X_+(t)) \dot{-} (-\sigma C(t)\mathcal{E}(q(t), Q(t)))$:

$$\begin{aligned} x_1 &= (I + \sigma A(t))x_+(t) + \sigma C(t)q(t), \\ X_1 &= {Q_*}^T Q_*, \end{aligned}$$

где

$$Q_* = S_1 Q_1^{1/2} - S_2 Q_2^{1/2}, \ S_i S_i^T = S_i^T S_i = I,$$

причем (по Утв. 1)

$$Q_1 = (I + \sigma A(t))X_+(I + \sigma A(t))^T, \quad Q_2 = -\sigma C(t)Q(t)(-\sigma C(t))^T.$$

В итоге для X_1 получаем выражение:

$$\begin{aligned} X_1 &= Q_1 + Q_2 - Q_2^{1/2} S_2^T S_1 Q_1^{1/2} - (Q_2^{1/2} S_2^T S_1 Q_1^{1/2})^T = \\ &= X_+ + \sigma[AX_+ + X_+A^T - (CQC^T)^{1/2} S^T X_+^{1/2} - X_+^{1/2} S (CQC^T)^{1/2}] + \mathrm{o}(\sigma), \end{aligned}$$

где $\mathrm{o}(\sigma)$ содержит слагаемые порядка выше первого относительно σ, причем $S = S_1^T S_2$.

2.5 Оценка суммы эллипсоидов

Найдем параметры эллипсоида $\mathcal{E}(x_2(t), X_2(t))$, который является внешней оценкой суммы эллипсоидов $\mathcal{E}(x_1(t), X_1(t))$ и $\sigma B\mathcal{E}(p(t), P(t))$:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + \sigma Bp = (I + \sigma A(t))x_+(t) + \sigma C(t)q(t) + \sigma B(t)p(t) \\
X_2 &= (p_1 + p_2)\left(\frac{X_1}{p_1} + \frac{\sigma^2 BPB^T}{p_2}\right) = X_1 + \sigma^2 BPB^T + \frac{p_2}{p_1}X_1 + \frac{p_1}{p_2}\sigma^2 BPB^T = \\
&\quad = (\frac{p_2}{p_1} + 1)[X_+ + \sigma(AX_+ + X_+A^T - (CQC^T)^{1/2}S^T X_+^{1/2} - X_+^{1/2}S(CQC^T)^{1/2})] + \\
&\quad + \frac{p_1}{p_2}\sigma^2 BPB^T + \mathrm{o}(\sigma).
\end{aligned}
$$

Слагаемые с зависимостью от p_2 пока оставим, так как в направлении касания l p_2, вообще говоря, зависит от σ.

2.6 Условия касания

Потребуем касания внешней эллипсоидальной аппроксимации в направлении l:

$$
\begin{aligned}
&\left(X_+^{1/2} + (\sigma AX_+)^{1/2} + (\sigma X_+A^T)^{1/2} + \sigma(AX_+A^T)^{1/2}\right) l = \lambda\sigma S(CQC^T)^{1/2}l,\ \lambda > 0, \\
&p_1 = \langle l, X_1 l\rangle^{1/2} = \left\langle l, (X_+ + \sigma[AX_+ + X_+A^T - (CQC^T)^{1/2}S^T X_+^{1/2} - X_+^{1/2}S(CQC^T)^{1/2}])l\right\rangle^{1/2}, \\
&p_2 = \left\langle l, \sigma^2 BPB^T l\right\rangle^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Условия берутся из рассматриваемых уравнений для оценки разности и суммы эллипсоидов. Выразим λ :

$$
\lambda = \frac{||\left(X_+^{1/2} + (\sigma AX_+)^{1/2} + (\sigma X_+A^T)^{1/2} + \sigma(AX_+A^T)^{1/2}\right) l||}{||S\sigma(CQC^T)^{1/2}l||}
$$

2.7 Вывод дифференциальных уравнений

Учтем, что в наших предположениях $\mathcal{E}(x_+(t-\sigma), X_+(t-\sigma)) = \mathcal{E}(x_2(t), X_2(t))$. Потребуем касания $X_+(t - \sigma)$ в направлении $l(t - \sigma)$. Также примем следующие обозначения:

$$
\pi_\sigma = \frac{1}{\sigma}\frac{p_2}{p_1},\ \mu_\sigma = \lambda\sigma.
$$

Получаем следующие выражения:

$$\begin{cases}
x_+(t-\sigma) = (I+\sigma A(t))x_+(t) + \sigma C(t)q(t) + \sigma B(t)p(t), \\
\\
X_+(t-\sigma) = (\sigma\pi_\sigma(t)+1)[X_+(t) + \sigma(A(t)X_+(t) + X_+(t)A^T(t) - \\
\\
-(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2}S^T(t)X_+(t)^{1/2} - X_+(t)^{1/2}S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2})] + \frac{\sigma}{\pi_\sigma(t)}B(t)P(t)B(t)^T + \mathrm{o}(\sigma), \\
\\
\pi_\sigma(t) = \frac{\left\langle l(t-\sigma), B(t)P(t)B(t)^T l(t-\sigma)\right\rangle^{1/2}}{\left\langle l(t-\sigma), (X_+(t)+\sigma[A(t)X_+(t)+X_+(t)A^T(t)-(C(t)Q(t)C(t)^T)^{1/2}S(t)^T X_+(t)^{1/2}-X_+(t)^{1/2}S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2}])l(t-\sigma)\right\rangle^{1/2}}, \\
\\
\mu_\sigma(t) = \frac{||\left(X_+^{1/2}(t)+(\sigma AX_+)^{1/2}+(\sigma X_+A^T)^{1/2}+\sigma(A(t)X_+(t)A^T(t))^{1/2}\right)l(t-\sigma)||}{||S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2}l(t-\sigma)||}, \\
\\
\left(X_+^{1/2} + (\sigma A(t)X_+(t))^{1/2} + (\sigma X_+(t)A^T(t))^{1/2} + \sigma(A(t)X_+(t)A^T(t))^{1/2}\right) l(t-\sigma) = \\
= \mu_\sigma S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2} l(t-\sigma).
\end{cases}$$

Устреимим σ к нулю:

$$\begin{cases}
\dot{x_+}(t) = \lim\limits_{\sigma\to 0} \frac{x_+(t-\sigma)-x_+(t)}{\sigma} = A(t)x_+(t) + C(t)q(t) + B(t)p(t), \\
\\
\dot{X_+}(t) = \lim\limits_{\sigma\to 0} \frac{X_+(t-\sigma)-X_+(t)}{\sigma} = \pi(t)X_+(t) + A(t)X_+(t) + X_+(t)A^T(t) - \\
\\
-(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2}S^T(t)X_+(t)^{1/2} - X_+(t)^{1/2}S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2} + \frac{1}{\pi(t)}B(t)P(t)B(t)^T, \\
\\
\pi(t) = \frac{\left\langle l(t), B(t)P(t)B(t)^T l(t)\right\rangle^{1/2}}{\langle l(t), (X_+(t))l(t)\rangle^{1/2}}, \\
\\
\mu(t) = \frac{||X_+^{1/2}(t)l(t)||}{||S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2}l(t)||}, \\
\\
X_+^{1/2}(t)l(t) = \mu S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2} l(t).
\end{cases}$$

3 Условия на вектор направления

Из уравнения интегральных воронок можно приравнять следующие опорные фукнции:

$$\rho(l(t+\sigma) \mid \mathcal{X}(t+\sigma)) = \mathrm{conv}[\rho(l(t+\sigma) \mid (I+\sigma A(t))\mathcal{X}(t)) - \\ - \rho(l(t+\sigma) \mid (-\sigma C(t)\mathcal{E}(t)))] + \rho(l(t+\sigma) \mid \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t))),$$

В силу внешней оценки выполнится и

$$\rho(l(t+\sigma) \mid \mathcal{E}(x_+(t+\sigma), X_+(t+\sigma))) = \mathrm{conv}[\rho(l(t+\sigma) \mid (I+\sigma A(t))\mathcal{E}(x_+(t), X_+(t))) - \\ - \rho(l(t+\sigma) \mid (-\sigma C(t)\mathcal{E}(t)))] + \rho(l(t+\sigma) \mid \sigma B(t)\mathcal{E}(p(t), P(t))).$$

Поэтому

$$\rho((I+\sigma A'(t))l(t+\sigma) \mid X(t)) = \rho((I+\sigma A'(t))l(t+\sigma) \mid \mathcal{E}(x_+(t), X_+(t))).$$

Мы хотим, чтобы в произвольный момент времени и направлении аппроксимирующий эллипсоид коснулся множества достижимости. Зафиксируем произвольный момент времени t и направление $l(t)$. Потребуем условия касания:

$$l(t) = (I+\sigma A^T)l(t+\sigma),$$

что преобразуется в

$$\dot{l(t)} = -A^T l(t).$$

3.1 Итоговое уравнение системы

В итоге система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x_+}(t) = A(t)x_+(t) + C(t)q(t) + B(t)p(t), \\ \\ x_+(t_0) = x_0 \\ \\ \dot{X_+}(t) = \pi(t)X_+(t) + A(t)X_+(t) + X_+(t)A^T(t) - (C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2}S^T(t)X_+(t)^{1/2} - \\ \\ -X_+(t)^{1/2}S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2} + \frac{1}{\pi(t)}B(t)P(t)B(t)^T, \\ \\ X_+(t_0) = X_0, \\ \\ \pi(t) = \frac{\left\langle l(t), B(t)P(t)B(t)^T l(t) \right\rangle^{1/2}}{\langle l(t), (X_+(t))l(t)\rangle^{1/2}}, \\ \\ \mu(t) = \frac{||X_+^{1/2}(t)l(t)||}{||S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2}l(t)||}, \\ \\ X_+^{1/2}(t)l(t) = \mu(t)S(t)(C(t)Q(t)C^T(t))^{1/2}l(t), \\ \\ \dot{l(t)} = -A^T l(t), \\ \\ l(t_0) = l_0. \end{cases}$$

4 Программная реализация

1. Решение дифференциальных уравнений осуществляется при помощи функции Matlab **ode45()**. Чтобы ей воспользоваться, в программе производятся преобразования матриц в вектора.

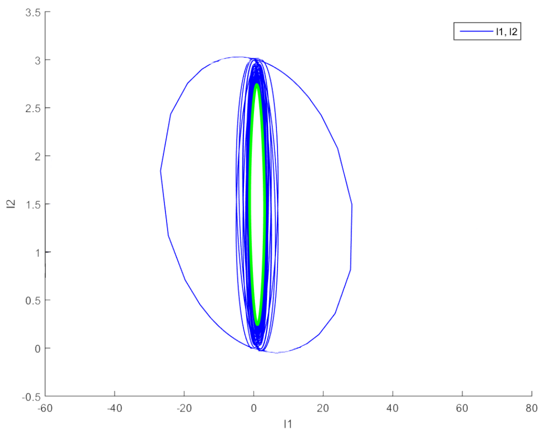
2. Заметим, что в разделе оценок геометрической разности эллипсоидов рассматривалось условие касания, в котором фигурировали матрицы S_1, S_2. Можно взять матрицу $S_1 = I, S_2$ – некоторая ортогональная матрица. В итоге получаем, что матрица S – ортогональная. Из того, что $S^T S = I$ и вида $\mu(t)$ следует, что выполняется ортогональное преобразование. Следовательно, S – матрица поворота. Ее можно вычислить по алгоритму, описанному в (*).

3. Извлечение корня из матрицы основывается на сингулярном разложении.

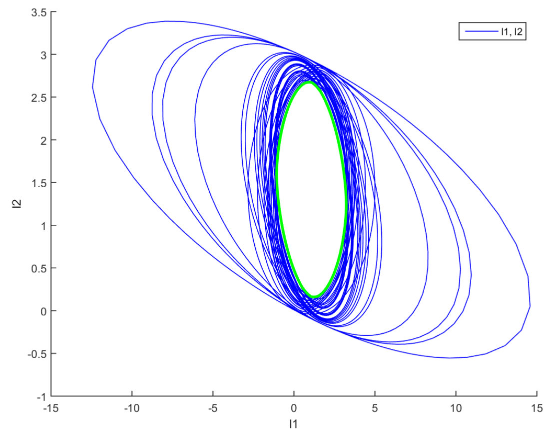
5 Примеры работы программы

5.1 Пример № 1

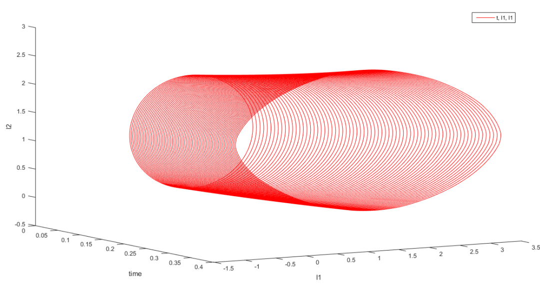
$$A = \begin{pmatrix} t & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p = q = 0; P = 5;\ Q = 1; x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



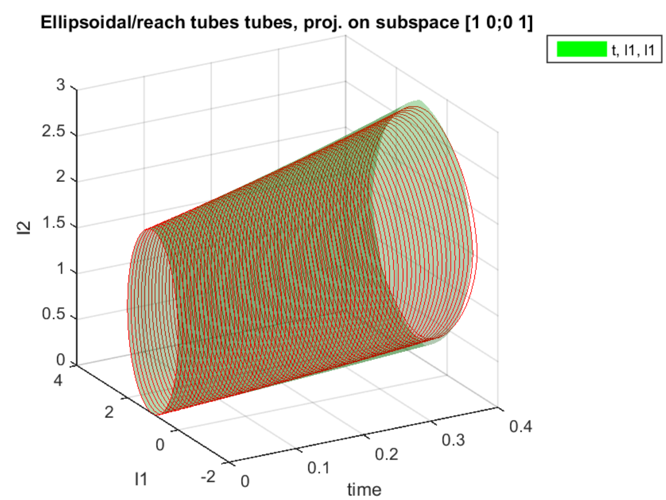
(a) (l_1, l_2)



(b) $(l_1(t), l_2(t))$



(c) $(t, l_1(t), l_2(t))$

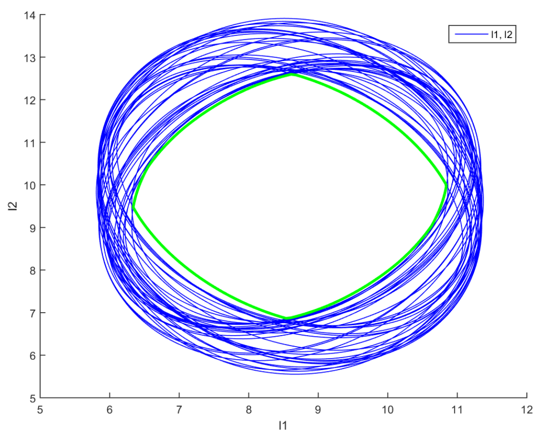


(d) Сравнение с Toolbox(t, l_1, l_2)

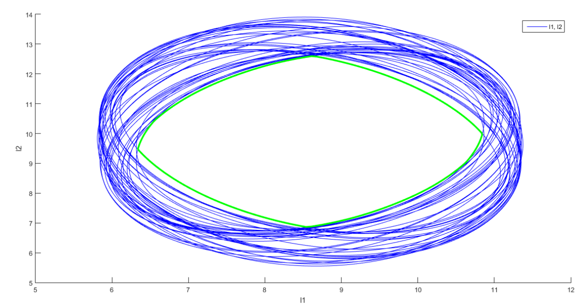
5.2 Пример № 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; p = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix};\ q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

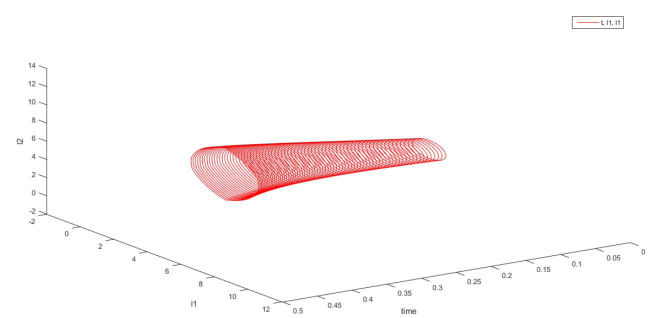
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



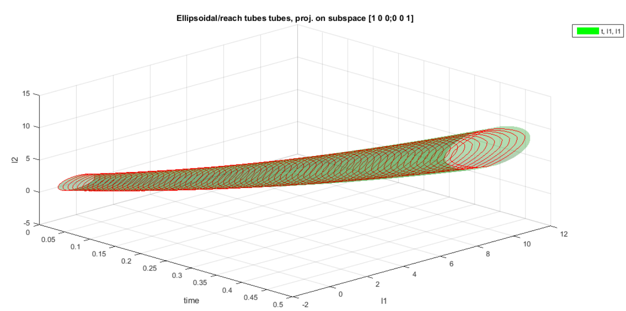
(a) (l_1, l_2)



(b) $(l_1(t), l_2(t))$



(c) $(t, l_1(t), l_2(t))$



(d) Сравнение с Toolbox(t, l_1, l_2)