Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму
«Оптимальное управление»
Задание № 2

Студентка 315 группы
П. Воронкова

Руководитель практикума
П. А. Точилин

Москва, 2016

Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_1 + u_2 x_2, \end{cases} \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, u = (u_1, u_2)' \in \mathbb{R}^2$. На возможные значения управляющих парамеров u_1, u_2 наложены следующие ограничения:

1) либо $u_1 \geqslant 0, u_2 \in [0, k], k > 0$,
2) либо $u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in [0, k], k > 0$,

Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(0)$: $x_1(0) = S, x_2(0) = 0$. Требуется за счет выбора программного управления u и начальной позиции перевести систему из заданной начальной позиции в такую позицию в момент времени T, в которой

$$|x_1(T) - L| \leqslant \varepsilon, |x_2(T)| \leqslant \varepsilon.$$

Неоходимо решить задачу оптимизации:

$$J = \int\limits_0^T u_1^2(t) dt \to \min_{u()} \tag{2}$$

1) Реализовать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным T, k, L, ε определяет, разрешима ли задача оптимального управления, и, если она разрешима, определяет количество и время переключений, а также строит графики компонент оптимального управления, оптимальной траектории, сопряженных переменных. Кроме того, в численном методе программы запрещен явный перебор по векторам сопряженных переменных.

2) В соотвествующем задании отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы. Привести примеры оптимальных траекторий для всех возможных качесвенно различных «режимов».

2 Теоретическое обоснование

2.1 Принцип максимума

Будем считать, что f_0 – подынтегральная часть минимизируемого функционала и введем переменную x_0, решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = f^0(x,t), \\ x_0(0) = 0; \end{cases}$$

В общем случае рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = f^i(x,u), \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Сопряженной называется система

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f^i(x,t)}{\partial x_i}\psi_j, \ i = 0, 1, \ldots, n,$$

где $(\psi_1, \ldots, \psi_n)'$ – решение сопряженной системы (сопряженные переменные).
Функция Гамильтона – Понтрягина:

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \langle \psi, f(x,u) \rangle = \sum_{i=0}^{n} f^i(x,t)\psi_i.$$

Причем

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i},$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}.$$

Теорема (Принцип максимума Понтрягина)
Для оптимальности управления $u^*(t)$ и траектории $x^*(t)$ на отрезке $[0,T]$ необходимо существование такой ненулевой вектор-функции
$\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ с $\psi_0(t) \leqslant 0$, что

$$\mathcal{H}(\psi, x^*, u^*) = \sup_u \mathcal{H}(\psi, x^*, u),$$

$$\sup_u \mathcal{H}(\psi(T), x^*(T), u(T)) = 0$$

почти всюду на $[0, T]$, а также

$$\psi(T) \perp P,$$

где P — множество, в которое должна попасть система.
Для заданной постановки задачи рассмотрим функцию Гамильтона – Понтрягина:

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \psi_0 u_1^2 + \psi_1(x_2 + u_2 + u_1) + \psi_2(u_1 + u_2 x_2).$$

Тогда сопряженная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - u_2\psi_2. \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что решения этой системы обладают свойством положительной однородности, и кроме того, при умножении решения на константу, условия принципа максимума остаются в силе. Так как принцип максимума требует $\psi_0 \leqslant 0$ то можно рассматривать два случая:
$\psi_0 = -1/2$ и $\psi_0 = 0$.
Правые части системы (1) не зависят от x_1, поэтому можно сделать замену $x_1 \to x_1 + S$, тогда вид (1), (3), а так же функции Гамильтона не изменится, а начальные условия станут следующими: $x_1(0) = 0, x_1(T) \in B_\varepsilon(L - S)$. Выпишем решение дифференциальных уравнений x_2 и ψ_2:

$$\psi_2(t) = \psi_2(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} -u_2(\tau)d\tau\Big) - \psi_1 \int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t}^{\tau} u_2(\xi)d\xi\Big)d\tau \tag{4}$$

$$x_2(t) = x_2(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} u_2(\tau)d\tau\Big) + \int_{t_0}^{t} u_1 \exp\Big(\int_{t}^{\tau} -u_2(\xi)d\xi\Big)d\tau \tag{5}$$

3 Решение задачи с неотрицательным $u_1(t)$

3.1 Анормальный случай

Рассмотрим $\psi_0 = 0$.

$\mathcal{H}(\psi, x, u) = u_1(\psi_1 + \psi_2) + u_2(\psi_1 + \psi_2 x_2) + \psi_1 x_2$

Максимизируем гамильтониан (ПМП), в результате максимизации по каждому слагаемому $\mathcal{H}(\psi, x, u)$ получаем:

$$u_1^* = \begin{cases} \infty, \ \psi_1 + \psi_2 > 0, \\ [0, +\infty), \ \psi_1 + \psi_2 = 0, \\ 0, \ \psi_1 + \psi_2 < 0. \end{cases} \quad u_2^* = \begin{cases} k, \ \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ [0, k], \ \psi_1 + \psi_2 x_2 = 0, \\ 0, \ \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0. \end{cases}$$

Причем, $\psi_1 + \psi_2 = 0$ и $\psi_1 + \psi_2 x_2 = 0$ – особые режимы (управление терпит переключения), которые будут рассмотрены ниже.
В случае, когда $u_1 = \infty$ из (5) следует, что $x_2(t)$ уйдет на бесконечность, что противоречит начальному условию задачи для $x_2(T)$.

3.2 Особые режимы анормального случая

1) $\psi_1 + \psi_2 = 0 \ \Rightarrow \ \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 = 0 \ \Rightarrow \ \dot{\psi}_2 = 0$ из (3). Из (3) также следует, что $-\psi_1 - u_2\psi_2 = 0 \ \Rightarrow u_2(t) = 1$. Подставляя найденное $u_2(t)$ в (4), получаем, что:

$$\dot{\psi}_2 = 0, \ \Rightarrow \ \psi_1 = \psi_2(0)$$

Тогда $\psi_1 = \psi_2(0) = 0$, противоречие с ПМП.

2) $\psi_1 + \psi_2 x_2 = 0 \ \Rightarrow \ \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 x_2 + \psi_2 \dot{x}_2 = 0 \ \Rightarrow$ подставляя вместо значений производных правые части из (3), а также учитывая, что производная $\dot{x_2}(t)$ – производная гамильтониана $\Rightarrow \ x_2\psi_1 = \psi_2 u_1$

- Если $\psi_2(t) = 0$, то $\psi_1 = 0$, противоречие с ПМП.

- Если $\psi_2(t) \neq 0 \;\Rightarrow\; u_1 = \frac{x_2\psi_1}{\psi_2} = -x_2^2$. Противоречие с условием неотрицательности u_1.

Таким образом в данном пункте особые режимы невозможны.

3.3 Нормальный случай

В этом случае возьмем $\psi_0(t) = -\frac{1}{2}$. Тогда гамильтониан имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(\psi, x, u) = -\frac{1}{2}u_1^2 + u_1(\psi_1 + \psi_2) + u_2(\psi_1 + \psi_2 x_2) + \psi_1 x_2,\\
&\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = -u_1 + \psi_1 + \psi_2,\\
&\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_1^2} = -1.
\end{aligned}
$$

1) $u_1 = \psi_1 + \psi_2$. (Гамильтониан достигает максимума в точке перегиба). Потребуем неотрицательность $\psi_1 + \psi_2$ в силу начального условия на u_1.
2) Если оказалось, что $\psi_1 + \psi_2 < 0 \Rightarrow u_1 = 0$.
3) u_2 не изменится.

$$
u_1^* = \begin{cases} \psi_1 + \psi_2, \;\; \psi_1 + \psi_2 \geqslant 0, \\ 0, \;\; \psi_1 + \psi_2 < 0. \end{cases} \quad u_2^* = \begin{cases} k, \;\; \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ [0, k], \;\; \psi_1 + \psi_2 x_2 = 0, \\ 0, \;\; \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0. \end{cases}
$$

3.4 Особые режимы нормального случая

Очевидно, что для u_1 особого режима не наступит, а для u_2 особый режим повторяется из п.3.2.

3.5 Переключения для анормального случая

В конечном счете мы имеем:

$$
u_1^* = \begin{cases} 0, \;\; \psi_1 + \psi_2 < 0. \end{cases} \quad u_2^* = \begin{cases} k, \;\; \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ 0, \;\; \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0. \end{cases}
$$

Исследуем на переключение.
1) При $\psi_1 + \psi_2 x_2 < 0$ имеем:

$\psi_1 < -\psi_2$,

$u_1 = u_2 = 0$,

$x_2 = 0$ (из (5)),

$x_1 = 0$ ($\dot{x}_1 = x_2 + u_2 + u_1$, из определения сопряж. системы).

Таким образом объект всегда будет находиться в нуле координат.
2) При $\psi_1 + \psi_2 x_2 > 0$ имеем:

$\psi_1 < -\psi_2$,

$u_1 = 0,\ u_2 = k$,

$x_2 = 0$ (из (5)),

$x_1 = kt$ ($\dot{x}_1 = x_2 + u_2 + u_1$).

$k > 0, t \geqslant 0 \Rightarrow x_1$ - возрастает по прямой kt и в ноль не вернется.

Вывод: при анормальном случае нет переключений – если $\psi_1(t) < 0$ система будет находиться в нуле. При $\psi_1(t) + \psi_2 x_2 > 0$ задача будет разрешима при условии $|x_1(T) - L + S| \leqslant \varepsilon$.

3.6 Переключения для нормального случая

Для нормального случая имеем:

$$u_1^* = \begin{cases} \psi_1 + \psi_2,\ \psi_1 + \psi_2 \geqslant 0, \\ 0,\ \psi_1 + \psi_2 < 0. \end{cases} \qquad u_2^* = \begin{cases} k,\ \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ 0,\ \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что от x_1 система не зависит, поэтому будем наблюдать зависимость $x_2(\psi_2)$.

3.6.1 $\psi_1 > 0, \psi_2(0) > -\psi_1$

Также обратим внимание на то, что изначально мы находимся на оси $0\psi_2$ в силу начального условия $x_2(0) = 0 \Rightarrow$

$$\psi_1 + \psi_2(0)x_2(0) > 0.$$

На начальном этапе $u_2 = k, u_1 = \psi_1 + \psi_2$.

$$\psi_2 = \frac{e^{-kt} * (k\psi_2(0) - \psi_1 e^{kt} + \psi_1)}{k}, \tag{6}$$

$$x_2 = \frac{(-2\psi_1 k + 2\psi_1 k e^{kt} - k\psi_2(0)e^{-kt} + k\psi_2(0)e^{kt} + 2\psi_1 - \psi_1 e^{kt} - \psi_1 e^{-kt})}{2k^2}, \tag{7}$$

а) Время первого переключения (пересечение с прямой) находится из равенства

$$\psi_2(t_1^*) = -\psi_1,$$

с проверкой $0 < x_2(t_1^*) < 1$.
б) Время первого переключения (пересечение с гиперболой) находится из равенства

$$\psi_2(t_1^{**}) = -\frac{\psi_1}{x_2(t_1^{**})},$$

с проверкой $1 \leqslant x_2 < \varepsilon$.

а) Время второго переключения (пересечение с гиперболой) t_2^*.
При $u_1 = 0,\ u_2 = k, \psi_2(t_1^*) = -\psi_1$ получаем

$$\psi_2(t) = \frac{e^{-kt} * (k\psi_2(0) - \psi_1 e^{kt} + \psi_1)}{k}, \tag{8}$$

$$x_2(t) = x_2(t_1^*)e^{k(t-t_1^*)} \tag{9}$$

Тогда

$$\psi_2(t_2^*) = -\frac{\psi_1}{x_2(t_2^*)}, \tag{10}$$

с проверкой $0 < x_2(t_2^*) < 1$.
б) Время второго переключения (пересечение с прямой) t_2^{**}.
При $u_1 = \psi_1 + \psi_2,\ u_2 = 0,\ \psi_2(t_1^{**}) = -\frac{\psi_1}{x_2(t_1^{**})}$, (пред. пункт б)) получаем

$$\psi_2(t) = \psi_2(t_1^{**}) - \psi_1(t - t_1^{**}) \tag{11}$$

$$x_2(t) = x_2(t_1^{**}) + (t - t_1^{**})(\psi_1 + \psi_2(t_1^{**}) + \psi_1 t_1^{**}) - \psi_1(t^2 - (t_1^{**})^2)/2. \tag{12}$$

Тогда

$$\psi_2(t_2^{**}) = -\psi_1, \tag{13}$$

с проверкой $1 \leqslant x(t_2^{**}) < \varepsilon$.
в) Далее мы находимся в области $u_1 = u_2 = 0$.Тогда

$$\psi_2(t) = \psi_2(t_2) - \psi_1(t - t_2) \tag{14}$$

$$x_2(t) = x_2(t_2) \tag{15}$$

3.6.2 $\psi_1 > 0, \psi_2(0) < -\psi_1$

Либо ψ_2 уходит к минус бесконечности, $x_2 = 0$ и таким образом переключений не будет, либо $x_2 = 0$, а ψ_2 возрастает до $-\psi_1$. Время переключения (пересечение с прямой):

$$\psi_2(t_1^*) = \frac{e^{-kt_1^*} * (k\psi_2(0) - \psi_1 e^{kt_1^*} + \psi_1)}{k} = -\psi_1, \tag{16}$$

с проверкой $1 \leqslant x(t_1^*) < \varepsilon$.
Далее переключение, если и будет, то при пересечении с гиперболой.

$$\psi_2(t) = \frac{e^{-kt}(\psi_2(t_1^*) * e^{kt_1^*} k - \psi_1 e^{kt} + \psi_1 * e^{kt_1^*})}{k} \tag{17}$$

$$x_2 = \int_{t_1^*}^{t} (\psi_1 + \psi_2(\tau)) e^{-k(\tau - t)} d\tau \tag{18}$$

$$\psi_2(t_2^*) = -\frac{\psi_1}{x_2(t_2^*)},$$

с проверкой $1 \leqslant x_2(t_2^*) < \varepsilon$.
Третье переключение возможно при достижении прямой, вычисляется по аналогии с предыдущими пунктами.

3.6.3 $\psi_1 > 0, \psi_2(0) = -\psi_1$

Очевидно, что это – частный случай предыдущего. Только время первого переключения – нулевое.

3.6.4 $\psi_1 < 0, \psi_2(0) < -\psi_1$

Изначально мы на оси $0\psi_2$ до тех пор, пока не пересечем $-\psi_1$

$$x_2 = 0, \tag{19}$$

$$\psi_2 = \psi_2(0) - \psi_1 t, \tag{20}$$

$$t_1^* = \frac{\psi_1 + \psi_2(0)}{\psi_1}. \tag{21}$$

Далее

$$x_2(t) = (\psi_1 + \psi_2(0))(t - t_1^*) - 0.5\psi_1(t^2 - (t_1^*)^2), \tag{22}$$

$$\psi_2 = \psi_2(t_1^*) - \psi_1(t - t_1^*), \tag{23}$$

Причем $0 < x_2 < 1$.
Переключение возможно при достижении гиперболы:

$$\psi_2(t_2^*)x_2(t_2^*) + \psi_1 = 0. \tag{24}$$

ψ_2, x_2 вычисляются по начальным формулам, $t_0 = t_2^*$.

3.6.5 $\psi_1 < 0,\ \psi_2(0) \geqslant -\psi_1$

$$\psi_2 = \psi_2(0) - \psi_1 t, \tag{25}$$

$$x_2 = \psi_1 t + \psi_2(0)t - 0.5\psi_1 t^2. \tag{26}$$

Причем $0 < x_2 < 1$.
Переключение будет при пересечении гиперболы

$$\psi_1 + \psi_2(t_1^*)x_2(t_1^*) = 0$$

ψ_2, x_2 вычисляются по начальным формулам, $t_0 = t_1^*$.

3.6.6 $\psi_1 = 0$

- Если $\psi_2(0) > 0$, то $u_1 = \psi_2 > 0$, ψ_2 убывает, а x_2возрастает и не остается в особом режиме.

$$u_1 = \psi_2,\ u_2 = k, \tag{27}$$

$$\psi_2 = \psi_2(0)e^{-kt}, \tag{28}$$

$$x_2 = \frac{-\psi_2(0)e^{kt}(e^{-2kt} - 1)}{2k} \tag{29}$$

- Если $\psi_2(0) < 0$, то $x_2 < 0$,

$$u_1 = 0,\ u_2 = k, x_2 = 0. \tag{30}$$

  Мы будем находтиься в особом режиме, этот случай нас не устраивает.

- Если $\psi_2(0) = 0$, то это одна точка – этот случай также неинтересен.

4 Решение задачи с произвольным u_1

4.1 Анормальный случай

Рассмотрим $\psi_0 = 0$.

$\mathcal{H}(\psi, x, u) = u_1(\psi_1 + \psi_2) + u_2(\psi_1 + \psi_2 x_2) + \psi_1 x_2$

Максимизируем гамильтониан (ПМП), в результате максимизации по каждому слагаемому $\mathcal{H}(\psi, x, u)$ получаем:

$$u_1^* = \begin{cases} \infty,\ \psi_1 + \psi_2 > 0, \\ (-\infty, +\infty),\ \psi_1 + \psi_2 = 0, \\ -\infty,\ \psi_1 + \psi_2 < 0. \end{cases} \quad u_2^* = \begin{cases} k,\ \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ [0, k],\ \psi_1 + \psi_2 x_2 = 0, \\ 0,\ \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0. \end{cases}$$

Отбросив бесконечности в u_1 по аналогии с неотрицательным u_1, рассмотрим особый режим:

$$\psi_2 = -\psi_1 \ \Rightarrow\ \dot{\psi}_2 = 0,\ -\psi_1 - \psi_2 u_2 = 0,\ \Rightarrow u_2 = 1\ (\psi_1 = 1?!)$$

Из (4) выразив ψ_2 и приравняв к ψ_1 получаем, что

$$\psi_1 = \frac{\psi_2(0)e^{-t}}{-2+e^{t}},\ \dot{\psi}_2 = 0\ \Rightarrow\ e^{-t} = 1\ ||\ \psi_2(0) = 0.$$

Если этот режим был в течении ненулевого времени, то получаем противоречие с ПМП. Т.о. анормальным случаем можно пренебречь.

4.2 Нормальный случай

$$u_1^* = \psi_1 + \psi_2, u_2^* = \begin{cases} k,\ \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ [0,k],\ \psi_1 + \psi_2 x_2 = 0, \\ 0,\ \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0. \end{cases}$$

4.3 Особый режим нормального случая

Рассматривается по аналогии с $u_1 \geqslant 0$.

$$\psi_1^2 - \psi_1\psi_2^3 + \psi_2^2 = 0 \tag{31}$$

Дифференцируя это выражение, получаем, что $\psi_1 = \mathrm{const} \Rightarrow x_2 = \mathrm{const}$. Но такой вариант неподвижности нас не устраивает, поэтому особым режимом можно пренебречь.

4.4 Переключения нормального случая

$$u_1^* = \psi_1 + \psi_2,\ u_2^* = \begin{cases} k,\ \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ 0,\ \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0. \end{cases}$$

4.4.1 $\psi_1 = 0$

- Если $\psi_2(0) > 0$, то $u_1 = \psi_2 > 0,\ \psi_2$ убывает, а x_2возрастает и не остается в особом режиме.

$$u_1 = \psi_2,\ u_2 = k, \tag{32}$$

$$\psi_2 = \psi_2(0)e^{-kt}, \tag{33}$$

$$x_2 = \frac{-\psi_2(0)e^{kt}(e^{-2kt}-1)}{2k} \tag{34}$$

- Если $\psi_2(0) < 0$,

  $$x_2 < 0, \psi_2 < 0 \ \Rightarrow u_2 = k, \tag{35}$$

  и этот случай аналогичен предыдущему.

- Если $\psi_2(0) = 0$, то это одна точка – этот случай также неинтересен.

4.4.2 $\psi_1 > 0$

$$u_1 = \psi_1 + \psi_2, \ u_2 = k. \tag{36}$$

ψ_2, x_2 вычисляются по формулам (4), (5). Возможное переключение при $\psi_1 + \psi_2(t_1^*)x_2(t_1^*) = 0$. Далее $u_2 = k$.

4.4.3 $\psi_1 < 0$

$$u_1 = \psi_1 + \psi_2, \ u_2 = 0. \tag{37}$$

ψ_2, x_2 вычисляются по формулам (4), (5). Возможное переключение при $\psi_1 + \psi_2(t_1^*)x_2(t_1^*) = 0$. Далее $u_2 = 0$.

5 Примеры работы программы

- Анормальный режим.
  $\psi_0 = 0, T = 0.5; e = 0.1; k = 10; L = 5; S = 2;$

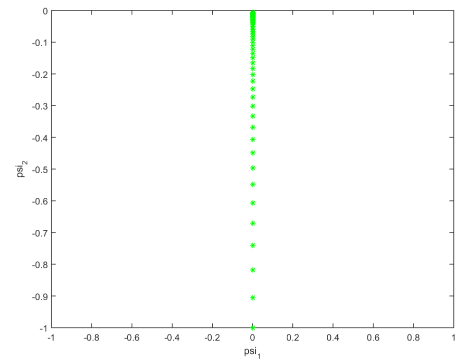

Рис. 1: $\psi_1 = 0$ в силу условий трансверсальности

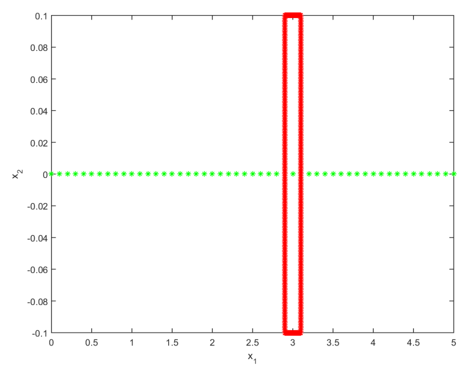

Рис. 2: Красным помечено множество достижимости. Видно, что за время T, траектория пролетает наше множество