Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму
«Оптимальное управление»
Задание № 1

Студентка 315 группы
П. Воронкова

Руководитель практикума
П. А. Точилин

Москва, 2016

Содержание

1 Постановка задачи

Задана система ОДУ вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ t \in [t_0, +\infty).$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^2, A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}, u \in \mathbb{R}^2$. На множество управляющих параметров наложено ограничение: $u \in P$. Пусть $\mathcal{X}_0$ — начальное моժество значений фазового вектора, $\mathcal{X}_1$ — целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$.

$$\begin{aligned} P\ &— \text{(прямоугольник со сторонами } a, b \geqslant 0\text{, с центром в точке } p\text{)} \\ &+ \text{(шар радиуса 1 с центром в нуле)}, \\ \mathcal{X}_0\ &— \text{шар радиуса } r_0\text{, с центром в точке } x_0, \\ \mathcal{X}_1 &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \beta(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 \leqslant 1\right\}. \end{aligned}$$

1) Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам A, B, t_0, r_0, a, b, p, x_0, β, α_1, α_2 определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приближенно) найти значение T, построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условия трансверсальности для найденной «оптимальной» траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближенных результатов.

2) В соотвествующем задании отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различныхсобственных значений матрицы A). Необходимо также исследовать на непрерывность величину T по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

2 Теоретическое обоснование

2.1 Вычисление опорных функций

1) Вычислим опорную функцию для множества $\mathcal{X}_0 = B_{r_0}(x_0)$:

$$c(l, \mathcal{X}_0) = \sup_{\varphi \in \mathcal{X}_0} \langle l, \varphi \rangle = \langle l, x_0 \rangle + r_0 \|l\|;$$

2) Опорная функция для множества $\mathcal{X}_1$:

$$c(l, \mathcal{X}_1) = \sup_{\varphi \in \mathcal{X}_1} \langle l, \varphi \rangle = \sup_{(x,y) \in \mathcal{X}_1} (l_1 x + l_2 y),$$

Сделаем замену переменных $x' = x - \alpha_1,\ y' = y - \alpha_2$. Тогда

$$c(l, \mathcal{X}_1) = \sup_{\beta x'^2 + y'^2 \leqslant 1} (l_1 x' + l_2 y').$$

Если $\beta = 0$, то найдется такой вектор l, что опорная функция не существует. Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$L = l_1 x' + l_2 y' + \lambda(\beta x'^2 + y'^2 - 1);$$

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = l_1 + 2\lambda\beta x' = 0 \Rightarrow x' = \frac{(-l_1)}{2\lambda\beta};$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = l_2 + 2\lambda y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{(-l_2)}{2\lambda}.$$

Подставим получившиеся значения в $\beta x'^2 + y'^2 - 1 = 0$ и выражаем λ:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{l_1^2 + \beta l_2^2}{4\beta}};$$

Возьмем отрицательное λ (достигается наибольшее значение функции)

$$\Rightarrow x' = \frac{l_1}{\sqrt{\beta(l_1^2 + \beta l_2^2)}},\ y' = \frac{l_2\sqrt{\beta}}{\sqrt{l_1^2 + \beta l_2^2}};$$

$$\Rightarrow x = \frac{l_1}{\sqrt{\beta(l_1^2 + \beta l_2^2)}} + \alpha_1,\ y = \frac{l_2\sqrt{\beta}}{\sqrt{l_1^2 + \beta l_2^2}} + \alpha_2;$$

$$\Rightarrow c\left(l, \mathcal{X}_1\right) \;=\; l_1\left(\frac{l_1}{\sqrt{\beta\left(l_1^2+\beta l_2^2\right)}}+\alpha_1\right)+l_2\left(\frac{l_2\sqrt{\beta}}{\sqrt{l_1^2+\beta l_2^2}}+\alpha_2\right).$$

3) Перед тем как искать опорные функции для множества управляемости P заметим, что оно не строго выпукло, и на соответствующих отрезках управление будет определяться неоднозначно. Эту проблему можно решить аппроксимацией P строго выпуклым множеством. Рассмотрим $\prod_{ab}$ с центром, перенесенным в т.$(0,0)$. Будем аппроксимировать его двумя эллипсами с центрами в начале координат, каждый из которых приближает две соответствующие параллельные стороны прямоугольника с некоторой наперед заданной точностью (ε). Следует заметить, что эти эллипсы будут пересекаться в четырех точках — вершинах прямоугольника.

a) Получим уравнение эллипса, аппроксимирующего стороны длины a: $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1$, где c, d — большая и малая полуоси соответственно

$$\frac{x^2}{\left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)^2}+\frac{y^2}{d^2}=1 \Rightarrow \;\frac{\frac{b}{2}^2}{\left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)^2}+\frac{\frac{a}{2}^2}{d^2}=1, \Rightarrow\; d=\frac{\frac{a}{2}\left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)^2-\frac{b}{2}^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\frac{a}{2}\left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)}{\sqrt{(\varepsilon^2+b\varepsilon)}}\right)^2}=1;$$

b) Получим уравнение эллипса, аппроксимирующего стороны длины b: $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1$, где c, d — большая и малая полуоси соответственно

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)^2}=1 \;\Rightarrow \frac{\frac{b}{2}^2}{c^2}+\frac{a^2}{\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)^2}=1 \;\Rightarrow c=\frac{\frac{b}{2}\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+a\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\frac{b}{2}\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)}{\sqrt{(\varepsilon^2+a\varepsilon)}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)^2}=1;$$

Пусть M – множество, полученное путем данной аппроксимации. В дальнейшем вместо $P=\prod_{ab}+B_1(0)$ будем рассматривать $P=M+B_1(0)$. Теперь вычислим его опорную функцию.Так как опорная функция суммы равна сумме опорных функций (по свойствам опорных функций), то:

$$c(l,P)=c(l,M+B_1(0))=c(l,M)+c(l,B_1(0)),$$
$$c(l,B_1(0))=\|l\|.$$

Найдем опорную функцию эллипса $A_1(A_2)$, аппроксмирующего стороны длины $a(b)$.
$A_1=AB_1(0)$, где A —диагональная матрица с элементами $\frac{b}{2}+\varepsilon$ и $\frac{\frac{a}{2}(\frac{b}{2}+\varepsilon)}{\sqrt{(\varepsilon^2+b\varepsilon)}}$ на главной диагонали.
$c(l,A_1)=c(l,AB_1(0))=\{A=A^*\}=c(Al,B_1(0))=\|Al\|\Rightarrow$

$$c(l,A_1)=\left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)\sqrt{l_1^2+\frac{l_2^2}{\frac{4}{a^2}\left(\varepsilon^2+\varepsilon b\right)}};$$

$$x_1=\left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+\frac{l_2^2}{\frac{4}{a^2}(\varepsilon^2+\varepsilon b)}}},\ y_1=\left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)\frac{l_2}{\frac{4}{a^2}\left(\varepsilon^2+\varepsilon b\right)\sqrt{l_1^2+\frac{l_2^2}{\frac{4}{a^2}(\varepsilon^2+\varepsilon b)}}};$$

$$c(l,A_2)=\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)\sqrt{l_2^2+\frac{l_1^2}{\frac{4}{b^2}\left(\varepsilon^2+\varepsilon a\right)}};$$

$$x_2=\frac{\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)l_1}{\left(\frac{4}{b^2}\left(\varepsilon^2+\varepsilon a\right)\right)\sqrt{l_2^2+\frac{l_1^2}{\frac{4}{b^2}(\varepsilon^2+\varepsilon a)}}},\ y_2=\frac{\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)l_2}{\sqrt{l_2^2+\frac{l_1^2}{\frac{4}{b^2}(\varepsilon^2+\varepsilon a)}}};$$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ — координаты соответствующих опорных векторов.

Если направление вектора l совпадает с направлением нормали к одному из эллипсов, то берем опорную функцию соответствующего эллипса. Следует заметить, что точкам пересечения эллипсов $\left[\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right),\left(-\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right),\left(\frac{b}{2},-\frac{a}{2}\right),\left(-\frac{b}{2},-\frac{a}{2}\right)\right]$ будут соответствовать целые пучки векторов.
Рассмотрим первую четверть. Установим соответствия между углами, которые образуются между нормалями к эллипсам и осью абсцисс, и опорными функциями.
Запишем уравнение касательной в точке $(x_0,y_0)=(\frac{b}{2},\frac{a}{2}):$

$$y-y_0=(x-x_0)\frac{dy}{dx}(x_0,y_0).$$

Взяв дифференциал от канонического уравнения первого эллипса, получим:

$$\frac{1}{(\frac{b}{2}+\varepsilon)^2}2xdx+\frac{1}{\left(\frac{\frac{a}{2}(\frac{b}{2}+\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2+b\varepsilon}}\right)^2}2ydy=0 \implies \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\left(\frac{a^2}{4}(\varepsilon^2+b\varepsilon)\right) \implies$$
$$\implies \frac{dy}{dx}(x_0,y_0)=-\frac{ab}{4(\varepsilon^2+b\varepsilon)} \implies \{\text{подставляем в уравнение касательной}\}$$
$$\implies y-\frac{a}{2}=-\frac{ab}{4(\varepsilon^2+b\varepsilon)}\left(x-\frac{b}{2}\right) \implies y+\frac{ab}{4(\varepsilon^2+b\varepsilon)}x=\frac{a}{2}+\frac{ab^2}{8(\varepsilon^2+b\varepsilon)}$$
$$\implies \vec{n}=\left\{\frac{ab}{4(\varepsilon^2+b\varepsilon)},1\right\}.$$

Таким образом, для первого эллипса угол между нормалью в точке $\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$ и осью абсцисс будет равен $\arctan\frac{4(\varepsilon^2+b\varepsilon)}{ab}$. Взяв дифференциал от канонического уравнения второго эллипса, получим:

$$\frac{1}{\left(\frac{\frac{b}{2}(\frac{a}{2}+\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2+a\varepsilon}}\right)^2}2xdx+\frac{1}{(\frac{a}{2}+\varepsilon)^2}2ydy=0 \implies \frac{dy}{dx}(x_0,y_0)=-\frac{4(\varepsilon^2+a\varepsilon)}{ab} \implies$$
$$\{\text{подставим в уравнение касательной}\} \implies y-\frac{a}{2}=-\frac{4(\varepsilon^2+a\varepsilon)}{ab}\left(x-\frac{b}{2}\right) \tag{1}$$
$$\implies \implies y+\frac{4(\varepsilon^2+a\varepsilon)}{ab}x=\frac{a}{2}+\frac{2(\varepsilon^2+a\varepsilon)}{a} \implies \vec{n}=\left\{\frac{4(\varepsilon^2+a\varepsilon)}{ab},1\right\}.$$

Для второго эллипса угол между нормалью в точке $\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$ и осью абсцисс равен $\arctan\frac{ab}{4(\varepsilon^2+a\varepsilon)}$.

Учитывая выведенные соотношения и то, что $\tan\phi=\left|\frac{l_2}{l_1}\right|$, получаем формулу для всех четвертей:

$$c(M,l)=\left\{\begin{array}{ll} \left(\frac{b}{2}+\varepsilon\right)\sqrt{l_1^2+\frac{l_2^2}{\frac{4}{a^2}(\varepsilon^2+b\varepsilon)}}, & \frac{|l_2|}{|l_1|}<\frac{4(\varepsilon^2+b\varepsilon)}{ab}, \\ \\ (\frac{a}{2}+\varepsilon)\sqrt{\frac{l_1^2}{\frac{4}{b^2}(\varepsilon^2+a\varepsilon)}+l_2^2}, & \frac{|l_2|}{|l_1|}>\frac{ab}{4(\varepsilon^2+b\varepsilon)}, \\ \\ \frac{b}{2}|l_1|+\frac{a}{2}|l_2|, & \text{иначе.} \end{array}\right\}$$

Найдем $c(B_1(0), l)$.

$$c(B_1(0), l) = \left\langle \frac{l}{||l||}, l \right\rangle = ||l||.$$

Учитывая, что при аппроксимации эллипсами мы рассматривали $\prod_{ab}$ в начале координат и $p = (p_x, p_y)$, получаем:

$$c(M, \psi) = \begin{cases} \left(\frac{b}{2} + \varepsilon\right) \sqrt{\psi_1^2 + \frac{\psi_2^2}{\frac{4}{a^2}(\varepsilon^2 + b\varepsilon)}}, & \frac{|\psi_2|}{|\psi_1|} < \frac{4(\varepsilon^2 + b\varepsilon)}{ab}, \\ \left(\frac{a}{2} + \varepsilon\right) \sqrt{\frac{\psi_1^2}{\frac{4}{b^2}(\varepsilon^2 + a\varepsilon)} + \psi_2^2}, & \frac{|\psi_2|}{|\psi_1|} > \frac{ab}{4(\varepsilon^2 + b\varepsilon)}, \\ \frac{b}{2}|\psi_1| + \frac{a}{2}|\psi_2|, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2.2 Принцип максимума Понтрягина

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина). *Пусть на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$ задано некоторое допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующее решение $x(t)$ уравнения $\dot{x} = A(t)x + Bu + f$ переводит объект из начального множества $\mathcal{X}_0$ на конечное множество $\mathcal{X}_1$ на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, т.е. удовлетворяет конечным условиям $x(t_0) \in \mathcal{X}_0$, $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$. Будем говорить, что пара $u(t), x(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, если существует такое нетривиальное решение $l(t)$ вспомогательной системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{l} = -A^* l, \tag{2}$$

что выполнены следующие условия:

1. *условие максимума*

$$\langle Bu(t), l(t) \rangle = c(BP, l(t)) \tag{3}$$

   для почти всех $t \in I$;

2. *условие трансверсальности на множестве $\mathcal{X}_0$*

$$\langle x(t_0), l(t_0) \rangle = c(\mathcal{X}_0, l(t_0)); \tag{4}$$

3. условие трансверсальности на множестве $\mathcal{X}_1$

$$\langle x(t_1), -l(t_1)\rangle = c(\mathcal{X}_1, -l(t_1)). \tag{5}$$

Утверждение 1. *Пусть множество $\mathcal{X}_0$ строго выпукло и множество P также строго выпукло для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Тогда для любого начального значения $l(t_0) \in S$ соответствующая пара $u(t), x(t)$, удовлетворяющая принципу максимума, является единственной.*

3 Алгоритм работы программы

1) Очевидно, что если $l(0)$ — решение системы (1) — (4), то и $kl(0)$ — тоже решение, поэтому для простоты пронормируем вектор $l(0)$.

2) Перебирая значения $l(0)$ в полярных координатах, решаем (1) — сопряженную систему, при помощи $ode45$. Шаг перебора задается пользователем в *step*. Максимальное время работы $ode45$ также задается пользователем (t_{max}).

3) Из условия (2) ПМП находим управление, как опорный вектор множества P.
$c(Bu, l) = c(u, B'l) = c(P, B'l) = c(P, l_1)$, Стоит учесть, что мы берем сумму опорного вектора единичного шара с соответствующим опорным вектором первого эллипса, или второго эллипса (которые участвуют в аппроксимации), или вектором, направленным из центра аппроксимируемого прямоугольника к соответствующей его вершине. Если какая-либо координата l равна нулю, то берем соответствующий опорный вектор на главной или мнимой полуоси.

4) Далее решаем систему $x^* = Ax + Bu$ с начальным условием из пункта (3). Используется $ode45$ и механизм «events function», который останавливает $ode45$ при достижении множества $\mathcal{X}_1$.

5) Все траектории, пересекающие $\mathcal{X}_1$, проверяются на оптимальность. Если не нашлось ни одной траектории, пересекающей $\mathcal{X}_1$ за время t_{max}, то задача быстродействия неразрешима.

4 Примеры

Для улучшения точности результата пользователю предлагается изменять шаг разбиения сетки, погрешность аппроксимации прямоугольника эллипсами, погрешность приближения к множеству $\mathcal{X}_1$ и опции $ode45$. Зеленым цветом обозначены траектории, достигающие $\mathcal{X}_1$, красным — оптимальная траектория, желтым — всевозможные траектории и множество $\mathcal{X}_0$, синим — $\mathcal{X}_1$.

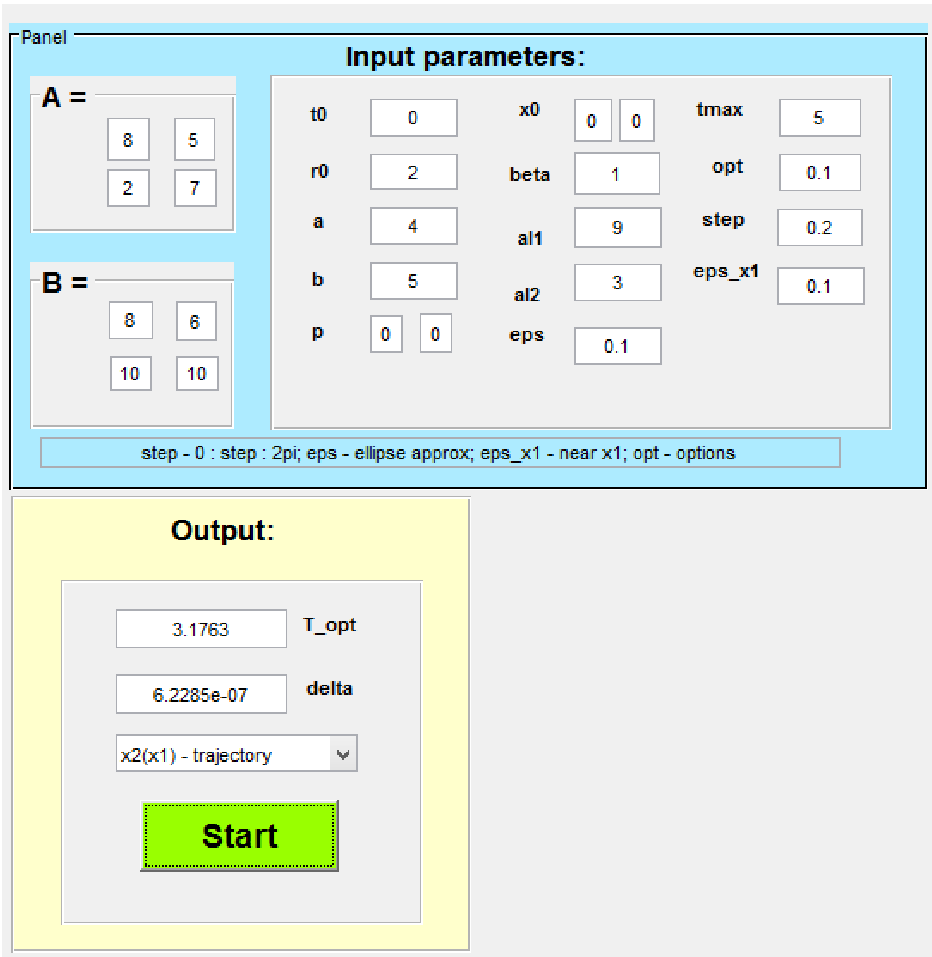

Рис. 1: Начальные параметры

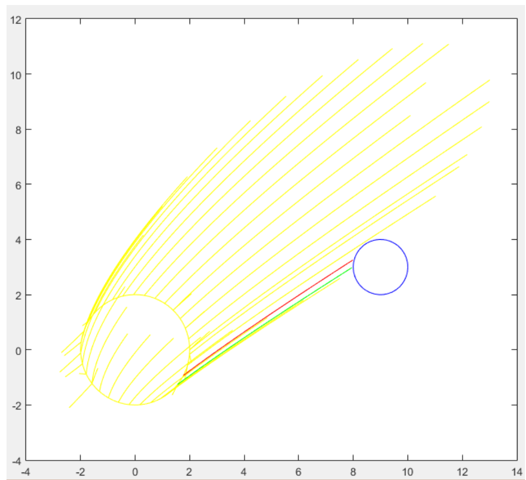

Рис. 2: $x_1(x_2)$

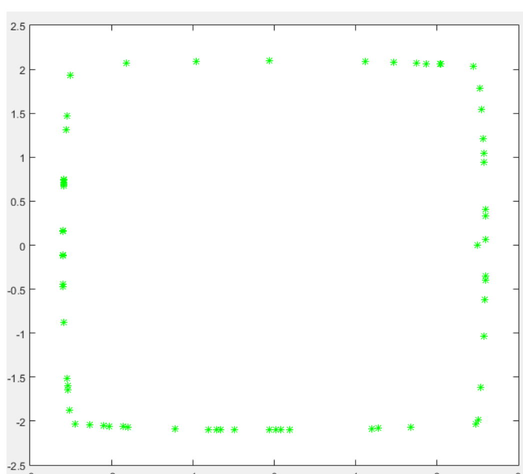

Рис. 3: $u_2(u_1)$

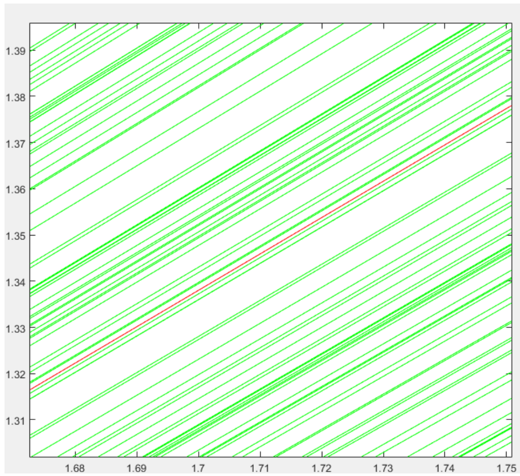

Рис. 4: $u_1(t)$

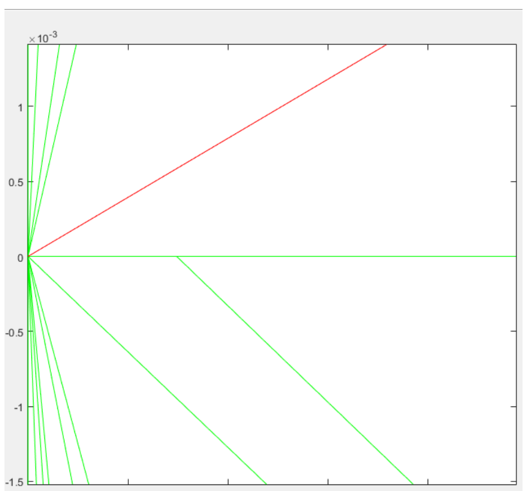

Рис. 5: $u_2(t)$

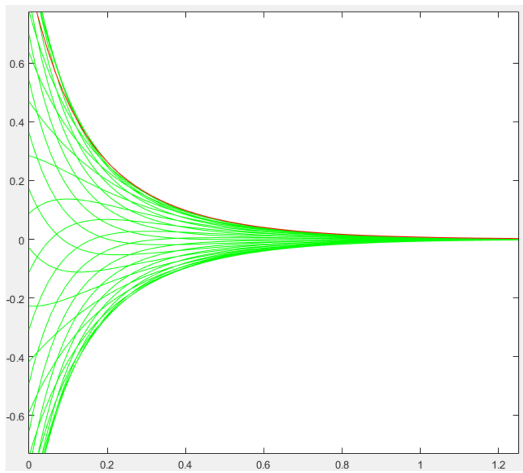

Рис. 6: $\psi_1(t)$

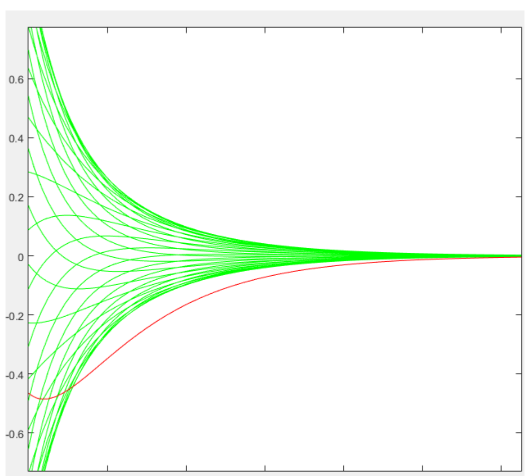

Рис. 7: $\psi_2(t)$

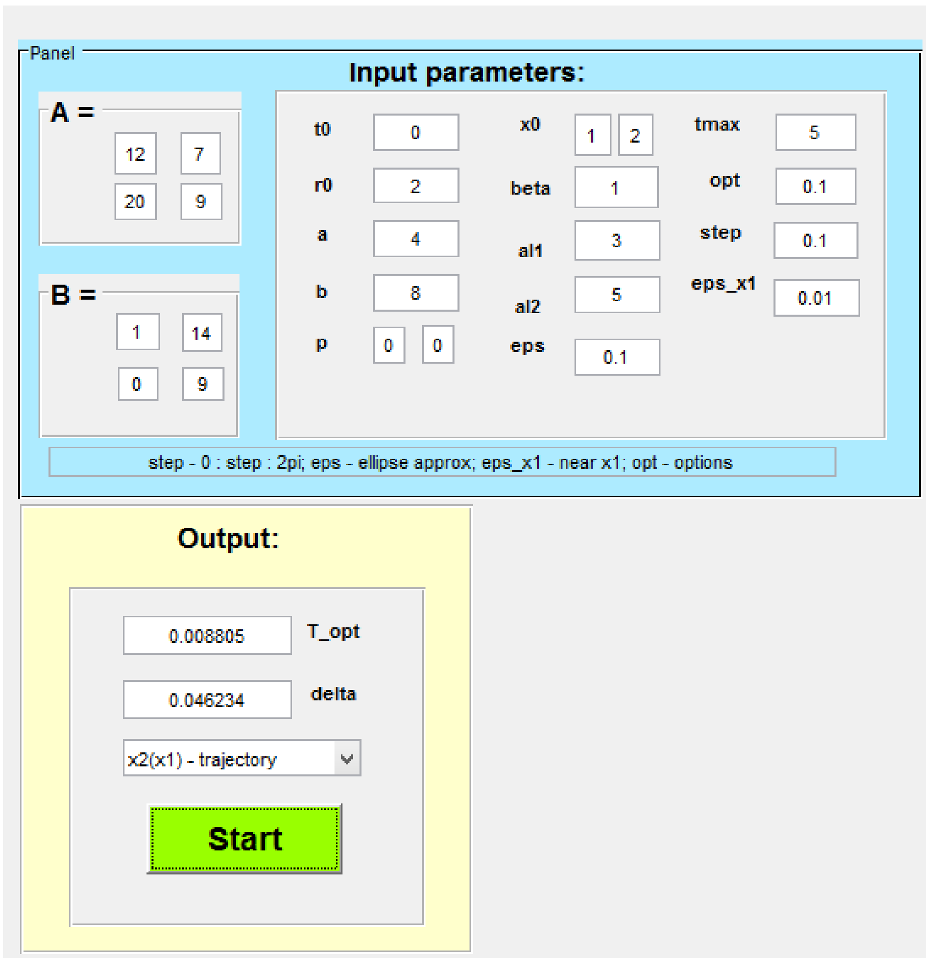

Рис. 8: Начальные параметры

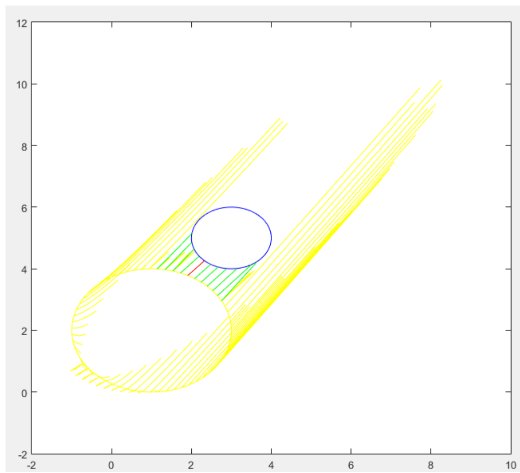

Рис. 9: $x_1(x_2)$

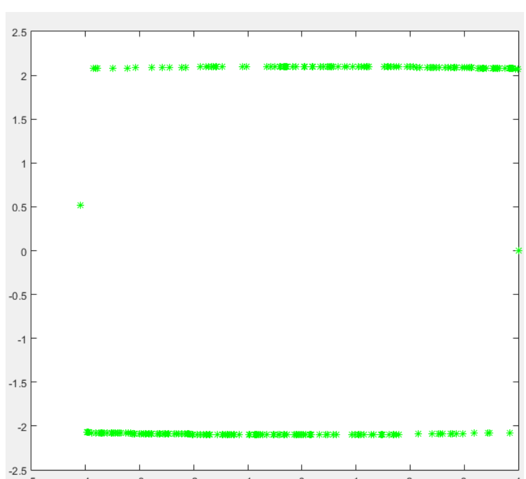

Рис. 10: $u_2(u_1)$

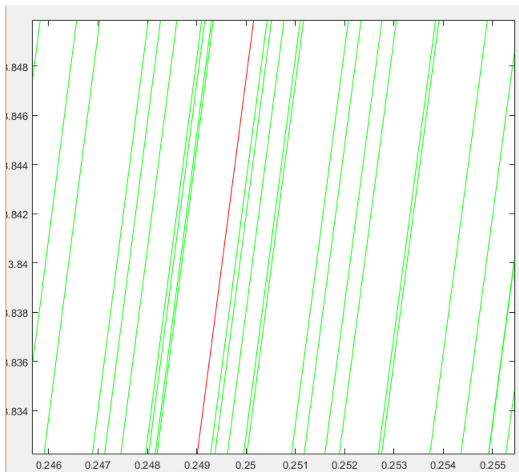

Рис. 11: $u_1(t)$

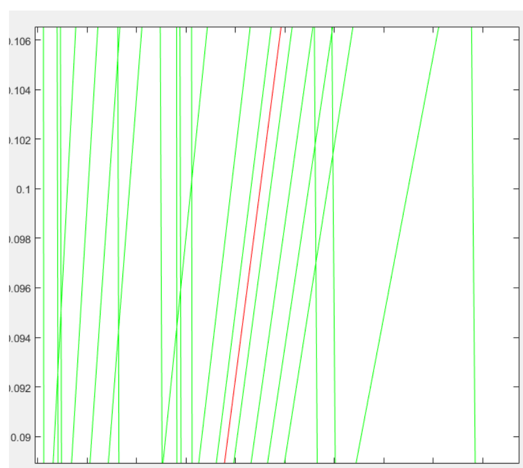

Рис. 12: $u_2(t)$

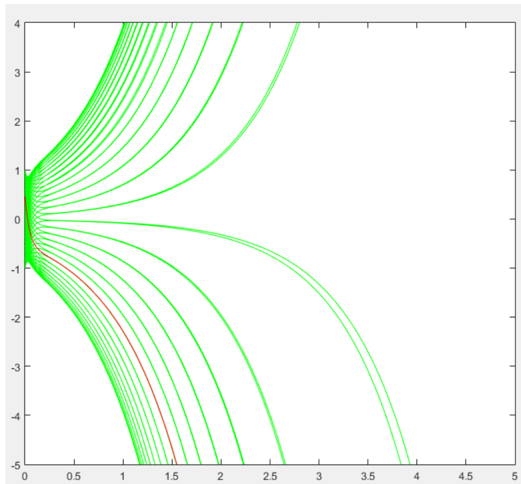

Рис. 13: $\psi_1(t)$

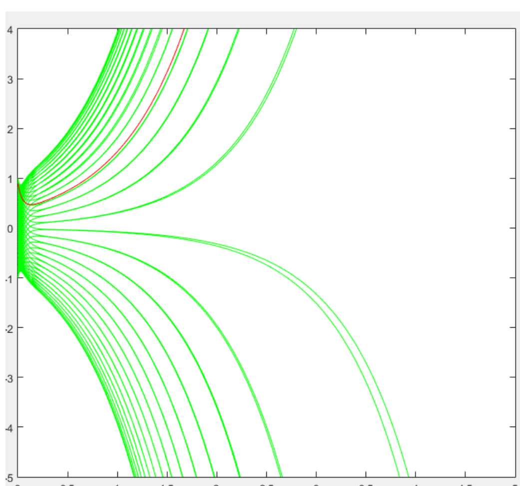

Рис. 14: $\psi_2(t)$