

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

## Стабилизация механической колебательной системы

**Руководитель практикума:**

к.ф.-м.н., доцент

Точилин П. А.

**Выполнила:**

студентка 515 группы

Воронкова П.С.

Москва, 2018

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Вывод уравнений Лагранжа</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Неустойчивость нулевого положения равновесия</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Построение стабилизатора для линеаризованной системы</b>	<b>6</b>
4.1	Линейный стабилизатор по полной обратной связи . . . . .	6
4.2	Линейный стабилизатор по динамической обратной связи . . . . .	9
4.3	Линейный стабилизатор решающий линейно-квадратичную задачу оптимальной стабилизации . . . . .	10

# 1 Постановка задачи

Рассматривается математическая модель двойного перевернутого маятника, установленного на подвижной тележке. На концах маятников с длинами стержней  $L_1$ ,  $L_2$  располагаются грузики малых размеров массы  $m_1$ ,  $m_2$  соответственно. Тележка массой  $M$  совершает движения по горизонтали. На тележку действует сила вязкостного трения о воздух с коэффициентом  $k$ . К ней так же может быть приложена сила  $u$ , позволяющая двигаться вправо или влево.

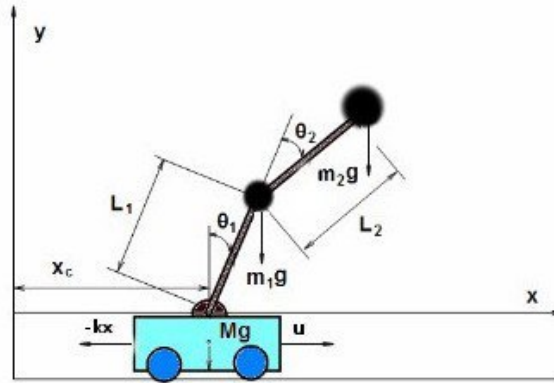


Рис. 1: Схема механической системы

## 2 Вывод уравнений Лагранжа

Введем декартову систему координат. В качестве обобщенных координат выберем угол отклонения первого маятника от вертикальной оси  $\theta_1$ , угол отклонения второго маятника относительно стержня первого маятника  $\theta_2$  и смещение тележки вдоль горизонтальной оси  $x$ . Выпишем уравнения Лагранжа, описывающие движение механической системы:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -k\dot{x} + u, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0. \end{cases}$$

Здесь  $L = E_k - E_p$  – Лагранжиан системы.

Координаты первого грузика:

$$x_1 = L_1 \sin(\theta_1(t)) + x(t);$$

$$y_1 = L_1 \cos(\theta_1(t));$$

Координаты второго:

$$x_2 = x_1 + L_2 \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t));$$

$$y_2 = y_1 + L_2 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t));$$

Формулы для энергий:

$$E_k = m_1 \frac{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{y}_1(t)^2}{2} + m_2 \frac{\dot{x}_2(t)^2 + \dot{y}_2(t)^2}{2} + M \frac{\dot{x}(t)^2}{2};$$

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2.$$

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1 \ddot{x} + h_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + h_3 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) - h_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) - h_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = -k\dot{x} + u, \\ h_2 \ddot{x} \cos(\theta_1) + h_4 \ddot{\theta}_1 + h_5 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_2) - h_5 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_2) - h_6 \sin(\theta_1) = 0, \\ h_3 \ddot{x} \cos(\theta_1 + \theta_2) + h_7 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + h_5 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + h_5 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) - h_8 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0, \end{cases}$$

где:

$$h_1 = M + m_1 + m_2; \quad h_2 = m_1 L_1 + m_2 L_1;$$

$$h_3 = m_2 L_2; \quad h_4 = m_1 L_1^2 + m_2 L_1^2;$$

$$h_5 = m_2 L_2 L_1; \quad h_6 = m_1 L_1 g + m_2 L_1 g;$$

$$h_7 = m_2 L_2^2; \quad h_8 = m_2 L_2 g;$$

Приведение к нормальной форме осуществляется в среде Matlab и будет опущено из-за громоздкости. Схема движения нелинейной механической системы без управления будет иметь следующий вид:

(Loading outfile.mp4)

Рис. 2: Схематическое представление движения механической системы. Для отображения требуется открыть PDF-файл не в Интернет-браузере и нажать на изображение выше.

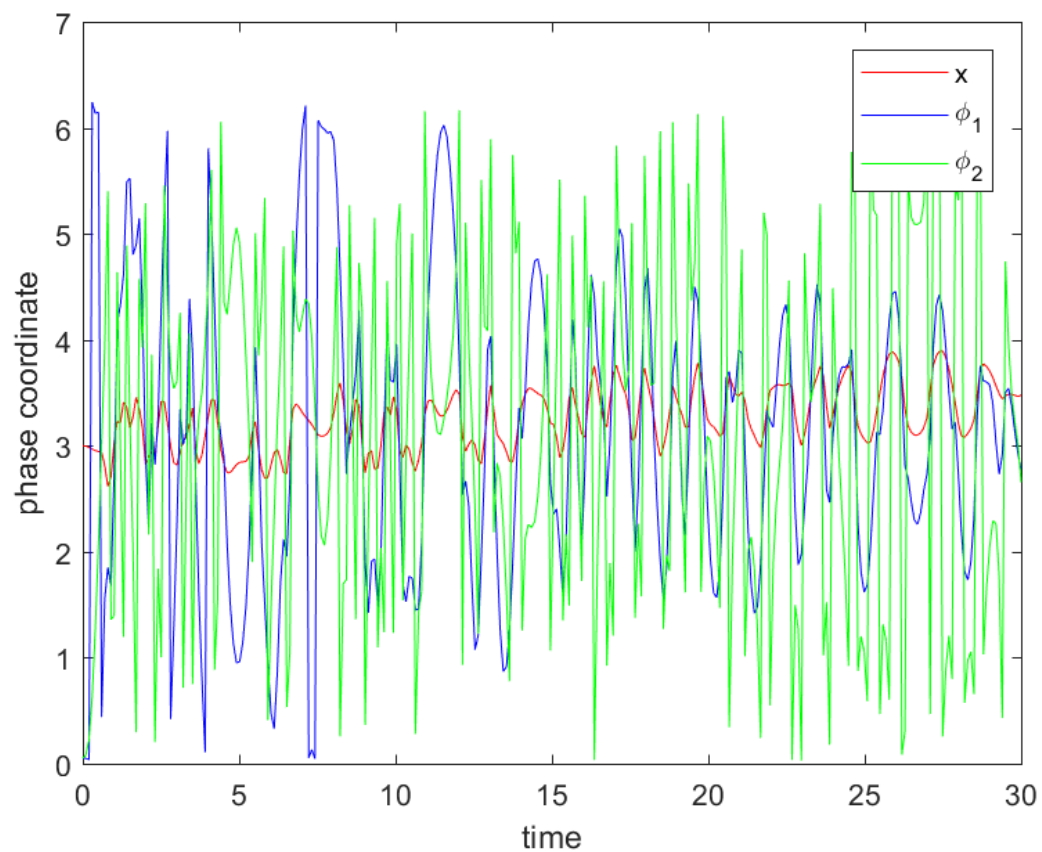


Рис. 3: Фазовый портрет нелинейной неуправляемой системы

Очевидно, что координата тележки и первого маятника затухают со временем, второй маятник тоже успокаивается, но гораздо дольше.

### 3 Неустойчивость нулевого положения равновесия

Заметим, что точка  $O = (s^*, 0, 0, 0, 0, 0)$  — положение равновесия для неуправляемой системы. Исследуем его на устойчивость.

Рассмотрим случай малых колебаний и линеаризуем систему средствами Matlab. Система будет иметь вид

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k/M & -\frac{gm_1+gm_2}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k/(L_1M) & \frac{(gm_1^2+Mgm_1+gm_1m_2)}{L_1Mm_1} & 0 & 0 & 0 \\ -(gm_2)/(L_1m_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k/(L_1M) & \frac{-(L_2gm_1^2+L_2Mgm_1+L_2gm_1m_2)}{L_1L_2Mm_1} & 0 & \frac{(L_1Mgm_1+L_1Mgm_2+L_2Mgm_2)}{L_1L_2Mm_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/(L_1M) \\ 0 \\ 1/(L_1M) \end{bmatrix}$$

Так же, согласно Matlab, характеристический многочлен однородной системы будут иметь следующий вид:

$$\lambda^5 + c_1\lambda^4 - c_2\lambda^3 - c_3\lambda^2 + c_4\lambda + c_5 = 0, \quad c_i > 0$$

Откуда из формулы Виета следует, что  $\exists \lambda_i > 0$ , а значит положение равновесия  $O = (s^*, 0, 0, 0, 0, 0)$  линейной системы, а вместе с ним и нулевое положение равновесия нелинейной системы (по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению), неустойчиво по Ляпунову.

## 4 Построение стабилизатора для линеаризованной системы

### 4.1 Линейный стабилизатор по полной обратной связи

Так как  $rg([b, Ab, A^2b, A^3b, A^4b, A^5b]) = 6$ , то пара матриц  $(b, Ab)$  управляема, а значит (как следствие из теоремы о размещении собственных значений для замкнутой системы) и стабилизируема.

Зафиксируем некоторый набор  $\lambda^k = (\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \lambda_4^k, \lambda_5^k, \lambda_6^k)$  собственных значений матрицы  $(A + bK(\lambda^k))$ , таких, что  $Re(\lambda_i^k) < 0$ ,  $i = 1...4$ . Тогда управление  $u = K(\lambda^k)x$  – линейный стабилизатор по полной обратной связи с заданными собственными значениями для замкнутой системы. Здесь матрица  $K(\lambda^k) = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$  удовлетворяет уравнению

$$\det(A + bK - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1^k)(\lambda - \lambda_2^k)(\lambda - \lambda_3^k)(\lambda - \lambda_4^k)(\lambda - \lambda_5^k)(\lambda - \lambda_6^k)$$

Откуда, сопоставляя соответствующие коэффициенты при степенях  $\lambda$ , имеем:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-(L_1 \cdot L_2 \cdot M \cdot m_1)}{(g^2 \cdot (m_1 + m_2))} \\ k_2 &= \frac{(g^2 \cdot k \cdot m_1 + g^2 \cdot k \cdot m_2 - 6 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot M \cdot m_1)}{(g^2 \cdot (m_1 + m_2))} \\ k_3 &= \frac{-M \cdot L_1^2 \cdot L_2 \cdot m_1 - M \cdot L_1 \cdot L_2^2 \cdot m_1 - 15 \cdot M \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot g \cdot m_1 + g^3 \cdot m_1^2}{g^2 \cdot (m_1 + m_2)} + \\ &\quad \frac{2 \cdot g^3 \cdot m_1 \cdot m_2 + M \cdot g^3 \cdot m_1 + g^3 \cdot m_2^2 + M \cdot g^3 \cdot m_2}{g^2 \cdot (m_1 + m_2)} \\ k_4 &= \frac{-(2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot M \cdot m_1 \cdot (3 \cdot L_1 + 3 \cdot L_2 + 10 \cdot g))}{(g^2 \cdot (m_1 + m_2))} \\ k_5 &= \frac{-M \cdot (L_1 \cdot L_2^3 \cdot m_1^2 + 15 \cdot L_1 \cdot L_2^2 \cdot g \cdot m_1^2 + L_2 \cdot g^3 \cdot m_1 \cdot m_2 + L_2 \cdot g^3 \cdot m_2^2 + 15 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot g^2 \cdot m_1^2)}{(L_2 \cdot g^2 \cdot m_1 \cdot (m_1 + m_2))} - \\ &\quad \frac{M \cdot (15 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot g^2 \cdot m_1 \cdot m_2 + L_1 \cdot g^3 \cdot m_1^2 + 2 \cdot L_1 \cdot g^3 \cdot m_1 \cdot m_2 + L_1 \cdot g^3 \cdot m_2^2)}{g^2 \cdot m_1 \cdot (m_1 + m_2)} \\ k_6 &= \frac{-(2 \cdot L_1 \cdot M \cdot (3 \cdot L_2^2 \cdot m_1 + 3 \cdot g^2 \cdot m_1 + 3 \cdot g^2 \cdot m_2 + 10 \cdot L_2 \cdot g \cdot m_1))}{(g^2 \cdot (m_1 + m_2))} \end{aligned}$$

**Пример 1.** Пусть нам необходимо стабилизировать систему со следующими входными параметрами

$$s^* = 0, L_1 = 0.5; L_2 = 0.3; m_1 = 2; m_2 = 5;$$

$$M = 4; k = 1; g = 9.8;$$

$$x_0 = 3; \theta_1^0 = 0.05; \theta_2^0 = 0.001; \dot{\theta}_1^0 = 0; \dot{\theta}_2^0 = 0; \dot{x}^0 = 0;$$

$$x_{start} = [x_0, \dot{x}^0, \theta_1^0, \dot{\theta}_1^0, \theta_2^0, \dot{\theta}_2^0];$$

$t_0 = 0; t_f = 20$ .

Потребовав, чтобы все собственные значения замкнутой системы были равны -1, построим стабилизатор по полной обратной связи.

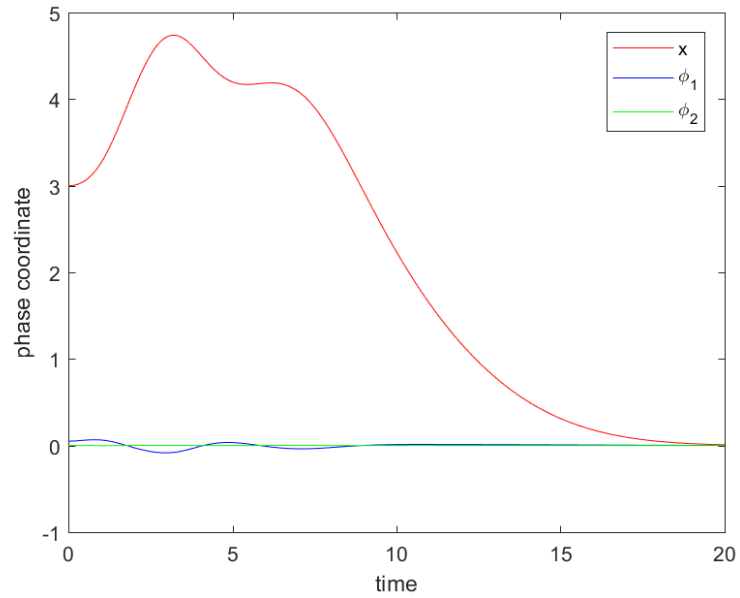


Рис. 4: Фазовый портрет нелинейной управляемой системы

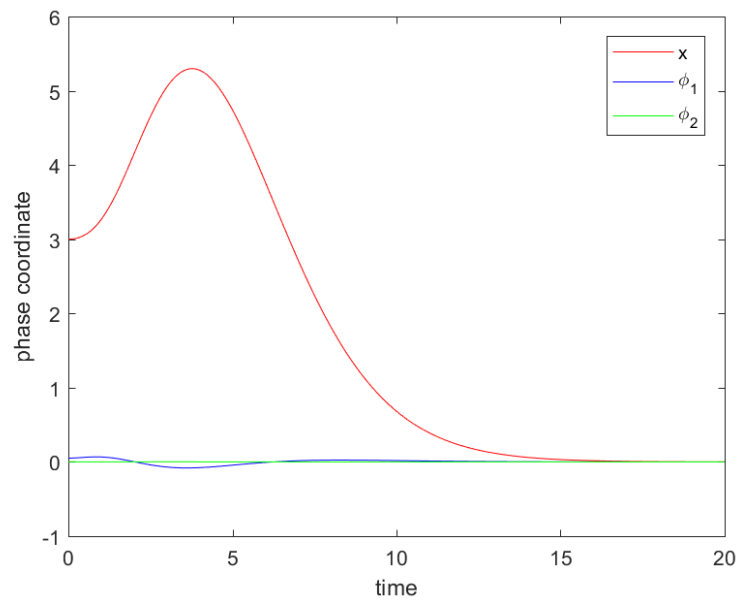


Рис. 5: Фазовый портрет линейной управляемой системы



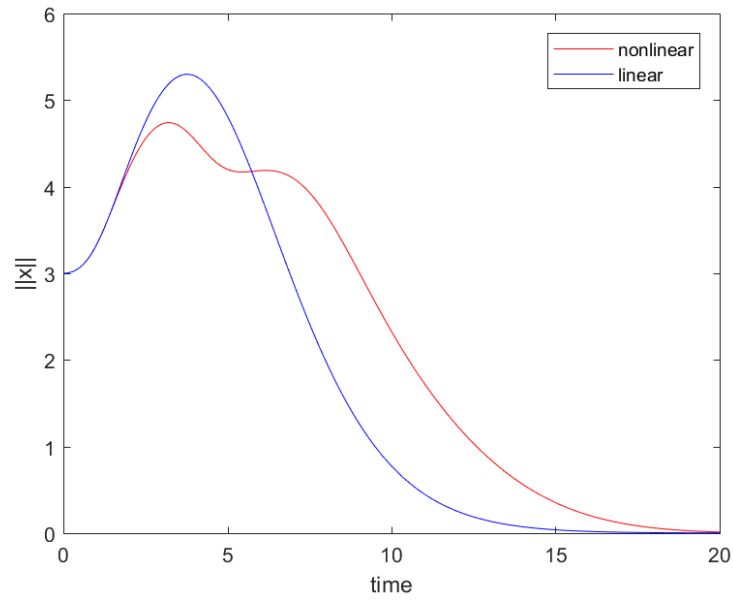


Рис. 6: Норма вектора фазовых переменных

Заметим, что стабилизатор имеет сильный амплитудный выброс в начальные моменты времени, что несколько ограничивает применение данной математической модели для реальных задач.

Рассмотрим случай, когда начальные отклонения от положения больше ( $\theta_1^0 = 0.07$ ;  $\theta_2^0 = 0.005$ ;) )

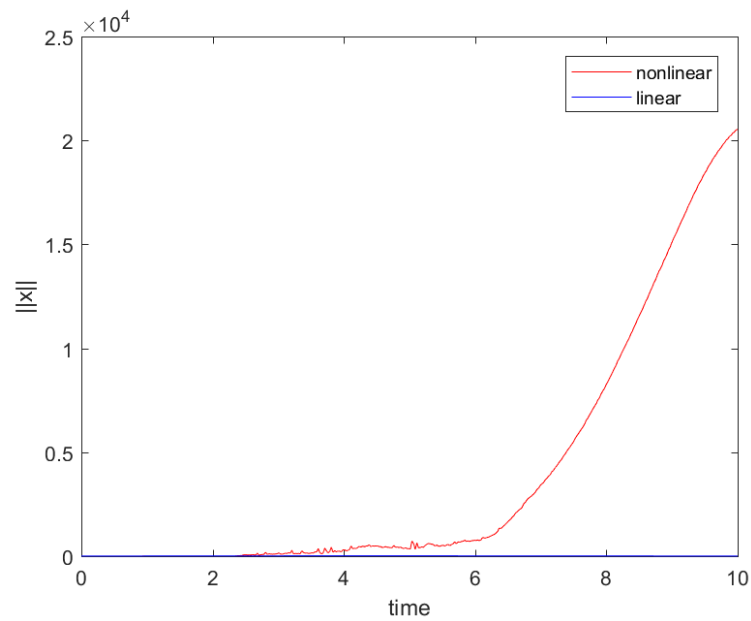


Рис. 7: Норма вектора фазовых переменных

Из данного примера можно сделать вывод, что стабилизатор для линеаризованной системы не всегда может успокоить нелинеаризованную.

## 4.2 Линейный стабилизатор по динамической обратной связи

Рассмотрим систему с наблюдениями

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \\ c = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \end{cases}$$

Так как матрица наблюдаемости

$$\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ cA^3 \\ cA^4 \\ cA^5 \end{bmatrix}$$

полного ранга, то пара матриц  $(c, A)$ –наблюдаема, следовательно, детектируема. Согласно предыдущему пункту, пара матриц  $(A, b)$  –стабилизируема. Значит, для фиксированных наборов собственных значений  $\lambda^k = (\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \lambda_4^k, \lambda_5^k, \lambda_6^k)$  матрицы  $(A + bK(\lambda^k))$  и  $\lambda^L = (\lambda_1^L, \lambda_2^L, \lambda_3^L, \lambda_4^L, \lambda_5^L, \lambda_6^L)$  собственных значений матрицы  $(A + L(\lambda^L)c)$  с отрицательными вещественными частями, управление  $u = K(\lambda^k)x^* - стабилизатор, где  $x^*$  –наблюдатель Люенбергера с матрицей  $L(\lambda^L)$ .$

$$\dot{x}^* = Ax^* + bu + L(\lambda^L)(cx^* - y)$$

Вектор-строка  $K(\lambda^k)$  может быть найдена из предыдущего пункта. Вектор  $L(\lambda^L) = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$  удовлетворяет уравнению:

$$\det(A + Lc - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1^L)(\lambda - \lambda_2^L)(\lambda - \lambda_3^L)(\lambda - \lambda_4^L)(\lambda - \lambda_5^L)(\lambda - \lambda_6^L)$$

Откуда, сопоставляя соответствующие коэффициенты при степенях  $\lambda$ , находим искомую матрицу.

**Пример 2.** Рассмотрим систему при начальных параметрах из примера 1. Потребуем, чтобы все собственные значения матрицы  $A + Lc$  были равны -1.

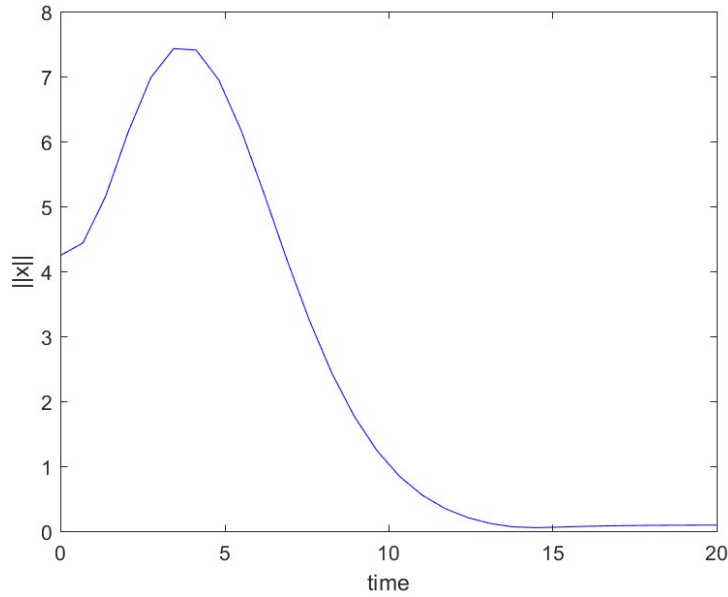


Рис. 8: Норма вектора фазовых переменных линеаризованной системы

### 4.3 Линейный стабилизатор решающий линейно-квадратичную задачу оптимальной стабилизации

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимальной стабилизации

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$J(u) = \int_0^\infty (x^T(\tau)Qx(\tau) + ru^2(\tau))d\tau \rightarrow \inf_{u-\text{accept.}}$$

Здесь  $Q = Q^T > 0$ ,  $r > 0$ .

Так как пара  $(A, b)$  управляема, то  $\exists! P = P^T > 0$  – решение алгебраического уравнения Риккати

$$A^T P + PA - Pbb^T P/r + Q = 0.$$

При этом стабилизатор  $u = Kx$ ,  $K = b^T P/r$  является оптимальным.

Введем гамильтонову матрицу

$$H = \begin{bmatrix} A & bb^T/2r \\ 2Q & -A^T \end{bmatrix}$$

Эта матрица обладает тем свойством, что если  $\lambda$  – собственное значение матрицы  $H$ , то и  $-\lambda$  – собственное значение матрицы  $H$ . То есть характеристический многочлен  $f(\lambda)$  матрицы  $H$  представим в виде

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda),$$

Где корни  $f_2(\lambda)$  имеют строго отрицательные вещественные части. Согласно методу декомпозиции, матрица  $-K$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\det(A - bK - \lambda I) = f_2(\lambda).$$

**Пример 3.** Рассмотрим систему из примера 1 с

$$Q = eye(6), r = 1.$$

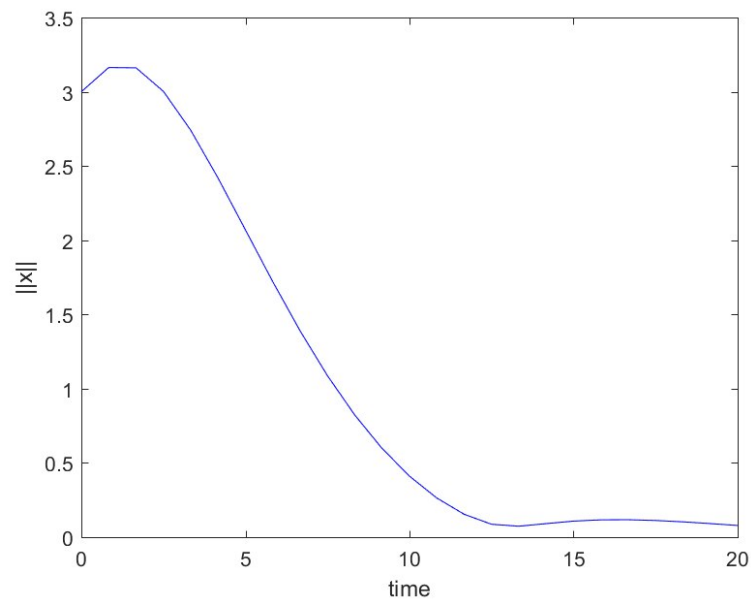


Рис. 9: Норма вектора фазовых переменных линеаризованной системы

Значение функционала  $J_{opt} = 104.46$ , что практически в 2.5 раза меньше, чем в первом примере (260.37).