Теоремы типа Тверберга

Полина Барабанщикова
Научный руководитель: Александр Полянский

МФТИ

16 декабря 2023 г.

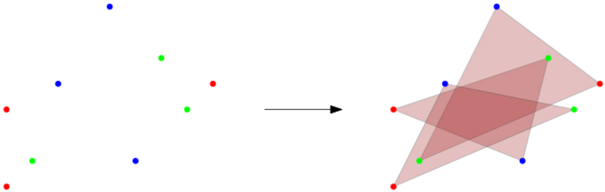
Мотивация

Гипотеза (Цветная теорема Тверберга)

Пусть $t(d, r)$ минимальная константа, для которой выполнено:
Для любых множеств $F_1, F_2, \cdots, F_{d+1}$ из $t(d, r)$ точек в $\mathbb{R}^d$,
существуют такие непересекающиеся подмножества $X_1, \cdots, X_r \subset \bigcup F_i$, что

- $|X_j \cap F_i| = 1$ для любых i и j,
- $\bigcap \operatorname{conv} X_j \neq \emptyset$.

Тогда $t(d, r) = r$.



Мотивация

Гипотеза (Цветная теорема Тверберга)

Пусть $t(d,r)$ минимальная константа, для которой выполнено:
Для любых множеств $F_1, F_2, \cdots, F_{d+1}$ из $t(d,r)$ точек в $\mathbb{R}^d$, существуют такие непересекающиеся подмножества $X_1, \cdots, X_r \subset \bigcup F_i$, что

- $|X_j \cap F_i| = 1$ для любых i и j,
- $\bigcap \operatorname{conv} X_j \neq \emptyset$.

Тогда $t(d,r) = r$.

Известно, что

- $t(2,r) = r$
- $t(d,r) = r$, если $r+1$ простое

Цель исследования

Проблема

Гипотеза не доказана в общем случае. Отсутствует эффективный алгоритм построения разбиения Тверберга

Цель

Предложить алгоритм поиска приближенного разбиения Тверберга для любых d и r

Метод решения

На основе оптимального транспорта

Безразмерная цветная теорема Тверберга. $r = 2$

Теорема (Пирахмад, Полянский, Василевский)

Пусть R и B – множества из n точек в $\mathbb{R}^d$. Тогда паросочетание $\mathcal{M} = \{(r, b) | r \in R, b \in B\}$, максимизирующее сумму квадратов длин рёбер, является графом Тверберга, то есть

$$\bigcap_{(r,b)\in\mathcal{M}} B(r, b) \neq \emptyset,$$

где $B(r, b)$ – шар с диаметром rb.

Монотонный транспорт

Транспортная задача

Для двух вероятностных мер μ и ν на $\mathbb{R}^d$, найти отображение $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, которое минимизирует

$$\int \|x - T(x)\|^2 d\mu(x)$$

при условии $\mu(T^{-1}(V)) = \nu(V)$ для любого измеримого V.

Теорема Бренье

Если мера μ абсолютно непрерывна, то существует единственное оптимальное отображение T. Это единственное отображение, которое является градиентом выпуклой функции $T = \nabla\phi$, такой что $(\nabla\phi)_\sharp\mu = \nu$.

Монотонный транспорт

Пусть теперь $\mu = \frac{1}{n}\sum\limits_{r\in R}\delta_r$ и $\nu = \frac{1}{n}\sum\limits_{b\in B}\delta_b$ дискретные меры на $\mathbb{R}^d$.
Тогда отображение $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, которое максимизирует

$$\sup_T \left\{ \int \|x - T(x)\|^2 d\mu(x) : T(R) = B \right\},$$

является градиентом вогнутой функции: $T = \nabla\phi$.
Пусть o – точка максимума ϕ. Тогда для любого $r \in R$:

$$\langle \nabla\phi(r) - o, r - o\rangle = \langle \nabla\phi(r) - \nabla\phi(o), r - o\rangle \leq 0.$$

Следовательно,

$$o \in \bigcap B(\nabla\phi(r), r).$$

Многомерная транспортная задача

Для N вероятностных мер $\mu_1, \cdots, \mu_N$ на $\mathbb{R}^d$, найти N отображений $T_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, которые минимизируют

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \int \| T(x_i) - T(x_j) \|^2 d\mu_1(x)$$

при условии $\mu_1(T_i^{-1}(V)) = \mu_i(V)$ для любого измеримого V.

Метод доказательства безразмерной теоремы Тверберга

Идея

- Рассмотреть дискретные равномерные меры $\mu_1, \cdots, \mu_N$ на множествах точек $F_1, \cdots, F_N$.
- Построить отображения $T_i : F_1 \to F_i$, максимизирующие

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \int \| T_i(x_i) - T_j(x_j) \|^2 d\mu_1(x).$$

- Использовать аналог теоремы Бренье, чтобы доказать

$$o \in \bigcap_{x \in F_1} B(x, T_2(x), \cdots, T_N(x)).$$