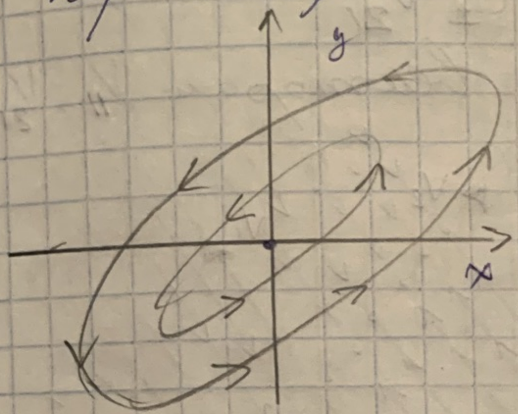
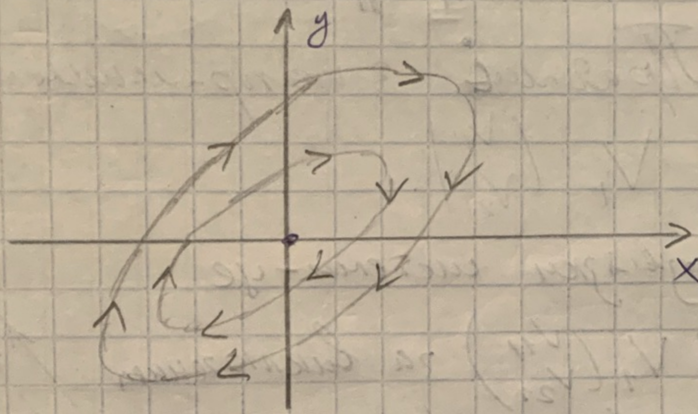
6.11.2019

6.а) $\lambda_{1,2} = \pm bi$: $Re\,\lambda_{1,2} = 0$ $(a=0)$.

Див. пункт (6) тоді спіралі перетворяться в еліпси



$a_{21} > 0$



$a_{21} < 0$

Таке положення рівноваги називається центром.

7) $\det A = 0$!

хар. рівняння $\lambda^2 - trA \cdot \lambda + \det A = 0$

$$\lambda^2 - trA \cdot \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - trA) = 0$$

① $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 = 0$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 V_2$$ – заг. розв'язок системи

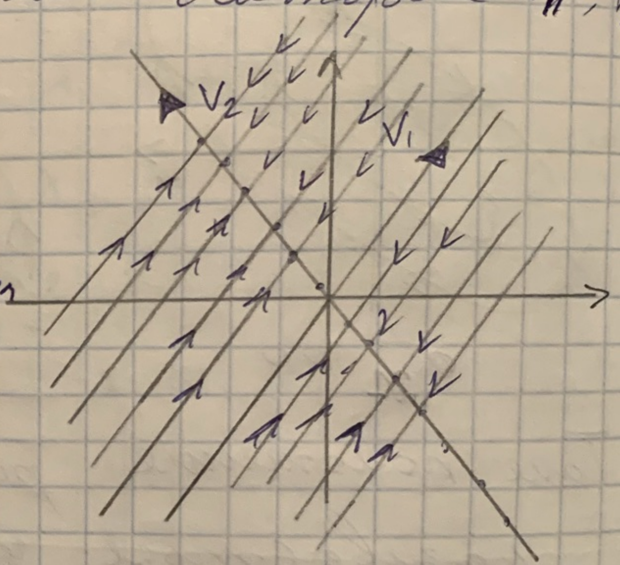
$$V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{cases} x(t) = C_1 V_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 V_{12} \\ y(t) = C_1 V_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 V_{22} \end{cases} \Rightarrow$$ виразивши $e^{\lambda_1 t}$ отримаємо

$$\frac{x(t) - C_2 V_{12}}{C_1 V_{11}} = \frac{y(t) - C_2 V_{22}}{C_1 V_{21}} \quad (1)$$

(1) це прямі з напрямним вектором V_{11}, V_{21}

$V_1 \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$



Тобто розв'язки системи — це прямі $\parallel V_1 \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ за виключенням точок рівноваги — пряма, що прох. через поч. координат $\parallel V_2$ (випадок $C_1 = 0$).

② $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$:

геометрична кратність $= 2$

маємо 2 вл. вектори V_1 і V_2 вони лін. незалежні

Оск. $\lambda_{1,2} = 0$, то $AV_1 = 0 = AV_2$

V_1 і $V_2 \in \ker A$ і V_1 і V_2 — лін. нез

$\dim \ker A = 2 \Rightarrow \ker A = \mathbb{R}^2$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

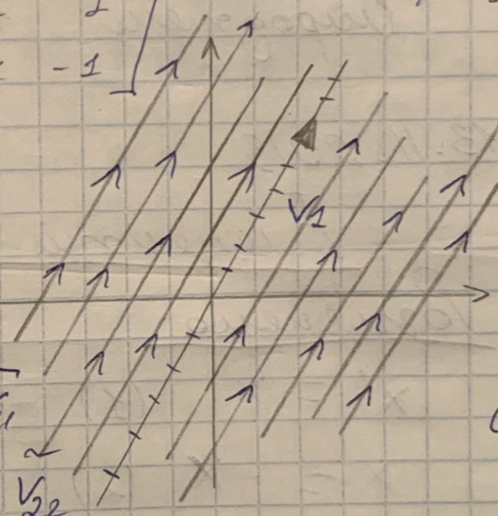
$$\begin{cases} x' = 0 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 0; \\ y' = 0; \end{cases}$$

$x = C_1$ — всі точки площини будуть положеннями
$y = C_2$ рівноваги

③ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, геом. кр $= 1$ V_1 - вл. вектор
$\dim \ker A = 1$ $\tilde{V}_1$ - приєднаний

наприклад $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

V_1



$X(t) = (C_1 t + C_2) V_1 + C_1 \tilde{V}_1$

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 t + C_2) V_{11} + C_1 \tilde{V}_{11} \\ y(t) \quad (C_1 t + C_2) V_{21} + C_1 \tilde{V}_{22} \end{cases}$$

$C_1 > 0$

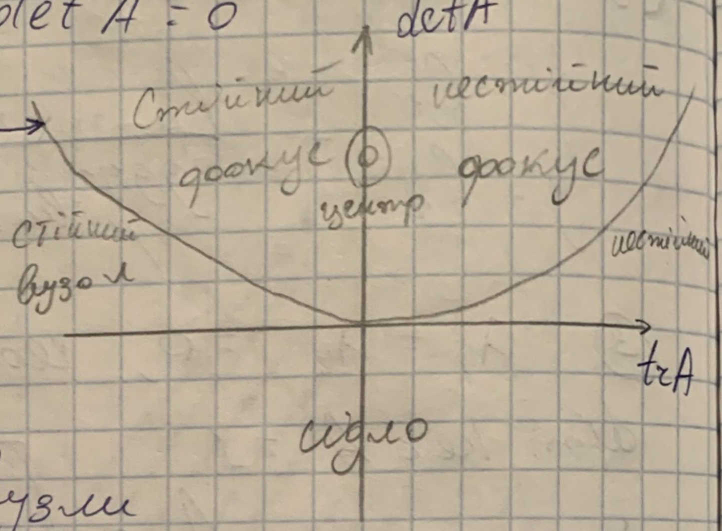
t - прибрати з системи і це будуть прямі паралельні V_1

Біфуркаційна діаграма

$$\lambda^2 - trA \cdot \lambda + \det A = 0$$

$$D = (trA)^2 - 4\det A = 0$$

$$\det A = \frac{(trA)^2}{4} \rightarrow$$



Парабола містить дикритичні та вироджені вузли

13.11.2019

Елементи теорії стійкості

Розглянемо:

$x' = x \quad (1) \qquad x = x(t)$ - невідома функ.

$x' = -x \quad (2) \qquad t \in [t_0; +\infty)$

$x_{(1)}(t) = Ce^{t}$ - заг. р-к (1)

$x_{(2)}(t) = Ce^{-t}$ - заг р-к (2)

Задамо початкову умову

$x(0) = x_0$

тоді $x_{(1)}(t) = x_0 \cdot e^{t}$, $x_{(2)}(t) = x_0 e^{-t}$

Припустимо, що ми змінили

початкову умову на один

відсоток, тоді $x(0) = 1{,}01\, x_0$

Тоді $\begin{cases} x_{(1)}(t) = 1{,}01 \cdot x_0 \cdot e^{t} \\ x_{(2)}(t) = 1{,}01 \cdot x_0\, e^{-t} \end{cases}$

Обчислимо значення розв'язків

при $t = 3$

$x_{(1)}(3) = 1{,}01\, x_0\, e^{3} \approx \cancel{20 x_0}\ 20{,}28\, x_0$

$x_{(2)}(3) = 1{,}01\, x_0\, e^{-3} \approx 0{,}05\, x_0$

$x_{(1)}(3) = x_0\, e^{3} \approx 20{,}08\, x_0$

$x_{(2)}(3) = x_0\, e^{-3} = 0{,}045\, x_0$

$\Delta_1 = (20{,}28 - 20{,}08)\, x_0 = 0{,}2\, x_0$

$\Delta_2 = (0{,}05 - 0{,}045)\, x_0 = 0{,}001\, x_0$

$x_{(1)}(t) = x_0 e^{t}$ - не є стійким

$x_{(2)}(t) = x_0 e^{-t}$ - стійкий

$x_{(1)}$ сильно змінився при зміні x_0 на 1%

$x_{(2)}$ мало змінився при зміні x_0 на 1%.

Для дослідження характеру залежності розв'язків від початкових даних на великих інтервалах часу на прикінці XIX ст. О.М. Ляпуновим було створено строгу теорію стійкості

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots x_n) \end{cases} \qquad (3)$$

$x_1(t), \ldots x_n(t)$ – невідомі функції

$t \in [t_0; +\infty)$

$(x_1(t), \ldots x_n(t)) \in D \subset \mathbb{R}^n$

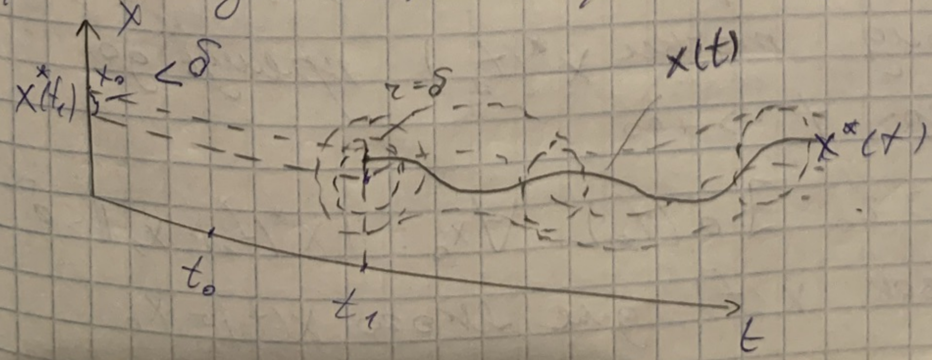
$(t, x_1, \ldots x_n) \in [t_0, +\infty) \times D$

Припускаємо, що для системи (3) для будь-яких початкових значень $(x_1, \ldots x_n) \in D$ при $t = t_0$ розв'язок задачі Коші існує і єдиний.

Означення:

Розв'язок $x^*(t) = (x_1(t), \dots x_n(t))$ (3)
системи (3) називається стійким за Ляпуновим при $t \to +\infty$,
якщо: 1) Цей розв'язок існує $\forall t \in [t_0, +\infty)$
2) $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \forall t_1 \geq t_0 \quad \exists \delta(\mathcal{E}, t_1) > 0$
для кожного x_0, такого, що $\|x_0 - x^*(t_1)\| < \delta$
розв'язок системи (3), що задовольняє початкову умову $x(t_1) = x_0$ існує $\forall t \geq t_1$ і $\|x(t) - x^*(t)\| < \mathcal{E}$

Друга умова геометрично означає, що розв'язок який виходить з δ-а околу точки $x^*(t_1)$ повинен належати $\mathcal{E}$-трубці графіка розв'язку $x^*(t)$ на проміжку big $[t_1, +\infty)$



Означення: Розв'язок називається **нестійким**, якщо порушується хочаб одна з умов стійкості.

Для нестійкого розв'язку будуть існува такі ε і t_1, що $\forall \delta$ $\exists$ розв-ок $x(t)$ ~~точки~~, що виходить з δ-околу точки $x^*(t_1)$, тобто $\| x^*(t_1) - x(t_1) \| < \delta$ і при деякому $t > t_1$ цей розв'язок доходить до межі трубки, тобто $\| x(t) - x^*(t) \| \geq \varepsilon$

Означення: Розв'язок $x^*(t)$ називається **асимптотично стійким за Ляпуновим** при $t \to +\infty$ і:

1) $x^*(t)$ стійкий за Ляпуновим
2) Будь-який розв'язок $x(t)$, що виходить з δ-околу точки $x^*(t_1)$ прямує до $x^*(t)$, при $t \to +\infty$

$\forall t_1 \geq t_0$ $\exists \delta(t_1)$ $\forall x_0 : \| x^*(t_1) - x_0 \| < \delta$ розв'язок $x(t)$, для якого $x(t_1) = x_0$

існує і $\|x(t)-x^*(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Якщо розв'язок $x^*(t)$ існує при $t\in[t_0;+\infty)$!

то задачу про його стійкість можна звести до задачі про стійкість тривіального розв'язку (нульовий) деякої допоміжної системи.

Покажемо це:

Нехай $x' = f(t,x)$ це система (3), зробимо заміну $y = x - x^*$, тоді

$x = y + x^*$; $x' = y' + (x^*)'$

$y' + \underset{\underset{f(t,x^*)}{\parallel}}{(x^*)'} = f(t, y+x^*)$

$y' = f(t, y+x^*) - f(t, x^*)$ (4) - доп. система

x^* - розв'язок (3) $\Longleftrightarrow$ $y=0$ розв'язок (4)

Твердження:

x^* - стійкий (асим. стійкий) (3) $\Leftrightarrow$

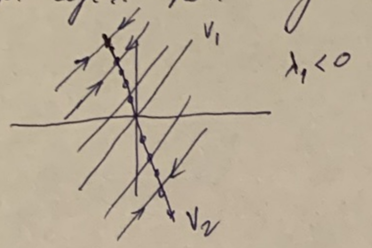
$\Leftrightarrow$ $y=0$ стійкий (асим. стійкий) в (4).

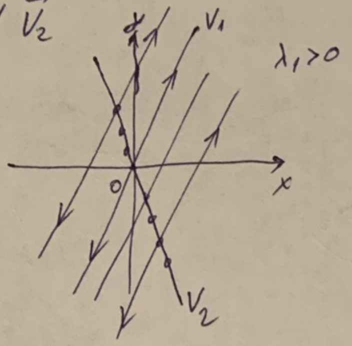
7) випадок виродженої матриці A. ($\det A = 0$).

хар. р-ня: $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda = 0$ тобто одне або обидва $\lambda = 0$.

Нехай $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Маємо заг. р-к $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 V_2$

$\vec{V_1}, \vec{V_2}$ – вл. вектори. Полож. рівноваги – це всі точки прямої, що прох. через поч. коорд. $\parallel \vec{V_2}$





без назви

Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і геометр. кратність 2 $\Rightarrow$ два вл. вектори $\vec{V_1}$ і $\vec{V_2}$

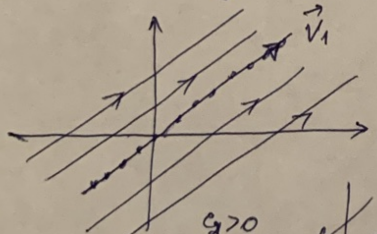
$\dim \operatorname{Ker} A = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді $\forall$ точка площини є полож. рівноваги

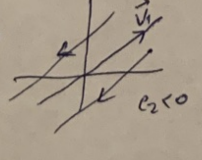
Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і геометр. кратність 1 $\Rightarrow$ один. вл. вектор $\vec{V_1}$.

$\dim \operatorname{Ker} A = 1 \Rightarrow$ A – ненульова матр. (наприкл. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$).

Тут всі точки прямої, що прох через поч. коорд. $\parallel \vec{V_1}$ є полож. рівноваги

Р-к сис-ми буде $X(t) = (c_1 + c_2 t)V_1 + c_2 W_1$, де W_1 – приєднаний до V_1.





фаз. траєкт – це прямі $\parallel \vec{V_1}$.

Напрям руху по траєкт. при $t \to +\infty$ залежить від знаку c_2

$c_2 > 0$ в напрямку вект. V_1

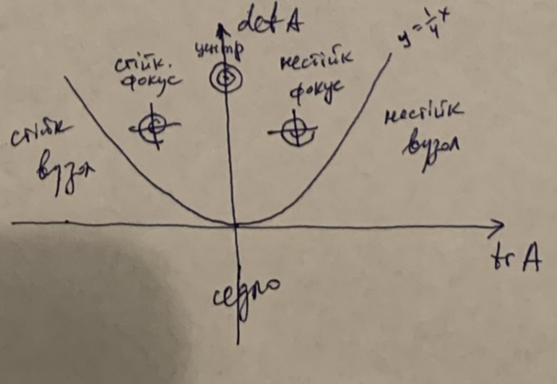
$c_2 < 0$ в протилежн. до V_1 напрямку.

Біфуркаційна діаграма

$\lambda^2 - \operatorname{tr}A\,\lambda + \det A = 0$

$D = (\operatorname{tr}A)^2 - 4\det A = 0$

$\det A = \frac{1}{4}(\operatorname{tr}A)^2$



саме параб. містить дикритич. чи виродж. вузли.

Прикл. $\begin{cases} x' = \ln(x+y) \\ y' = \operatorname{arctg} \frac{2x}{y} \end{cases}$ Знайти полож. рівноваги і визначити його характер.

$\begin{cases} \ln(x+y) = 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{2x}{y} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 1 \\ \frac{2x}{y} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ $P'_x = \frac{1}{x+y} = 1$ $P'_y = \frac{1}{x+y} = 1$

$Q'_x = \frac{2y}{4x^2+y^2} = 2$ $Q'_y = -\frac{2x}{4x^2+y^2} = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$ $\det = \lambda(\lambda-1) - 2 = 0$ $\left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{array}\right.$ дійсні різні $\Rightarrow$ сідло.

Елементи теорії стійкості.

Розглянемо два д.р. $x' = -x$ (1) $x(t) = x_0 e^{-t}$ $x_0 = x(0)$ – поч. умова

$t \in [0; +\infty)$. $x' = x$ (2) $x_2(t) = x_0 e^{t}$

Що буде, якщо x_0 трохи змінити $x_0 \to x_0 + \delta$ $x_1^* = (x_0+\delta)e^{-t}$

$x_2^* = (x_0+\delta)e^{t}$

$|x_1(t) - x_1^*| = |\delta| e^{-t} \to 0$ $t \to +\infty$

$|x_2(t) - x_2^*| = |\delta| e^{t}$ зі збільшенням t різниця збільшується. Тобто похибка при неточному виборі поч. знач., наприклад, у 1%, тягне за собою похибку ~~обчисл.~~ при обчисл. значення ф-ку при $t=3$ вже 20%.

Для досл. хар-ру ф-ку системи від початкових даних на великих інтервалах часу було створено на прикінці XIX ст. О.М. Ляпуновим строгу теорію стійкості руху.

Розглянемо систему $\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ або $X' = f(t, x)$ (3)

визначену в $\Omega = [a; \infty) \times D$, де $D \subset \mathbb{R}^n$: $t \in [a; +\infty)$, $X \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Припускаємо, що р-к задачі Коші з дов. поч. даними $\exists$ і єдиний.

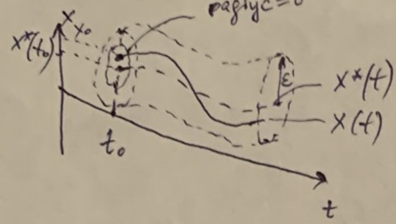
Озн. Розв'язок $X^*(t)$ сис-ми (3) наз стійким за Ляпуновим (при $t \to \infty$) якщо:

$\|\cdot\|$ - евкл. метрика $(\sum X_k^2)^{1/2}$ або $\sum |X_k|$

1) цей р-к $\exists$ при $t \in [a; +\infty)$

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\forall t_0 \geq a$ $\exists \delta(\varepsilon, t_0)$, що для кожного X_0: $\|X_0 - X^*(t_0)\| < \delta$ р-к $X(t)$ сис-ми, що задов поч. умову $X(t_0) = X_0$ існує $[t_0; +\infty)$ і $\|X(t) - X^*(t)\| < \varepsilon$. $\forall t \geq t_0$.

Друга умова геометрично означає, що р-к, який виходить з δ-околу т. $x^*(t_0)$ повинен належати ε-трубці графіка розв'язку $x^*(t)$ на півосі $[t_0;+\infty)$



<u>Не стійким</u> наз. р-к, для якого поруш. хоча б одна з вимог цього озн. Для нестійк. р-ку $\exists \varepsilon$ і t_0 $\forall \delta$ $\exists x(t)$, що виходить з δ-околу $\|x^*(t_0)-x(t_0)\|<\delta$, але при певному $t=t(\varepsilon,t_0,\delta)>t_0$ буде доходити до межі трубки $\|x(t)-x^*(t)\|\geq\varepsilon$.

<u>Озн.</u> Р-к $x^*(t)$ наз <u>асимптотично стійким</u> за Ляпуновим $(t\to\infty)$, якщо:

а) цей р-к стійкий за Ляпуновим

б) ~~[illegible]~~ р-к $x(t)$ що вих з δ-околу т. $x^*(t_0)$ при $t\to\infty$ буде прямувати до $x^*(t)$

$\forall t_0\geq a$ $\exists \Delta(t_0)>0$ $\forall x_0 : \|x^*(t_0)-x_0\|<\Delta$ р-к $x(t)$ для якого $x(t_0)=x_0$ існує при $t\geq t_0$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\|x^*(t)-x(t)\|=0$.

Якщо р-к $x^*(t)$ існує на $[a;+\infty)$, то задачу про його стійкість можна звести до задачі про стійкість тривіального р-ку деякої допоміжної сис-ми. Для цього зробимо заміну

$$y=x-x^*.$$

Дістанемо нову систему $y'=f(t,y+x^*)-(x^*)'$. Оск. $(x^*)'=f(t,x^*)$, то маємо $\underbrace{y'=f(t,y+x^*)-f(t,x^*)}_{\text{допоміжна сис-ма}}$. Остання сис-ма має трив. р-к $y\equiv 0$.

<u>Тверд.</u> Р-к x^* стійкий (ас. стійк.) $\Leftrightarrow$ $y\equiv 0$ стійк. (ас. стійк) в доп. системі.