Стійкість лінійних систем

Розглянемо ЛОС (лін. однор. систему) з непер. при $t \geq t_0$ коефіцієнтами:

(5) $X' = A(t) \cdot X$, при $t \geq t_0$

Нехай $x^*(t)$ - довільний розв'язок (5) при $t \geq t_0$; за теоремою існування розв'язку задачі Коші, цей розв'язок існування $\forall t \geq t_0$.

Зробимо заміну $Y = X - X^*$ і перейдемо до допоміжної системи

$X = Y + X^* \Rightarrow X' = Y' + (X^*)'$

$Y' + (X^*)' = A(t)(Y + X^*)$

$Y' = A(t) Y$ (6)

$[(X^*)' = AX^*]$, оскільки X^* - розв'язок (5).

Звернемо увагу що матриці A основної і допоміжної системи співпадають.

X^* - розв'язок (5) $\Rightarrow Y = 0$ розв'язок (6)

! Висновок: характер стійкості

довільного розв'язку системи (5) повністю визначається хар-ом стійкості тривіального розв'язку системи (6), а оскільки А - співпадає, то насправді характером тривіального розв'язку самої системи (5), а тому всі розв'язки системи (5) або стійкі (асимпт. стійкі) або нестійкі.

Отже, для лінійної системи диф рівнянь можна говорити про її стійкість або не стійкість.

Стійкість системи (5) повністю визначається властивостями фундаментальної матриці $X_\varphi(t)$.

Загальний розв'язок системи (5) має вигляд $x(t) = X_\varphi(t) \cdot C$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Нехай $X(t_0) = X_0$

$$X_0 = X_{\varphi 0}(t_0) C \Rightarrow C = X_\varphi^{-1}(t_0) \cdot X_0$$

$$X_{част}(t) = X_{\varphi}(t) \cdot X_{\varphi}^{-1}(t_0) \cdot X_0$$

Теорема: Для стійкості системи (5) необхідно і достатньо, щоб $X_{фо}(t)$ була обмеженою на $[t_0, +\infty)$, тобто $\exists k > 0$, що $\forall t \geq t_0 : \|x_{фо}(t)\| \leq k$

Теорема:

Для асимп. стійкості (5), необх. і дост $\|X_{ф}(t)\| \to 0$, при $t \to +\infty$.

Стійкість Лінійних - Однорідних систем зі сталими коефіцієнтами

Нехай $X' = A \cdot X$ (7) $A = (a_{ij})$ - стала матриця

ЛОС - зі сталими коефіцієнтами

Теорема: Для того, щоб система (7) - була стійкою, необхідно і достатньо, щоб дійсні частини дсіх власних значень були недодатніми, а кожному власному значенню з нульовою дійсною частиною відповідало стільки власних векторів яка кратність його власного числа.

(кожна λ_m де $Re\,\lambda_m = 0$ відповідала одномірна клітинка ~~Ж~~Жордана).

Наслідок: Якщо в матриці A $\exists\,\lambda_j$: таке, що $Re\,\lambda_j > 0$, то система нестійка;

Якщо $\exists\,\lambda_r$ таке, що $Re\,\lambda_r = 0$ і числу λ_r відповідає така кількість вл. векторів що менша ~~...~~ його кратності, то система нестійка (λ_r відп. неодномірна клітина Жордана).

Теорема:

Для того, щоб система (7) була асимпт. стійкою, необхідно і достатньо, щоб дійсні частини всіх $Re\,\lambda_k < 0$.

Критерій Рауса-Гурвіца

Перевірка на асимптотичну стійкість

У випадку, коли хар. многочлен степеню $n \geq 3$ незавжди вдається знайти його корені, потрібен

Стійкість лінійних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему

$$x' = A(t)x \qquad (1)$$

з непер. на $[a;+\infty)$ коефіцієнтами. Нехай $x^*(t)$ дов. р-к (1). За т. існування розвʼязку задачі Коші для ЛОС (1) р-к $x^*(t)$ буде $\exists$ на всій $[a;+\infty)$. Після заміни $y = x - x^*$:

$$(y+x^*)' = A(y+x^*) \Rightarrow \underline{y' = A(t)y} \qquad (2)$$

маємо доп. сис-му (2) $\left(x^* - \text{р-к } (1) \Rightarrow y=0 \text{ р-к } (2)\right)$, причому матриці цих систем співпадають т.ч. хар-р стійкості довільного р-ку x^* сис-ми (1) повністю визначається хар-ом стійкості її тривіального р-ку. Тому всі р-ки (1) одночасно або стійкі (ас. стійкі) або нестійкі. Отже, можна говорити про стійкість (ас. стійкість), нестійкість лінійної системи.

вставка див (3)

Стійкість ЛОС зі сталими коефіцієнтами.

Нехай $x' = Ax$ (3) ЛОС зі сталими коеф.

Т-ма 1) Для того щоб сис-ма (3) була стійкою, необхідно і достатньо, щоб дійсні частини всіх вл. значень матриці A були недодатніми ($\operatorname{Re}\lambda_k \le 0 \ \forall k$), причому кожному вл. значенню з нульовою дійсною частиною відповідало стільки лін. незал. вл. векторів яка кратність цього числа як кореня характ. полінома $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ (тобто кожному λ_m, де $\operatorname{Re}\lambda_m = 0$ відп. одновимірна кл. Жордана)

2) Для асимпт. стійкості сис-ми (3) необхідно і достатньо, щоб всі дійсні частини всіх вл. значень матр. A були від'ємні

Вставка Стійкість (1) повністю визнач. властивостями фунд. матриці $X(t)$. Заг. р-к має вигляд $x(t) = c \cdot X(t)$, $c \in \mathbb{R}^n$ – вект. сталих. Поч. умова $x(t_0) = x_0 \Rightarrow c \cdot X(t_0) = x_0$ $c = X^{-1}(t_0) \cdot x_0$

р-к $x = x_0 X^{-1}(t_0) \cdot X(t)$.

Т-ма: Для стійкості (1) необх. і дост., щоб її фунд. матр. $X(t)$ була обмежена на $[a; \infty)$: $\exists K > 0 : \|x(t)\| \le K \ \forall t \in [a; +\infty)$.

Т-ма: Для асимп. ст. необх. і дост. щоб $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

2.

Наслідок Якщо в матр. A сис-ми (3) $\exists j : Re \lambda_i > 0$, то сис-ма (3) **нестійка**.

Якщо $\exists j : Re \lambda_j = 0$ і числу λ_j відп. неодном. кл. ЖС. $\Rightarrow$ сис-ма (3) **нестійка**.

Дов-ня т-ми випливає з аналізу ФСР, яке скл. з функцій, що є добутками exp, многочлена і ~~тригонометрич~~ sin або cos.