3) $\bar{M} = X$

Означення:

Метричний простір (X, ρ) називається сепарабельним, якщо в ньому є скрізь щільна зчисленна множина.

Наведемо якісь приклади – сепарабельні

Повні і неповні метричні простори

Теорема про поповнення

Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називається фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ $\forall n, m > N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Якщо $\{x_n\}$ – зб. $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ – фунд.

Приклад: $X = \mathbb{Q}$ $\{x_n\} = (1 + \frac{1}{n})^n$

$\{x_n\} \to e \notin \mathbb{Q}$

Метричний простір (X, ρ) називається повним, якщо в ньому кожна фунд. послідовність є збіжною.

Приклад: $\mathbb{Q}$ - неповний

$\mathbb{R}$ - повний (Критерій Коші)

$\mathbb{R}^n$ - повний

Простір $C_{[a,b]}$ - повний

Простір $\tilde{L}_1[a,b]$ з інтегральною метрикою не буде повним.

$x_n(t) = t^n \to \varphi(t) = \begin{cases} 1, & t=1 \\ 0, & 0 \le t < 1 \end{cases}$.

$\varphi(t)$ - розрив $\Rightarrow \varphi(t) \notin \tilde{L}_1[0;1]$

Записати доведення того, що L_2 повний

Означення ізометрії двох метричних просторів

Метричні простори (X_1, ρ_1) та (X_2, ρ_2) називаються ізометричними, якщо існує таке бієктивне відображення $f: X_1 \leftrightarrow X_2$, що $\forall x, y \in X_1$:

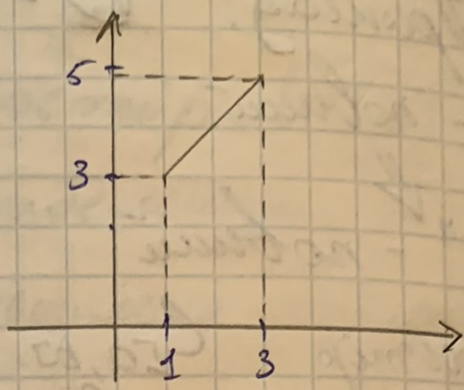
$\rho_1(x,y) = \rho_2(f(x), f(y))$

Приклад: $X_1 = [1, 3]$,

$\rho_1(x, y) = |x - y|$

$X_2 = [3, 5]$

$\rho_2(x, y) = |x - y|$



$f(x) = x + 2$

Означення поповнення

Метричний простір (X_0, ρ_0) називається поповненням метричного простору, якщо

1) (X_0, ρ_0) - повний м.п.

2) $X \subset X_0$, $\forall x, y \in X$: $\rho(x, y) = \rho_0(x, y)$

3) Множина X скрізь щільна в (X_0, ρ_0)

Приклад:

1) $(\mathbb{Q}, |x - y|)$ - не повн. м.п.

його поповнення буде $(\mathbb{R}, |x - y|)$

2) Множина неперервних функцій на $[a, b]$ з інтегр. метрикою:

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

позначимо $\mathcal{L}_2[a,b]$ - неповний метричний простір, а його поповнення буде простір $L_2[a,b]$ - інтегровані з квадратом за Лебегом функції на відрізку $[a,b]$ $(\exists \int_a^b x^2(t)dt)$
(L)

$L_2[a,b]$ - повний

3) $X = (1,3)$ $\quad \rho(x,y) = |x-y|$

$x_n = 3 - \frac{1}{n}$ - фунд., але не збіжна.

$X_0 = [1,3]$, $\rho(x,y) = |x-y|$ - поповнення X.

Чи буде поповненням для X таке $X_0 = [0,5]$? Ні, тому що X не скрізьщільна в X_0.

Теорема про поповнення

Для будь-якого метричного простору (X,ρ) існує його поповнення (X_0, ρ_0). Будь-які два поповнення ізометричні між собою

Ідея доведення конструкції поповнення

Нехай (X, ρ) метричний простір. Назвемо дві фундаментальні послідовності $\{x_n\}$ і $\{x_n'\}$ еквівалентними, якщо $\rho(x_n, x_n') \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Це відношення між послідовностями буде рефлексивним, симетричним і транзитивним, тобто воно буде відношенням еквівалентності.

Таким чином, це відношення розіб'є всі фундаментальні послідовності з X на класи еквівалентних послідовностей. Візьмемо тепер за множину X_0 ці всі класи еквівалентних фундаментальних послідовностей.

Відстань між класами побудуємо наступним чином x^* - один клас, $\{x_n\}$ - його представник

y^* цей клас $\{y_n\}$ його представник

$$\rho(x^*, y^*) := \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) \quad (1)$$

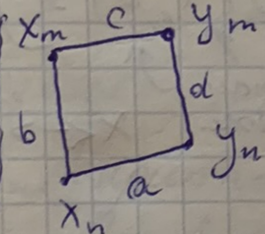
Спочатку покажемо існування границі.

$\rho(x_n, y_n) = S_n$ - числова послідовність.

Щоб показати її збіжність покажемо її фунд.

$$|S_n - S_m| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le$$

$\le$



$$\le \underbrace{\rho(x_n, x_m)}_{<\varepsilon_1} + \underbrace{\rho(y_n, y_m)}_{<\varepsilon_2} < \varepsilon.$$

$\{S_n\}$ - фунд. послідовність $\Rightarrow \exists \lim S_n$

Покажемо, що границя не залежить від вибору представника класу

$\{x_n\} \in x^*$, $\{x'_n\} \in x^*$

$\{y_n\} \in y^*$, $\{y'_n\} \in y^*$

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \le \underbrace{\rho(x_n, x'_n)}_{\to 0} + \underbrace{\rho(y_n, y'_n)}_{\to 0}$$

Таким чином $\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n) \to 0$

X - підпростір X_0

$|a - c| \le b + d$ - нерівність чотирикутника

X - підпростір X_0, тобто, що можна розглядати X як підмн. X_0 і $\rho(x,y) = \rho_0(x,y)$ $\forall x,y \in X$

Для цього кожен елемент $x \in X$ ототожнимо з класом $[x]$ фунд. посл., що збігаються до x, цей клас не порожній ($x, x, x \dots$ - стаціонарна посл)

Далі $\rho_0(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x,y) = \rho(x,y)$

стац. посл.

Отже ми відповідність $x \longleftrightarrow [x]$ на частину X_0.

до елемента цього простору. $(\mathbb{R}, |x-y|)$ - повний за кр. Коші.

$(\mathbb{Q}, |x-y|)$ - не повний.

Твердження: $C_{[a,b]}$ - повний метричний простір.

Доведення.

Нехай $\{x_n(t)\} \subset C_{[a,b]}$, припустимо, що $\{x_n\}$ - фундаментальна.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N}: \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$

$$\max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_{n+p}(t)| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall t \in [a,b] \quad |x_n(t) - x_{n+p}(t)| < \varepsilon$$

Нехай $t_0 \in [a,b]$ - довільна точка. Маємо

$\underbrace{|x_n(t_0) - x_{n+p}(t_0)|}_{\text{числа}} < \varepsilon \Leftrightarrow$ числова послідовність $\{x_n(t_0)\}$ - фундаментальна

Отже $\{x_n(t_0)\}$ - збіжна

Позначимо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t_0) = x(t_0)$

Таким чином, маємо функцію $\forall t \in [a,b] \to$

$\to \lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$.

$(x_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} x(t)$ поточково$)$

Залишилось довести, що $x(t)$ - неперервна,

тобто належить $C_{[a,b]}$

так $|x_n(t) - x_{n+p}(t)| < \varepsilon$

$t \in [a,b]$

$$\forall t \in [a,b] \quad |x_n(t) - \underbrace{x_{n+p}(t)}_{x(t)}| < \varepsilon, \ p \to \infty$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N)\ \forall t \in [a,b] \quad |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{x_n(t)\} \to x(t)$ - рівномірно!

$x_n(t) \in C_{[a,b]} \Rightarrow x(t)$ - неперервно. $(\in C_{[a,b]})$

неперер.

- X - множина непер. функції.

$$\rho(x(t), y(t)) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

то $\tilde{L}_{2[a,b]}$ це не повний метричний простір

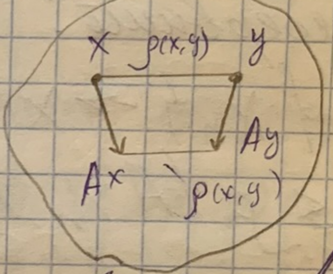
Означення: Правило яке ставить $\forall x \in X$, $y \in X$ називають оператором на заданому просторі X. $A: x \in X \to y \in X$ або $y = Ax$.

Означення: Оператор A - неперервний

$\forall \{x_n\} \to x \Rightarrow \{Ax_n\} \to Ax$.

Означення оператора стиску

Оператор $A: X \to X$ - називається оператором стиску, якщо існує число α, $0 \le \alpha < 1$ таке, що $\rho(Ax, Ay) \le \alpha \rho(x, y)$



Означення нерухомої точки

Точка $x_0 \in X$ називається нерухомою точкою оператора A, якщо $Ax_0 = x_0$.

$X = [0; \frac{\pi}{2}]$ $\rho(x, y) = |x - y|$

$Ax = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

$\rho(Ax; Ay) = \left|\cos\left(\frac{x}{3}\right) - \cos\left(\frac{y}{3}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|\underbrace{\sin\left(\frac{\xi}{3}\right)}_{\le 1}(x - y)\right| \le$

$\le \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3}\rho(x, y)$

$\alpha = \frac{1}{3}$.

Нерух. точка: $Ax = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = x \Rightarrow x = x_0$ - нерухома точка

Теорема Банаха:

Принцип стискуючих відображень

В повному метричному просторі, оператор стиску має єдину нерухому точку

Доведення:

Покажемо, що оператор стиску неперервний:

1) $\{x_n\} \to x$

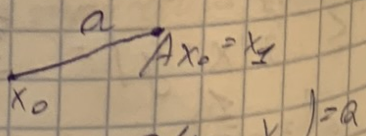
$0 \le \rho(Ax_n, Ax) \le \alpha\, \underbrace{\rho(x_n, x)}_{\to 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(Ax_n, Ax) \to 0 \Rightarrow \{Ax_n\} \to Ax$

2) Покажемо існування нерухомої точки

$x_0 \in X$ - довільна точка

Обчислюємо $Ax_0 = x_1$



$\rho(x_0, x_1) = a$

обчисл $Ax_1 = x_2$

$\rho(Ax_0, Ax_1) \le \alpha\rho(x_0, x_1) = \alpha a$

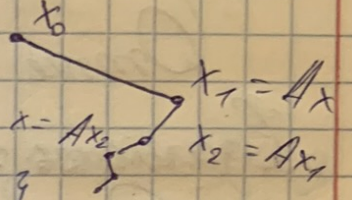
Обчислимо $Ax_2 = x_3$

$\rho(Ax_1, Ax_2) \le \alpha\rho(\underset{Ax_0}{x_1}, \underset{Ax_1}{x_2}) \le \alpha^2 a$

Обчисловимо $Ax_3 = x_1$

$$\rho(Ax_2, Ax_3) \le \alpha\, \rho(\underset{Ax_1}{\underset{\shortparallel}{x_2}}, \underset{Ax_2}{\underset{\shortparallel}{x_3}}) \le \alpha^3 a \quad \text{і т.д.}$$

$$\rho(A \underset{x_n}{\underset{\shortparallel}{x_{n-1}}}, \underset{x_{n+1}}{\underset{\shortparallel}{Ax_n}}) \le \alpha^n a$$



Покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ буде фундаментальна.

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n a$$

За третьою аксіомою метричного простору

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots$$
$$\ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le \alpha^n \cdot a + \alpha^{n+1} \cdot a + \ldots + \alpha^{n+p-1} \cdot a \le$$

$$\le \alpha^n \cdot a + \alpha^{n+1} \cdot a + \ldots = [0 \le \alpha < 1] = \frac{a \cdot \alpha^n}{1-\alpha}$$

$$n \to \infty \quad \frac{a \cdot \alpha^n}{1-\alpha} \to 0 \Rightarrow \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$$

$\{x_n\}$ - фунд., простір повний $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$

$$\rho(x_n, x_{n+p}) < \frac{a \cdot \alpha^n}{1-\alpha}, \quad p \to +\infty$$

$$\rho(x_n, \bar{x}) < \frac{a \cdot \alpha^n}{1-\alpha}, \quad x_n \approx \bar{x}, \quad \delta = \frac{\alpha^n a}{1-a}$$

$$x_0, \underset{Ax_0}{\underset{\shortparallel}{x_1}}, \underset{Ax_1}{\underset{\shortparallel}{x_2}}, \underset{Ax_2}{\underset{\shortparallel}{x_3}}, \ldots \to \bar{x}$$

$$Ax_0, Ax_1, Ax_2 \ldots \to \bar{x}$$

$$Ax_n \to \bar{x}$$

З іншого боку оператор стиску неперервний,
тобто $x_n \to \bar{x} \Rightarrow Ax_n \to A\bar{x}$, з
теореми про єдиність границі: $A\bar{x} = \bar{x}$

Отже існування нерухомої точки доведено

Єдиність: нехай, $A\bar{x} = \bar{x}$ і $A\bar{y} = \bar{y}$.

Розглядаємо $0 \le \rho(\underset{\bar{x}}{\underset{\shortparallel}{A\bar{x}}}, \underset{\bar{y}}{\underset{\shortparallel}{A\bar{y}}}) \le \alpha\, \rho(\bar{x}, \bar{y})$

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) \le \alpha\, \rho(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\underbrace{\rho(\bar{x}, \bar{y})}_{\ge 0}\underbrace{(1-\alpha)}_{> 0} \le 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho(x, y) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ ■

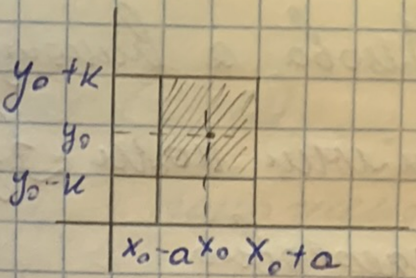
Теорема Пікара

Про існування і єдиність розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \quad (1) \\ y(x_0) = y_0 \quad (2) \end{cases}$$

Нехай $f(x, y)$ неперервна в деякому прямокутнику $x \in [x_0 - a; x_0 + a]$
$y \in [y_0 - k, y_0 + k]$

з т. Веєрштраса випливає що $f(x,y)$ обмежена на цьому прямокутнику



$\exists M>0 : |f(x,y)| \le M$

Умова теореми: Нехай функція $f(x,y)$ задовольняє дві умови

1) Неперервна в даному прямокутнику

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} |x-x_0| \le a \\ |y-y_0| \le k \end{matrix}\right\},$$

(значить $\exists M>0 \;\; \forall (x,y) \in D \;\; |f(x,y)| \le M$)

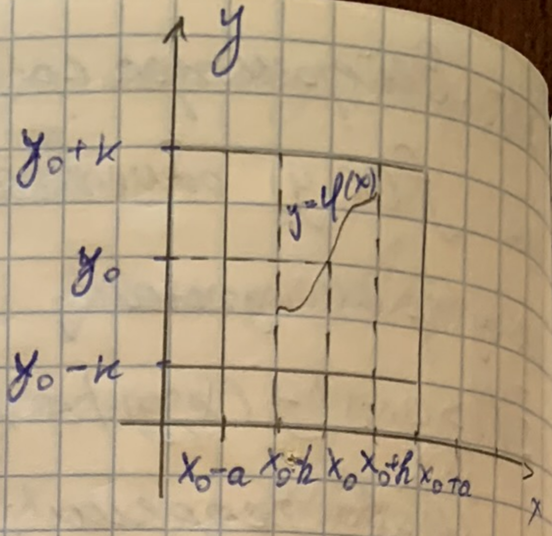
2) $f(x,y)$ задовольняє в цьому прямокутнику умову Ліпшиця по змінній y, рівномірно відносно x: $\exists N>0 \;\; \forall x \in [x_0-a, x_0+a]$, $\forall y_1, y_2 \in [y_0-k, y_0+k]$ виконується

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \le N|y_1-y_2|,$$

тоді задача (1), (2) на даному відрізку $x \in [x_0-h, x_0+h]$ має єдиний неперервно диференційований розв'язок $y=\varphi(x)$.

Число h: $h \le \min\{a, \frac{k}{M}\}$, $h < \frac{1}{N}$.

Умова 2 виконується тільки коли f'_y - неперервна



Доведення:

Ідея доведення: Поряд з задачами (1), (2) розглянемо інтегральне рівняння
$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$ (3). Покажемо, що задача (1), (2) еквівалентна (3). Потім розглядаємо оператор $Ay(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$

Тоді (3) набуде вигляду $y(x) = Ay(x)$. Отже існування і єдиність розв'язку (3), це те саме, що існування і єдиність нерухомої точки оператора A. Для того щоб застосувати до A т. Банаха треба показати, що A діє в повному метричному просторі, і що A є оператором стиску.

I етап: Нехай $\varphi(x)$ розв'язок (1)-(2).

$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\varphi(x_0) = y_0$, покажемо, що $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f(t, \varphi(t))}_{\varphi'(t)} dt$

$$\varphi(x) = y_0 + \underbrace{\varphi(t)\Big|_{x_0}^{x}}_{\varphi(x)-\varphi(x_0)} \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x)$$

$\varphi(x_0) = y_0$

Нехай $\varphi(x)$ - розв'язок (3)

$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt$, підставимо $x = x_0$

$\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \ldots \Rightarrow$ виконується (2)

Продиференціюємо інтегральне рівняння

$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \Rightarrow$ виконується (1)

Тобто $\varphi(x)$ - є розв'язком задачі (1)-(2)

Отже еквівалентність (1)-(2) та (3) доведена.

II етап: Розглядаємо інтегральний оператор

$$Ay(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt,$$

Нехай h - це число, що задовольняє умови теореми.

Розглянемо множину неперервних функцій на $[x_0 - h, x_0 + h]$ з метрикою

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |y_1(x) - y_2(x)|$$, отже

маємо повний метричний простір $C[x_0 - h, x_0 + h]$.

Через $\tilde{C}$ - позначимо підпростір $C[x_0 - h, x_0 + h]$ неперервних функцій $y(x)$, таких, що $|y(x) - y_0| \le k$.

Множина $\tilde{C}$ також буде повним метричним простором, як замкнена підмножина повного метричного простору.

Покажемо, що оператор A діє в просторі $\tilde{C}$. $A: y \in \tilde{C} \to Ay \in \tilde{C}$.

Це означає, що 1) Ay - неперервна на $[x_0 - h, x_0 + h]$, 2) $|Ay - y_0| \le k$

1) $Ay = y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt}_{\text{непер. диф}} \Rightarrow Ay$ - непер. диф.

2) $|Ay - y_0| = |y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt| \le$

$\le \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f|}_{\le M} dt \le M \underbrace{|x - x_0|}_{\le h \le \frac{k}{M}} \le k.$

Встановили, що оператор A діє в повному метричному просторі $\tilde{C}$.

Покажемо, що оператор A є оператором стиску. $\exists\ 0 \le \alpha < 1 : \rho(Ay_1, Ay_2) \le \alpha \rho(y_1, y_2)$

$\rho(Ay_1, Ay_2) = \max |y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt - y_0 -$

$- \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt| = \max |\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))dt| \le$

$\le \max \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \le$

$\le MAX \int_{x_0}^{x} N |y_1 - y_2| dt \le N \int_{x_0}^{x} \underbrace{MAX |y_1(t) - y_2(t)|}_{\rho(y_1, y_2)} dt =$

$= N \rho(y_1 - y_2) |\int_{x_0}^{x} dt| =$

$= N \cdot \underbrace{|x - x_0|}_{h < \frac{1}{N}} \cdot \rho(y_1, y_2) = \alpha \rho(y_1, y_2)$. Тобто A – оператор стиску,

Отже $\exists!\ \varphi(x) \in \tilde{C} : A\varphi(x) = \varphi(x)$

$\underbrace{N \cdot h}_{:=\alpha} < N \cdot \frac{1}{N} = 1$

$$A\varphi(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f(t,\varphi(t))}_{\text{непер. дифф}}\, dt$$

Використання т. БАНАХА при доведенні т. Пікара є кращим, зокрема тому, що т. БАНАХА дає спосіб побудови наближеного розв'язку задачі Коші.

Приклад: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$Ay := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

$$Ay := 1 + \int_0^x y(t)\, dt$$

Беремо початкове наближення $y_1(t) = 1$

$$Ay_1 = 1 + \int_0^x 1\, dt = 1 + x := y_2$$

$$Ay_2 = 1 + \int_0^x (1+t)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$Ay_3 = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

....

$$Ay_n = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$