ГЛАВА II

МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Понятие метрического пространства

1. Определение и основные примеры. Одной из важнейших операций анализа является предельный переход. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние от одной точки до другой. Многие фундаментальные факты анализа не связаны с алгебраической природой действительных чисел (т. е. с тем, что они образуют поле), а опираются лишь на понятие расстояния. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, мы приходим к понятию метрического пространства — одному из важнейших понятий современной математики. Ниже мы изложим основные факты теории метрических пространств и их обобщения — топологических пространств. Результаты этой главы существенны для всего дальнейшего изложения.

Определение. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого *множества* (пространства) X *элементов* (точек) и *расстояния*, т. е. однозначной, неотрицательной, действительной функции $\rho(x, y)$, определенной для любых x и y из X и подчиненной следующим трем аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии),

3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Само метрическое пространство, т. е. пару (X, ρ), мы будем обозначать, как правило, одной буквой:

$$R = (X, \rho).$$

В случаях, когда недоразумения исключены, мы будем зачастую обозначать метрическое пространство тем же символом, что и сам «запас точек» X.

Приведем примеры метрических пространств. Некоторые из этих пространств играют в анализе весьма важную роль.

1. Положив для элементов произвольного множества

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

мы получим, очевидно, метрическое пространство. Его можно назвать пространством изолированных точек.

2. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

образует метрическое пространство $\mathbf{R}^1$.

3. Множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} \qquad (1)$$

называется *n-мерным арифметическим евклидовым пространством* $\mathbf{R}^n$. Справедливость аксиом 1) и 2) для $\mathbf{R}^n$ очевидна. Покажем, что в $\mathbf{R}^n$ выполнена и аксиома треугольника.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)$; тогда аксиома треугольника записывается в виде

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2}. \qquad (2)$$

Полагая $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$, получаем $z_k - x_k = a_k + b_k$, а неравенство (2) принимает при этом вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \qquad (3)$$

Но это неравенство сразу следует из известного неравенства Коши — Буняковского [1])

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \qquad (4)$$

Действительно, в силу этого неравенства имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2;$$

тем самым неравенство (3), а следовательно и (2), доказано.

---

[1]) Неравенство Коши — Буняковского вытекает из тождества

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - b_i a_j)^2,$$

которое проверяется непосредственно.

4. Рассмотрим то же самое множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, но расстояние определим в нем формулой

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|. \tag{5}$$

Справедливость аксиом 1)—3) здесь очевидна. Обозначим это метрическое пространство символом $\mathbf{R}_1^n$.

5. Возьмем снова то же самое множество, что и в примерах 3 и 4, и определим расстояние между его элементами формулой

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k - x_k|. \tag{6}$$

Справедливость аксиом 1)—3) очевидна. Это пространство, которое мы обозначим $\mathbf{R}_\infty^n$, во многих вопросах анализа не менее удобно, чем евклидово пространство $\mathbf{R}^n$.

Последние три примера показывают, что иногда и в самом деле важно иметь различные обозначения для самого метрического пространства и для множества его точек, так как один и тот же запас точек может быть по-разному метризован.

6. Множество $C[a, b]$ всех непрерывных действительных функций, определенных на сегменте $[a, b]$, с расстоянием

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |g(t) - f(t)| \tag{7}$$

также образует метрическое пространство. Аксиомы 1)—3) проверяются непосредственно. Это пространство играет очень важную роль в анализе. Мы будем его обозначать тем же символом $C[a, b]$, что и само множество точек этого пространства. Вместо $C[0, 1]$ мы будем писать просто C.

7. Обозначим через l_2 метрическое пространство, точками которого служат всевозможные последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

а расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}. \tag{8}$$

Из элементарного неравенства $(x_k \pm y_k)^2 \leqslant 2(x_k^2 + y_k^2)$ следует, что функция $\rho(x, y)$ имеет смысл для всех $x, y \in l_2$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$ сходится, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty.$$

Покажем теперь, что функция (8) удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Аксиомы 1) и 2) очевидны, а аксиома треугольника принимает здесь вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k-x_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}. \qquad (9)$$

В силу сказанного выше каждый из трех написанных здесь рядов сходится. С другой стороны, при каждом n справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}$$

(см. пример 4). Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$, получаем (9), т. е. неравенство треугольника в l_2.

8. Рассмотрим, как и в примере 6, совокупность всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, но расстояние определим иначе, а именно, положим

$$\rho(x, y)=\left(\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt\right)^{1/2}. \qquad (10)$$

Такое метрическое пространство мы будем обозначать $C_2[a, b]$ и называть *пространством непрерывных функций с квадратичной метрикой*. Здесь аксиомы 1) и 2) метрического пространства опять-таки очевидны, а аксиома треугольника непосредственно вытекает из интегральной формы неравенства Коши — Буняковского [1])

$$\left(\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right)^2\leqslant\int_a^b x^2(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2(t)\,dt.$$

9. Рассмотрим множество всех ограниченных последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел. Положив

$$\rho(x, y)=\sup_k|y_k-x_k|, \qquad (11)$$

мы получим метрическое пространство, которое обозначим m. Справедливость аксиом 1)—3) очевидна.

[1]) Это неравенство может быть получено, например, из легко проверяемого тождества

$$\left(\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right)^2=\int_a^b x^2(t)\,dt\int_a^b y^2(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b[x(s)\,y(t)-y(s)\,x(t)]^2\,ds\,dt.$$

10. Множество упорядоченных групп из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p}, \tag{12}$$

где p — любое фиксированное число $\geqslant 1$, представляет собой метрическое пространство, которое мы обозначим $\mathbf{R}_p^n$. Справедливость аксиом 1) и 2) здесь опять-таки очевидна. Проверим аксиому 3). Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — три точки из $\mathbf{R}_p^n$. Положим $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$, тогда неравенство

$$\rho_p(x, z) \leqslant \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z),$$

справедливость которого мы должны установить, примет вид

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}. \tag{13}$$

Это — так называемое *неравенство Минковского*. При $p = 1$ неравенство Минковского очевидно (модуль суммы не превосходит суммы модулей), поэтому будем считать, что $p > 1$ [1]).

Доказательство неравенства (13) при $p > 1$ основано на так называемом *неравенстве Гёльдера*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}, \tag{14}$$

где числа $p > 1$ и $q > 1$ связаны условием

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{т. е.} \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{15}$$

Заметим, что неравенство (14) однородно. Это значит, что если оно выполнено для каких-либо двух векторов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$, то оно выполнено и для векторов λa и μb, где λ и μ — произвольные числа. Поэтому неравенство (14) достаточно доказать для случая, когда

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1. \tag{16}$$

Итак, пусть выполнено условие (16); докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant 1. \tag{17}$$

---

[1]) При $p < 1$ неравенство Минковского не имеет места. Иначе говоря, если бы мы захотели рассматривать пространство $\mathbf{R}_p^n$ при $p < 1$, то в таком пространстве не была бы выполнена аксиома треугольника.

Рассмотрим на плоскости (ξ, η) кривую, определяемую уравнением $\eta = \xi^{p-1}$ $(\xi > 0)$, или, что то же самое, уравнением $\xi = \eta^{q-1}$ (рис. 7). Из рисунка ясно, что при любом выборе положительных значений a и b будет $S_1 + S_2 \geqslant ab$. Вычислим площади S_1 и S_2:

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1}\, d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1}\, d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

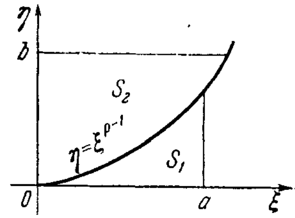

Рис. 7.

Таким образом, справедливо числовое неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Заменив здесь a на $|a_k|$ и b на $|b_k|$ и суммируя по k от 1 до n, получим, учитывая (15) и (16),

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant 1.$$

Неравенство (17), а следовательно, и общее неравенство (14) доказаны. При $p = 2$ неравенство Гельдера (14) переходит в неравенство Коши — Буняковского (4).

Перейдем теперь к доказательству неравенства Минковского. Для этого рассмотрим тождество

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1} |a| + (|a| + |b|)^{p-1} |b|.$$

Заменяя в написанном тождестве a на a_k и b на b_k и суммируя по k от 1 до n, получим

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{p-1} |b_k|.$$

Применяя теперь к каждой из двух сумм, стоящих справа, неравенство Гёльдера и учитывая, что $(p-1)q = p$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/q} \left(\left[\sum_{k=1} |a_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right]^{1/p}\right).$$

Деля обе части этого неравенства на

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/q},$$

получим

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p},$$

откуда сразу следует неравенство (13). Тем самым установлена аксиома треугольника в пространстве $\mathbf{R}_p^n$.

Рассмотренная в этом примере метрика ρ_p превращается в евклидову метрику (пример 3) при $p = 2$ и в метрику примера 4 при $p = 1$. Можно показать, что метрика

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k - x_k|,$$

введенная в примере 5, является предельным случаем метрики $\rho_p(x, y)$, именно:

$$\rho_\infty(x, y) = \lim_{p \to \infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k - x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Из неравенства

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

установленного выше, легко выводится и *интегральное неравенство Гельдера*

$$\int_a^b |x(t)\,y(t)|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q},$$

справедливое для любых функций $x(t)$ и $y(t)$, для которых стоящие справа интегралы имеют смысл. Отсюда в свою очередь получается *интегральное неравенство Минковского*

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

11. Укажем еще один интересный пример метрического пространства. Его элементами являются всевозможные последовательности действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty,$$

где $p \geqslant 1$ — некоторое фиксированное число, а расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k - x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{18}$$

Это метрическое пространство мы обозначим l_p.

В силу неравенства Минковского (13) имеем при любом n

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Так как, по предположению, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$$

сходятся, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} < \infty. \quad (19)$$

Таким образом, доказано, что формула (18), определяющая расстояние в l_p, действительно имеет смысл для любых $x, y \in l_p$. Одновременно неравенство (19) показывает, что в l_p выполнена аксиома треугольника. Остальные аксиомы очевидны.

Неограниченное количество дальнейших примеров дает следующий прием. Пусть $R = (X, \rho)$ — метрическое пространство и M — любое подмножество в X. Тогда M с той же функцией $\rho(x, y)$, которую мы считаем теперь определенной для x и y из M, тоже представляет собой метрическое пространство; оно называется *подпространством* пространства R.

2. Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия. Пусть X и Y — два метрических пространства и f — отображение пространства X в Y. Таким образом, каждому $x \in X$ ставится в соответствие некоторый элемент $y = f(x)$ из Y. Это отображение называется *непрерывным* в точке $x_0 \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ таких, что

$$\rho(x, x_0) < \delta,$$

выполнено неравенство

$$\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(здесь ρ — расстояние в X, а ρ_1 — расстояние в Y). Если отображение f непрерывно во всех точках пространства X, то говорят, что f *непрерывно* на X. Если X и Y — числовые множества, т. е. f — числовая функция, определенная на некотором подмножестве X числовой оси, то приведенное определение непрерывности отображения превращается в хорошо известное из элементарного анализа определение непрерывности функции.

Аналогично можно определить непрерывную функцию (отображение) f от нескольких переменных $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ (где $X_1, \ldots, X_n$ — метрические пространства) со значениями в метрическом пространстве Y.

Заметим, в этой связи, что само расстояние $\rho(x, y)$, если рассматривать его как функцию переменных x и y из X, непрерывно. Это сразу же следует из неравенства

$$|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_0, x) + \rho(y_0, y),$$

легко выводимого из неравенства треугольника.

Если отображение f: $X \to Y$ взаимно однозначно, то существует обратное отображение $x = f^{-1}(y)$ пространства Y на пространство X. Если отображение f взаимно однозначно и взаимно непрерывно (т. е. f и f^{-1} — непрерывные отображения), то оно называется *гомеоморфным отображением* или *гомеоморфизмом*, а сами пространства X и Y, между которыми можно установить гомеоморфизм, называются *гомеоморфными* между собой. Примером гомеоморфных метрических пространств могут служить вся числовая прямая $(-\infty, \infty)$ и интервал, например, интервал $(-1, 1)$. В этом случае гомеоморфизм устанавливается формулой

$$y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

Важным частным случаем гомеоморфизма является так называемое изометрическое отображение.

Говорят, что биекция f между метрическими пространствами $R = (X, \rho)$ и $R' = (Y, \rho')$ является *изометрией*, если

$$\rho(x_1, x_2) = \rho'(f(x_1), f(x_2))$$

для любых $x_1, x_2 \in R$. Пространства R и R', между которыми можно установить изометрическое соответствие, называются *изометричными*.

Изометрия пространств R и R' означает, что метрические связи между их элементами одни и те же; различной может быть лишь природа их элементов, что с точки зрения теории метрических пространств несущественно. В дальнейшем изометричные между собой пространства мы будем рассматривать просто как тождественные.

К изложенным здесь понятиям (непрерывность, гомеоморфизм) мы вернемся, с более общей точки зрения, в конце § 5 этой главы.

§ 2. Сходимость. Открытые и замкнутые множества

1. Предельные точки. Замыкание. Мы введем здесь некоторые понятия теории метрических пространств. Эти понятия мы неоднократно используем в дальнейшем.

Открытым шаром $B(x_0, r)$ в метрическом пространстве R мы будем называть совокупность точек $x \in R$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) < r.$$

Точка x_0 называется *центром* этого шара, а число r — его *радиусом*.

Замкнутым шаром $B[x_0, r]$ мы назовем совокупность точек $x \in R$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) \leqslant r.$$

Открытый шар радиуса ε с центром x_0 мы будем называть также *ε-окрестностью* точки x_0 и обозначать символом $O_\varepsilon(x_0)$.

Упражнение. Привести пример метрического пространства и таких двух шаров $B(x, \rho_1)$, $B(y, \rho_2)$ в нем, что $\rho_1 > \rho_2$, и тем не менее $B(x, \rho_1) \subset B(y, \rho_2)$.

Множество $M \subset R$ называется *ограниченным*, если оно содержится целиком в некотором шаре.

Точка $x \in R$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M. Совокупность всех точек прикосновения множества M обозначается $[M]$ и называется *замыканием* этого множества. Таким образом, мы определили для множеств метрического пространства *операцию замыкания* — переход от множества M к его замыканию $[M]$.

Теорема 1. *Операция замыкания обладает следующими свойствами*:

1) $M \subset [M]$,
2) $[[M]] = [M]$,
3) *если* $M_1 \subset M_2$, *то* $[M_1] \subset [M_2]$,
4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как всякая точка, принадлежащая M, является для M точкой прикосновения. Докажем второе.

Пусть $x \in [[M]]$. Тогда в любой окрестности $O_\varepsilon(x)$ этой точки найдется точка $x_1 \in [M]$. Положим $\varepsilon - \rho(x, x_1) = \varepsilon_1$ и рассмотрим шар $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Этот шар целиком лежит внутри шара $O_\varepsilon(x)$. Действительно, если $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, то $\rho(z, x_1) < \varepsilon_1$, и так как $\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$, то по аксиоме треугольника

$$\rho(z, x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

т. е. $z \in O_\varepsilon(x)$. Так как $x_1 \in [M]$, то в $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ найдется точка $x_2 \in M$. Но тогда $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. Так как $O_\varepsilon(x)$ — произвольная окрестность точки x, то $x \in [M]$. Второе утверждение доказано.

Третье свойство очевидно. Докажем, наконец, четвертое свойство.

Если $x \in [M_1 \cup M_2]$, то x содержится по крайней мере в одном из множеств $[M_1]$ или $[M_2]$, т. е.

$$[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2].$$

Так как $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ и $M_2 \subset M_1 \cup M_2$, то обратное включение следует из свойства 3). Теорема доказана полностью.

Точка $x \in R$ называется *предельной точкой* множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

Предельная точка может принадлежать, а может и не принадлежать M. Например, если M — множество рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$, то каждая точка этого отрезка — предельная для M.

Точка x, принадлежащая M, называется *изолированной точкой* этого множества, если в достаточно малой ее окрестности $O_\varepsilon(x)$ нет точек из M, отличных от x. Предлагаем читателю доказать в качестве упражнения следующее утверждение:

Всякая точка прикосновения множества M есть либо предельная, либо изолированная точка этого множества.

Отсюда можно заключить, что замыкание $[M]$ состоит, вообще говоря, из точек трех типов:

1) изолированные точки множества M;

2) предельные точки множества M, принадлежащие M;

3) предельные точки множества M, не принадлежащие M.

Таким образом, замыкание $[M]$ получается присоединением к M всех его предельных точек.

2. Сходимость. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность точек в метрическом пространстве R. Говорят, что эта последовательность *сходится к точке* x, если каждая окрестность $O_\varepsilon(x)$ точки x содержит все точки x_n, начиная с некоторой, т. е. если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N_ε, что $O_\varepsilon(x)$ содержит все точки x_n с $n > N_\varepsilon$. Точка x называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Это определение можно, очевидно, сформулировать еще и следующим образом: последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, если

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = 0.$$

Непосредственно из определения предела вытекает, что 1) никакая последовательность не может иметь двух различных пределов, и что 2) если последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x, то и всякая ее подпоследовательность сходится к той же самой точке.

Следующая теорема устанавливает тесную связь между понятиями точки прикосновения и предела.

Теорема 2. *Для того чтобы точка x была точкой прикосновения множества M, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\}$ точек из M, сходящаяся к x.*

Доказательство. Условие необходимо, так как если x — точка прикосновения множества M, то в каждой ее окрестности $O_{1/n}(x)$ содержится хотя бы одна точка $x_n \in M$. Эти точки образуют последовательность, сходящуюся к x. Достаточность очевидна.

Если x — предельная точка множества M, то точки $x_n \in O_{1/n}(x) \cap M$, отвечающие разным n, можно выбрать попарно различными. Таким образом, *для того чтобы точка x была предельной для M, необходимо и достаточно, чтобы в M существовала последовательность попарно различных точек, сходящаяся к x.*

Понятие непрерывности отображения метрического пространства X в метрическое пространство Y, введенное в § 1, можно теперь сформулировать в терминах сходимости последовательностей. Именно, отображение $y = f(x)$ непрерывно в точке x_0, если для всякой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ сходится к $y_0 = f(x_0)$. Доказательство равносильности этого определения приведенному в § 1 ничем не отличается от доказательства равносильности двух определений непрерывности («на языке ε, δ» и «на языке последовательностей») функций числового аргумента и может быть предоставлено читателю.

3. Плотные подмножества. Пусть A и B — два множества в метрическом пространстве R. Множество A называется *плотным* в B, если $[A] \supset B$. В частности, множество A называется *всюду плотным* (в пространстве R), если его замыкание $[A]$ совпадает со всем пространством R. Например, множество рациональных чисел всюду плотно на числовой прямой. Множество A называется *нигде не плотным*, если оно не плотно ни в одном шаре, т. е. если в каждом шаре $B \subset R$ содержится другой шар B', не имеющий с A ни одной общей точки.

Примеры пространств, имеющих всюду плотное счетное множество. Пространства, в которых имеется счетное всюду плотное множество, называют *сепарабельными*. Рассмотрим с этой точки зрения примеры, которые приведены в § 1.

1. «Дискретное» пространство, описанное в примере 1 § 1, содержит счетное всюду плотное в нем множество тогда и только тогда, когда оно само состоит лишь из счетного числа точек. Дело в том, что замыкание $[M]$ любого множества M в этом пространстве совпадает с M.

Все пространства, перечисленные в примерах 2—8 § 1, содержат счетные всюду плотные множества. Укажем в каждом из них по такому множеству, настоятельно рекомендуя читателю провести подробные доказательства.

2. На действительной оси $\mathbf{R}^1$ — рациональные точки.

3—5. В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ и в пространствах $\mathbf{R}_1^n$, $\mathbf{R}_\infty^n$ — совокупность векторов с рациональными координатами.

6. В пространстве $C[a, b]$ — совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами.

7. В пространстве l_2 — совокупность последовательностей, в каждой из которых все члены рациональны и лишь конечное (свое для каждой последовательности) число этих членов отлично от нуля.

8. В пространстве $C_2[a, b]$ — совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами.

Вместе с тем *пространство ограниченных последовательностей m* (пример 9 § 1) несепарабельно.

Действительно, рассмотрим всевозможные последовательности, состоящие из нулей и единиц. Они образуют множество мощности континуума (так как между ними и подмножествами натурального ряда можно установить взаимно однозначное соответствие). Расстояние между двумя такими точками, определяемое формулой (11) § 1, равно 1. Окружим каждую из этих точек открытым шаром радиуса 1/2. Эти шары не пересекаются. Если некоторое множество всюду плотно в m, то каждый из построенных шаров должен содержать хотя бы по одной точке из этого множества, и, следовательно, оно не может быть счетным.

4. Открытые и замкнутые множества. Рассмотрим важнейшие типы множеств в метрическом пространстве, а именно, открытые и замкнутые множества.

Множество M, лежащее в метрическом пространстве R, называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием: $[M] = M$. Иначе говоря, множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

В силу теоремы 1 замыкание любого множества M есть замкнутое множество. Из той же теоремы вытекает, что $[M]$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее M. (Докажите это!)

Примеры. 1. Всякий отрезок $[a, b]$ числовой прямой есть замкнутое множество.

2. Замкнутый шар представляет собой замкнутое множество. В частности, в пространстве $C[a, b]$ множество функций f, удовлетворяющих условию $|f(t)| \leqslant K$, замкнуто.

3. Множество функций в $C[a, b]$, удовлетворяющих условию $|f(t)| < K$ (открытый шар), не замкнуто; его замыкание есть совокупность функций, удовлетворяющих условию $|f(t)| \leqslant K$.

4. Каково бы ни было метрическое пространство R, пустое множество $\varnothing$ и все R замкнуты.

5. Всякое множество, состоящее из конечного числа точек, замкнуто.

Основные свойства замкнутых множеств можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пересечение любого числа и сумма любого конечного числа замкнутых множеств суть замкнутые множества.*

Доказательство. Пусть $F = \bigcap F_\alpha$ — пересечение замкнутых множеств F_α и пусть x — предельная точка для F. Это означает, что любая ее окрестность $O_\varepsilon(x)$ содержит бесконечно много точек из F. Но тогда тем более $O_\varepsilon(x)$ содержит бесконечно много точек из каждого F_α и, следовательно, так как все F_α замкнуты, точка x принадлежит каждому F_α; таким образом, $x \in F = \bigcap F_\alpha$, т. е. F замкнуто.

Пусть теперь F — сумма конечного числа замкнутых множеств: $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$, и пусть точка x не принадлежит F. Покажем, что x не может быть предельной для F. Действительно, x не принадлежит ни одному из замкнутых множеств F_i, следовательно, не является предельной ни для одного из них. Поэтому для каждого i можно найти такую окрестность $O_{\varepsilon_i}(x)$ точки x, которая содержит не более чем конечное число точек из F_i. Взяв из окрестностей $O_{\varepsilon_1}(x), \ldots, O_{\varepsilon_n}(x)$ наименьшую, мы получим окрестность $O_\varepsilon(x)$ точки x, содержащую не более чем конечное число точек из F.

Итак, если точка x не принадлежит F, то она не может быть предельной для F, т. е. F замкнуто. Теорема доказана.

Точка x называется *внутренней точкой* множества M, если существует окрестность $O_\varepsilon(x)$ этой точки, целиком содержащаяся в M.

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*.

Примеры. 6. Интервал (a, b) числовой прямой $\mathbf{R}^1$ есть открытое множество; действительно, если $a < \alpha < b$, то $O_\varepsilon(\alpha)$, где $\varepsilon = \min(\alpha - a,\ b - \alpha)$, целиком содержится в интервале (a, b).

7. Открытый шар $B(a, r)$ в любом метрическом пространстве R есть открытое множество. Действительно, если $x \in B(a, r)$, то $\rho(a, x) < r$. Положим $\varepsilon = r - \rho(a, x)$. Тогда $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$.

8. Множество непрерывных функций на $[a, b]$, удовлетворяющих условию $f(t) < g(t)$, где $g(t)$ — некоторая фиксированная непрерывная функция, представляет собой открытое подмножество пространства $C[a, b]$.

Теорема 4. *Для того чтобы множество M было открыто, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $R \setminus M$ до всего пространства R было замкнуто.*

Доказательство. Если M открыто, то каждая точка x из M имеет окрестность, целиком принадлежащую M, т. е. не имеющую ни одной общей точки с $R \setminus M$. Таким образом, ни одна из точек, не принадлежащих $R \setminus M$, не может быть точкой прикосновения для $R \setminus M$, т. е. $R \setminus M$ замкнуто. Обратно, если $R \setminus M$ замкнуто, то любая точка из M имеет окрестность, целиком лежащую в M, т. е. M открыто.

Так как пустое множество и все R замкнуты и в то же время служат дополнениями друг друга, то *пустое множество и все R открыты.*

Из теоремы 3 и из принципа двойственности (пересечение дополнений равно дополнению суммы, сумма дополнений равна дополнению пересечения, см. стр. 15) вытекает следующая важная теорема, двойственная теореме 3.

Теорема 3′. *Сумма любого (конечного или бесконечного) числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств суть открытые множества.*

Множества, принадлежащие σ-алгебре, порожденной всеми открытыми и замкнутыми подмножествами пространства R, называются *борелевскими множествами.*

5. Открытые и замкнутые множества на прямой. Структура открытых и замкнутых множеств в том или ином метрическом пространстве может быть весьма сложной. Это относится к открытым и замкнутым множествам даже евклидова пространства двух или большего числа измерений. Однако в одномерном случае, т. е. на прямой, исчерпывающее описание всех открытых множеств (а следовательно, и всех замкнутых) не представляет труда. Оно дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Всякое открытое множество на числовой прямой представляет собой сумму конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов*[1].

Доказательство. Пусть G — открытое множество на прямой. Введем для точек из G отношение эквивалентности, считая, что $x \sim y$, если существует такой интервал (α, β), что $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$. Очевидно, это отношение рефлексивно и симметрично, оно и транзитивно, так как если $x \sim y$ и $y \sim z$, то существуют такие интервалы (α, β) и (γ, δ), что

$$x, \ y \in (\alpha, \beta) \subset G \quad \text{и} \quad y, \ z \in (\gamma, \delta) \subset G.$$

Но тогда $\gamma < \beta$ и интервал (α, δ) лежит целиком в G и содержит точки x и z. Следовательно, G распадается на непересекаю-

[1] Множества вида $(-\infty, \infty)$, (α, ∞) и $(-\infty, \beta)$ мы при этом также включаем в число интервалов.

$x \sim y$, если существует открытое связное подмножество H из G, накрывающее x и y:

$$x,\ y \in H \subset G.$$

Как и в случае прямой, легко проверяется транзитивность и поэтому G распадается на непересекающиеся классы: $G = \bigcup I$. Эти классы — открытые компоненты G. Число их не более чем счетно.

В случае $n = 1$, т. е. на прямой, всякое связное открытое множество есть интервал (в число интервалов включаются и бесконечные интервалы $(-\infty, a)$, (b, ∞) и $(-\infty, \infty)$). Таким образом, теорема 5 о строении открытых множеств на прямой состоит из двух утверждений): а) всякое открытое множество на прямой есть сумма конечного или счетного числа компонент и б) связное открытое множество на прямой есть интервал. Первое из этих утверждений верно и для множеств в n-мерных евклидовых пространствах (и допускает дальнейшие обобщения), а второе относится именно к прямой.

§ 3. Полные метрические пространства

1. Определение и примеры полных метрических пространств. С первых шагов изучения математического анализа мы видим, сколь важную роль играет в анализе свойство полноты числовой прямой, т. е. тот факт, что всякая фундаментальная последовательность действительных чисел сходится к некоторому пределу. Числовая прямая служит простейшим примером так называемых полных метрических пространств, основные свойства которых мы рассмотрим в этом параграфе.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства R мы будем называть *фундаментальной*, если она удовлетворяет критерию Коши, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N_ε, что $\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ для всех $n' > N_\varepsilon$, $n'' > N_\varepsilon$.

Из аксиомы треугольника непосредственно следует, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. Действительно, если $\{x_n\}$ сходится к x, то для данного $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N_ε, что $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ для всех $n > N_\varepsilon$. Тогда $\rho(x_{n'}, x_{n''}) \leqslant \rho(x_{n'}, x) + \rho(x_{n''}, x) < \varepsilon$ для любых $n' > N_\varepsilon$ и $n'' > N_\varepsilon$.

Определение 1. Если в пространстве R любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется *полным*.

Примеры. Все пространства, рассмотренные в § 1, за исключением указанного в примере 8, полные. Действительно:

1. В пространстве изолированных точек (пример 1 § 1) фундаментальны только стационарные последовательности, т. е. такие, в которых, начиная с некоторого номера, повторяется все время одна и та же точка. Всякая такая последовательность, конечно, сходится, т. е. это пространство полно.

2. Полнота евклидова пространства $\mathbf{R}^1$ — совокупности действительных чисел — известна из анализа.

3. Полнота евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ непосредственно вытекает из полноты $\mathbf{R}^1$. В самом деле, пусть $\{x^{(p)}\}$ — фундамен-

тальная последовательность точек из $\mathbf{R}^n$; это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N_\varepsilon$, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)^2 < \varepsilon^2$$

при всех p, q бо́льших, чем N. Здесь $x^{(p)} = \left\{x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}$. Тогда для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ получаем соответствующее неравенство для координаты $x_k^{(p)}$:

$$\left| x_k^{(p)} - x_k^{(q)} \right| < \varepsilon$$

для всех p, $q > N$, т. е. $\left\{x_k^{(p)}\right\}$ — фундаментальная числовая последовательность. Положим

$$x_k = \lim_{p \to \infty} x_k^{(p)} \quad \text{и} \quad x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{p \to \infty} x^{(p)} = x.$$

4—5. Полнота пространств $\mathbf{R}_\infty^n$ и $\mathbf{R}_1^n$ доказывается совершенно аналогично.

6. Докажем полноту пространства $C[a, b]$. Пусть $\{x_n(t)\}$ — некоторая фундаментальная последовательность в $C[a, b]$. Это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$| x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon$$

при n, $m > N$ для всех t, $a \leqslant t \leqslant b$. Отсюда вытекает, что последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится. Как известно, в этом случае ее предел $x(t)$ будет непрерывной функцией. Устремляя в предыдущем неравенстве m к бесконечности, получим

$$| x_n(t) - x(t) | \leqslant \varepsilon$$

для всех t и для всех $n > N$, а это и означает, что $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C[a, b]$.

7. Пространство l_2. Пусть $\{x^{(n)}\}$ — фундаментальная последовательность в l_2. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$\rho^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m > N. \tag{1}$$

Здесь $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right)$. Из (1) следует, что при любом k $\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon$, т. е. при каждом k последовательность действительных чисел $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ фундаментальна и потому сходится.

Положим $x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$. Обозначим через x последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$. Нужно показать, что:

а) $$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty, \quad \text{т. е.} \quad x \in l_2,$$

б) $$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0.$$

Сделаем это. Из неравенства (1) следует, что для любого фиксированного M

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon.$$

В этой сумме теперь только конечное число слагаемых, и мы можем, зафиксировав n, перейти к пределу при $m \to \infty$. Получим

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon.$$

Это равенство верно при любом M. Восстановим бесконечный ряд, переходя к пределу при $M \to \infty$; получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Из сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ (в силу элементарного неравенства $(a+b)^2 \leqslant \leqslant 2(a^2+b^2)$), т. е. утверждение а) доказано. Далее, так как ε произвольно мало́, то неравенство (2) означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2} = 0,$$

т. е. $x^{(n)} \to x$ в метрике l_2. Утверждение б) доказано.

8. Легко убедиться в том, что пространство $C_2[a, b]$ не полно. Рассмотрим, например, последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -1 \leqslant t \leqslant -1/n, \\ nt & \text{при} \quad -1/n \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1 & \text{при} \quad 1/n \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Она фундаментальна в $C_2[-1, 1]$, так как

$$\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))^2\, dt \leqslant \frac{2}{\min(n, m)}.$$

Однако она не сходится ни к какой функции из $C_2[-1, 1]$. Действительно, пусть f — некоторая функция из $C_2[-1, 1]$ и ψ — разрывная функция, равная -1 при $t < 0$ и $+1$ при $t \geqslant 0$.

В силу интегрального неравенства Минковского (справедливого, очевидно, и для кусочно-непрерывных функций) имеем

$$\left(\int_{-1}^{1}(f(t)-\psi(t))^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{-1}^{1}(f(t)-\varphi_n(t))^2\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\psi(t))^2\,dt\right)^{1/2}.$$

В силу непрерывности функции f интеграл в левой части отличен от нуля. Далее, ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\psi(t))^2\,dt = 0.$$

Поэтому $\int_{-1}^{1}(f(t)-\varphi_n(t))^2\,dt$ не может стремиться к нулю при $n\to\infty$.

Упражнение. Доказать, что пространство всех ограниченных последовательностей (пример 9 § 1) полно.

2. **Теорема о вложенных шарах.** В анализе широко используется так называемая лемма о вложенных отрезках. В теории метрических пространств аналогичную роль играет следующая теорема, называемая теоремой о вложенных шарах.

Теорема 1. *Для того чтобы метрическое пространство R было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Доказательство. Необходимость. Пусть пространство R полно и пусть $B_1, B_2, B_3, \ldots$ — последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров. Пусть r_n — радиус, а x_n — центр шара B_n. Последовательность центров $\{x_n\}$ фундаментальна, поскольку $\rho(x_n, x_m) < r_n$ при $m > n$, а $r_n \to 0$ при $n\to\infty$. Так как R полно, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует. Положим $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; тогда $x \in \bigcap\limits_n B_n$. Действительно, шар B_n содержит все точки последовательности $\{x_k\}$, за исключением, быть может, точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Таким образом, x является точкой прикосновения для каждого шара B_n. Но так как B_n — замкнутое множество, то $x \in B_n$ для всех n.

$S_1 \cap M_1 = \varnothing$. Поскольку множество M_2 не плотно в S_1, по той же причине в шаре S_1 содержится замкнутый шар S_2 радиуса меньше 1/3, для которого $S_2 \cap M_2 = \varnothing$ и т. д. Мы получаем последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $\{S_n\}$, радиусы которых стремятся к нулю, причем $S_n \cap M_n = \varnothing$. В силу теоремы 1 пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ содержит некоторую точку x. Эта точка по построению не принадлежит ни одному из множеств M_n, следовательно, $x \notin \bigcup_n M_n$, т. е. $R \neq \bigcup_n M_n$, в противоречии с предположением.

В частности, *всякое полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.* Действительно, в таком пространстве каждое множество, содержащее лишь одну точку, нигде не плотно.

4. Пополнение пространства. Если пространство R не полно, то его всегда можно включить некоторым (и, по существу, единственным) способом в полное пространство.

Определение 2. Пусть R — метрическое пространство. Полное метрическое пространство R^* называется *пополнением* пространства R, если:

1) R является подпространством пространства R^*;
2) R всюду плотно в R^*, т. е. $[R] = R^*$.

(Здесь $[R]$ означает, естественно, замыкание пространства R в R^*.)

Например, пространство всех действительных чисел является пополнением пространства рациональных чисел.

Теорема 3. *Каждое метрическое пространство R имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из R.*

Доказательство. Начнем с единственности. Нам нужно доказать, что если R^* и R^{**} — два пополнения пространства R, то существует такое взаимно однозначное отображение φ пространства R^* на R^{**}, что

1) $\varphi(x) = x$ для всех $x \in R$;
2) если $x^* \leftrightarrow x^{**}$ и $y^* \leftrightarrow y^{**}$, то $\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**})$, где ρ_1 — расстояние в R^*, а ρ_2 — расстояние в R^{**}.

Отображение φ определяется следующим образом. Пусть x^* — произвольная точка из R^*. Тогда, по определению пополнения существует последовательность $\{x_n\}$ точек из R, сходящаяся к x^*. Точки $\{x_n\}$ входят и в R^{**}. Так как R^{**} полно, то $\{x_n\}$ сходится в R^{**} к некоторой точке x^{**}. Ясно, что x^{**} не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся в точке x^*. Положим $\varphi(x^*) = x^{**}$. Отображение φ и есть искомое изометрическое отображение.

Действительно, по построению $\varphi(x)=x$ для всех $x \in R$. Далее, пусть

$$\{x_n\} \to x^* \text{ в } R^* \text{ и } \{x_n\} \to x^{**} \text{ в } R^{**},$$
$$\{y_n\} \to y^* \text{ в } R^* \text{ и } \{y_n\} \to y^{**} \text{ в } R^{**};$$

тогда в силу непрерывности расстояния,

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

и, аналогично,

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Следовательно,

$$\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Докажем теперь существование пополнения. Идея этого доказательства та же, что и в канторовой теории действительных чисел. Положение здесь даже проще, чем в теории действительных чисел, так как там для вновь вводимых объектов — иррациональных чисел — требуется еще определить все арифметические операции.

Пусть R — произвольное метрическое пространство. Назовем две фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$ из R эквивалентными (обозначение $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$), если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n') = 0$. Название «эквивалентность» оправдано, поскольку это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отсюда следует, что все фундаментальные последовательности, которые можно составить из точек пространства R, распадаются на классы эквивалентных между собой последовательностей. Определим теперь пространство R^*. За его точки мы примем всевозможные классы эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей, а расстояние между ними зададим следующим образом. Пусть x^* и y^* — два таких класса. Выберем в каждом из этих классов по одному представителю, т. е. по некоторой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Положим[1])

$$\rho(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{3}$$

Докажем корректность этого определения расстояния, т. е. докажем, что предел (3) существует и не зависит от выбора представителей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$.

В силу неравенства

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \tag{4}$$

---

[1]) Чтобы не усложнять запись мы обозначаем расстояние, в R^* тем же символом ρ, что и расстояние в исходном пространстве R.

получаем, что для всех достаточно больших n и m

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon,$$

так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальные.

Таким образом, последовательность действительных чисел $s_n = \rho(x_n, y_n)$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, имеет предел.

Этот предел не зависит от выбора $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$. Действительно, пусть

$$\{x_n\}, \quad \{x'_n\} \in x^* \quad \text{и} \quad \{y_n\}, \quad \{y'_n\} \in y^*.$$

Выкладка, в точности аналогичная (4), дает

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

Поскольку $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ и $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$, отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Докажем теперь, что в R^* выполнены аксиомы метрического пространства.

Аксиома 1) непосредственно вытекает из определения эквивалентности фундаментальных последовательностей.

Аксиома 2) очевидна.

Проверим теперь аксиому треугольника. Так как в исходном пространстве R аксиома треугольника выполнена, то

$$\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n),$$

т. е.

$$\rho(x^*, z^*) \leqslant \rho(x^*, y^*) + \rho(y^*, z^*).$$

Докажем теперь, что R можно рассматривать как подпространство пространства R^*.

Каждой точке $x \in R$ отвечает некоторый класс эквивалентных фундаментальных последовательностей, именно, совокупность всех последовательностей, сходящихся к точке x. Этот класс непуст, поскольку он содержит стационарную последовательность, все члены которой равны x. При этом, если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то

$$\rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Следовательно, соотнеся каждой точке $x \in R$ класс x^* сходящихся к ней фундаментальных последовательностей, мы изометрически отобразим R в пространство R^*. В дальнейшем мы можем не различать само пространство R и его образ в R^* и рассматривать R как подпространство в R^*.

Покажем теперь, что R всюду плотно в R^*. Действительно, пусть x^* — некоторая точка из R^* и $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем в x^* представителя, т. е. некоторую фундаментальную последовательность $\{x_n\}$. Пусть N таково, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всех $n, m > N$. Тогда имеем

$$\rho(x_n, x^*) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$$

при $n > N$, т. е. произвольная окрестность точки x^* содержит некоторую точку из R. Таким образом, замыкание R в R^* есть все R^*.

Остается доказать полноту R^*. Заметим, прежде всего, что по построению R^* любая фундаментальная последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек из R сходится в R^* к некоторой точке, а именно, к точке $x^* \in R^*$, определяемой самой этой последовательностью. Далее, так как R плотно в R^*, то для любой фундаментальной последовательности $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots$ точек из R^* можно построить эквивалентную ей последовательность $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ точек из R. Для этого достаточно в качестве x_n взять любую точку из R, такую, что $\rho\left(x_n, x_n^*\right) < 1/n$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в R и, по определению, сходится к некоторой точке $x^* \in R^*$. Но тогда к x^* сходится и последовательность $\{x_n^*\}$.

§ 4. Принцип сжимающих отображений и его применения

1. Принцип сжимающих отображений. Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа (например, дифференциальных уравнений), можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки при такого рода отображениях один из простейших и в то же время наиболее важных — так называемый *принцип сжимающих отображений.*

Пусть R — метрическое пространство. Отображение A пространства R в себя называется *сжимающим отображением*, или короче, *сжатием*, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in R$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y). \tag{1}$$

Всякое сжимающее отображение непрерывно. Действительно, если $x_n \to x$, то в силу (1) и $Ax_n \to Ax$.

Точка x называется *неподвижной точкой* отображения A, если $Ax = x$. Иначе говоря, неподвижные точки — это решения уравнения $Ax = x$.

Теорема 1 (Принцип сжимающих отображений). *Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве R, имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка в R. Положим $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$ и т. д.; вообще, $x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0$.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Действительно, считая для определенности $m \geqslant n$, имеем

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^nx_0, A^mx_0) \leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n\{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.$$

Так как $\alpha < 1$, то при достаточно большом n эта величина сколь угодно мала. В силу полноты R последовательность $\{x_n\}$, будучи фундаментальной, имеет предел. Положим

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Тогда в силу непрерывности отображения A

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Итак, существование неподвижной точки доказано. Докажем ее единственность. Если

$$Ax = x, \quad Ay = y,$$

то неравенство (1) принимает вид

$$\rho(x, y) \leqslant \alpha\rho(x, y);$$

так как $\alpha < 1$, отсюда следует, что

$$\rho(x, y) = 0, \quad \text{т. е.} \quad x = y.$$

Упражнение. Показать на примере, что отображение A, удовлетворяющее условию $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ для всех $x \neq y$, может не иметь ни одной неподвижной точки.

2. Простейшие применения принципа сжимающих отображений. Принцип сжимающих отображений можно применять к доказательству теорем существования и единственности решений для уравнений различных типов. Помимо доказательства существования и единственности решения уравнения $Ax = x$, принцип сжимающих отображений дает и фактический метод приближенного нахождения этого решения (**метод последовательных приближений**). Рассмотрим следующие простые примеры.

1. Пусть f — функция, которая определена на сегменте $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|,$$

с константой $K < 1$ и отображает сегмент $[a, b]$ в себя. Тогда f есть сжимающее отображение и, согласно доказанной теореме, последовательность x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... сходится к единственному корню уравнения $x = f(x)$.

В частности, условие сжимаемости выполнено, если функция имеет на сегменте $[a, b]$ производную $f'(x)$, причем $|f'(x)| \leqslant \leqslant K < 1$.

На рис. 9 и 10 изображен ход последовательных приближений в случае $0 < f'(x) < 1$ и в случае $-1 < f'(x) < 0$.

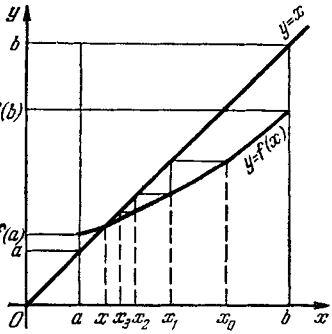

Рис. 9.

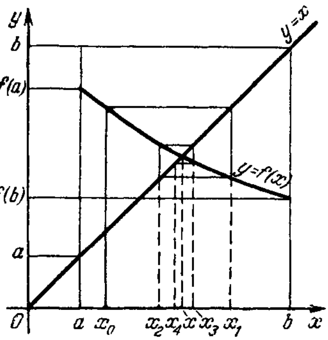

Рис. 10.

Пусть теперь мы имеем дело с уравнением вида $F(x) = 0$, причем $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ и $0 < K_1 \leqslant F'(x) \leqslant K_2$ на $[a, b]$. Введем функцию $f(x) = x - \lambda F(x)$ и будем искать решение уравнения $x = f(x)$, равносильного уравнению $F(x) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Так как $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, то $1 - \lambda K_2 \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \lambda K_1$ и нетрудно подобрать число λ так, чтобы можно было действовать методом последовательных приближений. Это — распространенный метод отыскания корня.

2. Рассмотрим отображение A n-мерного пространства в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если A есть сжатие, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $x = Ax$.

При каких же условиях отображение A будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора метрики в пространстве. Рассмотрим три варианта.

а) Пространство $\mathbf{R}^n_\infty$, т. е. $\rho(x, y) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \max_i |y'_i - y''_i| = \max_i \left|\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}||x'_j - x''_j| \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x'_j - x''_j| =$$
$$= \left(\max_i \sum_j |a_{ij}|\right) \rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

б) Пространство $\mathbf{R}^n_1$, т. е. $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \sum_i |y'_i - y''_i| = \sum_i \left|\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i \sum_j |a_{ij}||x'_j - x''_j| \leqslant \left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right) \rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

в) Пространство $\mathbf{R}^n$, т. е. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. На основании неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\rho^2(y', y'') = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\right)^2 \leqslant \left(\sum_i \sum_j a^2_{ij}\right) \rho^2(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i \sum_j a^2_{ij} \leqslant \alpha < 1. \tag{4}$$

Таким образом, если выполнено хотя бы одно из условий[1]) (2)—(4), то существует одна и только одна точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

[1]) В частности, из любого из условий (2)—(4) вытекает, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

такая, что $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i$, причем последовательные приближения к этому решению имеют вид

$$\begin{gathered} x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right), \\ x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

где

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i,$$

а в качестве $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ можно взять любую точку из $\mathbf{R}^n$.

Каждое из условий (2)—(4) достаточно для того, чтобы отображение $y = Ax$ было сжатием. Относительно условий (2) и (3) можно было бы доказать, что они и необходимы для того, чтобы отображение $y = Ax$ было сжатием (в смысле метрик а) или б) соответственно).

Ни одно из условий (2)—(4) не необходимо для применимости метода последовательных приближений.

Если $|a_{ij}| < 1/n$, то все три условия (2)—(4) выполнены и метод последовательных приближений заведомо применим.

Если $|a_{ij}| \geqslant 1/n$, то ни одно из условий (2)—(4) не выполнено.

3. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений. В предыдущем пункте были даны два простейших примера применения принципа сжимающих отображений в одномерном и в n-мерном пространствах. Однако наиболее существенны для анализа применения этого принципа в бесконечномерных функциональных пространствах. Сейчас мы покажем, как с его помощью можно получить теоремы существования и единственности решения для некоторых типов дифференциальных и интегральных уравнений.

1. Задача Коши. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{5}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \tag{6}$$

причем функция f определена и непрерывна в некоторой плоской области G, содержащей точку (x_0, y_0), и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|.$$

Докажем, что тогда на некотором сегменте $|x-x_0| \leqslant d$ существует, и притом только одно, решение $y=\varphi(x)$ уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию (6) (теорема Пикара).

Уравнение (5) вместе с начальным условием (6) эквивалентно интегральному уравнению

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt. \tag{7}$$

В силу непрерывности функции f имеем $|f(x, y)| \leqslant K$ в некоторой области $G' \subset G$, содержащей точку (x_0, y_0). Подберем $d > 0$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $(x, y) \in G'$, если $|x-x_0| \leqslant d$, $|y-y_0| \leqslant Kd$;
2) $Md < 1$.

Обозначим через C^* пространство непрерывных функций φ, определенных на сегменте $|x-x_0| \leqslant d$ и таких, что $|\varphi(x) - y_0| \leqslant Kd$, с метрикой $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max\limits_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$.

Пространство C^* полно, так как оно является замкнутым подпространством полного пространства всех непрерывных функций на $[x_0-d, x_0+d]$. Рассмотрим отображение $\psi = A\varphi$, определяемое формулой

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt,$$

где $|x-x_0| \leqslant d$. Это отображение переводит полное пространство C^* в себя и является в нем сжатием. Действительно, пусть $\varphi \in C^*$, $|x-x_0| \leqslant d$. Тогда

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \right| \leqslant Kd$$

и, следовательно, $A(C^*) \subset C^*$. Кроме того,

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant Md \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Так как $Md < 1$, то A — сжатие.

Отсюда вытекает, что уравнение $\varphi = A\varphi$ (т. е. уравнение (7)) имеет одно и только одно решение в пространстве C^*.

2. Задача Коши для системы уравнений. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\varphi_i(x_0)=y_{0i}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{9}$$

причем функции f_i определены и непрерывны в некоторой области G пространства R^{n+1}, содержащей точку $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$, и удовлетворяют условию Липшица

$$|f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})-f_i(x, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)})|\leqslant M\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|.$$

Докажем, что тогда на некотором сегменте $|x-x_0|\leqslant d$ существует одно и только одно решение начальной задачи (8), (9), т. е. одна и только одна система функций φ_i, удовлетворяющих уравнениям (8) и начальным условиям (9).

Система (8) вместе с начальными условиями (9) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\varphi_i(x)=y_{0i}+\int_{x_0}^{x}f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\,dt, \qquad i=1, \ldots, n. \tag{10}$$

В силу непрерывности функции f_i ограничены в некоторой области $G'\subset G$, содержащей точку $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$, т. е. существует такое постоянное число K, что $|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)|\leqslant K$.

Подберем $d>0$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $(x, y_1, \ldots, y_n)\in G'$, если $|x-x_0|\leqslant d$, $|y_i-y_{0i}|\leqslant Kd$; $i=1, \ldots, n$;

2) $Md<1$.

Рассмотрим пространство C_n^*, элементами которого являются наборы $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ из n функций, определенных и непрерывных при $|x-x_0|\leqslant d$, и таких, что $|\varphi_i(x)-y_{0i}|\leqslant Kd$. Определим метрику формулой

$$\rho(\varphi, \psi)=\max_{x,\ i}|\varphi_i(x)-\psi_i(x)|.$$

Введенное пространство полно. Отображение $\psi=A\varphi$, задаваемое системой равенств

$$\psi_i(x)=y_{0i}+\int_{x_0}^{x}f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\,dt,$$

есть сжимающее отображение полного пространства C_n^* в себя. Действительно,

$$\psi_i^{(1)}(x)-\psi_i^{(2)}(x)=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left[f_i\left(t, \varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_n^{(1)}(t)\right)-f_i\left(t, \varphi_1^{(2)}(t), \ldots, \varphi_n^{(2)}(t)\right)\right]dt$$

и, следовательно,

$$\max_{x,\, i} |\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)| \leqslant Md \max_{x,\, i} |\varphi_i^{(1)}(x) - \varphi_i^{(2)}(x)|.$$

Отображение A — сжимающее, поскольку $Md < 1$.

Отсюда вытекает, что операторное уравнение $\varphi = A\varphi$ имеет одно и только одно решение в пространстве C_n^*.

4. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.

1. Уравнения Фредгольма. Применим теперь метод сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, т. е. уравнения

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x), \tag{11}$$

где K (так называемое *ядро*) и φ суть данные функции, f — искомая функция, а λ — произвольный параметр.

Мы увидим, что наш метод применим лишь при достаточно малых значениях параметра λ.

Предположим, что $K(x, y)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ и, следовательно, $|K(x, y)| \leqslant M$. Рассмотрим отображение $g = Af$ полного пространства $C[a, b]$ в себя, задаваемое формулой

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x).$$

Имеем

$$\rho(g_1, g_2) = \max |g_1(x) - g_2(x)| \leqslant |\lambda| M(b-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Следовательно, при $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$ отображение A — сжимающее.

Из принципа сжимающих отображений заключаем, что для всякого λ с $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ уравнение Фредгольма имеет единственное непрерывное решение. Последовательные приближения к этому решению $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ имеют вид

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y)\, dy + \varphi(x),$$

где в качестве $f_0(x)$ можно взять любую непрерывную функцию.

2. Нелинейные интегральные уравнения. Принцип сжимающих отображений можно применить и к нелинейному интегральному уравнению вида

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x, y; f(y))\,dy+\varphi(x), \tag{12}$$

где K и φ непрерывны и, кроме того, ядро K удовлетворяет условию Липшица по своему «функциональному» аргументу:

$$|K(x, y; z_1)-K(x, y; z_2)|\leqslant M|z_1-z_2|.$$

В этом случае для отображения $g=Af$ полного пространства $C[a, b]$ в себя, заданного формулой

$$g(x)=\lambda\int_a^b K(x, y; f(y))\,dy+\varphi(x), \tag{13}$$

имеет место неравенство

$$\max|g_1(x)-g_2(x)|\leqslant|\lambda|M(b-a)\max|f_1(x)-f_2(x)|,$$

где $g_1=Af_1$, $g_2=Af_2$. Следовательно, при $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ отображение A будет сжимающим.

3. Уравнения Вольтерра. Рассмотрим, наконец, интегральное уравнение типа Вольтерра

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x, y)f(y)\,dy+\varphi(x). \tag{14}$$

Здесь, в отличие от уравнений Фредгольма, верхний предел в интеграле — переменная величина x. Формально это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, доопределив функцию K равенством: $K(x, y)=0$ при $y>x$.

Однако в случае интегрального уравнения Фредгольма мы были вынуждены ограничиться малыми значениями параметра λ, а к уравнениям Вольтерра принцип сжимающих отображений (и метод последовательных приближений) применим при всех значениях λ. Точнее, речь идет о следующем обобщении принципа сжимающих отображений.

Пусть A — такое непрерывное отображение полного метрического пространства R в себя, что некоторая его степень $B=A^n$ является сжатием; тогда уравнение

$$Ax=x$$

имеет одно и только одно решение.

Действительно, пусть x — неподвижная точка отображения B, т. е. $Bx = x$. Имеем:

$$Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \to x \quad (k \to \infty),$$

ибо отображение B — сжимающее, а потому последовательность $Bx_0, B^2x_0, B^3x_0, \ldots$ для любого $x_0 \in R$ сходится к неподвижной точке x отображения B. Следовательно,

$$Ax = x.$$

Эта неподвижная точка единственна, поскольку всякая точка, неподвижная относительно A, неподвижна и относительно сжимающего отображения A^n, для которого неподвижная точка может быть только одна.

Покажем теперь, что некоторая степень отображения

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x)$$

является сжатием. Пусть f_1 и f_2 — две непрерывные функции на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$|Af_1(x) - Af_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x, y)(f_1(y) - f_2(y))\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| M(x-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Здесь $M = \max |K(x, y)|$. Отсюда

$$|A^2f_1(x) - A^2f_2(x)| \leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max |f_1(x) - f_2(x)|$$

и, вообще,

$$|A^nf_1(x) - A^nf_2(x)| \leqslant |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} m \leqslant |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n!},$$

где $m = \max |f_1(x) - f_2(x)|$.

При любом значении λ число n можно выбрать настолько большим, что

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

Тогда отображение A^n будет сжатием. Итак, уравнение Вольтерра (14) при любом λ имеет решение, и притом единственное.

§ 5. Топологические пространства

1. Определение и примеры топологических пространств. Основные понятия теории метрических пространств (предельная точка, точка прикосновения, замыкание множества и т. д.) мы вводили, опираясь на понятие окрестности или, что, по существу, поставлено в соответствие некоторое множество $[A] \subset X$, называемое *замыканием* A, причем операция перехода от A к $[A]$ обладает свойствами 1)—4), указанными в теореме 1 § 2. Определив после этого замкнутые множества как те, для которых $[A] = A$, легко показать, что этот класс множеств удовлетворяет условиям 1 и 2 (стр. 84), т. е. действительно определяет в X топологию.

Задание метрики — один из важнейших способов введения топологии, хотя и далеко не универсальный. Как мы уже видели, всякое метрическое пространство нормально и удовлетворяет первой аксиоме счетности. В пространстве, лишенном хотя бы одного из этих двух свойств, топологию нельзя задать с помощью какой бы то ни было метрики.

Определение. Топологическое пространство T называется *метризуемым*, если его топологию можно задать с помощью какой-либо метрики.

В силу только что сказанного нормальность пространства и первая аксиома счетности представляет собой необходимые условия метризуемости пространства. Вместе с тем ни каждое из этих условий в отдельности, ни даже их совокупность недостаточны для метризуемости пространства. Однако имеет место следующая теорема, принадлежащая П. С. Урысону:

Для того чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормально.

Необходимость этого условия ясна; доказательство достаточности имеется, например, в [2].

§ 6. Компактность

1. Понятие компактности. Фундаментальную роль в анализе играет следующий факт, известный под названием леммы Гейне — Бореля:

Из любого покрытия отрезка $[a, b]$ числовой прямой интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.

Это утверждение останется справедливым, если вместо интервалов рассматривать любые открытые множества: *из всякого открытого покрытия отрезка $[a, b]$ можно выделить конечное подпокрытие.*

Отправляясь от этого свойства отрезка числовой прямой, введем следующее важное понятие.

Определение. Топологическое пространство T называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Компактное топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости Хаусдорфа, называется *компактом*.

Замечание. Понятие счетной компактности топологического пространства оказалось на самом деле (в противовес компактности) не очень удачным и естественным. Оно возникло так сказать «по инерции». Дело в том, что для метрических пространств (как и для пространств со счетной базой) эти два понятия совпадают (это будет показано в следующем параграфе). При этом для метрических пространств понятие компактности было поначалу дано именно как наличие у каждого бесконечного подмножества предельной точки, т. е. как определение счетной компактности. «Автоматический» перенос этого определения с метрического случая на топологический и привел к понятию счетно-компактного топологического пространства. Иногда в литературе, особенно более старой, термин «компактность» понимается как «счетная компактность», а топологическое пространство, компактное в нашей терминологии, т. е. такое, из каждого открытого покрытия которого можно выделить конечное подпокрытие, называется *бикомпактным.* При этом компактное хаусдорфово пространство (т. е. компакт) именуется *бикомпактом*, а термин «компакт» резервируется для обозначения метрического компактного пространства. Мы будем придерживаться тех терминов (компактность, счетная компактность), которые введены выше; при этом мы и компактные метрические пространства также будем называть компактами, а в тех случаях, когда наличие метрики желательно специально подчеркнуть, — «*метрическими компактами*».

5. Предкомпактные множества. Если множество M, лежащее в некотором хаусдорфовом пространстве T, не замкнуто в T, то M не может быть компактно. Например, ни одно из незамкнутых подмножеств числовой прямой не является компактом. Может, однако, оказаться, что замыкание $[M]$ такого множества M в T уже обладает свойством компактности. Например, этому условию удовлетворяет любое ограниченное подмножество на числовой прямой или в n-мерном пространстве. Введем следующее определение.

Определение. Множество M, лежащее в некотором топологическом пространстве T, называется *предкомпактным* (или *компактным относительно* T), если его замыкание в T компактно. Аналогично, M называется *счетно-предкомпактным* в T, если всякое бесконечное подмножество $A \subset M$ имеет хотя бы одну предельную точку (которая может принадлежать, но может и не принадлежать M).

Понятие предкомпактности (в отличие от компактности) связано, очевидно, с тем пространством T, в котором мы данное множество рассматриваем. Например, множество рациональных точек в интервале $(0, 1)$ предкомпактно, если его рассматривать как подмножество числовой прямой, но оно не будет предкомпактным как подмножество пространства всех рациональных чисел.

Понятие предкомпактности наиболее существенно в случае метрических пространств, о чем будет идти речь в следующем параграфе.

§ 7. Компактность в метрических пространствах

1. Полная ограниченность. Поскольку метрические пространства представляют собой частный случай топологических, на них распространяются те определения и факты, которые были изложены в предыдущем параграфе. В метрическом случае компактность тесно связана с понятием полной ограниченности, которое мы сейчас введем.

Пусть M — некоторое множество в метрическом пространстве R и ε — некоторое положительное число. Множество A из R называется *ε-сетью* для M, если для любой точки $x \in M$ найдется хотя бы одна точка $a \in A$, такая, что

$$\rho(x, a) \leqslant \varepsilon.$$

(Множество A не обязано содержаться в M и может даже не иметь с M ни одной общей точки, однако, имея для M некоторую ε-сеть A, можно построить 2ε-сеть $B \subset M$.)

Например, целочисленные точки образуют на плоскости $1/\sqrt{2}$-сеть. Множество M называется *вполне ограниченным*, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Ясно, что вполне ограниченное множество обязательно ограничено, как сумма конечного числа ограниченных множеств. Обратное, вообще говоря, неверно, как показывает приводимый ниже пример 2.

Часто бывает полезно следующее очевидное замечание: *если множество M вполне ограничено, то его замыкание $[M]$ также вполне ограничено.*

Из определения полной ограниченности сразу следует, что *если само метрическое пространство R вполне ограничено, то оно сепарабельно.* Действительно, построим для каждого n в R конечную $1/n$-сеть. Сумма их по всем n представляет собой счетное всюду плотное в R множество. Поскольку сепарабельное метрическое пространство имеет счетную базу (теорема 4 § 5), мы получаем, что *всякое вполне ограниченное метрическое пространство имеет счетную базу.*

Примеры. 1. В n-мерном евклидовом пространстве полная ограниченность совпадает с обычной ограниченностью, т. е. с возможностью заключить данное множество в достаточно большой куб. Действительно, если такой куб разбить на кубики с ребром ε, то вершины этих кубиков будут образовывать конечную $(\sqrt{n}/2)\,\varepsilon$-сеть в исходном кубе, а значит, и подавно, в любом множестве, лежащем внутри этого куба.

2. Единичная сфера S в пространстве l_2 дает нам пример ограниченного, но не вполне ограниченного множества. Действительно, рассмотрим в S точки вида

$$\begin{gathered} e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ \ldots), \\ e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ \ldots), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ \ldots). \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Расстояние между любыми двумя такими точками e_n и e_m $(n \neq m)$ равно $\sqrt{2}$. Отсюда видно, что в S не может быть конечной ε-сети ни при каком $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.

3. Рассмотрим в l_2 множество Π точек $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ \ldots)$, подчиненных условиям

$$|x_1| \leqslant 1,\ |x_2| \leqslant 1/2,\ \ldots,\ |x_n| \leqslant 1/2^{n-1},\ \ldots$$

Это множество называется *основным параллелепипедом* («гильбертовым кирпичом») пространства l_2. Оно служит примером бесконечномерного вполне ограниченного множества. Для доказательства его полной ограниченности поступим следующим образом.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, что $1/2^{n-1} < \varepsilon/2$. Каждой точке

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots) \tag{1}$$

из Π сопоставим точку

$$x^* = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ 0,\ 0,\ \ldots) \tag{2}$$

из того же множества. При этом

$$\rho(x,\ x^*) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Множество Π^* точек вида (2) из Π вполне ограничено (как ограниченное множество в n-мерном пространстве). Выберем в Π^* конечную $\varepsilon/2$-сеть. Ясно, что она будет в то же время ε-сетью во всем Π.

2. Компактность и полная ограниченность.

Теорема 1. *Если метрическое пространство R счетно-компактно, то оно вполне ограничено.*

Доказательство. Предположим, что R не вполне ограничено. Это значит, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ в R не существует конечной ε_0-сети. Возьмем в R произвольную точку a_1.

В R найдется хотя бы одна такая точка, скажем, a_2, что $\rho(a_1, a_2) > \varepsilon_0$ (иначе точка a_1 была бы ε_0-сетью для R). Далее, в R найдется такая точка a_3, что $\rho(a_1, a_3) > \varepsilon_0$ и $\rho(a_2, a_3) > \varepsilon_0$, иначе пара точек a_1, a_2 была бы ε_0-сетью. Если точки $a_1, \ldots, a_k$ уже фиксированы, то выберем точку $a_{k+1} \in R$ так, что $\rho(a_i, a_{k+1}) > \varepsilon_0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Это построение дает нам бесконечную последовательность $a_1, a_2, \ldots$, которая не имеет ни одной предельной точки, поскольку $\rho(a_i, a_j) > \varepsilon_0$ при $i \neq j$. Но тогда R не счетно-компактно. Теорема доказана.

Итак, мы показали, что для метрических пространств счетная компактность влечет полную ограниченность, которая в свою очередь влечет наличие счетной базы.

В силу теоремы 10 § 6 отсюда получаем такой важный результат.

Следствие. *Всякое счетно-компактное метрическое пространство компактно.*

Мы показали, что полная ограниченность есть необходимое условие компактности метрического пространства. Это условие не достаточно; например, совокупность рациональных точек отрезка $[0, 1]$ с обычным определением расстояния между ними есть вполне ограниченное, но не компактное пространство: последовательность точек этого пространства

$$0;\ 0{,}4;\ 0{,}41;\ 0{,}414;\ 0{,}4142;\ \ldots,$$

т. е. последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2} - 1$, не имеет в нем предельной точки. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы метрическое пространство R было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было одновременно*:

1) *вполне ограниченным,*

2) *полным.*

Доказательство. Необходимость полной ограниченности уже отмечалась. Необходимость полноты очевидна: в самом деле, если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в R, не имеющая предела, то эта последовательность не имеет в R ни одной предельной точки.

Покажем теперь, что если R вполне ограничено и полно, то оно компактно. В силу следствия из теоремы 1 для этого достаточно установить, что R счетно-компактно, т. е. что всякая последовательность $\{x_n\}$ точек из R имеет хотя бы одну предельную точку.

Построим вокруг каждой из точек, образующих 1-сеть в R, замкнутый шар радиуса 1. Так как эти шары покрывают все R, а число их конечно, то по крайней мере один из них, назовем его B_1, содержит некоторую бесконечную подпоследовательность $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ последовательности $\{x_n\}$. Далее, выберем $^1/_2$-сеть в B_1 и вокруг каждой из точек этой сети построим замкнутый шар радиуса 1/2. По крайней мере один из этих шаров, назовем его B_2, содержит бесконечную подпоследовательность $x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$ последовательности $\{x_n^{(1)}\}$. Далее, найдем замкнутый шар B_3 с центром в B_2 радиуса 1/4, содержащий бесконечную подпоследовательность $x_1^{(3)}, \ldots x_n^{(3)}, \ldots$ последовательности $\{x_n^{(2)}\}$ и т. д. Рассмотрим теперь наряду с каждым шаром B_n замкнутый шар A_n с тем же центром, но в два раза большего радиуса. Легко видеть, что шары A_n вложены друг в друга. В силу полноты пространства R пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ не пусто и состоит из одной точки x_0. Эта точка — предельная для исходной последовательности $\{x_n\}$, так как каждая ее окрестность содержит некоторый шар B_k, а значит, и бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\}$ последовательности $\{x_n\}$.

3. Предкомпактные подмножества в метрических пространствах. Понятие предкомпактности, введенное нами в предыдущем параграфе для подмножеств произвольного топологического пространства, применимо, в частности, к подмножествам метрического пространства. При этом, очевидно, понятие счетной предкомпактности совпадает здесь с понятием предкомпактности. Отметим следующий простой, но важный факт.

Теорема 3. *Для того чтобы множество M, лежащее в полном метрическом пространстве R, было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.*

Доказательство сразу следует из теоремы 2 и того очевидного факта, что замкнутое подмножество полного метрического пространства само полно.

Значение этой теоремы состоит в том, что, как правило, легче установить полную ограниченность того или иного множества, чем непосредственно доказать его предкомпактность. Вместе с тем для применений в анализе важна обычно предкомпактность.

4. Теорема Арцела. Вопрос о компактности того или иного множества в метрическом пространстве — довольно распространенная в анализе задача. Между тем, попытка непосредственно применить теорему 2 сталкивается с трудностями. Поэтому для множеств в конкретных пространствах полезно дать специальные критерии компактности (или предкомпактности), более удобные на практике.

В n-мерном евклидовом пространстве предкомпактность множества равносильна, как мы видели, его ограниченности.

Однако для более общих метрических пространств это уже неверно.

Одним из важнейших в анализе метрических пространств является пространство $C[a, b]$. Для его подмножеств важный и часто используемый критерий предкомпактности доставляет так называемая теорема Арцела. Чтобы ее сформулировать, нам понадобятся следующие понятия.

Семейство Φ функций φ, определенных на некотором отрезке $[a, b]$, называется *равномерно ограниченным*, если существует такое число K, что

$$|\varphi(x)| < K$$

для всех $x \in [a, b]$ и всех $\varphi \in \Phi$.

Семейство $\Phi = \{\varphi\}$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

для всех x_1 и x_2 из $[a, b]$ таких, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$, и для всех $\varphi \in \Phi$.

Теорема 4 (Арцела). *Для того чтобы семейство Φ непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, было предкомпактно в $C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство Φ предкомпактно в $C[a, b]$. Тогда по предыдущей теореме для каждого положительного ε в семействе Φ существует конечная $\varepsilon/3$-сеть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Каждая из функций φ_i, как непрерывная функция на отрезке, ограничена: $|\varphi_i(x)| \leqslant K_i$.

Положим $K = \max K_i + \varepsilon/3$. По определению $\varepsilon/3$-сети, для всякого $\varphi \in \Phi$ имеем, хотя бы для одного φ_i,

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_x |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leqslant \varepsilon/3.$$

Следовательно,

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K.$$

Итак, Φ равномерно ограничено.

Далее, так как каждая из функций φ_i, образующих $\varepsilon/3$-сеть, непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна на $[a, b]$, то для данного $\varepsilon/3$ существует такое δ_i, что

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \varepsilon/3,$$

если $|x_1 - x_2| < \delta_i$.

Положим $\delta = \min \delta_i$. Для произвольной функции $\varphi \in \Phi$ выберем φ_i так, чтобы $\rho(\varphi, \varphi_i) < \varepsilon/3$; тогда при $|x_1 - x_2| < \delta$

будем иметь

$$|\varphi_1(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant|\varphi(x_1)-\varphi_i(x_1)|+|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|+ \\ +|\varphi_i(x_2)-\varphi(x_2)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность Φ также доказана.

Достаточность. Пусть Φ — равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций. Согласно теореме 3 мы установим его предкомпактность в $C[a,b]$, если покажем, что при любом $\varepsilon>0$ для него в $C[a,b]$ существует конечная ε-сеть. Пусть $|\varphi(x)|\leqslant K$ для всех $\varphi\in\Phi$ и пусть $\delta>0$ выбрано так, что $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon/5$ при $|x_1-x_2|<\delta$ для всех $\varphi\in\Phi$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на оси x точками $x_0=a_1<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ на промежутки длины меньше δ и проведем через эти точки вертикальные прямые. Отрезок $[-K,K]$ на оси y разобьем точками $y_0=-K<y_1<y_2<\ldots<y_m=K$ на промежутки длины меньше $\varepsilon/5$ и проведем через точки деления горизонтальные прямые. Таким образом, прямоугольник $a\leqslant x\leqslant b$, $-K\leqslant y\leqslant K$ разобьется на ячейки с горизонтальной стороной меньше δ и вертикальной стороной меньше $\varepsilon/5$. Сопоставим теперь каждой функции $\varphi\in\Phi$ ломаную $\psi(x)$ с вершинами в точках (x_k,y_l), т. е. в узлах построенной сетки, и уклоняющуюся в точках x_k от функции $\varphi(x)$ меньше чем на $\varepsilon/5$ (существование такой ломаной очевидно).

Поскольку по построению $|\varphi(x_k)-\psi(x_k)|<\varepsilon/5$, $|\varphi(x_{k+1})-\psi(x_{k+1})|<\varepsilon/5$, $|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})|<\varepsilon/5$, то

$$|\psi(x_k)-\psi(x_{k+1})|<3\varepsilon/5.$$

Так как между точками x_k и x_{k+1} функция $\psi(x)$ линейна, то $|\psi(x_k)-\psi(x)|<3\varepsilon/5$ для всех $x\in[x_k,x_{k+1}]$.

Пусть теперь x — произвольная точка отрезка $[a,b]$ и x_k — ближайшая к x слева из выбранных нами точек деления. Тогда

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\varphi(x)-\varphi(x_k)|+ \\ +|\varphi(x_k)-\psi(x_k)|+|\psi(x_k)-\psi(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Следовательно, ломаные $\psi(x)$ по отношению к Φ образуют ε-сеть. Число их очевидно, конечно; таким образом, Φ вполне ограничено. Теорема полностью доказана.

5. Теорема Пеано. Покажем, как применяется теорема Арцела на примере следующей теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью.

Теорема 5 (Пеано). *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{3}$$

Если функция f непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области G, то через каждую внутреннюю точку (x_0,y_0) этой области проходит хотя бы одна интегральная кривая данного уравнения.

Доказательство. Так как функция f непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она ограничена: $|f(x, y)| < M = \text{const}$.

Проведем через точку (x_0, y_0) прямые с угловыми коэффициентами M и $-M$. Проведем, далее, вертикальные прямые $x = a$ и $x = b$ так, чтобы отсекаемые ими два треугольника с общей вершиной (x_0, y_0) целиком лежали внутри области G.

Эта пара треугольников образует замкнутое множество Δ.

Построим теперь для данного уравнения так называемые ломаные Эйлера следующим образом: проведем из точки (x_0, y_0) прямую с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$. На этой прямой возьмем некоторую точку (x_1, y_1) и проведем через нее прямую с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$. На этой прямой возьмем точку (x_2, y_2), проведем через нее прямую с угловым коэффициентом $f(x_2, y_2)$ и т. д. Рассмотрим теперь последовательность ломаных Эйлера $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, проходящих через точку (x_0, y_0), таких, что длина наибольшего из звеньев линии L_k стремится к нулю при $k \to \infty$. Пусть φ_k — функция, график которой есть линия L_k. Функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ обладают следующими свойствами:

1) они определены на одном и том же отрезке $[a, b]$,
2) они равномерно ограничены,
3) они равностепенно непрерывны.

На основании теоремы Арцела из последовательности $\{\varphi_k\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся последовательность. Пусть это будет подпоследовательность $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(k)}, \ldots$

Положим $\varphi(x) = \lim \varphi^{(k)}(x)$ при $k \to \infty$. Ясно, что $\varphi(x_0) = y_0$. Остается проверить, что φ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ данному дифференциальному уравнению. Для этого требуется показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon,$$

если только величина $|x'' - x'|$ достаточно мала. Для доказательства этого в свою очередь нужно установить, что при достаточно больших k

$$\left| \frac{\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi^{(k)}(x')) \right| < \varepsilon,$$

если только разность $|x'' - x'|$ достаточно мала.

Так как f непрерывна в области G, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon \quad (y' = \varphi(x')),$$

если

$$|x - x'| < 2\eta \quad \text{и} \quad |y - y'| < 4M\eta.$$

Совокупность точек $(x, y) \in G$, удовлетворяющих этим двум неравенствам, представляет собой некоторый прямоугольник Q. Пусть теперь K настолько велико, что для всех $k > K$

$$|\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)| < 2M\eta$$

и все звенья ломаной L_k имеют длину меньше η. Тогда при $|x - x'| < 2\eta$ все ломаные Эйлера $\varphi^{(k)}$, для которых $k > K$, целиком лежат внутри Q.

Далее, пусть $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \ldots, (a_{n+1}, b_{n+1})$ — вершины ломаной L_k, причем

$$a_0 \leqslant x' < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < x'' \leqslant a_{n+1}$$

ГЛАВА III
НОРМИРОВАННЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Линейные пространства

Понятие линейного пространства относится к числу самых основных в математике. Оно будет играть важную роль не только в этой главе, но и во всем дальнейшем изложении.

1. Определение и примеры линейных пространств.

Определение 1. Непустое множество L элементов x, y, z, ... называется *линейным*, или *векторным*, *пространством*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

I. Для любых двух элементов $x, y \in L$ однозначно определен третий элемент $z \in L$, называемый их *суммой* и обозначаемый $x + y$, причем

1) $x + y = y + x$ (коммутативность),
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность),
3) в L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$ (существование нуля),
4) для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).

II. Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$ (*произведение* элемента x на число α), причем

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
2) $1 \cdot x = x$,
3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

В зависимости от того, какой запас чисел (все комплексные или только действительные) используется, различают комплексные и действительные линейные пространства[1]). Всюду, где не оговорено противное, наши построения будут верны как для действительных, так и для комплексных пространств.

Заметим, что всякое комплексное линейное пространство можно рассматривать как некоторое действительное пространство, если ограничиться в нем умножением векторов на действительные числа.

---

[1]) Можно было бы рассматривать и линейные пространства над произвольным полем.

Рассмотрим некоторые примеры линейных пространств, предоставив читателю проверить для каждого из них сформулированные выше аксиомы.

1. Прямая линия $\mathbf{R}^1$, т. е. совокупность действительных чисел, с обычными арифметическими операциями сложения и умножения, представляет собой линейное пространство.

2. Совокупность всевозможных систем n действительных чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где сложение и умножение на число определяются формулами

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

также является линейным пространством. Оно называется действительным *n-мерным*[1]) *арифметическим пространством* и обозначается символом $\mathbf{R}^n$. Аналогично, комплексное n-мерное арифметическое пространство $\mathbf{C}^n$ определяется как совокупность систем n комплексных чисел (с умножением на любые комплексные числа).

3. Непрерывные (действительные или комплексные) функции на некотором отрезке $[a, b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа образуют линейное пространство $C[a, b]$, являющееся одним из важнейших для анализа.

4. Пространство l_2, в котором элементами служат последовательности чисел (действительных или комплексных)

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty, \tag{1}$$

с операциями

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)+(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)=$$
$$=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots),$$

является линейным пространством. Тот факт, что сумма двух последовательностей, удовлетворяющих условию (1), также удовлетворяет этому условию, вытекает из элементарного неравенства $(a_1+a_2)^2 \leqslant 2a_1^2+2a_2^2$.

5. Сходящиеся последовательности $x=(x_1, x_2, \ldots)$ с покоординатными операциями сложения и умножения на числа образуют линейное пространство. Обозначим его c.

---

[1]) Этот термин будет разъяснен в дальнейшем.

6. Последовательности, сходящиеся к 0, с теми же операциями сложения и умножения, также образуют линейное пространство. Обозначим его c_0.

7. Совокупность m всех ограниченных числовых последовательностей, с теми же операциями сложения и умножения на числа, что и в примерах 4—6, тоже представляет собой линейное пространство.

8. Наконец, совокупность $\mathbf{R}^\infty$ всевозможных числовых последовательностей, с теми же самыми операциями сложения и умножения на числа, что и в примерах 4—7, тоже является линейным пространством.

Поскольку свойства линейного пространства — это свойства операций сложения элементов и умножения их на числа, естественно ввести следующее определение.

Определение 2. Линейные пространства L и L^* называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое согласовано с операциями в L и L^*. Это означает, что из

$$x \leftrightarrow x^*,$$
$$y \leftrightarrow y^*$$

($x,\ y \in L,\ x^*,\ y^* \in L^*$) следует

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$$

и

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

(α — произвольное число).

Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации одного и того же пространства. Примерами изоморфных линейных пространств могут служить арифметическое n-мерное пространство (действительное или комплексное) и пространство всех многочленов степени $\leqslant n-1$ (соответственно с действительными или комплексными коэффициентами) с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа (докажите изоморфность!).

2. Линейная зависимость. Элементы $x, y, \ldots, w$ линейного пространства L называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, не все равные 0, что

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w = 0. \tag{2}$$

В противном случае эти элементы называются *линейно независимыми*. Иначе говоря, элементы $x, y, \ldots, w$ линейно независимы, если из равенства (2) вытекает, что $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$.

Бесконечная система элементов $x, y, \ldots$ пространства L называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Если в пространстве L можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что пространство L имеет *размерность* n. Если же в L можно указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых элементов, то говорят, что пространство L *бесконечномерно*. *Базисом* в n-мерном пространстве L называется любая система из n линейно независимых элементов. Пространства $\mathbf{R}^n$ в действительном случае и $\mathbf{C}^n$ в комплексном имеют, как легко проверить, размерность n, оправдывая тем самым свое название.

В курсе линейной алгебры рассматриваются линейные пространства конечной размерности. Наоборот, мы, как правило, будем заниматься пространствами бесконечного числа измерений, представляющими основной интерес с точки зрения анализа. Мы предоставляем читателю проверить, что каждое из пространств, указанных в примерах 3—8, имеет бесконечную размерность.

3. **Подпространства**. Непустое подмножество L' линейного пространства L называется *подпространством*, если оно само образует линейное пространство по отношению к определенным в L операциям сложения и умножения на число.

Иначе говоря, $L' \subset L$ есть подпространство, если из $x \in L'$, $y \in L'$ следует, что $\alpha x + \beta y \in L'$ при любых α и β.

Во всяком линейном пространстве L имеется подпространство, состоящее из одного нуля, — нулевое подпространство. С другой стороны, все L можно рассматривать как свое подпространство. Подпространство, отличное от L и содержащее хотя бы один ненулевой элемент, называется *собственным*.

Приведем примеры собственных подпространств.

1. Пусть L — какое-либо линейное пространство и x — некоторый его ненулевой элемент. Совокупность элементов $\{\lambda x\}$, где λ пробегает все числа (соответственно действительные или комплексные), образует, очевидно, одномерное подпространство. Оно является собственным, если размерность L больше 1.

2. Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ (пример 3 п. 1) и в нем совокупность всех многочленов $P[a, b]$. Ясно, что многочлены образуют в $C[a, b]$ подпространство (имеющее, как и все $C[a, b]$, бесконечную размерность). В то же время само пространство $C[a, b]$ можно рассматривать как подпространство более обширного пространства всех, непрерывных и разрывных, функций на $[a, b]$.

3. Рассмотрим, наконец, пространства l_2, c_0, c, m и $\mathbf{R}^\infty$ (примеры 4—8 п. 1). Каждое из них является собственным подпространством последующего.

Пусть $\{x_\alpha\}$ — произвольное непустое множество элементов линейного пространства L. Тогда в L существует наименьшее подпространство (быть может, совпадающее с L), которое содержит $\{x_\alpha\}$. Действительно, по крайней мере одно подпространство, содержащее $\{x_\alpha\}$, в L существует: это все L. Далее ясно, что *пересечение любого множества* $\{L_\gamma\}$ *подпространств есть снова подпространство.* В самом деле, если $L^* = \bigcap\limits_\gamma L_\gamma$ и $x, y \in L^*$, то и $\alpha x + \beta y \in L^*$ при всех α, β. Возьмем теперь все подпространства, содержащие систему векторов $\{x_\alpha\}$, и рассмотрим их пересечение. Это и будет наименьшее подпространство, содержащее систему $\{x_\alpha\}$. Такое минимальное подпространство мы назовем *подпространством, порожденным множеством* $\{x_\alpha\}$, или *линейной оболочкой* множества $\{x_\alpha\}$. Мы будем обозначать это подпространство $L(\{x_\alpha\})$.

Упражнения. Линейно независимая система $\{x_\alpha\}$ элементов линейного пространства L называется *базисом Гамеля*, если ее линейная оболочка совпадает с L. Доказать следующие утверждения:

1) В каждом линейном пространстве существует базис Гамеля.

Указание. Использовать лемму Цорна.

2) Если $\{x_\alpha\}$ — базис Гамеля в L, то каждый вектор $x \in L$ единственным образом представляется в виде конечной линейной комбинации некоторых векторов системы $\{x_\alpha\}$.

3) Любые два базиса Гамеля в линейном пространстве равномощны; мощность базиса Гамеля линейного пространства иногда называют *алгебраической размерностью* этого пространства.

4) Линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую алгебраическую размерность.

4. Фактор-пространства. Пусть L — линейное пространство, и L' — некоторое его подпространство. Скажем, что два элемента x и y из L *эквивалентны*, если их разность $x - y$ принадлежит L'. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. определяет разбиение всех $x \in L$ на классы. Класс эквивалентных элементов называется *классом смежности* (по подпространству L'). Совокупность всех таких классов мы назовем *фактор-пространством* L по L' и обозначим L/L'.

В любом фактор-пространстве, естественно, вводятся операции сложения и умножения на числа. Именно, пусть ξ и η — два класса, представляющих собой элементы из L/L'. Выберем в каждом из этих классов по представителю, скажем, x и y соответственно, и назовем суммой классов ξ и η тот класс ζ, который содержит элемент $x + y$, а произведением класса ξ на число α тот класс, который содержит элемент αx. Легко проверить, что результат не изменится от замены представителей x и y какими-либо другими представителями x' и y' тех же классов ξ и η. Таким образом, мы действительно определили линейные операции над элементами фактор-пространства L/L'. Непосредственная проверка показывает, что эти операции удовлетворяют всем требованиям, содержащимся в определении линейного пространства (проведите эту проверку!). Иначе говоря, *каждое фактор-пространство* L/L' (с теми операциями сложения и умножения на числа, которые мы сейчас в нем определили) *представляет собой линейное пространство.*

Если L — пространство n измерений, а его подпространство L' имеет размерность k, то фактор-пространство L/L' имеет размерность $n-k$ (докажите это!).

Пусть L — произвольное линейное пространство и L' — некоторое его подпространство. Размерность фактор-пространства L/L' называется *коразмерностью* подпространства L' в пространстве L.

Если подпространство $L' \subset L$ имеет конечную коразмерность n, то в L можно выбрать элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, что всякий элемент $x \in L$ будет (однозначно) представим в виде

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + y,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — числа и $y \in L'$. Действительно, пусть фактор-пространство L/L' имеет размерность n. Выберем в этом фактор-пространстве базис $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и из каждого класса ξ_k выберем по представителю x_k. Пусть теперь x — любой элемент из L и ξ — тот класс в L/L', который содержит x. Тогда

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n.$$

По определению это значит, что каждый элемент из ξ, в частности x, отличается лишь на элемент из L' от такой же линейной комбинации элементов $x_1, \ldots, x_n$, т. е.

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + y.$$

Однозначность такой записи предоставляем доказать читателю.

5. Линейные функционалы. Числовую функцию f, определенную на некотором линейном пространстве L, мы будем называть *функционалом*. Функционал f называется *аддитивным*, если

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in L;$$

он называется *однородным*, если

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \text{ — произвольное число}).$$

Функционал f, определенный в комплексном линейном пространстве, называется *сопряженно-однородным*, если $f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$, где $\bar{\alpha}$ — число, комплексно сопряженное α.

Аддитивный однородный функционал называется *линейным функционалом*. Аддитивный сопряженно-однородный функционал называется *сопряженно-линейным*, а иногда *полулинейным*.

Укажем примеры линейных функционалов.

1. Пусть $\mathbf{R}^n$ есть n-мерное арифметическое пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — произвольный набор из n фиксированных чисел. Тогда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

— линейный функционал в $\mathbf{R}^n$. Выражение

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i$$

представляет собой сопряженно-линейный функционал в $\mathbf{C}^n$.

2. Интегралы

$$I[x] = \int_a^b x(t)\,dt \quad \text{и} \quad \bar{I}[x] = \int_a^b \overline{x(t)}\,dt$$

представляют собой соответственно линейный и сопряженно-линейный функционалы в пространстве $C[a, b]$.

3. Рассмотрим более общий пример. Пусть y_0 — некоторая фиксированная непрерывная функция на $[a, b]$. Положим для любой функции $x \in C[a, b]$

$$F(x) = \int_a^b x(t)\, y_0(t)\,dt.$$

Линейность этого функционала следует из основных свойств операции интегрирования. Функционал

$$\bar{F}(x) = \int_a^b \overline{x(t)}\, y_0(t)\,dt$$

будет сопряженно-линейным (в комплексном пространстве $C[a, b]$).

4. Рассмотрим в том же самом пространстве $C[a, b]$ линейный функционал другого типа, а именно, положим $\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$, так что значение функционала δ_{t_0} на функции x равно значению этой функции в фиксированной точке t_0.

Этот функционал обычно записывают в виде

$$\delta_{t_0}(x) = \int_a^b x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt,$$

понимая под δ «функцию», которая равна нулю всюду, кроме точки $t = 0$, и интеграл от которой равен единице (δ-функция

Дирака). Такие «функции» получили строгое определение в рамках теории обобщенных функций, элементы которой будут изложены в § 4 следующей главы.

5. Приведем пример линейного функционала в пространстве l_2. Пусть k — фиксированное целое положительное число. Для каждого $x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ из l_2 положим $f_k(x)=x_k$. Линейность такого функционала очевидна. Эти функционалы допускают «распространение» на другие пространства последовательностей, например, на c_0, c, m, $\mathbf{R}^\infty$ (примеры 5—8 п. 1).

6. Геометрический смысл линейного функционала. Пусть f — некоторый отличный от тождественного нуля линейный функционал на линейном пространстве L. Совокупность тех элементов x из L, которые удовлетворяют условию

$$f(x)=0,$$

представляет собой подпространство пространства L — *подпространство нулей* или *ядро* функционала f. Действительно, если $f(x)=f(y)=0$, то

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=0.$$

Это подпространство обозначается $\operatorname{Ker} f$ [1]).

Подпространство $\operatorname{Ker} f$ имеет коразмерность 1. Действительно, возьмем какой-либо элемент x_0, не входящий в $\operatorname{Ker} f$, т. е. такой элемент, что $f(x_0)\neq 0$. Такой элемент найдется, поскольку $f(x)\not\equiv 0$. Без ограничения общности можно считать, что $f(x_0)=1$, ибо в противном случае мы заменили бы x_0 на $\frac{x_0}{f(x_0)}$. $\left(\text{Ясно, что } f\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right)=1.\right)$ Для каждого элемента x положим $y=x-f(x)x_0$; тогда $f(y)=f(x-f(x)x_0)=0$, т. е. $y\in\operatorname{Ker} f$. Представление элемента x в виде $x=\alpha x_0+y$, где $y\in\operatorname{Ker} f$, при фиксированном элементе x_0 единственно. В самом деле, пусть $x=\alpha x_0+y$, $y\in\operatorname{Ker} f$, $x=\alpha' x_0+y'$, $y'\in\operatorname{Ker} f$.

Тогда $(\alpha-\alpha')x_0=y'-y$. Если здесь $\alpha=\alpha'$, то очевидно, что $y'=y$. Если же $\alpha\neq\alpha'$, то $x_0=\frac{y'-y}{\alpha-\alpha'}\in\operatorname{Ker} f$, что противоречит выбору x_0.

Отсюда следует, что два элемента x_1 и x_2 тогда и только тогда принадлежат одному классу смежности по подпространству $\operatorname{Ker} f$, когда $f(x_1)=f(x_2)$.

Действительно, из $x_1=f(x_1)x_0+y_1$, $x_2=f(x_2)x_0+y_2$ вытекает, что $x_1-x_2=(f(x_1)-f(x_2))\cdot x_0+(y_1-y_2)$. Отсюда видно, что $x_1-x_2\in\operatorname{Ker} f$ тогда и только тогда, когда коэффициент при x_0, т. е. $f(x_1)-f(x_2)$ равен 0.

[1]) От английского слова kernel — ядро.

Всякий класс ξ по подпространству $\operatorname{Ker} f$ определяется любым из своих представителей. В качестве такого представителя можно взять элемент вида αx_0. Отсюда видно, что подпространство $L/\operatorname{Ker} f$ действительно одномерно, т. е. $\operatorname{Ker} f$ имеет коразмерность 1.

Подпространство $\operatorname{Ker} f$ определяет линейный функционал, обращающийся на нем в нуль, с точностью до постоянного множителя.

В самом деле, пусть функционалы f и g имеют одно и то же ядро: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Выберем элемент x_0 так, чтобы $f(x_0) = 1$. Мы утверждаем, что $g(x_0) \neq 0$. Действительно,

$$x = f(x)\,x_0 + y, \quad y \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g,$$

и

$$g(x) = f(x)\,g(x_0) + g(y) = f(x)\,g(x_0).$$

Если бы значение $g(x_0)$ равнялось 0, то функционал g был бы тождественным нулем. Из равенства $g(x) = g(x_0) f(x)$ и вытекает пропорциональность функционалов g и f.

Для всякого подпространства L' коразмерности 1 можно указать такой функционал f, что $\operatorname{Ker} f = L'$. Достаточно выбрать произвольный элемент $x_0 \notin L'$ и представить каждый элемент $x \in L$ в виде $x = \alpha x_0 + y$. Такое представление единственно. Положив $f(x) = \alpha$, мы получим линейный функционал f, для которого $\operatorname{Ker} f = L'$ (проверить это!).

Пусть L' — какое-нибудь подпространство коразмерности 1 в линейном пространстве L; тогда всякий класс смежности пространства L по подпространству L' называется *гиперплоскостью*, параллельной подпространству L' (в частности, само подпространство L' является гиперплоскостью, содержащей 0, т. е. «проходящей через начало координат»). Иными словами, гиперплоскость M', параллельная подпространству L', — это множество, получающееся из L' параллельным переносом (сдвигом) на какой-нибудь вектор $x_0 \in L$:

$$M' = L' + x_0 = \{y\colon\ y = x + x_0,\ x \in L'\}.$$

Ясно, что если $x_0 \in L'$, то $M' = L'$; если же $x_0 \notin L'$, то $M' \neq L'$. Если f — нетривиальный линейный функционал на пространстве L, то множество $M_f = \{x\colon f(x) = 1\}$ является гиперплоскостью, параллельной подпространству $\operatorname{Ker} f$ (действительно, фиксируя какой-нибудь элемент x_0, для которого $f(x_0) = 1$, мы можем всякий вектор $x \in M_f$ представить в виде $x = x_0 + y$, где $y \in \operatorname{Ker} f$). С другой стороны, если M' — какая-нибудь гиперплоскость, параллельная подпространству L' (коразмерности 1) и не проходящая через начало координат, то существует е д и н с т в е н н ы й линейный функционал f такой, что $M' = \{x\colon f(x) = 1\}$. Действительно, пусть $M' = L' + x_0$, $x_0 \in L$; тогда всякий элемент $x \in L$

однозначно представим в виде $x = \alpha x_0 + y$, где $y \in L'$. Полагая, как и выше, $f(x) = \alpha$, мы получим искомый линейный функционал; единственность следует из того, что если $g(x) \equiv 1$ при $x \in M'$, то $g(y) \equiv 0$ при $y \in L'$, так что

$$g(\alpha x_0 + y) = \alpha = f(\alpha x_0 + y).$$

Таким образом, *установлено взаимно однозначное соответствие между всеми нетривиальными линейными функционалами, определенными на L, и всеми гиперплоскостями в L, не проходящими через начало координат.*

Упражнение. Пусть $f, f_1, \ldots, f_n$ — такие линейные функционалы на линейном пространстве L, что из $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ вытекает $f(x) = 0$. Тогда существуют такие постоянные $a_1, \ldots, a_n$, что $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ для всех $x \in L$.

§ 2. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана — Банаха

1. Выпуклые множества и выпуклые тела. В основе многих важных разделов теории линейных пространств лежит понятие *выпуклости.* Оно опирается на наглядные геометрические представления, но вместе с тем допускает и чисто аналитическую формулировку.

Пусть L — некоторое линейное действительное пространство и x, y — две его точки. Назовем *замкнутым отрезком* в L, соединяющим точки x и y, совокупность всех элементов вида

$$\alpha x + \beta y, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Отрезок без концевых точек x и y называется *открытым отрезком.*

Множество $M \subset L$ называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок.

Назовем *ядром* $J(E)$ произвольного множества $E \subset L$ совокупность таких его точек x, что для каждого $y \in L$ найдется такое число $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, что $x + ty \in E$ при $|t| < \varepsilon$.

Выпуклое множество, ядро которого не пусто, называется *выпуклым телом.*

Примеры. 1. В трехмерном евклидовом пространстве куб, шар, тетраэдр, полупространство представляют собой выпуклые тела. Отрезок, плоскость, треугольник в том же пространстве — выпуклые множества, но не выпуклые тела.

2. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ множество функций, удовлетворяющих условию

$|f(t)| \leqslant 1$. Это множество выпукло; действительно, если $|f(t)| \leqslant 1$ и $|g(t)| \leqslant 1$, то при $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$

$$|\alpha f(t) + \beta g(t)| \leqslant \alpha + \beta = 1.$$

Упражнение. Проверить, является ли это множество выпуклым телом.

3. Единичный шар в l_2, т. е. совокупность таких точек $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, что $\sum x_n^2 \leqslant 1$, есть выпуклое тело. Его ядро состоит из точек x, удовлетворяющих условию $\sum x_n^2 < 1$.

4. Основной параллелепипед Π в l_2 — выпуклое множество, но не выпуклое тело. В самом деле, пусть $x \in \Pi$; это означает, что $|x_n| \leqslant 1/2^{n-1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Положим $y_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$. Пусть $x + ty_0 \in \Pi$, т. е. $|x_n + t/n| \leqslant 1/2^{n-1}$; тогда

$$\left|\frac{t}{n}\right| \leqslant \left|x_n + \frac{t}{n}\right| + |x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

откуда $t = 0$, т. е. ядро множества Π пусто.

Упражнения. 1. Пусть Φ — совокупность точек $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ из l_2, удовлетворяющих условию $\sum n^2 x_n^2 \leqslant 1$. Доказать, что Φ — выпуклое множество, но не выпуклое тело.

2. Доказать то же самое для множества точек в l_2, каждая из которых имеет лишь конечное число отличных от нуля координат.

Если M — выпуклое множество, то его ядро $J(M)$ тоже выпукло. Действительно, пусть $x, y \in J(M)$ и $z = \alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Тогда для данного $a \in L$ найдутся такие $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, что при $|t_1| < \varepsilon_1$, $|t_2| < \varepsilon_2$ точки $x + t_1 a$ и $y + t_2 a$ принадлежат множеству M, следовательно, ему принадлежит и точка $\alpha(x + ta) + \beta(y + ta) = z + ta$ при $|t| < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, т. е. $z \in J(M)$.

Установим следующее важное свойство выпуклых множеств.

Теорема 1. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Доказательство. Пусть $M = \bigcap\limits_{\alpha} M_\alpha$ и все M_α — выпуклые множества. Пусть, далее, x и y — две произвольные точки из M. Тогда отрезок, соединяющий точки x и y, принадлежит каждому M_α, а следовательно, и M. Таким образом, M действительно выпукло.

Заметим, что пересечение выпуклых тел (будучи выпуклым множеством) не обязано быть выпуклым телом (приведите пример).

Для произвольного множества A в линейном пространстве L существует наименьшее выпуклое множество, которое его содержит; им будет пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A (по крайней мере одно выпуклое множество, содержащее A, существует — это все L). Минимальное выпуклое множество, содержащее A, мы назовем *выпуклой оболочкой* множества A.

Рассмотрим один важный пример выпуклой оболочки. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ — точки некоторого линейного пространства. Мы скажем, что эти точки находятся *в общем положении*, если векторы $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1$ линейно независимы. (Это равносильно тому, что из $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$ вытекает, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$). Выпуклая оболочка точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, находящихся в общем положении, называется n-мерным *симплексом*, а сами точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ — его вершинами. Нульмерный симплекс — это одна точка. Одномерный симплекс — отрезок, двумерный — треугольник, трехмерный — тетраэдр.

Если точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ находятся в общем положении, то любые $k+1$ из них ($k < n$) также находятся в общем положении и, следовательно, порождают некоторый k-мерный симплекс, называемый *k-мерной гранью* данного n-мерного симплекса. Например, тетраэдр с вершинами e_1, e_2, e_3, e_4 имеет четыре двумерные грани, определяемые соответственно тройками вершин (e_2, e_3, e_4), (e_1, e_3, e_4), (e_1, e_2, e_4), (e_1, e_2, e_3), шесть одномерных граней и четыре нульмерных.

Теорема 2. *Симплекс с вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ есть совокупность всех точек, которые можно представить в виде*

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1. \tag{1}$$

Доказательство. Легко проверить, что совокупность S точек вида (1) представляет собой выпуклое множество, содержащее точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. С другой стороны, всякое выпуклое множество, содержащее эти точки, должно содержать и точки вида (1); следовательно, S является наименьшим выпуклым множеством, содержащим точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

2. Однородно-выпуклые функционалы. С понятием выпуклого множества тесно связано важное понятие однородно-выпуклого функционала. Пусть L — действительное линейное пространство. Определенный на L функционал p называется *выпуклым*, если

$$p(\alpha x + (1-\alpha) y) \leqslant \alpha p(x) + (1-\alpha) p(y) \tag{2}$$

$$\text{для всех} \quad x, y \in L \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Функционал p называется *положительно-однородным*, если

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in L \quad \text{и всех} \quad \alpha > 0. \tag{3}$$

Для выпуклого положительно-однородного функционала выполнено неравенство:

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y). \tag{2'}$$

Действительно

$$p(x+y) = 2p\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant 2\left(p\left(\frac{x}{2}\right) + p\left(\frac{y}{2}\right)\right) = p(x) + p(y).$$

Легко понять, что условие (2′) вместе с условием (3) обеспечивает выпуклость функционала p. Положительно-однородный выпуклый функционал мы будем называть короче *однородно-выпуклым*. Укажем некоторые простейшие свойства однородно-выпуклых функционалов.

1. Полагая в равенстве (3) $x = 0$, получаем

$$p(0) = 0. \tag{4}$$

2. Из (2′) и (4) следует, что

$$0 = p(x + (-x)) \leqslant p(x) + p(-x) \quad \text{для всех} \quad x \in L. \tag{5}$$

Это неравенство означает, в частности, что если $p(x) < 0$, то обязательно $p(-x) > 0$. Таким образом, ненулевой однородно-выпуклый функционал может быть всюду неотрицателен, но если всюду $p(x) \leqslant 0$, то $p(x) \equiv 0$.

3. При любом α

$$p(\alpha x) \geqslant \alpha p(x).$$

При $\alpha > 0$ это следует из (3), при $\alpha = 0$ — из (4); если же $\alpha < 0$, то в силу (5) получаем

$$0 \leqslant p(\alpha x) + p(|\alpha| x) = p(\alpha x) + |\alpha| p(x),$$

т. е.

$$p(\alpha x) \geqslant -|\alpha| p(x) = \alpha p(x).$$

Примеры. 1. Всякий линейный функционал является, очевидно, однородно-выпуклым. Однородно-выпуклым будет и функционал $p(x) = |f(x)|$, если f линеен.

2. Длина вектора в n-мерном евклидовом пространстве есть однородно-выпуклый функционал. Здесь условие (2′) означает, что длина суммы двух векторов не превосходит суммы их длин (неравенство треугольника), а (3) непосредственно следует из определения длины вектора в $\mathbf{R}^n$.

3. Пусть m — пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Функционал

$$p(x) = \sup_n |x_n|$$

— однородно-выпуклый.

3. Функционал Минковского. Пусть L — произвольное линейное пространство и A — выпуклое тело в L, ядро которого содержит точку 0. Функционал

$$p_A(x) = \inf\left\{r\colon \frac{x}{r} \in A,\ r > 0\right\} \tag{6}$$

называется *функционалом Минковского* выпуклого тела A.

Теорема 3. *Функционал Минковского* (6) — *однородно-выпуклый и неотрицательный. Обратно, если $p(x)$ — произвольный однородно-выпуклый неотрицательный функционал на линейном пространстве L и k — положительное число, то*

$$A = \{x\colon p(x) \leqslant k\} \tag{7}$$

есть выпуклое тело, ядром которого служит множество $\{x\colon p(x) < k\}$ (содержащее точку 0). Если в (7) $k = 1$, то исходный функционал $p(x)$ есть функционал Минковского для A.

Доказательство. Для всякого $x \in L$ элемент x/r принадлежит A, если r достаточно велико; поэтому величина $p_A(x)$, определяемая равенством (6), неотрицательна и конечна. Проверим положительную однородность функционала (6). Если $t > 0$ и $y = tx$, то

$$\begin{aligned} p_A(y) &= \inf\{r > 0\colon\ y/r \in A\} = \inf\{r > 0\colon\ tx/r \in A\} = \\ &= \inf\{tr' > 0\colon\ x/r' \in A\} = t\inf\{r' > 0\colon\ x/r \in A\} = tp_A(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Проверим выпуклость $p_A(x)$. Пусть $x_1,\ x_2 \in L$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем числа r_i $(i = 1, 2)$ так, что $p_A(x_i) < r_i < p_A(x_i) + \varepsilon$; тогда $x_i/r_i \in A$. Положим $r = r_1 + r_2$, тогда точка $(x_1 + x_2)/r = r_1x_1/(rr_1) + r_2x_2/(rr_2)$ принадлежит отрезку с концами x_1/r_1 и x_2/r_2. В силу выпуклости A этот отрезок, а значит, и точка $(x_1 + x_2)/r$ принадлежат A, откуда

$$p_A(x_1 + x_2) \leqslant r = r_1 + r_2 < p_A(x_1) + p_A(x_2) + 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь произвольно, то

$$p_A(x_1 + x_2) \leqslant p_A(x_1) + p_A(x_2).$$

Следовательно, $p_A(x)$ удовлетворяет условиям (2′) и (3), а потому это — неотрицательный однородно-выпуклый функционал.

Рассмотрим теперь множество (7). Если $x, y \in A$ и $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, то

$$p(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha p(x) + \beta p(y) \leqslant k,$$

т. е. A выпукло. Далее, пусть $p(x) < k$, $t > 0$ и $y \in L$, тогда

$$p(x \pm ty) \leqslant p(x) + tp(\pm y).$$

Если $p(-y)=p(y)=0$, то $x \pm ty \in A$ при всех t; если же хотя бы одно из неотрицательных чисел $p(y)$, $p(-y)$ отлично от 0, то $x \pm ty \in A$ при

$$t < \frac{k-p(x)}{\max[p(y),\ p(-y)]}.$$

Непосредственно из введенных определений ясно, что p служит функционалом Минковского для множества $\{x\colon p(x) \leqslant 1\}$.

Итак, введя понятие функционала Минковского, мы установили соответствие между неотрицательными однородно-выпуклыми функционалами и выпуклыми телами с ядром, содержащим точку 0.

Примеры. 1. При $A=L$ имеем, очевидно,

$$p_L(x) \equiv 0.$$

2. Пусть A — шар с центром 0 и радиусом r в $\mathbf{R}^n$. Тогда

$$p_A(x)=\|x\|/r,$$

где $\|x\|$ — длина вектора x.

3. Пусть A — «слой» $-1 \leqslant x_1 \leqslant 1$ в пространстве l_2 последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Тогда

$$p_A(x)=|x_1|.$$

Замечания. 1. Иногда удобно рассматривать однородно-выпуклые функционалы, которые могут принимать не только конечные значения, но и значение $+\infty$ (но не $-\infty$). Тогда из равенства $p(\alpha x)=\alpha p(x)$ (где $\alpha>0$) следует, что $p(0)=0$ или $p(0)=\infty$. Легко проверить, что в этом последнем случае можно, не нарушая однородной выпуклости функционала, изменить его значение в одной точке, положив $p(0)=0$ вместо $p(0)=+\infty$. Так обычно и делают.

Если $p(x)$ — однородно-выпуклый, но не обязательно конечный, функционал, то $A=\{x\colon p(x) \leqslant k\}$ есть выпуклое множество, но не обязательно выпуклое тело. Обратно, если A — произвольное выпуклое множество, содержащее точку 0, то для него можно определить функционал Минковского формулой (6), но при этом придется для r допускать и значение $+\infty$.

2. Если $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — однородно-выпуклые функционалы, то таковы же $p_1(x)+p_2(x)$ и $\alpha p_1(x)$ при $\alpha>0$. Далее, если $\{p_s(x)\}_{s \in S}$ — произвольное семейство однородно-выпуклых функционалов, то таков и функционал $p(x)=\sup\limits_{s \in S} p_s(x)$. В частности, верхняя грань $p(x)=\sup\limits_{s \in S} f_s(x)$ любого непустого множества линейных функционалов на L есть однородно-выпуклый функцио-

нал. Воспользовавшись теоремой Хана — Банаха, легко показать, что так можно представить всякий (конечный) однородно-выпуклый функционал.

Упражнение. Множество A в линейном пространстве L называется *поглощающим*, если для всякого $x \in L$ существует такое $\alpha > 0$, что $x \in \lambda A$ для всех $\lambda \geqslant \alpha$. Доказать, что выпуклое множество A — поглощающее в том и только том случае, если его ядро содержит точку O.

4. Теорема Хана — Банаха. Пусть L — действительное линейное пространство и L_0 — некоторое его подпространство. Пусть, далее, на подпространстве L_0 задан некоторый линейный функционал f_0. Линейный функционал f, определенный на всем пространстве L, называется *продолжением* функционала f_0, если

$$f(x) = f_0(x) \text{ для всех } x \in L_0.$$

Задача о продолжении линейного функционала часто встречается в анализе. Основную роль во всем этом круге вопросов играет следующая теорема.

Теорема 4 (Хан — Банах). *Пусть p — однородно-выпуклый функционал, определенный на действительном линейном пространстве L, и пусть L_0 — линейное подпространство в L. Если f_0 — линейный функционал на L_0, подчиненный на L_0 функционалу $p(x)$, т. е. если на L_0*

$$f_0(x) \leqslant p(x), \tag{9}$$

то f_0 может быть продолжен до линейного функционала f на L, подчиненного $p(x)$ на всем L.

Доказательство. Покажем, что если $L_0 \neq L$, то функционал f_0 можно продолжить с L_0 на некоторое большее подпространство L' с сохранением условия (9). Действительно, пусть z — произвольный элемент из L, не принадлежащий L_0, и пусть L' — подпространство, порожденное L_0 и z. Каждый элемент из L' имеет вид $tz + x$, где $x \in L_0$.

Если f' — искомое продолжение функционала f_0 на L', то

$$f'(tz + x) = tf'(z) + f_0(x),$$

или, если положить $f'(z) = c$,

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x).$$

Теперь выберем c так, чтобы сохранить на L' условие подчинения (9), т. е. так, чтобы при всех $x \in L_0$ и всех действительных t выполнялось неравенство $f_0(x) + tc \leqslant p(x + tz)$. При $t > 0$ оно равносильно условию

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \leqslant p\left(\frac{x}{t} + z\right), \quad \text{или} \quad c \leqslant p\left(\frac{x}{t} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

а при $t < 0$ — условию

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right)+c \geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right),$$

или

$$c \geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

Покажем, что всегда существует число c, удовлетворяющее этим двум условиям. Пусть y' и y'' — произвольные элементы из L_0. Тогда

$$-f_0(y'')+p(y''+z) \geqslant -f_0(y')-p(-y'-z). \tag{10}$$

Это вытекает из неравенства

$$f_0(y'')-f_0(y') \leqslant p(y''-y') = p((y''+z)-(y'+z)) \leqslant \leqslant p(y''+z)+p(-y'-z).$$

Положим

$$c'' = \inf_{y''}(-f_0(y'')+p(y''+z)), \quad c' = \sup_{y'}(-f_0(y')-p(-y'-z)).$$

Из (10) в силу произвольности y' и y'' следует, что $c'' \geqslant c'$. Выбрав c так, что $c'' \geqslant c \geqslant c'$, определим функционал f' на L' формулой

$$f'(tz+x) = tc+f_0(x).$$

Этот функционал удовлетворяет условию подчинения (9).

Итак, мы показали, что если функционал f_0 определен на некотором подпространстве $L_0 \subset L$ и удовлетворяет на L_0 условию (9), то f_0 можно продолжить с сохранением этого условия на некоторое большее подпространство L'.

Если в L можно выбрать счетную систему элементов x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$, порождающую все L, то функционал на L строим по индукции, рассматривая возрастающую цепочку подпространств

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\}, \quad L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\}, \ldots$$

(здесь $\{L^{(k)}, x_{k+1}\}$ означает минимальное линейное подпространство в L, содержащее $L^{(k)}$ и x_{k+1}). Тогда каждый элемент $x \in L$ войдет в некоторое $L^{(k)}$ и, следовательно, функционал будет продолжен на все L.

В общем случае (т. е. когда счетного множества, порождающего L, не существует) доказательство заканчивается применением леммы Цорна. Совокупность $\mathfrak{F}$ всевозможных продолжений функционала f_0, удовлетворяющих условию подчинения (9), частично упорядочена, и каждое ее линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{F}_0$ обладает верхней гранью; этой верхней гранью служит функционал, определенный на объединении областей определения функционалов $f' \in \mathfrak{F}_0$ и совпадающий с каждым таким f' на его области определения. В силу леммы Цорна во всем $\mathfrak{F}$ существует максимальный элемент f. Этот максимальный элемент f и представляет собой искомый функционал. Действительно, он является продолжением исходного функционала f_0, удовлетворяет условию (9) на своей области определения и задан на всем L, так как иначе мы продолжили бы его описанным выше способом с того собственного подпространства, на котором он определен, на бóльшее подпространство, и f не был бы максимальным.

Теорема доказана.

Приведем еще комплексный вариант теоремы Хана — Банаха.

Неотрицательный функционал p на комплексном линейном пространстве L называется *однородно-выпуклым*, если для всех $x, y \in L$ и всех комплексных чисел λ

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y),$$
$$p(\lambda x)=|\lambda|\, p(x).$$

Теорема 4а. *Пусть p — однородно-выпуклый функционал на комплексном линейном пространстве L, а f_0 — линейный функционал, определенный на некотором линейном подпространстве $L_0 \subset L$ и удовлетворяющий на нем условию*

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \qquad x \in L_0.$$

Тогда существует линейный функционал f, определенный на всем L и удовлетворяющий условиям

$$|f(x)| \leqslant p(x), \qquad x \in L, \qquad f(x)=f_0(x), \qquad x \in L_0.$$

Доказательство. Обозначим через L_R и L_{0R} пространства L и L_0, рассматриваемые как действительные линейные пространства. Ясно, что p — однородно-выпуклый функционал на L_R, а $f_{0R}(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ — действительный линейный функционал на L_{0R}, удовлетворяющий условию

$$|f_{0R}(x)| \leqslant p(x)$$

и, тем более, условию

$$f_{0R}(x) \leqslant p(x).$$

В силу теоремы 4 существует действительный линейный функционал f_R, определенный на всем L_R и удовлетворяющий условиям

$$f_R(x) \leqslant p(x), \qquad x \in L_R (= L),$$
$$f_R(x) = f_{0R}(x), \qquad x \in L_{0R} (= L_0).$$

Ясно, что $-f_R(x)=f_R(-x)\leqslant p(-x)=p(x)$, так что

$$|f_R(x)|\leqslant p(x), \quad x\in L_R(=L). \tag{11}$$

Определим функционал f на L, полагая

$$f(x)=f_R(x)-if_R(ix)$$

(здесь мы пользуемся тем, что L — комплексное линейное пространство, так что в нем определено умножение на комплексные числа). Непосредственная проверка показывает, что f — комплексный линейный функционал на L, причем

$$f(x)=f_0(x) \quad \text{при} \quad x\in L_0,$$
$$\operatorname{Re} f(x)=f_R(x) \quad \text{при} \quad x\in L.$$

Осталось показать, что $|f(x)|\leqslant p(x)$ для всех $x\in L$. Допустим противное; тогда для некоторого $x_0\in L$ имеем $|f(x_0)|>p(x_0)$. Представим комплексное число $f(x_0)$ в виде $f(x_0)=\rho e^{i\varphi}$, где $\rho>0$, и положим $y_0=e^{-i\varphi}x_0$. Тогда $f_R(y_0)=\operatorname{Re} f(y_0)=\operatorname{Re}[e^{-i\varphi}f(x_0)]=\rho>p(x_0)=p(y_0)$, что противоречит условию (11).

Теорема доказана.

Упражнение. Покажите, что условие конечности функционала p в теореме Хана — Банаха можно опустить.

5. Отделимость выпуклых множеств в линейном пространстве. Пусть L — действительное линейное пространство, а M и N — два его подмножества. Говорят, что определенный на L линейный функционал f *разделяет* эти множества, если существует такое число C, что

$$f(x)\geqslant C \quad \text{при} \quad x\in M \quad \text{и} \quad f(x)\leqslant C \quad \text{при} \quad x\in N,$$

т. е. если

$$\inf_{x\in M} f(x)\geqslant \sup_{x\in N} f(x).$$

Функционал f называется *строго разделяющим* множества M и N, если выполнено строгое неравенство

$$\inf_{x\in M} f(x)>\sup_{x\in N} f(x).$$

Следующие два утверждения непосредственно вытекают из определения разделимости.

1) Линейный функционал f разделяет множества M и N в том и только том случае, когда он разделяет множества $M-N$ и $\{0\}$ (т. е. множества всех элементов вида $x-y$, где $x\in M$, $y\in M$, и точку 0).

2) Линейный функционал f разделяет множества M и N в том и только том случае, когда при каждом $x\in L$ он разделяет множества $M-x$ и $N-x$.

Из теоремы Хана — Банаха легко получается следующая теорема об отделимости выпуклых множеств в линейном пространстве, имеющая многочисленные применения.

Теорема 5. *Пусть M и N — выпуклые множества в действительном линейном пространстве L, причем ядро хотя бы одного из них, скажем M, не пусто и не пересекается с другим множеством. Тогда существует ненулевой линейный функционал на L, разделяющий M и N.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что точка 0 принадлежит ядру $\mathring{M}$ множества M. (Иначе мы рассмотрели бы множества $M - x_0$ и $N - x_0$, где $x_0 \in \mathring{M}$.) Пусть $y_0 \in N$, тогда точка $-y_0$ принадлежит ядру множества $M - N$, а 0 принадлежит ядру $\mathring{K}$ множества $K = M - N + y_0$. Так как $\mathring{M} \cap N = \varnothing$, то 0 не принадлежит ядру $M - N$ и $y_0 \notin \mathring{K}$. Пусть p — функционал Минковского для $\mathring{K}$. Тогда $p(y_0) \geqslant 1$, поскольку $y_0 \notin \mathring{K}$. Введем линейный функционал

$$f_0(ay_0) = ap(y_0).$$

Он определен на одномерном пространстве, состоящем из элементов вида αy_0, и удовлетворяет условию

$$f_0(ay_0) \leqslant p(ay_0),$$

поскольку $p(\alpha y_0) = \alpha p(y_0)$ при $\alpha \geqslant 0$, и $f_0(\alpha y_0) = \alpha f_0(y_0) < 0 < p(\alpha y_0)$ при $\alpha < 0$. По теореме Хана — Банаха функционал f_0 можно продолжить до линейного функционала f, определенного на всем L и удовлетворяющего на L условию $f(y) \leqslant p(y)$. Отсюда следует, что $f(y) \leqslant 1$ при $y \in K$ и в то же время $f(y_0) \geqslant 1$. Таким образом, f разделяет множества K и $\{y_0\}$, а следовательно, f разделяет $M - N$ и $\{0\}$; но тогда f разделяет множества M и N.

Теорема доказана.

§ 3. Нормированные пространства

В главе II мы занимались топологическими и, в частности, метрическими пространствами, т. е. множествами, в которых введено, тем или иным способом, понятие близости элементов, а в предыдущих параграфах данной главы мы имели дело с линейными пространствами. До сих пор каждое из этих понятий стояло особняком. Однако в анализе приходится иметь дело с пространствами, в которых введены как операции сложения элементов и умножения их на числа, так и некоторая топология, т. е. рассматривать так называемые топологические линейные пространства. Среди последних важный класс образуют нормированные пространства. Теория этих пространств была развита в работах С. Банаха и ряда других авторов.

1. Определение и примеры нормированных пространств.

Определение 1. Пусть L — линейное пространство. Однородно-выпуклый функционал p, определенный на L, называется *нормой*, если он удовлетворяет следующим дополнительным условиям (помимо выпуклости):

1) $p(x) = 0$ только при $x = 0$,

2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ для всех α.

Таким образом, вспоминая определения из п. 2 § 2, мы можем сказать, что нормой в L называется функционал, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) $p(x) \geqslant 0$, причем $p(x) = 0$ только при $x = 0$,

2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, $x, y \in L$,

3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, каково бы ни было число α.

Определение 2. Линейное пространство L, в котором задана некоторая норма, мы назовем *нормированным пространством*. Норму элемента $x \in L$ мы будем обозначать символом $\|x\|$.

Всякое нормированное пространство становится метрическим пространством, если ввести в нем расстояние

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Справедливость аксиом метрического пространства тотчас же вытекает из свойств 1)—3) нормы. На нормированные пространства переносятся, таким образом, все те понятия и факты, которые были изложены в гл. II для метрических пространств.

Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством* или, короче, *B-пространством*.

Примеры нормированных пространств. Многие из пространств, рассматривавшихся в гл. II в качестве примеров метрических (а в § 1 данной главы — линейных) пространств, в действительности могут быть наделены естественной структурой нормированного пространства.

1. Прямая линия $\mathbf{R}^1$ становится нормированным пространством, если для всякого числа $x \in \mathbf{R}^1$ положить $\|x\| = |x|$.

2. Если в действительном n-мерном пространстве $\mathbf{R}^n$ с элементами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положить

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \tag{1}$$

то все аксиомы нормы будут выполнены. Формула

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

определяет в $\mathbf{R}^n$ ту самую метрику, которую мы в этом пространстве уже рассматривали.

В этом же линейном пространстве можно ввести норму

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{2}$$

или норму

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|. \tag{3}$$

Эти нормы определяют в $\mathbf{R}^n$ метрики, которые мы рассматривали в примерах 4 и 5 п. 1 § 1 гл. II. Проверка того, что в каждом из этих случаев аксиомы нормы действительно выполнены, не составляет труда.

В комплексном n-мерном пространстве $\mathbf{C}^n$ можно ввести норму

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

или любую из норм (2) или (3).

3. В пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ определим норму формулой

$$\|f\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|. \tag{4}$$

Соответствующее расстояние уже рассматривалось в примере 6 п. 1 § 1 гл. II.

4. Пусть m — пространство ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Положим

$$\|x\| = \sup_n |x_n|. \tag{5}$$

Условия 1)—3) определения нормы здесь, очевидно, выполнены. Метрика, которая индуцируется в m этой нормой, совпадает с той, которую мы уже рассматривали (гл. II, § 1, п. 1, пример 9).

2. Подпространства нормированного пространства. Мы определили подпространство линейного пространства L (не снабженного какой-либо топологией) как непустое множество L_0, обладающее тем свойством, что если $x, y \in L_0$, то $\alpha x + \beta y \in L_0$. В нормированном пространстве основной интерес представляют *замкнутые* линейные подпространства, т. е. подпространства, содержащие все свои предельные точки. В конечномерном нормированном пространстве всякое подпространство автоматически замкнуто (докажите это!). В бесконечномерном случае это не так. Например, в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций с нормой (4) многочлены образуют подпространство, но не замкнутое[1]).

Другой пример: в пространстве m ограниченных последовательностей последовательности, содержащие лишь конечное число отличных от нуля членов, образуют подпространство. Однако оно не замкнуто по норме (5): в его замыкании содержится, например, последовательность $(1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$.

Как правило, мы будем рассматривать только замкнутые подпространства, поэтому естественно изменить терминологию, которая была установлена в § 1. *Подпространством* нормированного пространства мы будем называть теперь только *замкнутое* подпространство; в частности, подпространством, порожденным данной системой элементов $\{x_\alpha\}$, мы будем называть наименьшее *замкнутое* подпространство, содержащее $\{x_\alpha\}$. Мы будем говорить о нем, как о *линейном замыкании* системы $\{x_\alpha\}$. Совокупность элементов (не обязательно замкнутую), содержащую вместе с x и y их произвольную линейную комбинацию $\alpha x + \beta y$, будем называть *линейным многообразием*.

Систему элементов, лежащую в нормированном пространстве E, мы будем называть *полной*, если порожденное ею (замкнутое!) подпространство есть все E. Например, в силу теоремы Вейерштрасса совокупность всех функций $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ полна в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$.

3. Фактор-пространства нормированного пространства. Пусть R — нормированное пространство и M — некоторое его подпространство. Рассмотрим фактор-пространство $P = R/M$. В соответствии со сказанным в п. 4 § 1 этой главы P есть линейное пространство. Определим в нем норму, положив для каждого класса смежности ξ

$$\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\|. \tag{6}$$

Покажем, что при этом выполнены сформулированные в п. 1 аксиомы нормированного пространства. Ясно, что всегда $\|\xi\| \geqslant 0$. Если ξ_0 — нулевой элемент фактор-пространства P (т. е. ξ_0 совпадает с подпространством M), то в качестве $x \in \xi_0$ можно взять нуль пространства R, и тогда получаем, что $\|\xi_0\| = 0$. Обратно, если $\|\xi\| = 0$, то из определения нормы (6) следует существование в классе ξ последовательности, сходящейся к нулю. Но так как M замкнуто, то замкнут и каждый класс смежности, значит, $0 \in \xi$, а это означает, что $\xi = M$, т. е. ξ есть нулевой элемент в P. Итак, $\|\xi\| \geqslant 0$ и $\|\xi\| = 0$ лишь тогда, когда ξ — нуль пространства P.

---

[1]) В силу теоремы Вейерштрасса, гласящей, что всякая непрерывная функция на отрезке есть предел равномерно сходящейся последовательности многочленов, замыкание подпространства многочленов в $C[a, b]$ есть все $C[a, b]$.

Далее, для всякого $x \in R$ и всякого α имеем

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Беря в обеих частях этого равенства нижнюю грань по $x \in \xi$, получаем

$$\|\alpha\xi\| = |\alpha| \cdot \|\xi\|.$$

Наконец, пусть $\xi, \eta \in P$ и $x \in \xi$, $y \in \eta$. Тогда

$$\|\xi + \eta\| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Беря в правой части этого неравенства нижнюю грань по всем $x \in \xi$, $y \in \eta$, получаем, что

$$\|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|.$$

Итак, все аксиомы нормированного пространства для P выполнены. Покажем теперь, что если R полно, то и $P = R/M$ полно. Действительно, согласно (6) для каждого $\xi \in R/M$ найдется такой элемент $x \in \xi$, что

$$\|\xi\| \geqslant \frac{1}{2}\|x\|.$$

Пусть $\{\xi_n\}$ — фундаментальная последовательность в P. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_{n+1} - \xi_n\|$$

сходится. Добавив к $\{\xi_n\}$ еще ξ_0 — нулевой элемент пространства P, — выберем $x_n \in \xi_{n+1} - \xi_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ так, что

$$\|\xi_{n+1} - \xi_n\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_n\|.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ сходится, а значит, в силу полноты пространства R сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Положив $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ и обозначив через ξ класс, содержащий x, получим (поскольку $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k \in \xi_n$ при каждом n)

$$\|\xi - \xi_n\| \leqslant \left\| x - \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n$. Итак:

Фактор-пространство банахова пространства по любому его (замкнутому) подпространству есть банахово пространство.

Упражнения. 1. Пусть R — банахово пространство, $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \ldots \supset B_n \supset \ldots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров в нем. Докажите, что она имеет непустое пересечение (не предполагается, что радиусы этих шаров стремятся к 0; ср. с упражнением 3 на стр. 70). Приведите пример последовательности вложенных непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств в некотором B-пространстве, имеющих пустое пересечение.

2. Пусть R — бесконечномерное B-пространство; тогда его алгебраическая размерность (см. упражнение 3 на стр. 123) несчетна.

3. Пусть R — линейное нормированное пространство; доказать справедливость следующих утверждений:

1) всякое конечномерное линейное многообразие в R замкнуто;

2) если M — подпространство, а N — конечномерное подпространство в R, то их сумма

$$M + N = \{x\colon\ x = y + z,\ y \in M,\ z \in N\}$$

замкнута; привести пример двух (замкнутых) линейных подпространств в l_2, сумма которых не замкнута;

3) пусть Q — открытое выпуклое множество в R, и пусть $x_0 \notin Q$; тогда существует гиперплоскость, проходящая через точку x_0 и не пересекающая Q.

4. Две нормы, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, в линейном пространстве R называются *эквивалентными*, если существуют такие постоянные $a, b > 0$, что $a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \leqslant b\|x\|_1$ для всех $x \in R$. Доказать, что если пространство R конечномерно, то любые две нормы в нем эквивалентны.

§ 4. Евклидовы пространства

1. Определение евклидовых пространств. Один из хорошо известных способов введения нормы в линейном пространстве — это задание в нем скалярного произведения. Напомним, что *скалярным произведением* в действительном линейном пространстве R называется действительная функция (x, y), определенная для каждой пары элементов $x, y \in R$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(x, y) = (y, x)$,

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,

4) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*. В евклидовом пространстве R вводится норма с помощью формулы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Из свойств 1)—4) скалярного произведения следует, что все аксиомы нормы при этом выполнены.

Действительно, выполнение аксиом 1) и 3) нормы (п. 1 § 3) очевидно, а выполнение аксиомы 2) (неравенство треугольника) вытекает из *неравенства Коши — Буняковского*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1}$$

которое мы сейчас докажем.

Рассмотрим квадратный трехчлен от действительной переменной λ, неотрицательный при всех значениях λ:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) = \\ = \|x\|^2 \lambda^2 + 2(x, y)\lambda + \|y\|^2.$$

Так как это выражение представляет собой скалярный квадрат некоторого вектора, то всегда $\varphi(\lambda) \geqslant 0$. Следовательно, дискриминант этого трехчлена меньше или равен нулю.

Неравенство Коши — Буняковского (1) как раз и выражает не что иное, как неположительность дискриминанта этого квадратного трехчлена $\varphi(\lambda)$.

Отметим, что в евклидовом пространстве сумма, произведение на число и скалярное произведение непрерывны, т. е. если $x_n \to x$, $y_n \to y$ (в смысле сходимости по норме), $\lambda_n \to \lambda$ (как числовая последовательность), то

$$x_n + y_n \to x + y,$$
$$\lambda_n x_n \to \lambda x,$$
$$(x_n, y_n) \to (x, y).$$

Доказательство этих фактов основано на использовании неравенства Коши — Буняковского (1) и предоставляется читателю в качестве упражнения.

Наличие в R скалярного произведения позволяет ввести в этом пространстве не только норму (т. е. длину) вектора, но и угол между векторами; именно, угол φ между векторами x и y определяется формулой

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{2}$$

При этом из неравенства Коши — Буняковского (1) вытекает, что выражение, стоящее в (2) справа, по модулю не превосходит 1 и, следовательно, формула (2) действительно для любых ненулевых x и y определяет некоторый угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Если $(x, y) = 0$, то из (2) получаем, что $\varphi = \pi/2$; в этом случае векторы x и y называются *ортогональными*.

Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\}$ из R называется *ортогональной*, если

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta.$$

Если векторы $\{x_\alpha\}$ ортогональны, то они линейно независимы. В самом деле, пусть

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \ldots + a_n x_{\alpha_n} = 0;$$

поскольку $\{x_\alpha\}$ — ортогональная система, имеем

$$(x_{\alpha_i},\ a_1 x_{\alpha_1} + \ldots + a_n x_{\alpha_n}) = a_i (x_{\alpha_i},\ x_{\alpha_i}) = 0,$$

но $(x_{\alpha_i},\ x_{\alpha_i}) \neq 0$ и, значит, $a_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если ортогональная система $\{x_\alpha\}$ *полна* (т. е. наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство есть все R), то она называется *ортогональным базисом.* Если при этом норма каждого элемента равна 1, то система $\{x_\alpha\}$ называется *ортогональным нормированным базисом.* Вообще, если система $\{x_\alpha\}$ (полная или нет) такова, что

$$(x_\alpha,\ x_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{при} \quad \alpha = \beta, \end{cases}$$

то она называется *ортогональной нормированной* (короче *ортонормальной*) *системой.* Ясно, что если $\{x_\alpha\}$ — ортогональная система, то $\left\{ \frac{x_\alpha}{\| x_\alpha \|} \right\}$ — ортогональная нормированная система.

2. Примеры. Рассмотрим некоторые примеры евклидовых пространств и ортогональных базисов в них.

1. n-мерное арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$, элементами которого служат системы действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$, с обычными операциями сложения и умножения и скалярным произведением

$$(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{3}$$

представляет собой хорошо известный пример евклидова пространства. Ортогональный нормированный базис в нем (один из бесконечного числа возможных) образуют векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ e_2 &= (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1). \end{aligned}$$

2. Пространство l_2 с элементами

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots), \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

и скалярным произведением

$$(x,\ y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{4}$$

есть евклидово пространство. Действительно, сходимость ряда, стоящего в (4) справа, следует из неравенства (4) гл. II, § 1.

Свойства 1)—4) скалярного произведения проверяются непосредственно. Простейший ортогональный нормированный базис в l_2 образуют векторы

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ортогональность и нормированность этой системы ясны; вместе с тем система (5) полна: пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ — любой вектор из l_2 и $x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Тогда $x^{(n)}$ есть линейная комбинация векторов $e_1, \ldots, e_n$ и $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Пространство $C_2[a, b]$, состоящее из непрерывных на $[a, b]$ действительных функций, со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \tag{6}$$

также является евклидовым. Среди различных ортогональных базисов, которые можно указать в нем, важнейшим является тригонометрическая система, состоящая из функций

$$\frac{1}{2}, \quad \cos n\frac{2\pi t}{b-a}, \quad \sin n\frac{2\pi t}{b-a} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Ортогональность этой системы проверяется непосредственно.

Если рассматриваются непрерывные функции на отрезке длины 2π, скажем, на $[-\pi, \pi]$, то соответствующая тригонометрическая система есть: $1/2$, $\cos nt$, $\sin nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

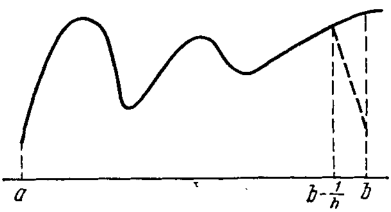

Рис. 17.

Система (7) полна. Действительно, согласно теореме Вейерштрасса, всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция φ, принимающая в точках a и b одинаковые значения, может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических многочленов, т. е. линейных комбинаций элементов системы (7). Такая последовательность и подавно сходится к φ по норме пространства $C_2[a, b]$. Если же f — *произвольная* функция из $C_2[a, b]$, то ее можно представить как предел (по норме пространства $C_2[a, b]$) последовательности функций φ_n, каждая из которых совпадает с f на отрезке $[a, b - 1/n]$, линейна на $[b - 1/n, b]$ и в точке b принимает то же значение, что и в точке a (рис. 17). Следовательно, каждый элемент из $C_2[a, b]$ можно приблизить сколь угодно точно (в метрике этого пространства) линейными комбинациями элементов системы (7), а это и означает ее полноту.

3. Существование ортогональных базисов, ортогонализация. На протяжении оставшейся части этого параграфа мы ограничимся сепарабельными евклидовыми пространствами (т. е. содержащими счетное всюду плотное множество). Каждое из пространств, указанных в предыдущем пункте, сепарабельно (докажите это!). Пример несепарабельного евклидова пространства можно построить так. Рассмотрим на прямой всевозможные функции x, для каждой из которых множество точек $t_1, t_2, \ldots,$ в которых она отлична от нуля, не более чем счетно, а сумма $\sum x^2(t)$, взятая по всем таким точкам, конечна. Операции сложения и умножения на числа определим в этом пространстве как обычные сложение и умножение функций, а скалярное произведение определим формулой

$$(x, y) = \sum x(t)\, y(t),$$

где сумма берется по множеству тех точек t, в которых $x(t)y(t) \neq 0$. Доказательство того, что в этом пространстве нет счетного всюду плотного подмножества, мы предоставляем читателю. Отметим, что это пространство — полное.

Итак, пусть R — сепарабельное евклидово пространство. Покажем, *что в таком пространстве всякая ортогональная система не более чем счетна.*

Действительно, без ограничения общности можно считать рассматриваемую систему $\{\varphi_\alpha\}$ не только ортогональной, но и нормированной (иначе мы заменили бы ее системой $\left\{\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right\}$). При этом

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}, \quad \text{если} \quad \alpha \neq \beta.$$

Рассмотрим совокупность шаров $B(\varphi_\alpha, 1/2)$. Эти шары не пересекаются. Если счетное множество $\{\psi_n\}$ всюду плотно в R, то в каждом таком шаре есть по крайней мере один элемент из $\{\psi_n\}$. Следовательно, число таких шаров (а значит, и элементов φ_α) не более чем счетно.

В каждом из приведенных выше примеров евклидовых пространств мы указали по ортогональному базису. Докажем теперь следующую общую теорему, аналогичную теореме о существовании ортогонального базиса в n-мерном евклидовом пространстве.

Теорема 1 (об ортогонализации). *Пусть*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{8}$$

— линейно независимая система элементов в евклидовом пространстве R. Тогда в R существует система элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{9}$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) *система* (9) *ортогональная и нормированная;*

2) *каждый элемент φ_n есть линейная комбинация элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$:*

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + \ldots + a_{nn}f_n,$$

причем $a_{nn} \neq 0$;

3) *каждый элемент f_n представляется в виде*

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n, \quad \text{причем} \quad b_{nn} \neq 0.$$

Каждый элемент системы (9) *определяется условиями* 1)—3) *однозначно с точностью до множителя* ± 1.

Доказательство. Элемент φ_1 ищется в виде $\varphi_1 = a_{11}f_1$; при этом a_{11} определяется из условия

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1,$$

откуда

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}.$$

Ясно, что φ_1 определяется этим однозначно (с точностью до знака). Пусть элементы $\varphi_k (k < n)$, удовлетворяющие условиям 1)—3), уже построены. Тогда f_n можно представить в виде

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1} + h_n,$$

где

$$(h_n, \varphi_k) = 0 \quad \text{при} \quad k < n.$$

Действительно, соответствующие коэффициенты b_{nk}, а значит, и элемент h_n, однозначно определяются из условий

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 - \ldots - b_{n,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) = 0.$$

Очевидно, что $(h_n, h_n) > 0$ (предположение $(h_n, h_n) = 0$ противоречило бы линейной независимости системы (8)). Положим

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}.$$

Из индуктивного построения ясно, что h_n, а значит, и φ_n, выражаются через $f_1, \ldots, f_n$, т. е. $\varphi_n = a_{n1}f_1 + \ldots + a_{nn}f_n$, где $a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0$. Кроме того,

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1, \quad (\varphi_n, \varphi_k) = 0 \quad (k < n)$$

и

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n \quad \left(b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0\right),$$

т. е. φ_n удовлетворяет условиям теоремы.

Переход от системы (8) к системе (9), удовлетворяющей условиям 1)—3), называется *процессом ортогонализации*.

Ясно, что подпространства, порожденные системами (8) и (9), совпадают между собой. Следовательно, эти системы полны или не полны одновременно.

Следствие. *В сепарабельном евклидовом пространстве R существует ортогональный нормированный базис.*

Действительно, пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в R. Выберем из него полную систему линейно независимых элементов $\{f_n\}$. Для этого достаточно из последовательности $\{\psi_n\}$ исключить все те элементы ψ_k, каждый из которых может быть представлен как линейная комбинация ψ_i с $i < k$. Применив к полученной таким образом полной системе линейно независимых элементов процесс ортогонализации, мы и построим ортогональный нормированный базис.

Упражнения. 1. Привести пример (несепарабельного) евклидова пространства, в котором нет ни одного ортогонального базиса. Доказать, что **в полном** евклидовом пространстве (не обязательно сепарабельном) существует ортогональный нормированный базис.

2. Доказать, что в полном евклидовом пространстве (не обязательно сепарабельном) всякая последовательность непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств имеет непустое пересечение (ср. с упражнениями на стр. 70 и 143).

4. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы. Выбрав в n-мерном евклидовом пространстве ортогональный нормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, можно каждый вектор $x \in \mathbf{R}^n$ записать в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \tag{10}$$

где

$$c_k = (x, e_k). \tag{11}$$

Выясним, как обобщить разложение (10) на случай евклидова бесконечномерного пространства. Пусть

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{12}$$

— ортогональная нормированная система в евклидовом пространстве R и f — произвольный элемент из R. Сопоставим элементу $f \in R$ последовательности чисел

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

которые мы будем называть *координатами*, или *коэффициентами Фурье* элемента f по системе $\{\varphi_k\}$, и ряд (пока формальный)

$$\sum_k c_k \varphi_k, \tag{14}$$

который мы назовем *рядом Фурье* элемента f по системе $\{\varphi_n\}$.

Естественно возникает вопрос: сходится ли ряд (14), т. е. стремится ли последовательность его частичных сумм (в смысле метрики пространства R) к какому-либо пределу, и если он сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом f?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим предварительно следующую задачу: при заданном n подобрать коэффициенты α_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы расстояние между f и суммой

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{15}$$

было минимальным. Вычислим это расстояние. Так как система (12) ортогональна и нормирована, то

$$\begin{aligned} \| f - S_n \|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) = \\ &= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \varphi_l \right) = \\ &= \| f \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2. \end{aligned}$$

Ясно, что минимум этого выражения достигается тогда, когда последнее слагаемое равно 0, т. е. при

$$\alpha_k = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

В этом случае

$$\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{17}$$

Мы показали, что среди всех сумм вида (15) при данном n наименее уклоняется от f частичная сумма ряда Фурье элемента f. Геометрически этот результат можно пояснить следующим образом. Элемент

$$f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

ортогонален всем линейным комбинациям вида

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k,$$

т. е. ортогонален подпространству, порожденному элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, в том и только том случае, когда выполняется условие (16) (проверьте это!). Таким образом, полученный нами результат представляет собой обобщение известной теоремы элементарной геометрии: длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую или плоскость, меньше, чем длина любой наклонной, проведенной из той же точки.

Так как всегда $\|f - S_n\|^2 \geqslant 0$, то из равенства (17) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Здесь n произвольно, а правая часть не зависит от n; следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{18}$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя*. Геометрически оно означает, что сумма квадратов проекций вектора f на взаимно ортогональные направления не превосходит квадрата длины самого вектора f.

Введем следующее важное понятие.

Определение 1. Ортогональная нормированная система (12) называется *замкнутой*, если для любого $f \in R$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \tag{19}$$

называемое *равенством Парсеваля*.

Из тождества (17) следует, что замкнутость системы (12) равносильна тому, что для каждого $f \in R$ частичные суммы ряда Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ сходятся к f.

Понятие замкнутости ортогональной нормированной системы тесно связано с введенным выше понятием полноты системы.

Теорема 2. *В сепарабельном евклидовом пространстве R всякая полная ортогональная нормированная система является замкнутой, и обратно.*

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}$ замкнута; тогда, каков бы ни был элемент $f \in R$, последовательность частичных сумм его ряда Фурье сходится к f. Это означает, что линейные комбинации элементов системы $\{\varphi_n\}$ всюду плотны в R, т. е. система $\{\varphi_n\}$ полна. Обратно, пусть система $\{\varphi_n\}$ полна, т. е. любой элемент $f \in R$ можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ элементов системы $\{\varphi_n\}$; частичная сумма $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ ряда Фурье для f дает не менее точную аппроксимацию. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ сходится к f, и равенство Парсеваля имеет место.

В предыдущем пункте мы доказали существование полных ортогональных нормированных систем в сепарабельном евклидовом пространстве. Поскольку для ортогональных нормированных систем понятия замкнутости и полноты совпадают, существование замкнутых ортогональных систем в R не нуждается в новом доказательстве, а приведенные в предыдущем пункте примеры полных ортогональных нормированных систем являются в то же время примерами замкнутых систем.

Выше мы все время предполагали рассматриваемые ортогональные системы нормированными. Можно переформулировать понятия коэффициентов Фурье, ряда Фурье и т. д. и для любых ортогональных систем. Пусть $\{\varphi_n\}$ — произвольная ортогональная система. По ней можно построить нормированную систему, состоящую из элементов $\psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$. Для любого $f \in R$ имеем

$$c_n = (f, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|}(f, \varphi_n)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\|\varphi_n\|}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n,$$

где

$$a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{20}$$

Коэффициенты a_n, определяемые формулой (20), мы назовем *коэффициентами Фурье* элемента f по ортогональной (ненормированной) системе $\{\varphi_n\}$. Подставив в неравенство (18) вместо c_n их выражения $c_n = a_n\|\varphi_n\|$ из (20), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 a_n^2 \leqslant \|f\|^2 \tag{21}$$

— неравенство Бесселя для произвольной ортогональной системы.

5. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса — Фишера. Начиная с п. 3 мы рассматривали сепарабельные евклидовы пространства; с этого момента мы будем, кроме того, предполагать, что рассматриваемые пространства полны.

Итак, пусть R — полное сепарабельное евклидово пространство и $\{\varphi_n\}$ — некоторая ортогональная нормированная система в нем (не обязательно полная). Из неравенства Бесселя следует, что для того чтобы числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ служили коэффициентами Фурье какого-либо элемента $f \in R$, необходимо, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

сходился. Оказывается, что в полном пространстве это условие не только необходимо, но и достаточно. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (Рисс — Фишер). *Пусть $\{\varphi_n\}$ — произвольная ортогональная нормированная система в полном евклидовом пространстве R, и пусть числа*

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$$

таковы, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{22}$$

сходится. Тогда существует такой элемент $f \in R$, что

$$c_k = (f,\ \varphi_k)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f,\ f) = \| f \|^2.$$

Доказательство. Положим

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

Тогда

$$\| f_{n+p} - f_n \|^2 = \| c_{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots + c_{n+p}\varphi_{n+p} \|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

Так как ряд (22) сходится, то отсюда в силу полноты R вытекает сходимость последовательности $\{f_n\}$ к некоторому элементу $f \in R$. Далее

$$(f,\ \varphi_i) = (f_n,\ \varphi_i) + (f - f_n,\ \varphi_i), \tag{23}$$

причем справа первое слагаемое при $n \geqslant i$ равно c_i, а второе стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$| (f - f_n,\ \varphi_i) | \leqslant \| f - f_n \| \cdot \| \varphi_i \|.$$

Левая часть равенства (23) от n не зависит; поэтому, переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$(f,\ \varphi_i) = c_i$$

Так как, по определению f,

$$\| f - f_n \| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f).$$

Действительно,

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0$$

при $n \to \infty$.

Установим в заключение следующую полезную теорему.

Теорема 4. *Для того чтобы ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$ в полном сепарабельном евклидовом пространстве была полна, необходимо и достаточно, чтобы в R не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{\varphi_n\}$.*

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}$ полна и, следовательно, замкнута. Если f ортогонален всем элементам системы $\{\varphi_n\}$, то все его коэффициенты Фурье равны нулю. Тогда из равенства Парсеваля получаем

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

т. е. $f = 0$.

Обратно, пусть система $\{\varphi_n\}$ не полна. Тогда в R существует такой элемент $g \neq 0$, что

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \qquad (\text{где } c_k = (g, \varphi_k)).$$

На основании теоремы Рисса — Фишера существует такой элемент $f \in R$, что

$$(f, \varphi_k) = c_k \quad \text{и} \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Элемент $f - g$ ортогонален всем φ_i. Из неравенства

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g)$$

следует, что $f - g \neq 0$.

Упражнения. 1. Пусть H — полное евклидово пространство (не обязательно сепарабельное); тогда в нем существует полная ортогональная нормированная система $\{\varphi_\alpha\}$ (см. упражнение 1 на стр. 149). Доказать, что для всякого вектора $f \in H$ справедливы разложения

$$f = \sum_{\alpha} (f, \varphi_\alpha)\, \varphi_\alpha, \qquad \| f \|^2 = \sum_{\alpha} (f, \varphi_\alpha)^2,$$

где в суммах, стоящих справа, имеется не более счетного числа отличных от 0 слагаемых.

2. Система $\{\varphi_\alpha\}$ векторов евклидова пространства R называется *тотальной*, если в R не существует отличных от 0 векторов, ортогональных ко всем φ_α. Теорема 4 означает, что в полном евклидовом пространстве тотальность системы векторов эквивалентна ее полноте. Показать, что в неполных пространствах могут существовать тотальные, но не полные системы.

6. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме. Продолжим рассмотрение полных евклидовых пространств. При этом нас, как и до сих пор, будут интересовать бесконечномерные пространства, а не конечномерные, исчерпывающее описание которых дается в курсах линейной алгебры. По-прежнему мы, как правило, будем предполагать наличие в рассматриваемых пространствах счетного всюду плотного множества. Введем следующее определение.

Определение 2. Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется *гильбертовым пространством* [1]).

Таким образом, гильбертовым пространством называется совокупность H элементов $f, g, \ldots$ произвольной природы, удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам).

I. H есть евклидово пространство (т. е. линейное пространство с заданным в нем скалярным произведением).

II. Пространство H полно в смысле метрики $\rho(f, g) = \|f - g\|$.

III. Пространство H бесконечномерно, т. е. в нем для любого n можно найти n линейно независимых элементов.

Чаще всего рассматриваются сепарабельные гильбертовы пространства, т. е. пространства, удовлетворяющие еще одной аксиоме.

IV. H сепарабельно, т. е. в нем существует счетное всюду плотное множество.

Примером сепарабельного гильбертова пространства может служить действительное пространство l_2.

В дальнейшем мы будем рассматривать только сепарабельный случай.

Аналогично определению 2 из § 1 два евклидовых пространства, R и R^*, называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*$$

$$(x, y \in R;\ x^*, y^* \in R^*),$$

---

[1]) По имени знаменитого немецкого математика Д. Гильберта (1862—1943), который ввел это понятие.

то

$$x+y \leftrightarrow x^*+y^*,$$
$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

и

$$(x,\ y)=(x^*,\ y^*).$$

Иначе говоря, изоморфизм евклидовых пространств — это взаимно однозначное соответствие, сохраняющее как линейные операции, определенные в этих пространствах, так и скалярное произведение.

Как известно, любые два n-мерных евклидовых пространства изоморфны между собой и, следовательно, каждое такое пространство изоморфно арифметическому пространству $\mathbf{R}^n$ (пример 1, п. 2). Евклидовы пространства бесконечного числа измерений не обязательно изоморфны друг другу. Например, пространства l_2 и $C_2[a, b]$ между собой не изоморфны. Это видно, например, из того, что первое из них полно, а второе — нет.

Однако имеет место следующий факт.

Теорема 5. *Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой.*

Доказательство. Покажем, что каждое гильбертово пространство H изоморфно пространству l_2. Тем самым будет доказано утверждение теоремы. Выберем в H произвольную полную ортогональную нормированную систему $\{\varphi_n\}$ и поставим в соответствие элементу $f \in H$ совокупность $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$ его коэффициентов Фурье по этой системе. Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, то последовательность $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots)$ есть некоторый элемент из l_2. Обратно, в силу теоремы Рисса — Фишера всякому элементу $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots)$ из l_2 отвечает некоторый элемент $f \in H$, имеющий числа $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$ своими коэффициентами Фурье. Установленное соответствие между элементами из H в l_2 взаимно однозначно. Далее, если

$$f \leftrightarrow (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots)$$

и

$$g \leftrightarrow (d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n,\ \ldots),$$

то

$$f+g \leftrightarrow (c_1+d_1,\ c_2+d_2,\ \ldots,\ c_n+d_n,\ \ldots)$$

и

$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1,\ \alpha c_2,\ \ldots,\ \alpha c_n,\ \ldots),$$

т. е. сумма переходит в сумму, а произведение на число — в произведение соответствующего элемента на это же число. Наконец, из равенства Парсеваля следует, что

$$(f,\ g)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n. \tag{24}$$

Действительно, из того, что

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

и

$$(f+g, f+g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

вытекает (24). Таким образом, установленное нами соответствие между элементами пространств H и l_2 действительно является изоморфизмом.

Доказанная теорема означает, что, с точностью до изоморфизма, существует лишь одно (сепарабельное) гильбертово пространство (т. е. система аксиом I—IV полна) и что пространство l_2 можно рассматривать как его «координатную реализацию», подобно тому как n-мерное арифметическое пространство со скалярным произведением $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ представляет собой координатную реализацию евклидова пространства n измерений, заданного аксиоматически.

Другую реализацию гильбертова пространства можно получить, взяв функциональное пространство $C_2[a, b]$ и рассмотрев его пополнение. Действительно, легко проверить, что пополнение R^* всякого евклидова пространства R (в том смысле, как мы определили пополнение метрического пространства в § 3 гл. II) становится линейным евклидовым пространством, если в нем определить линейные операции и скалярное произведение, продолжая их по непрерывности с пространства R, т. е. полагая

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n), \quad \alpha x = \lim_{n\to\infty} \alpha x_n$$

и

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n),$$

где $x_n \to x$ и $y_n \to y$, $x_n, y_n \in R$. (Существование всех этих пределов и их независимость от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ легко устанавливается). Тогда пополнение пространства $C_2[a, b]$ будет полным евклидовым пространством, очевидно, бесконечномерным и сепарабельным, т. е. гильбертовым пространством. В главе VII мы вернемся к этому вопросу и покажем, что те элементы, которые нужно присоединить к $C_2[a, b]$, чтобы получить полное пространство, тоже можно представить как функции, но только уже не непрерывные (а именно, как функции, квадрат которых суммируем в смысле Лебега).

странств; именно, говорят, что H есть прямая сумма своих подпространств $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus \ldots,$$

если

1) подпространства M_i попарно ортогональны, т. е. любой вектор из M_i ортогонален любому вектору из M_k при $i \neq k$;

2) каждый элемент $f \in H$ может быть представлен в виде

$$f = h_1 + h_2 + \ldots + h_n + \ldots, \quad h_n \in M_n,$$

причем если число подпространств M_n бесконечно, то $\sum\limits_n \| h_n \|^2$ — сходящийся ряд. Легко проверить, что если такое представление элемента f существует, то оно единственно и что

$$\| f \|^2 = \sum_n \| h_n \|^2.$$

Наряду с прямой суммой подпространств можно говорить о прямой сумме конечного или счетного числа произвольных гильбертовых пространств. Именно, если H_1 и H_2 — два гильбертовых пространства, то их прямая сумма H определяется следующим образом: элементы пространства H — это всевозможные пары (h_1, h_2), где $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, а скалярное произведение двух таких пар равно

$$((h_1, h_2), (h_1', h_2')) = (h_1, h_1') + (h_2, h_2').$$

В пространстве H содержатся, очевидно, взаимно ортогональные подпространства, состоящие из пар вида $(h_1, 0)$ и $(0, h_2)$ соответственно; первое из них можно естественным образом отождествить с пространством H_1, а второе — с пространством H_2.

Аналогично определяется сумма любого конечного числа пространств. Сумма $H = \sum \oplus H_n$ счетного числа пространств $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ определяется так: элементы пространства H — это всевозможные последовательности вида

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots) \qquad (h_n \in H_n),$$

такие, что $\sum\limits_n \| h_n \|^2 < \infty$. Скалярное произведение (h, g) элементов h и g из H равно

$$\sum_n (h_n, g_n).$$

8. Характеристическое свойство евклидовых пространств. Рассмотрим следующий вопрос. Пусть R — нормированное пространство. Каким дополнительным условиям должна удовлетворять норма, определенная в R, чтобы пространство R было евклидовым, т. е. чтобы норма в нем определялась некоторым скалярным произведением? Иначе говоря, как охарактеризовать евклидовы пространства в классе всех нормированных пространств? Такую характеристику дает следующая теорема.

Теорема 8. *Для того чтобы нормированное пространство R было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов, f и g, выполнялось равенство*

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2). \tag{25}$$

Поскольку $f+g$ и $f-g$ — это диагонали параллелограмма, построенного на сторонах f и g, равенство (25) выражает известное свойство параллелограмма в евклидовом пространстве: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.* Таким образом, необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность. Положим

$$(f, g)=\frac{1}{4}(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2), \tag{26}$$

и покажем, что если равенство (25) выполнено, то функция (26) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Поскольку при $f=g$ имеем

$$(f, f)=\frac{1}{4}(\|2f\|^2-\|f-f\|^2)=\|f\|^2, \tag{27}$$

это и будет то скалярное произведение, которое порождает в пространстве R заданную там норму.

Прежде всего, из (26) сразу видно, что

$$(f, g)=(g, f),$$

т. е. свойство 1) скалярного произведения выполнено. Кроме того, в силу (27) имеет место и свойство 4). Для установления свойства 2) рассмотрим функцию трех векторов

$$\Phi(f, g, h)=4[(f+g, h)-(f, h)-(g, h)],$$

т. е.

$$\Phi(f, g, h)=\|f+g+h\|^2-\|f+g-h\|^2-\\ -\|f+h\|^2+\|f-h\|^2-\|g+h\|^2+\|g-h\|^2, \tag{28}$$

и покажем, что она тождественно равна нулю. В силу (25) имеем

$$\|f+g\pm h\|^2=2\|f\pm h\|^2+2\|g\|^2-\|f\pm h-g\|^2.$$

Подставив соответствующие выражения в (28), получим

$$\Phi(f, g, h)=-\|f+h-g\|^2+\|f-h-g\|^2+\\ +\|f+h\|^2-\|f-h\|^2-\|g+h\|^2+\|g-h\|^2. \tag{29}$$

Взяв полусумму (28) и (29), имеем

$$\Phi(f, g, h) = \frac{1}{2}(\|g+h+f\|^2 + \|g+h-f\|^2) -$$
$$- \frac{1}{2}(\|g-h+f\|^2 + \|g-h-f\|^2) - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2.$$

В силу (25) первое слагаемое равно

$$\|g+h\|^2 + \|f\|^2,$$

а второе — равно

$$-\|g-h\|^2 - \|f\|^2,$$

Таким образом,

$$\Phi(f, g, h) \equiv 0.$$

Установим, наконец, свойство 3) — однородность скалярного произведения. Рассмотрим для этого при любых фиксированных f и g функцию

$$\varphi(c) = (cf, g) - c(f, g).$$

Из (26) сразу следует, что

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}(\|g\|^2 - \|g\|^2) = 0$$

и $\varphi(-1) = 0$, поскольку $(-f, g) = -(f, g)$. Поэтому для любого целого n

$$(nf, g) = (\operatorname{sgn} n\,(f + \ldots + f), g) =$$
$$= \operatorname{sgn} n\,[(f, g) + \ldots + (f, g)] = |n| \operatorname{sgn} n\,(f, g) = n(f, g),$$

т. е. $\varphi(n) = 0$. При целых p, q и $q \neq 0$

$$\left(\frac{p}{q} f, g\right) = p\left(\frac{1}{q} f, g\right) = \frac{p}{q} q \left(\frac{1}{q} f, g\right) = \frac{p}{q}(f, g),$$

т. е. $\varphi(c) = 0$ при всех рациональных c; поскольку функция φ непрерывна,

$$\varphi(c) \equiv 0.$$

Тем самым мы показали, что функция (f, g) обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Примеры. 1. Рассмотрим n-мерное пространство $\mathbf{R}_p^n$, в котором норма определена формулой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

При $p \geqslant 1$ все аксиомы нормы выполнены, однако евклидовым пространством $\mathbf{R}_p^n$ будет только при $p = 2$. Действительно, рассмотрим в $\mathbf{R}_p^n$ два вектора:

$$f = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$g = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0);$$

имеем

$$f+g=(2,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$f-g=(0,\ 2,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

откуда

$$\|f\|_p=\|g\|_p=2^{1/p},\quad \|f+g\|_p=\|f-g\|_p=2,$$

так что тождество параллелограмма (25) при $p\neq 2$ не выполняется.

2. Рассмотрим пространство непрерывных функций на отрезке $[0,\pi/2]$. Положим

$$f(t)=\cos t,\quad g(t)=\sin t.$$

Имеем

$$\|f\|=\|g\|=1$$

и

$$\|f+g\|=\max_{0\leqslant t\leqslant \pi/2}|\cos t+\sin t|=\sqrt{2},$$
$$\|f-g\|=\max_{0\leqslant t\leqslant \pi/2}|\cos t-\sin t|=1.$$

Отсюда видно, что

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2\neq 2(\|f\|^2+\|g\|^2).$$

Таким образом, норму пространства $C[0,\pi/2]$ нельзя задать с помощью какого бы то ни было скалярного произведения. Легко видеть, что и пространство непрерывных функций $C[a,b]$ на любом отрезке $[a,b]$ не есть евклидово пространство.

9. Комплексные евклидовы пространства. Наряду с действительным может быть введено и комплексное евклидово пространство (т. е. комплексное линейное пространство со скалярным произведением в нем). Однако аксиомы 1)—4), сформулированные в начале этого параграфа, не могут быть в комплексном пространстве выполнены одновременно. Действительно, из 1) и 3) следует

$$(\lambda x,\ \lambda x)=\lambda^2(x,\ x),$$

откуда при $\lambda=i$ имеем

$$(ix,\ ix)=-(x,\ x),$$

т. е. скалярные квадраты векторов x и ix не могут быть одновременно положительны. Иными словами, аксиомы 1) и 3) несовместимы с аксиомой 4). Поэтому аксиомы, с помощью которых определяется скалярное произведение, в комплексном случае должны быть несколько изменены по сравнению с действительным. В комплексном пространстве скалярное произведение мы определим как числовую (комплекснозначную) функцию двух векторов, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
4) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$. (Таким образом, мы внесли поправку в первую аксиому, сохранив три остальные без изменений.) Из условий 1) и 2) следует, что $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$. Действительно,

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \bar{\lambda}(x, y).$$

Хорошо известный пример комплексного евклидова пространства n измерений — это линейное пространство $\mathbf{C}^n$ (§ 1, пример 2), в котором скалярное произведение элементов

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

определяется формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k.$$

Как известно, всякое комплексное евклидово пространство размерности n изоморфно этому пространству.

Примерами бесконечномерных комплексных евклидовых пространств могут служить:

1) комплексное пространство l_2, в котором элементы — это последовательности комплексных чисел

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

а скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n;$$

2) пространство $C_2[a, b]$ комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, dt.$$

В комплексном евклидовом пространстве длина (норма) вектора определяется, как и в действительном случае, формулой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

«обычные» функции, а точнее, регулярные функционалы), а с другой, — чтобы эти основные функции обладали достаточной гладкостью.

Упражнение. Проверьте, что в пространстве S_∞ можно ввести структуру счетно-нормированного пространства, положив, например,

$$\|\varphi\|_n = \sum_{p+q=n} \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant q}} |(1+|x|^i)\varphi^{(j)}(x)|,$$

и что последовательность, сходящаяся в S_∞ в определенном выше смысле, сходится и в топологии, определяемой этими нормами.

§ 5. Линейные операторы

1. Определение и примеры линейных операторов. Пусть E и E_1 — два линейных топологических пространства. *Линейным оператором*, действующим из E в E_1, называется отображение

$$y = Ax \qquad (x \in E,\ y \in E_1),$$

удовлетворяющее условию

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Совокупность D_A всех тех $x \in E$, для которых отображение A определено, называется *областью определения* оператора A; вообще говоря, не предполагается, что $D_A = E$, однако мы всегда будем считать, что D_A есть линейное многообразие, т. е. если $x,\ y \in D_A$, то $\alpha x + \beta y \in D_A$ при всех $\alpha,\ \beta$.

Оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in D_A$, если для любой окрестности V точки $y_0 = Ax_0$ существует такая окрестность U точки x_0, что $Ax \in V$, как только $x \in U \cap D_A$. Оператор A называется *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке $x \in D_A$.

Когда E и E_1 — нормированные пространства, это определение равносильно следующему: оператор A называется непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$\|x' - x''\| < \delta \qquad (x',\ x'' \in D_A)$$

следует

$$\|Ax' - Ax''\| < \varepsilon.$$

Множество тех $x \in E$, для которых $Ax = 0$, называется *ядром* линейного оператора A и обозначается $\operatorname{Ker} A$. Множество тех $y \in E_1$, для которых $y = Ax$ при некотором $x \in D_A$, называется *образом* линейного оператора A и обозначается $\operatorname{Im} A$. Как ядро, так и образ линейного оператора, являются линейными многообразиями. Если оператор непрерывен и $D_A = E$, то $\operatorname{Ker} A$ является подпространством, т. е. замкнуто. Что же касается образа непрерывного линейного оператора, то он не обязательно будет подпространством в E_1, даже если $D_A = E$.

Понятие линейного функционала, введенное в начале этой главы, есть частный случай линейного оператора. Именно, линейный функционал — это линейный оператор, переводящий данное пространство E в числовую прямую $\mathbf{R}^1$. Определения линейности и непрерывности оператора переходят при $E_1 = \mathbf{R}^1$ в соответствующие определения, введенные ранее для функционалов.

Точно так же и ряд дальнейших понятий и фактов, излагаемых ниже для линейных операторов, представляет собой довольно автоматическое обобщение результатов, уже изложенных в § 1 этой главы применительно к линейным функционалам.

Примеры линейных операторов. 1. Пусть E — линейное топологическое пространство. Положим

$$Ix = x \quad \text{для всех} \quad x \in E.$$

Такой оператор, переводящий каждый элемент пространства в себя, называется *единичным оператором.*

2. Пусть E и E_1 — произвольные линейные топологические пространства и пусть

$$Ox = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in E$$

(здесь 0 — нулевой элемент пространства E_1). Тогда O называется *нулевым оператором.*

3. *Общий вид линейного оператора, переводящего конечномерное пространство в конечномерное.* Пусть A — линейный оператор, отображающий n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$ в m-мерное пространство $\mathbf{R}^m$ с базисом $f_1, \ldots, f_m$. Если x — произвольный вектор из $\mathbf{R}^n$, то

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

и в силу линейности оператора A

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i.$$

Таким образом, оператор A задан, если известно, во что он переводит базисные векторы $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим разложения векторов Ae_i по базису $f_1, \ldots, f_m$. Имеем

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k.$$

Отсюда ясно, что оператор A определяется матрицей коэффициентов $\|a_{ki}\|$. Образ пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ представляет собой линейное подпространство, размерность которого равна, очевидно, рангу матрицы $\|a_{ki}\|$, т. е. во всяком случае не превосходит n. Отметим, что всякий линейный оператор, заданный в конечномерном пространстве, автоматически непрерывен.

4. Рассмотрим гильбертово пространство H и в нем некоторое подпространство H_1. Разложив H в прямую сумму подпространства H_1 и его ортогонального дополнения, т. е. представив каждый элемент $h \in H$ в виде

$$h = h_1 + h_2 \qquad (h_1 \in H_1,\ h_2 \perp H_1),$$

положим $Ph = h_1$. Этот оператор P естественно назвать *оператором ортогонального проектирования*, или *ортопроектором* H на H_1. Линейность и непрерывность проверяются без труда.

5. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ оператор, определяемый формулой

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где $K(s, t)$ — некоторая фиксированная непрерывная функция двух переменных. Функция $\psi(s)$ непрерывна для любой непрерывной функции $\varphi(t)$, так что оператор (1) действительно переводит пространство непрерывных функций в себя. Его линейность очевидна. Для того чтобы говорить о его непрерывности, необходимо предварительно указать, какая топология рассматривается в нашем пространстве непрерывных функций. Читателю предлагается доказать непрерывность оператора в случаях, когда: а) рассматривается пространство $C[a, b]$, т. е. пространство непрерывных функций с нормой $\|\varphi\| = \max|\varphi(t)|$; б) когда рассматривается $C_2[a, b]$, т. е. $\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(t)\,dt\right)^{1/2}$.

6. В том же пространстве непрерывных функций рассмотрим оператор

$$\psi(t) = \varphi_0(t)\,\varphi(t),$$

где $\varphi_0(t)$ — фиксированная непрерывная функция. Линейность этого оператора очевидна. (Докажите его непрерывность при нормировках, указанных в предыдущем примере.)

7. Один из важнейших для анализа примеров линейных операторов — это оператор дифференцирования. Его можно рассматривать в различных пространствах.

а) Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ и оператор

$$Df(t) = f'(t),$$

действующий в нем. Этот оператор (который мы считаем действующим из $C[a, b]$ опять-таки в $C[a, b]$) определен, очевидно, не на всем пространстве непрерывных функций, а лишь на линейном многообразии функций, имеющих непрерывную производную. Оператор D линеен, но не непрерывен. Это видно, например, из того, что последовательность

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

сходится к 0 (в метрике $C[a, b]$), а последовательность

$$D\varphi_n(t) = \cos nt$$

не сходится.

б) Оператор дифференцирования можно рассматривать как оператор, действующий из пространства C^1 непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$ с нормой

$$\|\varphi\|_1 = \max|\varphi(t)| + \max|\varphi'(t)|$$

в пространство $C[a, b]$. В этом случае оператор D линеен и непрерывен и отображает все C^1 на все $C[a, b]$.

в) Рассмотрение оператора дифференцирования как оператора, действующего из C^1 в $C[a, b]$, не вполне удобно, так как хотя при этом мы и получаем непрерывный оператор, определенный на всем пространстве, но не к любой функции из C^1 можно применить этот оператор дважды. Удобнее рассматривать оператор дифференцирования в еще более узком пространстве, чем C^1, а именно, в пространстве C^∞ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$, в котором топология задается счетной системой норм

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ a \leqslant t \leqslant b}} |\varphi^{(k)}(t)|.$$

Оператор дифференцирования переводит все это пространство в себя, и, как легко проверить, непрерывен на нем.

г) Бесконечно дифференцируемые функции составляют весьма узкий класс. Возможность рассматривать оператор дифференцирования в существенно *более широком* пространстве и вместе с тем как *непрерывный* оператор дают обобщенные функции. В предыдущем параграфе мы уже говорили о том, как определяется дифференцирование обобщенных функций. Из сказанного там ясно, что дифференцирование есть линейный оператор в пространстве обобщенных функций, притом непрерывный в том смысле, что из сходимости последовательности обобщенных функций $\{f_n(t)\}$ к $f(t)$ следует сходимость последовательности их производных к производной обобщенной функции $f(t)$.

2. Непрерывность и ограниченность. Линейный оператор, действующий из E в E_1, называется *ограниченным*, если он определен на всем E и каждое ограниченное множество переводит снова в ограниченное. Между ограниченностью и непрерывностью линейного оператора существует тесная связь, а именно, справедливы следующие утверждения.

I. *Всякий непрерывный линейный оператор ограничен.*

Действительно, пусть $M \subset E$ — ограниченное множество, а множество $AM \subset E_1$ не ограничено. Тогда в E_1 найдется такая окрестность нуля V, что ни одно из множеств $\frac{1}{n} AM$ не содержится в V. Но тогда существует такая последовательность $x_n \in M$, что ни один из элементов $\frac{1}{n} Ax_n$ не принадлежит V, и мы получаем[1]), что $\frac{1}{n} x_n \to 0$ в E, но последовательность $\left\{\frac{1}{n} Ax_n\right\}$ не сходится к 0 в E_1; это противоречит непрерывности оператора A.

II. *Если A — ограниченный линейный оператор, действующий из E в E_1, и в пространстве E выполнена первая аксиома счетности, то оператор A непрерывен.*

Действительно, если A не непрерывен, то найдется такая окрестность нуля V в E_1 и такая определяющая система $\{U_n\}$ окрестностей нуля в E, что $U_{n+1} \subset U_n$ и для каждого n существует такое $x_n \in \frac{1}{n} U_n$, что $Ax_n \notin nV$. Последовательность x_n в E ограничена (и даже стремится к 0), а последовательность Ax_n не ограничена в E_1 (поскольку она не содержится ни в одном из множеств nV). Итак, если оператор A не непрерывен, а в E имеет место первая аксиома счетности, то A и не ограничен.

Наше утверждение доказано.

Итак, *для оператора, заданного на пространстве с первой аксиомой счетности* (к которым, в частности, относятся все нормированные и счетно-нормированные пространства), *ограниченность равносильна непрерывности.*

Все операторы, приведенные в примерах 1—6 в предыдущем пункте, непрерывны. В силу только что доказанного утверждения I все перечисленные там операторы ограничены.

Если E и E_1 — нормированные пространства, то условие ограниченности оператора A, действующего из E в E_1, можно сформулировать так: оператор A называется *ограниченным*, если он переводит всякий шар в ограниченное множество. В силу линейности A это условие можно сформулировать так: оператор A

---

[1]) См. упражнение 1 в п. 1, § 5, гл. III.

ограничен, если существует такая постоянная C, что для всякого $f \in E$

$$\| Af \| \leqslant C \| f \|.$$

Наименьшее из чисел C, удовлетворяющих этому неравенству, называется *нормой* оператора A и обозначается $\|A\|$.

Теорема 1. *Для любого ограниченного оператора A, действующего из нормированного пространства в нормированное,*

$$\| A \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Ax \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}. \tag{2}$$

Доказательство. Введем обозначение $\alpha = \sup\limits_{\| x \| \leqslant 1} \| Ax \|$. В силу линейности A справедливо равенство

$$\alpha = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Ax \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

Поэтому для любого элемента x

$$\| Ax \| / \| x \| \leqslant \alpha,$$

т. е.

$$\| Ax \| \leqslant \alpha \| x \|,$$

откуда следует, что

$$\| A \| = \inf C \leqslant \alpha.$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x_\varepsilon \neq 0$, что

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \| Ax_\varepsilon \| / \| x_\varepsilon \|$$

или

$$(\alpha - \varepsilon) \| x_\varepsilon \| \leqslant \| Ax_\varepsilon \| \leqslant C \| x_\varepsilon \|.$$

Поэтому

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \inf C = \| A \|,$$

и, в силу произвольности ε, $\alpha \leqslant \| A \|$. Следовательно, $\| A \| = \alpha$.

3. Сумма и произведение операторов.

Определение 1. Пусть A и B — два линейных оператора, действующих из линейного пространства E в пространство E_1. Назовем их *суммой* $A + B$ оператор C, ставящий в соответствие элементу $x \in E$ элемент

$$y = Ax + Bx \in E_1.$$

Он определен на всех элементах, принадлежащих пересечению $D_A \cap D_B$ областей определения операторов A и B.

Легко проверить, что $C = A + B$ — линейный оператор, непрерывный, если A и B непрерывны.

Если E и E_1 — нормированные пространства, а операторы A и B ограничены, то $A + B$ тоже ограничен, причем

$$\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|. \tag{3}$$