Поскольку, по предположению, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\xi_n^2 \leqslant 1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\eta_n^2 \leqslant 1$, то, переходя в (5) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (t\xi_n + (1-t)\,\eta_n)^2 \leqslant t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1,$$

т. е. $z \in M$.

Покажем, что ядро эллипсоида $J(M)$ пусто. Действительно, пусть в противном случае $x \in J(M) \subset M$, $y_0 = \left(1, \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}, \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}, \ldots\right) \in l_2$ и для некоторого $\mu > 0$ вектор $x + \mu y_0 \in M$, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left|\xi_n + \frac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}\right|^2 \leqslant 1$. Тогда $\left|\xi_n + \frac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}\right| \leqslant \frac{1}{n}$ и

$$\left|\frac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}\right| \leqslant \left|\xi_n + \frac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}\right| + |\xi_n| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

ибо если $x \in M$, то $|\xi_n| \leqslant \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\mu \leqslant \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$, откуда $\mu = 0$. Полученное равенство противоречит допущению, что $\mu > 0$. Значит, ядро множества M пусто.

V

N2
а, б, в

2. а) Является ли нормой функция $\mathbb{R}^1 \ni x \to |\operatorname{arctg} x|$?

б) Определяет ли в $\mathbb{R}^2$ норму функция

$$\mathbb{R}^2 \ni x = (\xi_1, \xi_2) \to \|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|\ ?$$

Если да, то что представляет собой единичный шар в $\mathbb{R}^2$ относительно введенной нормы?

в) Показать, что функция

$$\mathbb{R}^n \ni x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

не является нормой на $\mathbb{R}^n$ при $0 < p < 1$ и $n \geqslant 2$.

Решение. а) Нет, не является, ибо не выполняется вторая аксиома нормы. Действительно, если взять $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$, то $\|\lambda x\| = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $|\lambda|\|x\| = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$; поэтому $\|\lambda x\| \neq |\lambda|\|x\|$.

б) Да, определяет. Выполнение первых двух аксиом нормы очевидно. Нетрудно видеть, что выполняется также и третья аксиома: если $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, то

$$\|x + y\| = |\xi_1 + \eta_1| + |\xi_2 + \eta_2| \leqslant |\xi_1| + |\xi_2| + |\eta_1| + |\eta_2| = \|x\| + \|y\|.$$

Единичный шар

$$B[0, 1] = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| + |\xi_2| \leqslant 1\}$$

в $\mathbb{R}^2$ относительно введенной нормы представляет собой единичный квадрат с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, лежащих на осях координат OX и OY.

в) В данном случае не выполняется третья аксиома нормы (т. е. неравенство треугольника). Действительно, возьмем вектор $x = \left(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \in \mathbb{R}^n$ и вектор $y = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что $x \neq y$, но $\|x\|_p = \|y\|_p = \frac{1}{2}$ для любого $0 < p < 1$ и $\|x\|_p + \|y\|_p = 1$. Однако,

$$\|x + y\|_p = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, 0\right)\right\|_p = \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p} - 1}.$$

Поскольку $p \in (0; 1)$, то $\frac{1}{p} - 1 > 0$ и $2^{\frac{1}{p} - 1} > 1$. Следовательно, $\|x + y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p$.

V

N3 а, б, в

3. Являются ли нормами на множествах определения следующие функции:

а) $C[a; b] \ni x \to \max\limits_{a \leqslant t \leqslant \frac{a+b}{2}} |x(t)|$;

б) $C^{(1)}[a; b] \ni x \to |x(a)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|$;

в) $C^{(1)}[a; b] \to |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|$?

Решение. а) Нет, ибо не выполняется первая аксиома нормы: если $\|x\| = 0$, то $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant \frac{a+b}{2}} |x(t)| = 0$, т. е. $x(t) = 0$ на $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$, но, вообще говоря, $x(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[a; b]$.

б) Да, является. Проверим выполнение первой аксиомы. Если $x(t) \equiv 0$ на $[a; b]$, то $|x(a)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)| = 0$. Обратно, если $|x(a)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)| = 0$, то $x(a) = 0$ и $x'(t) = 0$ на $[a; b]$. Следовательно, $x(t) \equiv c$ ($c = \text{const}$). Так как $x(a) = 0$, то $c = 0$, т. е. $x(t) \equiv 0$ на $[a; b]$.

Выполнение остальных аксиом нормы очевидно.

в) В данном случае указанная функция нормой не является, ибо не выполняется первая аксиома нормы. Действительно, если $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)| = 0$, то $x(b) = x(a)$ и $x'(t) \equiv 0$ на $[a; b]$. Следовательно, $x(t) \equiv c$ ($c = \text{const}$). Взяв $t = a$, найдем, что $c = x(a)$, т. е. $x(t) \equiv x(a) = x(b)$ на $[a; b]$. Если $x(a) \neq 0$, то $x(t) \not\equiv 0$ на $[a; b]$.

V
N4
а, б

4. а) Проверить, что нормы

$$\|x\|_1=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,\quad \|x\|_2=\left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

не эквивалентны в $C\,[0;\ 1]$.

б) Будут ли эквивалентными в пространстве $C^{(1)}\,[a;\ b]$ нормы

$$\|x\|_1=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|$$

и

$$\|x\|_2=\int_0^1|x(t)|\,dt+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|?$$

Решение. а) Напомним, что две нормы, введенные на одном линейном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по одной из этих норм вытекает ее сходимость по другой норме и наоборот. В данном случае, например, последовательность $x_n(t)=t^n$ сходится к нулю по норме $\|\cdot\|_2$, ибо

$$\|x_n\|_2=\left(\int_0^1 t^{2n}dt\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0$$

при $n\to\infty$, но не сходится по норме $\|\cdot\|_1$, так как сходимость по норме $\|\cdot\|_1$ эквивалентна равномерной сходимости, а последовательность $x_n(t)$ поточечно сходится к функции

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1,\\ 1, & t=1,\end{cases}$$

которая разрывна и не принадлежит пространству $C\,[0;\ 1]$. Следовательно, нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ не эквивалентны.

б) Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны. Норма $\|\cdot\|_2$ подчинена норме $\|\cdot\|_1$. Действительно,

$$\|x\|_2\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|=\|x\|_1.$$

Следовательно, для того чтобы установить эквивалентность указанных норм, достаточно (в силу теоремы 1 об эквивалентных нормах) установить полноту пространства $C^{(1)}\,[0;\ 1]$ относительно каждой из норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$

Покажем, что пространство $C^{(1)}\,[0;\ 1]$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_1$. Пусть (x_k) — фундаментальная по норме $\|\cdot\|_1$ последовательность в $C^{(1)}\,[0;\ 1]$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $k>k_0'$, $m>k_0$

$$\|x_k-x_m\|_1=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_k(t)-x_m(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_k'(t)-x_m'(t)|<\varepsilon.$$

Используя критерий равномерной сходимости функциональной последовательности, из данного неравенства получаем, что существует функция $x_0(t) \in C^{(1)}[0; 1]$ такая, что $x_k(t) \rightrightarrows x_0(t)$, $x'_k(t) \rightrightarrows x'_0(t)$ при $k \to \infty$ на $[0; 1]$. Это и означает, что последовательность $(x_k) \subset C^{(1)}[0; 1]$ сходится по норме $\|\cdot\|_1$ к $x_0(t) \in C^{(1)}[0; 1]$.

Если последовательность (x_k) фундаментальна по норме $\|\cdot\|_2$, то для любого $\varepsilon > 0$ и всех $k > k_0$, $m > k_0$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x'_k(t) - x'_m(t)| < \varepsilon \text{ и } \int_0^1 |x_k(t) - x_m(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Тогда последовательность $(x'_k(t))$ равномерно на $[0; 1]$ сходится к некоторой функции $\varphi_0(t)$ из $C[0; 1]$, а последовательность $(x_k(t))$ сходится в $L_1[0; 1]$ (в силу полноты этого пространства) к функции $x_0(t)$. Следовательно (см. гл. 1, § 4), существует подпоследовательность $(x_{k_n}(t))$, сходящаяся к $x_0(t)$ почти всюду на $[0; 1]$.

Пусть t_0 — такая точка из $[0; 1]$, что $x_{k_n}(t_0) \to x_0(t_0)$ (при $n \to \infty$). Интегрируя подпоследовательность $(x'_{k_n}(t))$ почленно, получим

$$x_{k_n}(t) - x_{k_n}(t_0) \to \int_{t_0}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau \quad (\forall\, t \in [0; 1]).$$

Отсюда

$$x_{k_n}(t) \to x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau \quad (\forall\, t \in [0; 1]),$$

т. е. $x_0(t) = c + \int_{t_0}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau$ (почти всюду на $[0; 1]$).

Бажано зробити!

Поскольку элементы пространства $L_1[0; 1]$ определяются с точностью до эквивалентности, а функция $c + \int_{t_0}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau$ абсолютно непрерывна на $[0; 1]$, то $x_0(t) \in C^{(1)}[0; 1]$ и $x'_0(t) = \varphi_0(t)$ $(\forall\, t \in [0; 1])$. Кроме того, очевидно, $\|x_n - x_0\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Этим установлено, что пространство $C^{(1)}[0; 1]$ полно и относительно нормы $\|\cdot\|_2$. Таким образом, нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

Отметим, что эквивалентность норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ можно установить и непосредственно, проверив, что из сходимости последовательности $(x_n) \subset C^{(1)}[0; 1]$ по норме $\|\cdot\|_1$ вытекает ее сходимость по норме $\|\cdot\|_2$ и наоборот.

5. Будет ли полным пространство l_1 относительно нормы $\|x\|_1 = \sup_k |\xi_k|$ $(x = (\xi_k) \in l_1)$?

Решение. Как известно, пространство l_1 полно относительно нормы $\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$. Кроме того, очевидно, норма $\|\cdot\|_1$ подчинена норме $\|\cdot\|_2$, т. е. $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$. Если бы пространство l_1 было полным и относительно нормы $\|\cdot\|_1$, то, согласно теореме 1 об эквивалентных нормах, рассматриваемые нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ должны быть эквивалентными. Однако это не так. Действительно, последовательность $x_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, \ldots, 0, \ldots\Big)$ сходится по норме $\|\cdot\|_1$ к нулевому элементу $\Big(\|x_n\|_1 = \frac{1}{n} \to 0\Big)$, но эта же последовательность не является сходящейся в l_1 по норме $\|\cdot\|_2$, ибо она не фундаментальна

$$\|x_n - x_{2n}\|_2 = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = 1.$$

√ N6 а) б) г) д)

Следовательно, пространство l_1 не полно по норме $\|\cdot\|_1$.

6. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве последовательность (x_n), если:

а) $E = l_1$, $x_n = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n^\sigma}, \frac{1}{(n+1)^\sigma}, \ldots\Big)$, $\quad \sigma > 1$;

б) $E = l_2$, $x_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, 0, \ldots\Big)$;

в) $E = C^{(1)}[0;\ 1]$, $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$;

г) $E = L_1[0;\ 1]$, $x_n(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{n}}, & \text{если } t \text{ — иррационально,} \\ 0, & \text{если } t \text{ — рационально;} \end{cases}$

д) $E = L_2[0;\ 1]$, $\quad x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}t, & t \in \left[0;\ \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n};\ 1\right]. \end{cases}$

Решение. а) Последовательность (x_n) сходится в l_1, ибо она фундаментальна в l_1:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) = \|x_n - x_{n+p}\| = \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{k^\sigma} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\sigma} \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно относительно $p \in \mathbb{N}$.

б) В данном случае

$$\rho^2(x_n, x_{n+1}) = \|x_n - x_{n+1}\|^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + 2 > 2,$$

т. е. последовательность (x_n) не является сходящейся в l_2.

в) Последовательность $(x_n(t))$ сходится к функции $x(t) \equiv 0$, ибо $x_n(t) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0;1]}|x_n'(t)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0;1]}|t^n(1-t)| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 0,$$

т. е. и $x_n'(t) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$. Этим установлено, что

$$\|x_n\| = \max_{t\in[0,1]} |x_n(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x_n'(t)| =$$

$$= \max_{t\in[0;1]} \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right| + \max_{t\in[0,1]} |t^n(1-t)| \to 0$$

при $n \to \infty$.

г) Отметим, что каждая функция $x_n(t)$ интегрируема по Лебегу (ибо она измерима и ограничена), но не интегрируема по Риману (она разрывна на множестве положительной меры). Последовательность $(x_n(t))$ сходится в $L_1[0; 1]$ к функции $x(t) \equiv 1$. Действительно,

$$\|x_n - 1\| = \int_0^1 |x_n(t) - 1|\, dt = \int_0^1 (x_n(t) - 1)\, dt = -1 + \int_0^1 x_n(t)\, dt =$$

$$= -1 + \int_0^1 e^{-\frac{t}{n}}\, dt = -1 + \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} \to 0$$

при $n \to \infty$ (здесь мы воспользовались тем, что интегралы Лебега от эквивалентных функций совпадают, а функция $x_n(t)$ эквивалентна функции $e^{-\frac{t}{n}}$).

д) Последовательность (x_n) не сходится в $L_2[0; 1]$, так как она не фундаментальна. Действительно, для произвольных $n, p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\rho^2(x_n, x_{n+p}) = \|x_n - x_{n+p}\|^2 =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n+p}} (\sqrt{n+p} - (n+p)\sqrt{n+p}\,t - \sqrt{n} + n\sqrt{n}\,t)^2\, dt +$$

$$+ \int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} (\sqrt{n} - n\sqrt{n}\,t)^2\, dt = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+p}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{(n+p)\sqrt{n+p}}.$$

Если взять $p = n$, то, как нетрудно подсчитать,

$$\rho^2(x_n, x_{2n}) = \frac{4\sqrt{2} - 5}{6\sqrt{2}} > 0.$$

7. Пусть $L = \left\{x = (\xi_k) \in E : \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0,\ \xi_k \in \mathbb{R}\right\}$. Образует ли L подпространство в пространстве E, если:

а) $E = l_1$; б) $E = l_p$ $(p > 1)$?

Решение. а) Очевидно, L — линейное многообразие в l_1. Пусть последовательность $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots) \in L$ и $x_n \to x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_k^{(0)}, \ldots)$ при $n \to \infty$ в l_1, т. е. для любого $\varepsilon > 0$