Теорема:

Передгільбертовий простір з нормою визначеною $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ є ЛНП.

Доведення:

Перевірити аксіоми норми.

1) $\sqrt{(x,x)} \geq 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} (x,x)} = |\lambda| \|x\|$.

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$ ... далі ...

Доробити самостійно!

Деякі властивості скалярного добутку:

1) Скалярний добуток неперервно залежить від обох множників.

Тобто, якщо $x_n \to x$ і $y_n \to y \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_n, y_n) \to (x,y)$. Доведення:

$0 \leq |(x_n, y_n) - (x,y)| = |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x,y)| \leq |(x_n, y_n) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x,y)| = |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leq$ ← нерівність Коші-Буняковського

$\leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\text{збіжна} \Rightarrow \text{обмежена}} + \underbrace{\|x\|}_{\text{стала}} \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} < \varepsilon$.

2) Рівність паралелограма. !

$\forall x, y$ з передгільбертового простору X правильна рівність

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Доведення:

$$(x+y, x+y) + (x-y, x-y) = \ldots$$

доробити !

3) В дійсному передгільбертовому просторі правильна рівність

$\mathbb{R}$: $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

$\mathbb{C}$: $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) +$

$+ \frac{1}{4}(i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$

Останні рівності називають поляризаційною тотожністю.

! Нехай є ЛНП, тобто є $\|\cdot\|$ (норма).

Питання, чи можна на цьому ЛНП ввести скалярний добуток, щоб він був узгоджений з нормою?

(тобто, щоб $\forall x \in$ ЛНП: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$?)

щоб $\sqrt{(x,x)} = \|x\|$.

В-во: рівність паралелограма для норми є необхідною і достатньою умовою того, що на нормованому просторі можна ввести скалярний добуток узгоджений з нормою, цей скалярний добуток вводиться за допомогою поляризаційної тотожності. !

Приклад:

$\mathbb{R}^2$ $\quad x(x_1, x_2)$

$\quad y(y_1, y_2)$

тут буде викон. рівність паралелограма

1) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $p = 2$

$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

2) $\|x\| = |x_1| + |x_2|$; $p = 1$

Чи виконується для цієї норми рівність паралелограма? Перевірити!

30.10.2019

Означення Гільбертового простору:

Передгільбертовий простір H повний відносно норми породженої скалярним добутком називається Гільбертовим простором ($\|x\| = \sqrt{(x,x)}$).

H - гільбертовий простір, є: метричним, лінійним, нормованим, повний (банаховий), зі скалярним добутком.

Приклади г.п.:

1) $\mathbb{R}^n$ $\quad x(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ $\quad y(y_1, y_2, \dots y_n)$

$(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

2) $\mathbb{C}^n$ $\quad (x,y) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$

3) $L_2[a,b]$ $\quad x(t) \in L_2[a,b] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$

$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$

[$L_p[a,b]$ при $p \neq 2$ – Банахові, але не гільбертові)

4) l_2 $x(x_1, x_2, \dots x_n)$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 < +\infty$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

l_p при $p \neq 2$ – банахові, але не гільбертові.

Ортонормовані системи і базиси

Нехай H – передгільбертів простір

Означення:

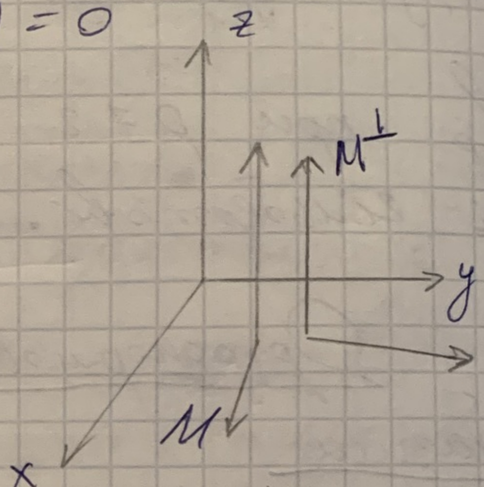
Елементи x і y з H називаються ортогональними, якщо $(x, y) = 0$.

Означення:

Елемент $x \in H$ називається ортогональним до множини $M \subset H$, якщо $\forall y \in M: (x, y) = 0$.

Означення:

Множина $M^\perp$ називається ортогональним доповненням множини $M \subset H$, якщо $\forall x \in M$: $\forall y \in M^\perp$: $(x, y) = 0$



Приклад:

Нехай $H = \mathbb{R}^3$

$M = XOY$

Ортогональне доповнення, це всі вектори що паралельні вісі OZ

$$H = \mathbb{R}^3$$
$$M = \mathbb{R}^2$$
$$M^\perp = \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$$
$$H = M \oplus M^\perp$$

$\oplus$ — пряма сума просторів

Лема:

Нехай $M \subset H$, тоді ортогональне доповнення $M^{\perp}$ є підпростором H. Доведення: Покажемо, що (1) $M^{\perp}$ - лін. простір; 2) $M^{\perp}$ - замкнена в H).

1) $\forall x, y \in M^{\perp}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$: $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$

Беремо довільне $z \in M$

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \underbrace{(x, z)}_{=0} + \beta \underbrace{(y, z)}_{=0} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in M^{\perp}$.

2) $\{x_n\} \in M^{\perp}$, $\{x_n\} \to x_0 \in H$

Треба довести, що $x_0 \in M^{\perp}$.

Беремо довільне $z \in M$ і розглядаємо $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{(x_n, z)}}$. Якщо

використали неперервність скал. добутку

$x_n \to x_0$, то $(x_n, z) \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(x_0, z)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_0, z) = 0 \Rightarrow x_0 \in M^{\perp}$.

Теорема Піфагора

$$\forall x, y \in H: \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$x \perp y$

Доведення:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(y,x)}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(x,y)}} + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

∎

В загальному випадку:

Нехай $x_1, \dots x_n \in H$

$(x_i, x_j) = 0 \ \forall i \neq j$, тоді:

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

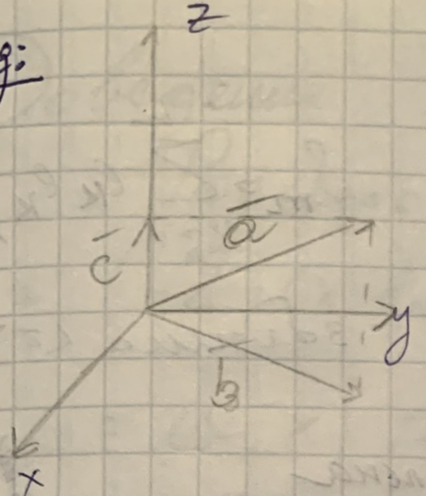
Теорема про ортогональне доповнення

Нехай H - гільб. пр., $H_1 \subset H$ є підпростором. Тоді правильний ортогональний розклад:

$$H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$$

Тобто $\forall x \in H \ \exists! \, x_1 \in H_1 \ \exists! \, x_1^{\perp} \in H_1^{\perp}$, що $x = x_1 + x_1^{\perp}$

приклад:



$H_1 = \mathbb{R}^2 \ (X o Y)$

$H_1^{\perp} = \mathbb{R} \ (o Z)$

$\vec{b} \in H_1$

$\vec{c} \in H_1^{\perp}$

$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

x_1 і $x_1^{\perp}$ проекції елемента $x^{\perp}$ на підпростори H_1 і $H_1^{\perp}$.

Нехай H - гільбертів простір $\dim H = +\infty$.

Означення:

Система елементів $\{e_1, e_2, \dots e_n, \dots\} \subset H$ називається ортонормованою (ОНС) якщо $\forall i, j$: $(e_i, e_j) = 0$ $i \neq j$

$(e_i, e_i) = 1$ $i = j$.

Лема: Нехай H - гільбертів простір, $\{e_n\}$ - ОНС в Н. Тоді ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збіжний (в просторі H) тоді і тільки тоді, коли збіжний ряд (числовий) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ ($c_1, \dots c_n, \dots$ довільні сталі) !

Доведення:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad S_m = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k, \quad m > n$$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ — зб. $\Leftrightarrow S_n$ — збіжна $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_n$ — фундаментальна

через те, що гільб. **повний**.

$$\|S_n - S_m\|^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k\Big\|^2 = \Big(\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k, \sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k\Big) =$$

$\|S_n - S_m\|^2 \to 0$

норму записали через скал. добуток

$$= \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 (e_k, e_k) = \left(\begin{array}{c}\text{там де}\\ \text{індекси не співпадають}\\ \text{буде } 0\end{array}\right) =$$

$(e_k, e_k) = 1$

$$= \Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2}_{S_n'} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}_{S_m'}\Big| \Leftrightarrow S_n' = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \text{ — фунд} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow S_n'$ — збіжна $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ — зб. ■

Теорема про нерівність Бесселя

Нехай $\{e_k\}$ — ОНС в г.п H.

Тоді $\forall x \in H$: $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \le \|x\|^2$