17. Найти расстояние $\rho(f_1,f_2)$ в пространстве $C[0,2\pi]$, если $f_1(x)=a\sin x$, $f_2(x)=b\cos x$.

18. Найти расстояние $\rho(f_1,f_2)$ в пространстве $L_1[-1,1]$, если $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\sin x$.

19. Найти расстояние в пространстве $C[0,1]$ между функциями $x(t)=t^3$, $y(t)=t^2-1$.

20. Найти расстояние в пространстве $C\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ между функциями $x(t)=\sin t$, $y(t)=\cos t$.

21. Найти расстояние в пространстве $C[-\pi,\pi]$ между функциями $x(t)=\sin t$, $y(t)=\cos t$.

22. Изобразить шар $B[t^2,2]$ в $C[0,1]$.

23. Пусть $x_0(t)$ – фиксированная функция из $C[a,b]$. Доказать, что множество $E=\{x(t)\in C[a,b]: x(t)<x_0(t)\}$ открыто в $C[a,b]$.

Указание: показать, что $\alpha=\inf\limits_{t\in[a,b]} x_0(t)>\beta=\sup\limits_{t\in[a,b]} x(t)$, *и выбрать* $\varepsilon=\alpha-\beta$.

24. Является ли открытым в пространстве l_∞ множество $E=\{x=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in l_\infty : 0<\xi_k<1\ \forall k\in\mathbb{N}\}$?

25. Разместить в единичном шаре в пространстве l_2 счетное число непересекающихся шаров радиуса $\frac{1}{10}$.

26. Показать на примере, что пересечение последовательности вложенных друг в друга непустых ограниченных открытых множеств, диаметры которых стремятся к нулю, может быть пусто (определение диаметра множества см. в п. 4).

Указание: для всех $n\in\mathbb{N}$ *рассмотреть множества вида* $\left(0,\frac{1}{n}\right)\subset\mathbb{R}$.

1 Метричні простори 18.09.19

$C_{[0,1]}$ $f_1 = t^3$, $f_2 = t^2 - 1$, ρ - ?

$\rho = \max\limits_{t\in[0,1]} |f_2 - f_1| = \max\limits_{t\in[0,1]} |\underbrace{t^2 - 1 - t^3}_{f}|$,

$f' = -3t^2 + 2t$

$-3t^2 + 2t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2}{3}$

$f'' = -6t + 2 \big|_{t=\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow$ лок. макс.

$f'' = -6t + 2 \big|_{t=0} > 0 \Rightarrow$ лок. мін

$f(0) = -1$ $f(1) = -1$ $f(\frac{2}{3}) = -\frac{23}{27}$

$\max\limits_{[0,1]} |f| = 1$ - відстань між f_1 та f_2

2 $L_1[-1;1]$ $f_1(x) = x$ $f_2(x) = \sin x$

$\rho(f_1, f_2) = ?$

$\rho_1 = \int_a^b |\sin x - x| dx = \int_{-1}^{1} |\sin x - x| dx =$

$= 2\int_0^1 |\sin x - x| dx = \left(x > \sin x \big|_{x=0}^{x=1}\right) =$

$= 2\int_0^1 (x - \sin x) dx = 2\left(\int_0^1 x dx - \int_0^1 \sin x dx\right) =$

37, 39, 41

$= 2\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \left(-\cos x\Big|_0^1\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - (-\cos(1)+1)\right)$

$= 1 + \cos(1) - 2 = \cos(1) - 1.$

③ Побудувати кулю $B[t^2, 2]$ в $C_{[0,1]}$

$B_{[x_0, r]} = \{x \in X : \rho(x_0, x) \le r\}$

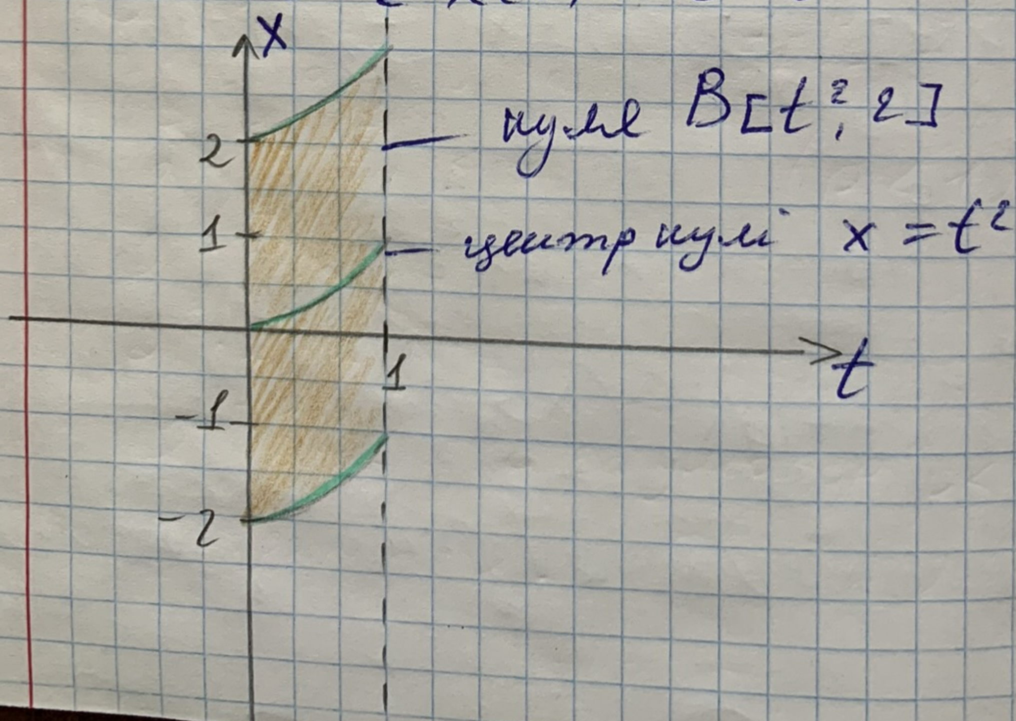
$B_{[t^2, 2]} = \{x(t) \in C_{[0,1]} : \rho(t^2, x) \le 2\}$

Будуємо: $\max\limits_{t \in [0,1]} |t^2 - x(t)| \le 2$

$\forall t \in [0,1] \quad |t^2 - x(t)| \le 2$

$-2 \le x(t) - t^2 \le 2$

$-2 + t^2 \le x(t) \le 2 + t^2$

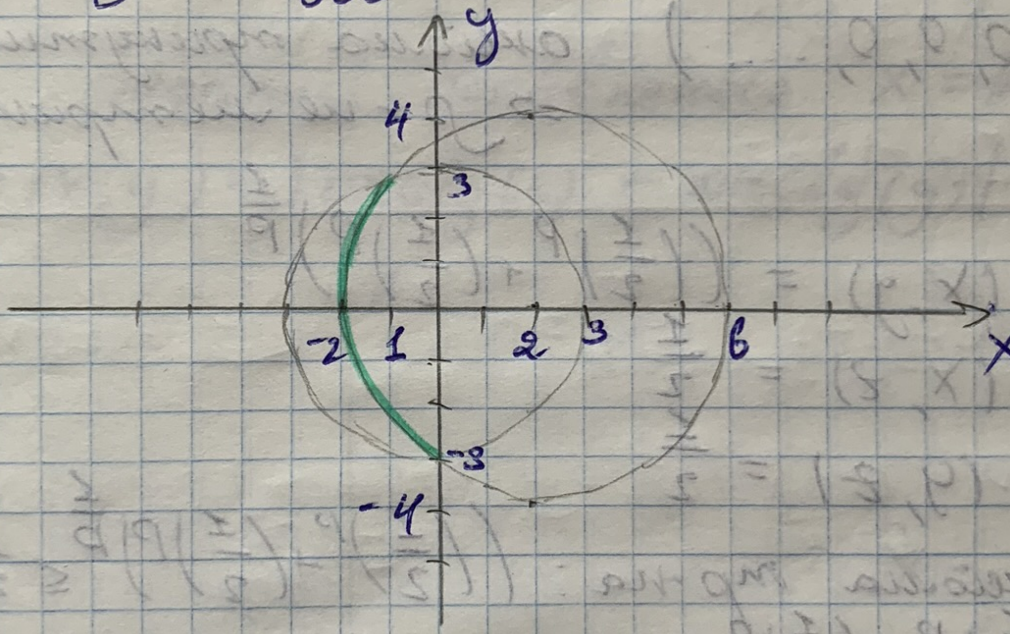


④ Навести приклад м.п. та двох куль таких, що куля більшого радіусу міститься в кулі меншого радіусу

$B_1 \subset B_2$, при $r_1 > r_2$

Якщо наш метр. простір: $B_{[(0,0);3]}$

В ньому побудуємо кулю $B_{[(2,0);4]}$



— куля $B_{[(2,0),4]}$ в $B_{[(0,0),3]}$.

5) l_p $x(x_1, x_2, \ldots)$ $\sum\limits_{k=1} |x_k|^p < \infty$

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

$p < 1$? $\rho(x,y)$ - не є метрикою

$x\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right)$ Показати, що при

$y\left(0, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right)$ $p<1$ не виконується

$z(0, 0, 0, \ldots)$ аксіома трикутника =>

=> ρ - не метрика.

$$\rho(x,y) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\rho(x,z) = \frac{1}{2}$$

$$\rho(y,z) = \frac{1}{2}$$

Аксіома тр-на: $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p \leq 1$ $\quad (p < 1)$

$2\left(\frac{1}{2}\right)^p \leq 1$

$2^1 \cdot 2^{-p} \leq 1$

$2^{1-p} \leq 1$, а за умовою $p<1 \Rightarrow -p+1>0$,

протиріччя.