8) $\tilde{L}_p[a,b]$

$$\rho_p(x,y) = \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \; p \geq 1$$

За інтегральною нерівності Мінковського доводиться третє аксіома.

Метричні простори можна будувати необмежено.

Наприклад так: Нехай (X, ρ) - метричний простір, нехай $Y \subset X$, тоді (Y, ρ) - новий метричний простір, такий метричний простір називається підпростором.

Збіжність в метричному просторі

(X, ρ) - м.п

$\{x_n\}$ - послідовність в X.

Означення: Послідовність $\{x_n\}$ назв. збіжною до x_0, якщо $\underbrace{\rho(x_n, x_0)}_{\text{числова посл.}} \to 0$ при $n \to +\infty$

Приклади $(X, \rho) = (\mathbb{R}^m, \rho_p)$

$x_n(x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)} \ldots x_m^{(n)}) \to x_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, \ldots x_m^{(0)})$

$\Leftrightarrow \rho_p(x_n, x_0) \to 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$

$\forall k = \overline{1,m} : |x_k^{(n)} - x_0^{(n)}| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow$ $\to 0$

$\Rightarrow |x_k^{(n)} - x_0^{(n)}| \to 0$ покоорд. зб.

Навпаки $\forall k \; |x_k^{(n)} - x_0^{(n)}| \to 0 \Rightarrow \rho_p(x_n, x_0) \to 0$

Збіжність в $\mathbb{R}^m$ еквівалентна

покоординатній збіжності (для l_p також!)

$C_{[a,b]}$ $\{x_n(t)\} \to x_0(t)$

$\rho(x_n, x_0) = \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall t \in [a,b] : |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall t \in [a,b] : |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$
$\forall n > N$

N - не зал. від t.

$\tilde{L}_p[a;b]$ $\{x_n(t)\} \to x_0(t)$

$$\int_a^b |x_n(t) - x_0(t)|^p dt \to 0$$ - інтегральна зб.

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{2} \\ 0, & x \in [0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

$x_n(t) \to x_0(t) \equiv 0$

$(x_n(t) \in L_p[a, b])$

Метрики ρ_1 і ρ_2 називаються еквівалентними, якщо зі збіжності послідовності в одній метриці випливає її збіжність в іншій і навпаки.

(X, ρ_1), (X, ρ_2)

$\rho_1 \sim \rho_2 : \forall \{x_n\} \in X \ \forall x_0 \in X:$

$$\rho_1(x_n, x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \iff \rho_2(x_n, x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$\rho_1 \sim \rho_2 \quad \exists \, c_1, c_2 > 0 : \forall x, y \in X$

$$c_1 \rho_1(x, y) \le \rho_2(x, y) \le c_2 \rho_1(x, y)$$

$\mathbb{R}^2$ $\quad \rho_2(x,y) = \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$

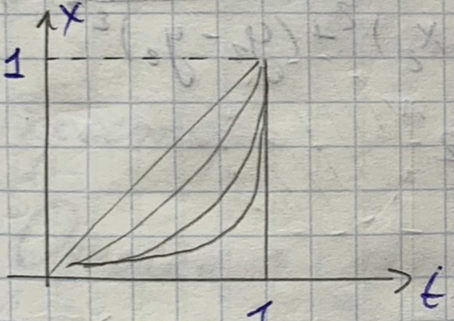
$\rho_1(x,y) = |y_2-y_1| + |x_2-x_1|$

$\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} \le |y_2-y_1| + |x_2-x_1|$

Навпаки: $C_1(|y_2-y_1|+|x_2-x_1|) \le$ $\quad \left(C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\le \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$

Розглянемо $\{X_n(t)\} = t^n, \ t \in [0,1]$



$t^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1, & t=1 \\ 0, & t\in[0,1] \end{cases}$ – розривна

Таким чином в $C[0,1]$

$\rho(x,y) = \max|x(t)-y(t)|$, послідовність $\{t^n\}$ - розбіжна.

Розглянемо збіжність цієї послідовності в інтегральній метриці

$\rho(t^n, \varphi(t)) = \int_0^1 |t^n - \varphi(t)|\,dt =$

$= \int_0 t^n dt = \frac{1}{n+1} \to 0$

Окіл точки в метричному п.

Відкрита та замкнена кулі

Означення: множина $B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$

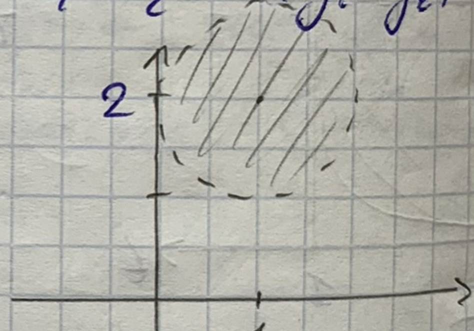
$(x_0 \in X,\ 0 \le r < +\infty)$

Замкнена куля: $B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \le r\}$

Відкриту кулю $B(x_0, r)$ - називають околом точки x_0.

$\mathbb{R}^2,\ \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

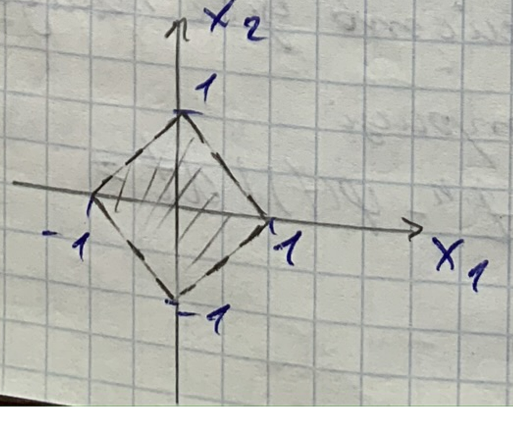
$B((1,2), 1)$



$\mathbb{R}^2,\ \rho(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

$B((0,0), 1) = \{x(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 0| + |x_2 - 0| < 1\}$

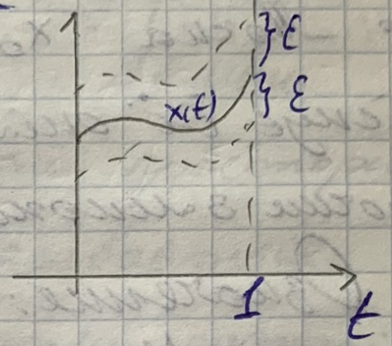
$|x_1| + |x_2| < 1$



$B(x_0(t), \varepsilon) = \{x(t) \in C_{[0;1]} : \max|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon\}$

$\forall t: |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$

$x_0(t) - \varepsilon < x(t) < x_0(t) + \varepsilon$



Множина називається обмеженою, якщо вона міститься в деякій кулі.

Класифікація точок метричного простору.

Означення: 1) точка $x_0 \in X$ називається граничною точкою множини $M \subset X$ якщо її окіл містить безліч точок з множини M.

2) x_0 - гр. т. $M \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M: x_n \to x_0$ в X.

Означення: Множина наз. замкненою, якщо вона містить усі граничні точки.

Означення: точка $x_0 \in M$ називається внутрішньою, якщо вона входить в M з деяким своїм околом.

Означення: Множина M називається відкритою, якщо всі її точки внутрішні.

• Точка $x_0 \in M$ ізольована, якщо існує її окіл, що не містить жодної точки з множини M крім x_0.

Означення:

Множина $\overline{M}$ називається замиканням множини M, якщо вона утворена приєднанням до M всіх її граничних точок.

$M \subseteq \overline{M}$ і $M = \overline{M}$, якщо M замкнена

Питання:

$B(x_0, r)$ – відкрита мн-на.

$\overline{B}(x_0, r)$ – замикання $B(x_0, r)$

$B[x_0, r]$ – замкн. куля

Чи може бути так: $\overline{B}(x_0, r) \subset B[x_0, r]$ і $\overline{B} \neq B[\,]$?

$X \setminus M$ - доповнення M до X

M - відкр $\Leftrightarrow X \setminus M$ - замк.

M - замк. $\Leftrightarrow X \setminus M$ - відкр.

X і $\varnothing$ - одночасно відкр. і замкн.

Сепарабельні метричні простори

Множина $M \subset X$ називається скрізь щільною в метричному просторі X, якщо $\forall x \in X \; \exists \{x_n\} \subset M : x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$

іншими словами, це означає, що будь-який елемент x метричного простору можна наблизити як завгодно точно елементами множини M

Приклад: $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$

$X = C_{[a,b]}$ $M = \{$мн-на многочленів з рац. коефіцієнтами$\}$

Наступні твердження еквівалентні

1) M - скрізь щільна в X.

2) M має непустий перетин з кожною відкритою кулею в X.

3) $\bar{M} = X$

Означення:

Метричний простір (X, ρ) називається сепарабельним, якщо в ньому є скрізьщільна зчисленна множина.

Наведемо вище приклади - сепарабельні

Повні і неповні метричні простори

Теорема про поповнення

Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називається фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ $\forall n, m > N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Якщо $\{x_n\}$ - зб. $\Rightarrow \{x_n\}$ - фунд.

Приклад: $X = Q \quad \{x_n\} = (1 + \frac{1}{n})^n$

$\{x_n\} \to e \notin Q$

Метричний простір (X, ρ) називається повним, якщо в ньому кожна фунд. послідовність