Крайова задача на власні значення 14.09.19

Задача Штурма-Ліувілля

Якщо коеф-ти диф. рівняння або крайових даних залежать від деякого параметра λ, то при певних умовах існують такі значення цього параметра, для яких задача має ненульовий розв'язок, ці значення λ називають власними значеннями, а відповідні їм розв'язки крайової задачі власними функціями.

Важливий окремий випадок задачі на власні значення, це задача Штурма-Ліувілля

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 & (1) \\ \alpha_1 y(a) + \beta y'(a) = 0 & \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 & (2) \end{cases}$$

$x \in [a,b]$, $p(x) \in C^1[a,b]$, $\alpha_1^2+\beta_1^2 \neq 0$

$q(x), \rho(x) \in C[a,b]$, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$; $\alpha_2^2+\beta_2^2 \neq 0$

λ - дійсне число (спектральний парам)

$\rho(x)$ - вагова функція

Приклад: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & x \in (0, l) \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$ - умови Діріхле

Знайти λ при яких розв'язки не нулі

$k^2 + \lambda = 0$, $\lambda = 0$

$k^2 = -\lambda$ ①

$\lambda = 0$; $k = 0$, $y_{з.о} = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 x e^{0x} =$
$= C_1 + C_2 x$

$y(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y(l) = C_1 + C_2 l = 0 \Rightarrow C_2 = 0$, $y_{з.о} = 0$ - не підходить

② $\lambda < 0$

$\left.\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{-\lambda} \\ k_2 &= -\sqrt{-\lambda} \end{aligned}\right\}$ дійсні і різні

$y_{з.о.} = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}$

$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} l} = 0 \end{cases}$

$\Delta = e^{-\sqrt{-\lambda} l} - e^{\sqrt{-\lambda} l} \neq 0$ - єдиний розв'язок

$C_1 = 0$, $C_2 = 0 \Rightarrow y_{з.о.} = 0$

③ $\lambda > 0$

$k_1 = i\sqrt{\lambda}$

$k_2 = -i\sqrt{\lambda}$

$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$

$y(0) = C_1 = 0$

$y(l) = C_2 \sin(\lambda l) = 0$

$\Downarrow$ при $C_2 \neq 0$

$\sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$

$\sqrt{\lambda}\, l = \pi k$

$\lambda = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$

$\lambda = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \neq 0$

$y = \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$ – власні функції

Для задачі Штурма-Ліувілля існують власні числа і вл. функції і вони утворюють зліченні множини.

Власні числа задачі (1)-(2) є простими, тобто кожному власному числу відповідає одна власна функція з точністю до ~~в~~ сталого множника

$\exists\ \bar{\lambda} \to \varphi_1, \varphi_2$, тоді ці власні функції є розвязками одного і того ж рівняння,

Вони також задовольняють крайові умови, запишемо для них крайові умови в точці $x = a$

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_1(a) + \beta_1 \varphi_1'(a) = 0 \\ \alpha \varphi_2(a) + \beta_1 \varphi_2'(a) = 0 \end{cases}$$

Оскільки $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ то $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$

Виходить що записана система має ненульовий розв'язок і визначник системи дорівнює нулю ($\Delta = 0$), запишемо $\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_1'(a) \\ \varphi_2(a) & \varphi_2'(a) \end{vmatrix} =$

$= W(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, φ_1, φ_2 - лін. залежні

$\varphi_1 = k\varphi_2$ - утворюють базис розв'язків д.р.

Зауваження: відмітимо, що за крайових умов іншого типу ніж (2) власні значення можуть бути не простими.

Приклад: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$ - періодичні крайові умови

$\lambda_k = k^2$ $\quad \varphi_{k_1} = \sin(kx) \quad \varphi_{k_2} = \cos(kx)$

- Якщо $q(x) \le 0$ $\forall x \in [a, b]$ і крайові умови першого типу $\begin{Bmatrix} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{Bmatrix}$, то всі $\lambda_k > 0$.

Нехай λ_k - власне значення, φ_k - вл. функ.

Підставляємо в (1)

$$(p\varphi_k')' + q\varphi_k + \lambda_k \varphi_k \rho = 0 \quad | \cdot \varphi_k \text{ і } \int_a^b$$

$$\int_a^b \left((p\varphi_k')' \cdot \varphi_k + q\varphi_k^2 + \lambda_k \rho \varphi_k^2\right) dx = 0$$

$$\int_a^b \varphi_k \, d(p\varphi_k') = \varphi_k p \varphi_k' \Big|_a^b - \int_a^b p\varphi_k' \, d\varphi_k =$$

$$= \underbrace{\varphi_k p \varphi_k' \Big|_a^b}_{0} - \int_a^b p(\varphi_k')^2 dx$$

$$\int_a^b -\underbrace{p(\varphi_k')^2}_{<0} + \underbrace{q\varphi_k^2}_{<0} + \lambda_k \varphi_k^2 \underbrace{\rho}_{>0} dx = 0 \Rightarrow \lambda_k > 0$$

Назвемо скалярним добутком із вагою $\rho(x)$ функції y_1 і $y_2 \in C[a,b]$ число $\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x) \cdot y_2(x) \cdot \rho(x) \, dx$

$$\|y\| = \left(\int_a^b y^2(x) \rho(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} = \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Означення: y_1, y_2 називаються ортогональними з вагою $\rho(x)$, якщо $\langle y_1, y_2 \rangle = 0$

• Власні функції φ_m і φ_n з задачі (1)-(2) ортогональні з вагою $\rho(x)$.

Доведення:

$$\begin{cases} L\varphi_m := (p\varphi_m')' + q\varphi_m = -\lambda_m \rho\varphi_m & | \cdot \varphi_n \\ L\varphi_n := (p\varphi_n')' + q\varphi_n = -\lambda_n \rho\varphi_n & | \cdot \varphi_m \end{cases}$$

$\varphi_n L\varphi_m - \varphi_m L\varphi_n =$

$$= \varphi_n(p\varphi_m')' - \varphi_m(p\varphi_n')' = -\rho\varphi_m\varphi_n(\lambda_m - \lambda_n) \quad (3)$$

$\lambda_m - \lambda_n \neq 0$

$$\int_a^b uLv - vLu\,dx = p\,W(u,v)\Big|_a^b \quad \text{ф. Гріна}$$

$$\int_a^b \varphi_n L\varphi_m - \varphi_m L\varphi_n\,dx = p\begin{vmatrix} \varphi_n & \varphi_m \\ \varphi_n' & \varphi_m' \end{vmatrix}\Bigg|_a^b$$

φ_n і φ_m задовольняють:

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_n(a) + \beta_1\varphi_n'(a) = 0 \\ \alpha_2\varphi_m(a) + \beta_2\varphi_m'(a) = 0 \end{cases}$$

$(\alpha_1, \beta_1) \neq 0 \Rightarrow \Delta = W(\varphi_1, \varphi_2)\big|_{x=a} = 0$

$W(\varphi_1, \varphi_2)\big|_{x=b} = 0 \quad (4)$

$\Downarrow$

$$\int_a^b \rho\varphi_n\varphi_m\,dx = 0$$

Приклад: $\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

$\lambda_k = 1 + k^2$

$\varphi_k = e^{-x} \sin(kx) \qquad x \in [0, \pi]$

$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin(kx)\, e^{-x} \sin(mx)\, dx \neq 0$

$y'' + 2y' + \lambda y = 0 \quad | \cdot \rho$

$(py')' + qy + \lambda \rho y = 0$

$\rho y'' + 2\rho y' + \lambda \rho y = 0$

$(\rho y')' \underbrace{- \rho' y' + 2\rho y'}_{=0} + \lambda \rho y = 0$

$y'(2\rho - \rho') = 0$

$2\rho - \rho' = 0, \quad \rho' = 2\rho, \quad \rho = e^{2x}$

$(e^{2x} y')' + \lambda e^{2x} y = 0$

$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin kx\, e^{-x} \sin(mx)\, e^{2x} dx =$

$$= \int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(mx)\, dx = 0$$

Відомо, що набір власних векторів лінійного оператора A з $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ з різними власними значеннями утворює базис в $\mathbb{R}^n$, природно виникає питання про зображення функції визначення на відрізку $[a, b]$ у вигляді нескінченних лінійних комбінацій власних функцій задачі Штурма - Ліувілля. Відповідь на це питання дає теорема Стеклова (1896)

Т. Якщо функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована на $[a, b]$ і задовольняє крайові умови (2), тоді вона розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний на $[a, b]$ ряд за власними функціями задачі Штурма - Ліувілля (1)-(2).

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) \quad (5)$$

Відмітимо, що завдяки ортогональності вл. функції легко обчислити коефіцієнти ряду (5)

$$\langle f(x), \varphi_k \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle$$

$\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = 0 \quad i \neq k$

$\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \|\varphi_k\|^2 > 0, \quad i = k$

$$c_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{\int_a^b f \varphi_k \rho \, dx}{\int_a^b \varphi_k^2 \rho \, dx}$$

$\{\varphi_i\}$ $\left\{ \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} := \tilde{\varphi}_i \right\}$

$\|\tilde{\varphi}_i\| = 1$

$c_k = \langle f, \tilde{\varphi}_k \rangle$

1) Якщо $f \in L_2[a,b]$ то ряд (5) збігається до функції f в середньому

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \right\|_{L_2}^2 = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \right)^2 dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

2) Якщо функція f кусково монотонна і обмежена на відрізку $[a, b]$ то маємо поточкову збіжність ряду (5) до функції f,

$$S(x) = \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$$

де $S(x)$ - сума (5)

$S(x) = f(x)$ в точках неперервності $f(x)$

Системи диференціальних рівнянь

Означення:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Система співвідношень, де x - незалежна змінна $y_1, y_2 \dots y_n$ невідомі функції, називається нормальною системою диференціальних рівнянь порядку n.