Процес ортогоналізації

якщо $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}$

Будь-яку систему $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ лінійно незалежних елементів можна перетворити в ортонормовану з допомогою процесу ортогоналізації Шмідта. Покладемо $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Нехай $y_2 = x_2 - c_{21}e_1$. Підберемо число c_{21} так, щоб $y_2 \perp e_1$. Очевидно, для цього треба взяти $c_{21} = (x_2, e_1)$. Покладемо $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ уже побудовані. Візьмемо $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk}e_k$, де $c_{nk} = (x_n, e_k)$, і нарешті одержимо $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Чи задають скалярний добуток у просторі* $\mathbf{R}^2$ *функції:*

а) $(x, y) = |x_1 + y_1| \, |x_2 + y_2|$;

б) $(x, y) = \sqrt{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2}$.

Розв'язання. У кожному випадку скалярний добуток (x, y) як функція є визначеною на всій множині $\mathbf{R}^2$, тому необхідно перевірити аксіоми скалярного добутку.

а)

$$(x, x) = |2x_1| \, |2x_2| = 4 \, |x_1 x_2| \geq 0.$$

Але для того, щоб $(x, x) = 0$ в нашому прикладі достатньо, щоб виконувалась лише одна із умов: $x_1 = 0$ або $x_2 = 0$. Тобто, можливо, що $(x, x) = 0$, але $x \neq \theta$. Отже, функція (x, y) не задає скалярного добутку на $\mathbf{R}^2$.

б)

$$(x, x) = \sqrt{x_1^2 x_1^2 + x_2^2 x_2^2} = \sqrt{x_1^4 + x_2^4} \geq 0.$$

Якщо $(x, x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^4 + x_2^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad x = \theta$. Навпаки, при $x = \theta$ $(x, x) = 0$.

$$(x, y) = \sqrt{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2} = \sqrt{y_1^2 x_1^2 + y_2^2 x_2^2} = (y, x).$$

$$(\alpha x, y) = \sqrt{(\alpha x_1)^2 y_1^2 + (\alpha x_2)^2 y_2^2} = \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2)} =$$
$$= |\alpha| \sqrt{(x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2)} = |\alpha| \, (x, y) \neq \alpha (x, y),$$

√ тобто дана функція не задає скалярний добуток на $\mathbf{R}^2$.

Завдання 2. *Нехай H – гільбертів простір, норма в якому породжується скалярним добутком. Довести, що* $\forall x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

(рівність паралелограма).

Розв'язання. Насамперед варто звернути увагу на те, що справжній паралелограм довелося б розглядати лише у просторах $\mathbf{R}^2$ та $\mathbf{R}^3$(на площині та у просторі). Тут вона більш звична нам у геометричній інтерпретації, відомій зі шкільного курсу математики: у будь-якому паралелограмі сума квадратів довжин сторін дорівнює сумі квадратів довжин діагоналей. Для всіх інших множин H паралелограм суто умовний.

Той факт, що норма в H породжена скалярним добутком, означає, що $\forall x \in H \;\; \|x\| = \sqrt{(x,x)}$. З огляду на цю властивість, запишемо $\forall x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) =$$
$$= 2\left((x,x) + (y,y)\right) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Рівність доведено.

√ **Завдання 3.** *Довести, що норма не породжується скалярним добутком в просторах:*

а) $C_{[a,b]}$,

б) $l_p, \;\; 1 \le p \ne 2$.

Розв'язання. Використаємо результат попередньої задачі, і в обох випадках підберемо елементи x та y так, щоб рівність паралелограма не виконувалась.

а) Розглянемо конкретний простір, наприклад, $C_{[0,1]}$. Функції $x(t)$ і $y(t)$ із $C_{[0,1]}$ виберемо так, щоб одна з них була сталою, а друга – лінійною, наприклад, нехай $x(t) = 1, \;\; y(t) = t$. При цьому $x(t) + y(t) = t + 1, \; x(t) - y(t) = 1 - t$.

В просторі $C_{[a,b]}$ – множині неперервних на $[a,b]$ функцій, ми вводили норму $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$. Тоді норми одержаних функцій: $\|x(t)\| = 1, \; \|y(t)\| = 1, \; \|x(t) + y(t)\| = 2, \; \|x(t) - y(t)\| = 1$. Підставимо одержані числа у рівність паралелограма, і одержимо: $2^2 + 1^2 \ne 2\left(1^2 + 1^2\right)$. Оскільки рівність паралелограма не виконується принаймні для однієї пари функцій, то норма не породжується скалярним добутком.

Доцільно зауважити, що ми довели потрібне твердження, не задаючи на множині $C_{[a,b]}$ скалярного добутку. З огляду на це, задачу можна було сформулювати так: довести, що на просторі $C_{[a,b]}$ не можна задати скалярний добуток так, щоб він породжував норму.
б) На просторах l_p виберемо наступні елементи:

$$x = (1, 1, 0, 0, ...)\,,\; y = (1, -1, 0, 0, ...)\,.$$

При цьому одержимо $x + y = (2, 0, 0, ...)\,,\; x - y = (0, 2, 0, 0, ...)$, а норми елементів x, y, $x+y$, $x-y$ (враховуючи визначення $\|x\| = \sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}$) дорівнюватимуть

$$\|x\| = \sqrt[p]{2},\; \|y\| = \sqrt[p]{2},\; \|x+y\| = 2,\; \|x-y\| = 2.$$

Підставляючи одержані значення в рівність паралелограма, одержимо співвідношення,

$$2^2 + 2^2 = 2\left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}\right),$$
$$8 = 4 \cdot 2^{\frac{2}{p}},$$

що справедливе лише при $p = 2$. Тобто скалярний добуток не породжує норми на l_p.

Завдання 4. *У гільбертовому просторі H визначити ортогональне доповнення $L^{\perp}$, якщо:*

а) $H = l_2, \quad L = \{x \in l_2 : x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, 0, ...), \quad \xi_i \in \mathbf{R}^+\}$ (n – фіксоване);

б) $H = L_2[-1, 1], \quad L = \left\{x(t) : x(t) = 0, t \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]\right\}.$

Розв'язання. а) Якщо $y \in L^{\perp}$, то $\forall x \in L \quad (x, y) = 0$. Крім того, за визначенням скалярний добуток

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + ... + \xi_n y_n = 0,$$

якщо тільки $y_k = 0 \quad \forall k = \overline{1, n}$. Тобто

$$L^{\perp} = \left\{ y \in l_2 : y = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots\right),\; y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots - \text{будь-які.} \right\}$$

б) Скалярний добуток в просторі $L_2[-1,1]$

$$(x,y)=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)dt=\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}x(t)y(t)dt+\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}x(t)y(t)dt+\int_{\frac{1}{3}}^{1}x(t)y(t)dt=$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{3}}x(t)y(t)dt+\int_{\frac{1}{3}}^{1}x(t)y(t)dt=0$$

якщо виконується умова $y(t)=0\quad \forall t\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};1\right]$. Тобто

$$L^{\perp}=\left\{y\in L_2[-1;1]:y(t)=0\quad \forall t\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};1\right]\right\}.$$

√ **Завдання 5.** *Знайти проекцію елемента $x(t)=\sin\frac{\pi}{2}t$ із простору $L_2[0,1]$ на підпростір L цього простору, породжений елементами $a_1(t)=1$, $a_2(t)=t$, $a_3(t)=t^2$.*

Розв'язання. Кожен елемент простору L зображається у вигляді $u=c_0+c_1t+c_2t^2$, де c_0, c_1, c_2 – дійсні числа. Щоб різниця $x-u$ була ортогональна до будь-якого елемента $v\in L$, достатньо щоб ця різниця була ортогональною до базисних елементів підпростору L, тобто до елементів 1, t, t^2. Тому розглянемо систему скалярних добутків:

$$\begin{cases}\left(\sin\frac{\pi}{2}t-c_0-c_1t-c_2t^2,1\right)=0;\\ \left(\sin\frac{\pi}{2}t-c_0-c_1t-c_2t^2,t\right)=0;\\ \left(\sin\frac{\pi}{2}t-c_0-c_1t-c_2t^2,t^2\right)=0.\end{cases}$$

Користуючись властивостями скалярного добутку, запишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases}(c_0+c_1t+c_2t^2,1)=\left(\sin\frac{\pi}{2}t,1\right);\\ (c_0+c_1t+c_2t^2,t)=\left(\sin\frac{\pi}{2}t,t\right);\\ (c_0+c_1t+c_2t^2,t^2)=\left(\sin\frac{\pi}{2}t,t^2\right).\end{cases}$$

Звідси одержимо

$$\begin{cases}c_0\int_0^1 dt+c_1\int_0^1 tdt+c_2\int_0^1 t^2dt=\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}tdt;\\ c_0\int_0^1 tdt+c_1\int_0^1 t^2dt+c_2\int_0^1 t^3dt=\int_0^1 t\sin\frac{\pi}{2}tdt;\\ c_0\int_0^1 t^2dt+c_1\int_0^1 t^3dt+c_2\int_0^1 t^4dt=\int_0^1 t^2\sin\frac{\pi}{2}tdt.\end{cases}$$

Обчислимо всі інтеграли, які фігурують у цій системі: $\int\limits_0^1 dt = 1$, $\int\limits_0^1 tdt = \frac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 t^2dt = \frac{1}{3}$, $\int\limits_0^1 t^3dt = \frac{1}{4}$, $\int\limits_0^1 t^4dt = \frac{1}{5}$, $\int\limits_0^1 \sin\frac{\pi}{2}tdt = \frac{2}{\pi}$, $\int\limits_0^1 t\sin\frac{\pi}{2}tdt = \frac{4}{\pi^2}$, $\int\limits_0^1 t^2\sin\frac{\pi}{2}tdt = \frac{8\pi-16}{\pi^3}$.

Таким чином, система набуде вигляду системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів c_0, c_1, c_2 :

$$\begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{\pi}; \\ \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{4}{\pi^2}; \\ \frac{1}{3}c_0 + \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{5}c_2 = \frac{8\pi-16}{\pi^3}. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{8\pi-16}{\pi^3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{\pi} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{4-\pi}{\pi^2} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{8\pi-16-2\pi^2}{\pi^3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{\pi} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{4-\pi}{\pi^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{4\pi-16-\pi^2}{\pi^3} \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{\pi}; \\ \frac{1}{12}c_1 + \frac{1}{12}c_2 = \frac{4-\pi}{\pi^2}; \\ \frac{1}{180}c_2 = \frac{4\pi-16-\pi^2}{\pi^3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{180\left(4\pi-16-\pi^2\right)}{\pi^3}; \\ c_1 = \frac{168\pi^2-472\pi+2080}{\pi^3}; \\ c_0 = \frac{66\pi^2-256\pi+960}{\pi^3}. \end{cases}$$

Таким чином, проекція елемента $\sin\frac{\pi}{2}t$ на підпростір, породжений елементами 1, t, t^2 визначається так:

$$u(t) = \frac{180\left(4\pi-16-\pi^2\right)}{\pi^3}t^2 + \frac{168\pi^2-472\pi+2080}{\pi^3}t + \frac{66\pi^2-256\pi+960}{\pi^3}.$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Чи задає скалярний добуток в просторі* $\mathbf{R}^2$ *наступна функція:*

1. $(x,y) = (x_1+y_1)(x_2+y_2)$;
2. $(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)$;
3. $(x,y) = |x_1+x_2|\,|y_1+y_2|$;
4. $(x,y) = x_1y_2$;
5. $(x,y) = (x_1+y_1)^2(x_2+y_2)^2$;
6. $(x,y) = |x_1|+|x_2|+|y_1|+|y_2|$;
7. $(x,y) = (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2$;
8. $(x,y) = \sqrt{x_1y_1+x_2y_2}$;
9. $(x,y) = x_1+y_2$;
10. $(x,y) = x_1x_2+y_1y_2$.

Завдання 2. У просторі H знайти $L^{\perp}$, якщо:

1. $H = L_2[-1,1]$, $L = \{x(t) = ct, c \in \mathbf{R}\}$;
2. $H = l_2$, $L = \left\{\left(\underbrace{1,1,\ldots 1}_{n},0,0,\ldots\right)\right\}$ (n – фіксоване число);
3. $H = L_2[-1,1]$, $L = \left\{x(t):\ x(t) = 0\ \ \forall t \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right\}$;
4. $H = l_2$, $L = \{x \in l_2 :\ x = (\xi_1,0,\xi_3,0,\xi_5,\ldots),\ \xi_{2n-1} \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}\}$;
5. $H = l_2$, $L = \{x \in l_2 :\ x = (\xi_1,0,0,0,\ldots),\ \xi_1 \in \mathbf{R}\}$;
6. $H = L_2[-\pi,\pi]$, $L = \{x(t) = \cos nt, n \in \mathbf{N}\}$;
7. $H = l_2$, $L = \left\{\left(\underbrace{1,0,0,\ldots 1}_{2n+1},0,0,\ldots\right), n \in \mathbf{N}\right\}$;

8. $H = l_2,\ L = \left\{ \left(\underbrace{1,0,1,0,...1,0}_{2n}, \xi_{2n+1}, \xi_{2n+2}, \dots \right), \xi_{2n+1}, \xi_{2n+1}, \dots \in \mathbf{R}, \right.$ $\left. n \in \mathbf{N} \right\};$

9. $H = l_2,\ L = \{x \in l_2 :\ x = (\xi_1, 0, 0, 0, ...),\ \ \xi_1 \in \mathbf{R}\};$

10. $H = L_2[-\pi, \pi],\ L = \{x(t) = \sin nt, n \in \mathbf{N}\}.$

Завдання 3. Знайти проекцію елемента x із гільбертового простору H на його підпростір, породжений елементами $a_1,\ a_2,\ a_3$, якщо:

1. $x(t) = \sqrt[3]{1+t},\ H = L_2[0,1],\ a_1(t) = 1,\ a_2(t) = t,\ a_3(t) = t^2;$

2. $x(t) = \sin \pi t,\ H = L_2[0,1],\ a_1(t) = 1,\ a_2(t) = t,\ a_3(t) = t^2;$

3. $x(t) = e^t - 2,\ H = L_2[0,1],\ a_1(t) = 1,\ a_2(t) = t,\ a_3(t) = t^2;$

4. $x = (1,1,2,1,0,0,...),\ H = l_2,\ a_1 = (3,0,0,...),\ a_2 = (1,1,0,0,...),$ $a_3 = (2,1,2,0,0,...);$

5. $x = (2,3,2,3,0,0,...),\ H = l_2,\ a_1 = (1,0,0,0,...),$ $a_2 = (1,1,1,0,0,...),\ a_3 = (0,-1,1,0,0,...);$

6. $x = (5,4,3,2,0,0,...),\ H = l_2,\ a_1 = (0,0,1,0,0,...),$ $a_2 = (0,1,1,0,0,...),\ a_3 = (1,0,2,0,0,...);$

7. $x(t) = (t-1)^2,\ H = L_2[0,1],\ a_1(t) = 1,\ a_2(t) = t,\ a_3(t) = t^2;$

8. $x(t) = \operatorname{ch} t,\ H = L_2[0,1],\ a_1(t) = 1,\ a_2(t) = t,\ a_3(t) = t^2;$

9. $x = (-2,2,-2,2,0,0,...),\ H = l_2,\ a_1 = (0,1,2,3,0,0,0,...),$ $a_2 = (0,0,-1,3,0,0,...),\ a_3 = (0,0,0,6,0,0,0,...);$

10. $x = (5,4,3,2,0,0,...),\ H = l_2,\ a_1 = (0,0,1,0,0,...),\ a_2 = (0,1,1,0,0,...),$ $a_3 = (1,0,2,0,0,...).$

$$(x, y) = (\mathscr{L}) \int\limits_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

Пусть $\widetilde{H}^1[a, b]$ — пространство непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int\limits_a^b [x(t)\, y(t) + x'(t)\, y'(t)]\, dt.$$

V скал. добуток в $H^1[a,b]$

Это пространство не полное; его пополнение — гильбертово пространство, называемое *пространством Соболева* и обозначаемое $H^1[a, b]$. Элементы, присоединяемые к $\widetilde{H}^1[a, b]$ при его пополнении, могут быть отождествлены с функциями $x(t)$ из пространства $L_2[a, b]$, имеющими *обобщенные производные* $x'(t)$.

Т е о р е м а 4.1. *Пространство $H^1[a, b]$ вложено в пространство $C[a, b]$.*

4.1. Доказать, что в пространстве $L_1[a, b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой.

4.2. Доказать, что если $x(t), y(t) \in L_2[a, b]$, то $x(t)\, y(t) \in L_1[a, b]$.

4.3. Привести пример функции:

а) $x(t) \in L_2[0, 1]$ такой, что $x^2(t) \notin L_2[0, 1]$;

б) $x(t) \in L_1[0, 1]$ такой, что $x(t) \notin L_2[0, 1]$.

4.4. Доказать, что всякая последовательность $x_n(t)$ $(n \in \mathbf{N})$, сходящаяся в пространстве $C[a, b]$, будет сходящейся и в пространстве $L_p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$.

4.5. Привести пример последовательности непрерывных на $[0, 1]$ функций $x_n(t)$ $(n \in \mathbf{N})$, сходящейся в пространствах $L_1[0, 1]$ и $L_2[0, 1]$, но не сходящейся в пространстве $C[0, 1]$.

4.6. Доказать, что последовательность $x_n(t) = n^2 t e^{-nt}$ $(n \in \mathbf{N})$ сходится поточечно к функции $x(t) \equiv 0$ для любого $t \geqslant 0$, но не сходится в пространстве $L_2[0, 1]$.

4.7. Доказать, что при $1 < p < q$ справедливо строгое включение $L_p[0, 1] \subset L_q[0, 1]$.

4.8. Доказать, что пространство $L_p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$ сепарабельно.

VN4.9 **4.9.** Найти угол φ между элементами $x(t) = \sin t$ и $y(t) = t$ в пространстве $L_2[0, \pi]$.

4.10. Найти углы треугольника, образованного в пространстве $L_2[-1, 1]$ элементами $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 1$, $x_3(t) = t$.

4.11. Найти норму функции $x(t) = t^\alpha$ в тех пространствах $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$, которым эта функция принадлежит.

VN4.12 а),б) **4.12.** Провести ортогонализацию элементов $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = t^3$ в пространствах:

а) $L_2[-1, 1]$; б) $L_2[0, 1]$.

4.13. В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим множество A функций, обращающихся в нуль на некотором интервале, содержащем точку $t = 0{,}5$ (и зависящем, вообще говоря, от функции). Будет ли A замкнутым множеством?

4.14. Доказать, что множество функций из пространства $L_2[0, 1]$ таких, что почти все их значения лежат на $[-1, 1]$, выпукло. Является ли это множество замкнутым?

4.15. В пространстве $L_2[-1, 1]$ для произвольного $\lambda \in \mathbf{R}$ обозначим через M_λ множество всех непрерывных функций $x(t)$, для которых $x(0) = \lambda$. Доказать, что каждое M_λ выпукло и всюду плотно в пространстве $L_2[0, 1]$.

4.16. Доказать, что множество многочленов $P(t)$ таких, что $P(1) = 0$, является выпуклым и всюду плотным в пространстве $L_2[0, 1]$.

4.17. Доказать, что множество ступенчатых функций является выпуклым и всюду плотным в пространстве $L_2[a, b]$.

4.18. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$. Доказать, что множество $M = \{x(t) \in \in L_2[a, b]\colon x(t) = 0$ почти всюду на $[c, d]\}$ является подпространством пространства $L_2[a, b]$. Описать подпространство $M^\perp$.

4.19. Доказать, что в пространстве $L_2[0, 1]$ множество

$$M = \left\{ x(t) \in L_2[0, 1]\colon \int_a^b x(t)\,dt = 0 \right\}$$

является подпространством. Описать подпространство $M^\perp$.

4.20. Доказать, что тождественное отображение $Jx = x$ осуществляет вложение пространства $C[a, b]$ в пространство $L_p[a, b]$ при любом $p \geqslant 1$.

4.21. Доказать, что тождественное отображение $Jx = x$ осуществляет вложение пространства $L_p[a, b]$ в пространство $L_s[a, b]$, если $1 \leqslant s \leqslant p$.

4.22. Доказать, что множество многочленов всюду плотно в пространстве $H^1[a, b]$.

4.23. Пусть $x(t) \in H^1[a, b]$, $y(t) \in C^1[a, b]$. Доказать, что $x(t)\,y(t) \in \in H^1[a, b]$.

V N4.24 **4.24.** Найти угол φ между элементами $x(t) = \sin t$ и $y(t) = t$ в пространстве $H^1[0, \pi]$. (формулу для скал. добутку див. на попер. сторінці)

4.25. Провести ортогонализацию системы элементов $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = t^3$ в пространстве $H^1[-1, 1]$.

4.26. Доказать, что система функций

$$1,\ \sin\frac{2\pi k(t-a)}{b-a},\ \cos\frac{2\pi k(t-a)}{b-a}, \qquad k \in \mathbf{N},$$

ортогональна в пространстве $H^1[a, b]$.

Таким образом, существует конечный предел этой последовательности: $\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|$.

Пусть, например, $n < m$ (случай $n > m$ рассматривается аналогично). В силу выпуклости множеств M_n элемент $\frac{a_n + a_m}{2}$ принадлежит M_n, ибо при $n < m$ $M_m \subset M_n$. Тогда

$$\delta_n \leqslant \left\| \frac{a_n + a_m}{2} \right\| \leqslant \frac{1}{2}\|a_n\| + \frac{1}{2}\|a_m\| = \frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{2}\delta_m < \delta_n$$

(здесь мы учли, что $\delta_m < \delta_n$ при $n < m$). Следовательно, $\lim_{n,m\to\infty} \left\| \frac{a_n + a_m}{2} \right\| = \delta$. Используя далее тождество параллелограмма, находим, что

$$\|a_n - a_m\|^2 = 2\|a_n\|^2 + 2\|a_m\|^2 - 4\left\| \frac{a_n + a_m}{2} \right\|^2.$$

Отсюда $\lim_{n,m\to\infty} \|a_n - a_m\| = 0$, т. е. последовательность (a_n) является фундаментальной, а значит, и сходящейся (в силу полноты пространства H). Следовательно, существует элемент $a \in H$ такой, что $\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$. Очевидно, что $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$, т. е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \varnothing$.

V N12

12. Для функции e^t найти многочлен второй степени $p(t)$ такой, что норма $\|e^t - p(t)\|$ минимальна в $L_2[-1; 1]$.

Решение. Поскольку при заданном n в пространстве со скалярным произведением от элемента x наименее уклоняется его n-я частичная сумма ряда Фурье, то искомый многочлен совпадает с многочленом Фурье второй степени функции e^t, т. е.

$$p(t) = c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t),$$

где $e_0(t)$, $e_1(t)$, $e_2(t)$ — элементы ортонормированной системы в $L_2[-1; 1]$, $c_k = (e^t, e_k)$ $(k = 0, 1, 2)$ — коэффициенты Фурье функции e^t.

Для того чтобы найти $e_0(t)$, $e_1(t)$, $e_2(t)$, применим процесс ортогонализации к линейно независимым функциям 1, t, t^2.

Учитывая, что $\|1\| = \left(\int_{-1}^{1} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, найдем $e_0(t)$: $e_0(t) = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Далее, $e_1(t) = \frac{h_1(t)}{\|h_1\|}$, где $h_1(t) = t - (t, e_0)e_0$. Так как $(t, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t\,dt = 0$, то $h_1(t) = t$. Кроме того, $\|h_1\|^2 = (h_1, h_1) = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$. Следовательно, $e_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$. Перейдем теперь к построению функции $e_2(t)$: $e_2(t) = \frac{h_2(t)}{\|h_2\|}$, где

$$h_2(t) = t^2 - (t^2, e_0)e_0 - (t^2, e_1)e_1.$$

Нетрудно видеть, что $(t^2, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $(t^2, e_1) =$
$= \sqrt{\frac{3}{2}} \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt = 0.$

Поэтому $h_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$. Поскольку

$$\|h_2\|^2 = (h_2, h_2) = \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{8}{45},$$

то

$$e_2(t) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Итак, чтобы построить искомый многочлен, осталось подсчитать коэффициенты Фурье c_0, c_1, c_2 функции e^t:

$$c_0 = (e^t, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} e^t dt = \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{2}};$$

$$c_1 = (e^t, e_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int\limits_{-1}^{1} te^t dt = \frac{\sqrt{6}}{e};$$

$$c_2 = (e^t, e_2) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) e^t dt = \frac{\sqrt{5}\,(e^2 - 7)}{e\sqrt{2}}.$$

Тогда

Відповідь:

$$p(t) = c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t) = \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{e} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t +$$
$$+ \frac{\sqrt{5}\,(e^2 - 7)}{e\sqrt{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} \frac{11 - e^2}{e} + \frac{3}{e} t + \frac{15}{4} \frac{e^2 - 7}{e} t^2.$$

13. Показать, что последовательность функций $(t^k)_{k=0}^{\infty}$ полна в $L_2[0;\ 1]$, но не является базисом в $L_2[0;\ 1]$.

Решение. Покажем, что система (t^k) полна в $L_2[0;\ 1]$.

П е р в ы й с п о с о б. Очевидно, что линейная оболочка L системы (t^k) совпадает с множеством P заданных на $[0;\ 1]$ алгебраических полиномов $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$. Из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса следует, что $\overline{L} = \overline{P} = C[0;\ 1]$, т. е. система (t^k) полна в пространстве $C[0;\ 1]$, а значит, и в пространстве $L_2[0;\ 1]$, поскольку непрерывные функции плотны в $L_2[0;\ 1]$.

В т о р о й с п о с о б. Желая доказать полноту системы (t^k), допускаем, что существует функция $x(t) \in L_2[0;\ 1]$, для которой

$$(x, t^k) = \int\limits_{0}^{1} x(t)\, t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots.$$