Точка $x$ называется *неподвижной точкой* отображения $A$, если $Ax = x$. Иначе говоря, неподвижные точки — это решения уравнения $Ax = x$.

Теорема 1 (Принцип сжимающих отображений). *Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве $R$, имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $x_0$ — произвольная точка в $R$. Положим $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$ и т. д.; вообще, $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Действительно, считая для определенности $m \geqslant n$, имеем

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.$$

Так как $\alpha < 1$, то при достаточно большом $n$ эта величина сколь угодно мала. В силу полноты $R$ последовательность $\{x_n\}$, будучи фундаментальной, имеет предел. Положим

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Тогда в силу непрерывности отображения $A$

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Итак, существование неподвижной точки доказано. Докажем ее единственность. Если

$$Ax = x, \quad Ay = y,$$

то неравенство (1) принимает вид

$$\rho(x, y) \leqslant \alpha\rho(x, y);$$

так как $\alpha < 1$, отсюда следует, что

$$\rho(x, y) = 0, \quad \text{т. е.} \quad x = y.$$

Упражнение. Показать на примере, что отображение $A$, удовлетворяющее условию $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ для всех $x \neq y$, может не иметь ни одной неподвижной точки.

**2. Простейшие применения принципа сжимающих отображений.** Принцип сжимающих отображений можно применять к доказательству теорем существования и единственности решений для уравнений различных типов. Помимо доказательства существования и единственности решения уравнения $Ax = x$, принцип сжимающих отображений дает и фактический метод приближенного нахождения этого решения (метод последовательных приближений). Рассмотрим следующие простые примеры.

1. Пусть $f$ — функция, которая определена на сегменте $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant K|x_2-x_1|,$$

с константой $K<1$ и отображает сегмент $[a, b]$ в себя. Тогда $f$ есть сжимающее отображение и, согласно доказанной теореме, последовательность $x_0$, $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, ... сходится к единственному корню уравнения $x=f(x)$.

В частности, условие сжимаемости выполнено, если функция имеет на сегменте $[a, b]$ производную $f'(x)$, причем $|f'(x)| \leqslant \leqslant K<1$.

На рис. 9 и 10 изображен ход последовательных приближений в случае $0<f'(x)<1$ и в случае $-1<f'(x)<0$.

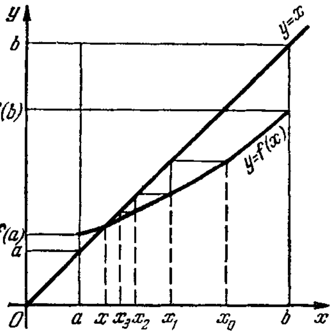


Рис. 9.

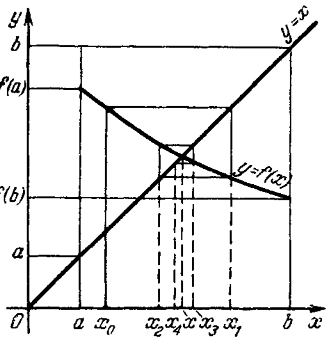


Рис. 10.

Пусть теперь мы имеем дело с уравнением вида $F(x)=0$, причем $F(a)<0$, $F(b)>0$ и $0<K_1 \leqslant F'(x) \leqslant K_2$ на $[a, b]$. Введем функцию $f(x)=x-\lambda F(x)$ и будем искать решение уравнения $x=f(x)$, равносильного уравнению $F(x)=0$ при $\lambda \neq 0$. Так как $f'(x)=1-\lambda F'(x)$, то $1-\lambda K_2 \leqslant f'(x) \leqslant 1-\lambda K_1$ и нетрудно подобрать число $\lambda$ так, чтобы можно было действовать методом последовательных приближений. Это — распространенный метод отыскания корня.

2. Рассмотрим отображение $A$ $n$-мерного пространства в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Если $A$ есть сжатие, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $x = Ax$.

При каких же условиях отображение $A$ будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора метрики в пространстве. Рассмотрим три варианта.

а) Пространство $\mathbf{R}^n_\infty$, т. е. $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \max_i |y_i' - y_i''| = \max_i \left| \sum_j a_{ij}(x_j' - x_j'') \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| |x_j' - x_j''| \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x_j' - x_j''| =$$
$$= \left( \max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

б) Пространство $\mathbf{R}^n_1$, т. е. $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \sum_i |y_i' - y_i''| = \sum_i \left| \sum_j a_{ij}(x_j' - x_j'') \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x_j' - x_j''| \leqslant \left( \max_j \sum_i |a_{ij}| \right) \rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

в) Пространство $\mathbf{R}^n$, т. е. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. На основании неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\rho^2(y', y'') = \sum_i \left( \sum_j a_{ij}(x_j' - x_j'') \right)^2 \leqslant \left( \sum_i \sum_j a_{ij}^2 \right) \rho^2(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i \sum_j a_{ij}^2 \leqslant \alpha < 1. \tag{4}$$

Таким образом, если выполнено хотя бы одно из условий[1]) (2)—(4), то существует одна и только одна точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

[1]) В частности, из любого из условий (2)—(4) вытекает, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

такая, что $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i$, причем последовательные приближения к этому решению имеют вид

$$\begin{gathered}
x^{(0)} = \left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}\right),\\
x^{(1)} = \left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_n^{(1)}\right),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{(k)} = \left(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}\right),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

где

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i,$$

а в качестве $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ можно взять любую точку из $\mathbf{R}^n$.

Каждое из условий (2)—(4) достаточно для того, чтобы отображение $y = Ax$ было сжатием. Относительно условий (2) и (3) можно было бы доказать, что они и необходимы для того, чтобы отображение $y = Ax$ было сжатием (в смысле метрик а) или б) соответственно).

Ни одно из условий (2)—(4) не необходимо для применимости метода последовательных приближений.

Если $|a_{ij}| < 1/n$, то все три условия (2)—(4) выполнены и метод последовательных приближений заведомо применим.

Если $|a_{ij}| \geqslant 1/n$, то ни одно из условий (2)—(4) не выполнено.

**3. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений.** В предыдущем пункте были даны два простейших примера применения принципа сжимающих отображений в одномерном и в $n$-мерном пространствах. Однако наиболее существенны для анализа применения этого принципа в бесконечномерных функциональных пространствах. Сейчас мы покажем, как с его помощью можно получить теоремы существования и единственности решения для некоторых типов дифференциальных и интегральных уравнений.

1. Задача Коши. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{5}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \tag{6}$$

причем функция $f$ определена и непрерывна в некоторой плоской области $G$, содержащей точку $(x_0, y_0)$, и удовлетворяет в этой области условию Липшица по $y$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M\,|y_1 - y_2|.$$

Докажем, что тогда на некотором сегменте $|x-x_0| \leqslant d$ существует, и притом только одно, решение $y=\varphi(x)$ уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию (6) (теорема Пикара).

Уравнение (5) вместе с начальным условием (6) эквивалентно интегральному уравнению

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt. \tag{7}$$

В силу непрерывности функции $f$ имеем $|f(x, y)| \leqslant K$ в некоторой области $G' \subset G$, содержащей точку $(x_0, y_0)$. Подберем $d>0$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $(x, y) \in G'$, если $|x-x_0| \leqslant d$, $|y-y_0| \leqslant Kd$;

2) $Md<1$.

Обозначим через $C^*$ пространство непрерывных функций $\varphi$, определенных на сегменте $|x-x_0| \leqslant d$ и таких, что $|\varphi(x)-y_0| \leqslant Kd$, с метрикой $\rho(\varphi_1, \varphi_2)=\max\limits_x |\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$.

Пространство $C^*$ полно, так как оно является замкнутым подпространством полного пространства всех непрерывных функций на $[x_0-d, x_0+d]$. Рассмотрим отображение $\psi=A\varphi$, определяемое формулой

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt,$$

где $|x-x_0| \leqslant d$. Это отображение переводит полное пространство $C^*$ в себя и является в нем сжатием. Действительно, пусть $\varphi \in C^*$, $|x-x_0| \leqslant d$. Тогда

$$|\psi(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\right| \leqslant Kd$$

и, следовательно, $A(C^*) \subset C^*$. Кроме того,

$$|\psi_1(x)-\psi_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t))-f(t, \varphi_2(t))|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant Md \max_x |\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|.$$

Так как $Md<1$, то $A$ — сжатие.

Отсюда вытекает, что уравнение $\varphi=A\varphi$ (т. е. уравнение (7)) имеет одно и только одно решение в пространстве $C^*$.

2. Задача Коши для системы уравнений. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\varphi_i'(x)=f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \quad i=1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

причем функции $f_i$ определены и непрерывны в некоторой области $G$ пространства $R^{n+1}$, содержащей точку $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$, и удовлетворяют условию Липшица

$$|f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)})| \leqslant M \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|.$$

Докажем, что тогда на некотором сегменте $|x - x_0| \leqslant d$ существует одно и только одно решение начальной задачи (8), (9), т. е. одна и только одна система функций $\varphi_i$, удовлетворяющих уравнениям (8) и начальным условиям (9).

Система (8) вместе с начальными условиями (9) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\, dt, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

В силу непрерывности функции $f_i$ ограничены в некоторой области $G' \subset G$, содержащей точку $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$, т. е. существует такое постоянное число $K$, что $|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant K$.

Подберем $d > 0$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $(x, y_1, \ldots, y_n) \in G'$, если $|x - x_0| \leqslant d$, $|y_i - y_{0i}| \leqslant Kd$; $i = 1, \ldots, n$;

2) $Md < 1$.

Рассмотрим пространство $C_n^*$, элементами которого являются наборы $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ из $n$ функций, определенных и непрерывных при $|x - x_0| \leqslant d$, и таких, что $|\varphi_i(x) - y_{0i}| \leqslant Kd$. Определим метрику формулой

$$\rho(\varphi, \psi) = \max_{x,\, i} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|.$$

Введенное пространство полно. Отображение $\psi = A\varphi$, задаваемое системой равенств

$$\psi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\, dt,$$

есть сжимающее отображение полного пространства $C_n^*$ в себя. Действительно,

$$\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} [f_i(t, \varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_n^{(1)}(t)) - f_i(t, \varphi_1^{(2)}(t), \ldots, \varphi_n^{(2)}(t))]\, dt$$

и, следовательно,

$$\max_{x,\, i} |\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)| \leqslant Md \max_{x,\, i} |\varphi_i^{(1)}(x) - \varphi_i^{(2)}(x)|.$$

Отображение $A$ — сжимающее, поскольку $Md < 1$.

Отсюда вытекает, что операторное уравнение $\varphi = A\varphi$ имеет одно и только одно решение в пространстве $C_n^*$.

**4. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.**

1. Уравнения Фредгольма. Применим теперь метод сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, т. е. уравнения

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x), \tag{11}$$

где $K$ (так называемое *ядро*) и $\varphi$ суть данные функции, $f$ — искомая функция, а $\lambda$ — произвольный параметр.

Мы увидим, что наш метод применим лишь при достаточно малых значениях параметра $\lambda$.

Предположим, что $K(x, y)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ и, следовательно, $|K(x, y)| \leqslant M$. Рассмотрим отображение $g = Af$ полного пространства $C[a, b]$ в себя, задаваемое формулой

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x).$$

Имеем

$$\rho(g_1, g_2) = \max |g_1(x) - g_2(x)| \leqslant |\lambda| M (b-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Следовательно, при $\lambda < \dfrac{1}{M(b-a)}$ отображение $A$ — сжимающее.

Из принципа сжимающих отображений заключаем, что для всякого $\lambda$ с $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ уравнение Фредгольма имеет единственное непрерывное решение. Последовательные приближения к этому решению $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ имеют вид

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y)\, dy + \varphi(x),$$

где в качестве $f_0(x)$ можно взять любую непрерывную функцию.

2. Нелинейные интегральные уравнения. Принцип сжимающих отображений можно применить и к нелинейному интегральному уравнению вида

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x, y; f(y))\,dy+\varphi(x), \tag{12}$$

где $K$ и $\varphi$ непрерывны и, кроме того, ядро $K$ удовлетворяет условию Липшица по своему «функциональному» аргументу:

$$|K(x, y; z_1)-K(x, y; z_2)|\leqslant M|z_1-z_2|.$$

В этом случае для отображения $g=Af$ полного пространства $C[a, b]$ в себя, заданного формулой

$$g(x)=\lambda\int_a^b K(x, y; f(y))\,dy+\varphi(x), \tag{13}$$

имеет место неравенство

$$\max|g_1(x)-g_2(x)|\leqslant|\lambda|M(b-a)\max|f_1(x)-f_2(x)|,$$

где $g_1=Af_1$, $g_2=Af_2$. Следовательно, при $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ отображение $A$ будет сжимающим.

3. Уравнения Вольтерра. Рассмотрим, наконец, интегральное уравнение типа Вольтерра

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x, y)f(y)\,dy+\varphi(x). \tag{14}$$

Здесь, в отличие от уравнений Фредгольма, верхний предел в интеграле — переменная величина $x$. Формально это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, доопределив функцию $K$ равенством: $K(x, y)=0$ при $y>x$.

Однако в случае интегрального уравнения Фредгольма мы были вынуждены ограничиться малыми значениями параметра $\lambda$, а к уравнениям Вольтерра принцип сжимающих отображений (и метод последовательных приближений) применим при всех значениях $\lambda$. Точнее, речь идет о следующем обобщении принципа сжимающих отображений.

*Пусть $A$ — такое непрерывное отображение полного метрического пространства $R$ в себя, что некоторая его степень $B=A^n$ является сжатием; тогда уравнение*

$$Ax=x$$

*имеет одно и только одно решение.*

Действительно, пусть $x$ — неподвижная точка отображения $B$, т. е. $Bx = x$. Имеем:

$$Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \to x \quad (k \to \infty),$$

ибо отображение $B$ — сжимающее, а потому последовательность $Bx_0, B^2x_0, B^3x_0, \ldots$ для любого $x_0 \in R$ сходится к неподвижной точке $x$ отображения $B$. Следовательно,

$$Ax = x.$$

Эта неподвижная точка единственна, поскольку всякая точка, неподвижная относительно $A$, неподвижна и относительно сжимающего отображения $A^n$, для которого неподвижная точка может быть только одна.

Покажем теперь, что некоторая степень отображения

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x)$$

является сжатием. Пусть $f_1$ и $f_2$ — две непрерывные функции на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$|Af_1(x) - Af_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x, y)(f_1(y) - f_2(y))\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| M(x-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Здесь $M = \max |K(x, y)|$. Отсюда

$$|A^2 f_1(x) - A^2 f_2(x)| \leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max |f_1(x) - f_2(x)|$$

и, вообще,

$$|A^n f_1(x) - A^n f_2(x)| \leqslant |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} m \leqslant |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n!},$$

где $m = \max |f_1(x) - f_2(x)|$.

При любом значении $\lambda$ число $n$ можно выбрать настолько большим, что

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

Тогда отображение $A^n$ будет сжатием. Итак, уравнение Вольтерра (14) при любом $\lambda$ имеет решение, и притом единственное.

## § 5. Топологические пространства

**1. Определение и примеры топологических пространств.** Основные понятия теории метрических пространств (предельная точка, точка прикосновения, замыкание множества и т. д.) мы вводили, опираясь на понятие окрестности или, что, по существу,