1.2 Задачи для самостоятельной работы

1.1. Пусть $X = \mathbb{R}$, а $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y \end{cases}$. Показать, что:

a) пара (X, ρ) образует метрическое пространство (называемое дискретным);

b) всякое подмножество в X является одновременно открытым и замкнутым;

c) последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в X является сходящейся тогда и только тогда, когда она стабилизируется, т.е. $x_n \equiv x$ при достаточно больших n;

d) каждая точка в X является изолированной;

e) пространство (X, ρ) является полным и несепарабельным.

1.2. Проверить является ли $X = \mathbb{R}$ метрическим пространством с метрикой

(a) $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$ (b) $\rho(x, y) = |\sin x - \sin y|$

(c) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$ (d) $\rho(x, y) = \left| \dfrac{x}{1 + x^2} - \dfrac{y}{1 + y^2} \right|$

1.3. Пусть функция $f(\cdot)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a, b]$. Показать, что функция $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$ удовлетворяет аксиомам метрики.

3.8. Пусть $X=\mathbb{R}[x]$ – пространство многочленов вида $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ с действительными коэффициентами. Будет ли функция

$$\rho(p_1,p_2)=|p_1(0)-p_2(0)|$$

метрикой на X? Ответ обоснуйте.

3.9. Являются ли метриками на множестве $\mathbb{N}$ (множестве натуральных чисел):

а) $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{x\cdot y}$;

б) $\rho(x,y)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{x+y}, & x\neq y,\\ 0, & x=y?\end{cases}$

3.10. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X. Докажите, что тогда метриками являются:

а) $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$;

б) $\rho_2(x,y)=\ln(1+\rho(x,y))$.

3.11. Докажите, что для любых четырех точек x,y,z,t метрика удовлетворяет неравенствам:

а) $|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\leq\rho(x,y)$;

б) $|\rho(x,z)-\rho(y,t)|\leq\rho(x,y)+\rho(z,t)$.

3.12. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X. Докажите, что $\rho_1(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}$ – тоже метрика.

3.13. Докажите, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ становится метрическим пространством, если положить $\rho(a,b)=0$ при $a=b$ и $\rho(a,b)=\dfrac{1}{3^k}$ при $a\neq b$, где k – наивысшая степень числа 3, на которую делится нацело разность $a-b$.

3.14. Пусть функция f определена на $[0,+\infty)$ и обладает следующими свойствами:

1) $f(0)=0$;

2) f строго возрастает на $[0,+\infty)$;

3) $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ для любых x и y из $[0,+\infty)$.

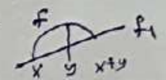
Тогда см. 3.10

Докажите, что если ρ – метрика на некотором множестве X, то $\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))$ также является метрикой на X.

3.15. Пусть функция f определена на $[0,+\infty)$ и обладает следующими свойствами:

выпукла вверх $\Rightarrow f(y)\geq f_1(y)$

f_1 - хорда



1) $f(0)=0$;

2) f строго возрастает на $[0,+\infty)$;

3) f имеет на промежутке $(0,+\infty)$ производную второго порядка и $f''(0)<0$ на $(0,+\infty)$.

Докажите, что функция ρ_1, определенная как в задаче 3.14, является метрикой.

3.16. Докажите, что если ρ_1, ..., ρ_n – метрики на множестве X, то для любых положительных чисел λ_1, ..., λ_n функция

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\rho_k(x,y)$$

также является метрикой на X.

3.17. Пусть на множестве X задана последовательность метрик ρ_n и пусть λ_n – последовательность положительных чисел. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\,\rho_n(x,y)$ сходится для любой пары $(x;y)$ элементов из X, то его сумма $\rho(x,y)$ также является метрикой на X.

(–) **3.18.** Пусть на множестве X задана последовательность метрик ρ_n. Докажите, что функция

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\rho_n(x,y)}{1+\rho_n(x,y)}$$

тоже является метрикой на X.

3.19. Докажите, что множество S всех числовых последовательностей $x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ становится метрическим пространством, если положить

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$