$$Y_1(x) = e^{(-1+2i)\cancel{x}} \cdot \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t}(\cos(2t) + i\sin(2t))\begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) + 2i\cos(2t) \\ -\cos(2t) - i\sin(2t) \\ -3\cos(2t) - 3i\sin(2t) \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ -\cos(2t) \\ -3\cos(2t) \end{pmatrix} + ie^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ -\sin(2t) \\ -3\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Y_3(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

В-дь:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -2\sin(2t \\ \vdots \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \vdots \end{pmatrix} +$$

$$+ C_3 e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) Серед власних значень матриці A є кратні, але кожному кратному власному значенню відповідає стільки власних векторів яка кратність цього значення

Тоді, якщо λ_k має кратність

S_k, то система $(A - \lambda_k I)U = 0$ матиме S_k - лін. нез. розв'язків

$rang((A - \lambda_k I) = n - S_k)$

Запишемо вл. власні знач. матриці A

з урахуванням їх кратності

(якщо λ_k має кр. S_k то λ_k буде записано S_k разів)

тоді ФСР $\{e^{\lambda_1 x}U_1, \dots, e^{\lambda_n x}U_n\}$

$$Y_{заг.роз} = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x} U_k$$

3) Серед власних значень матриці A є кратні причому деякі з них (можливо всі, що їм відповідає менше вл. векторів ніж їх кратність

λ - корінь кратності S (алг. кр.)

причому $n - S < r$: $rang(A - \lambda I) \leq n-1.$

$(n-r)$ - лінійн. вл. векторів (геом. кр.)

$$\underset{\text{алг.кр.}}{S}, \; n - S < r, \; S > \underset{\text{геом.кр.}}{n - r}$$

Згадаємо ЛОДР, якщо λ-корінь хар-ного рівняння кратності S, то у ФСР ЛОДР цьому кореню відповідає такий набір $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots x^{S-1}e^{\lambda x}$, частина заг. роз-ку буде $C_{k}e^{\lambda x}+C_{k+1}xe^{\lambda x}+\dots$

$\dots+C_{k+s-1}x^{s-1}e^{\lambda x}$, тоді є для ЛОС будемо використовувати подібні міркування

$\boxed{25.\ 09.\ 2019}$

$$Y'=AY$$

$$Y(x)=e^{\lambda x}\left(\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\cdot H_1+\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}H_2+\dots+H_k\right)$$

λ - невідоме число

$H_1, \dots, H_k$ - невідомі вектори

Підставимо $Y(x)$ в ЛОС $Y'=AY$

$$\lambda e^{\lambda x}\left(\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\cdot H_1+\dots+H_k\right)+e^{\lambda x}\left(\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}\cdot H_1+\dots+H_{k-1}\right)=Ae^{\lambda x}\left(\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\cdot H_1+\dots+H_k\right)$$

Скорочуємо на $e^{\lambda x}$ і прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях.

$$(5)\ \begin{cases} \lambda u_1 = Au_1 \\ \lambda u_2 + u_1 = Au_2 \\ \lambda u_3 + u_2 = Au_3 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda u_k + u_{k-1} = Au_k \end{cases} \iff \begin{cases} (A-\lambda \bar{I})u_1 = 0 \\ (A-\lambda \bar{I})u_2 = u_1 \\ (A-\lambda \bar{I})u_3 = u_2 \\ \dots\dots\dots \\ (A-\lambda \bar{I})u_k = u_{k-1} \end{cases}$$

Перше рівняння системи (5), це задача на власні числа і власні вектори.

λ - вл. число матриці A, нехай кратність λ дорівнює s.

Система (5) складається з n-вимірних підсистем, будемо послідовно розв'язувати ці підсистеми. Число довільних сталих від яких залежить загальний розв'язок першої підсистеми:

$$n - r = n - \operatorname{rang}(A - \lambda \bar{I})$$

Підставимо цей загальний розв'язок у другу підсистему, тоді умова сумісності одержаної другої системи запишеться у вигляді

$$rang(A-\lambda I) = rang(A-\lambda I \mid H_1)$$

Якщо виписана умова сумісності не дасть нам $H_1 = 0$, то розв'язавши другу підсистему переходимо до третьої і т.д. На деякому кроці отримаємо

$$rang(A-\lambda I) = rang(A-\lambda I \mid H_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_1 = 0$$

Це умова дасть максимальне значення k. Позначимо $k = k_\lambda$

k_λ - максимальний розв'язок клітини Жордана, які відповідають власному числу λ в нормальній Жордановій формі матриці A.

Тоді $Y(x) = e^{\lambda x}\left(\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}H_1 + \ldots + H_{k_{\lambda}-1}\right)$

Дасть доданок загальному розв'язку, що відповідає власному числу λ

Нехай одна з клітини Жордана для власного числа λ має розмір m, тоді в ФСР ЛОС такій клітині буде відповідати такий набір розв'язків:

$$H_1 e^{\lambda x},\ e^{\lambda x}(xH_1 + H_2),\ e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{2!}H_1 + xH_2 + H_3\right),$$
$$\ldots,\ e^{\lambda x}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}H_1 + \ldots H_m\right) \quad (6)$$

H_1 - власний, а решта приєднані.

І так робимо для кожної клітини Жордана. Лінійна комбінація розв'язків вигляду (6) буде утворювати загальний розв'язок лінійної однорідної системи

Приклад:

$$Y' = AY \qquad A_{3\times 3}$$

1) хар. р-ня.

$$(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

λ_1 - корінь кратності 2, і з геометричною кратністі 1.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} (A - \lambda_1 I) U_1 = 0 \\ (A - \lambda_1 I) U_2 = U_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow U_1$ - вл. вектор, U_2 - приєднаний вектор

$(A - \lambda_2 I) U_3 = 0 \Rightarrow U_3$ - вл. вектор λ_2

$$Y_{заг\,лос} = C_1 e^{\lambda_1 x} U_1 + C_2 e^{\lambda_1 x}(x U_1 + U_2) + C_3 e^{\lambda_2 x} U_3$$

2) хар. рівняння $(\lambda - \lambda_1)^3 = 0$

λ_1 - корінь кратності 3, геом кр 2

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} (A - \lambda_1 I) U_1 = 0 \rightarrow U_{11}, U_{12} \\ (A - \lambda_1 I) U_2 = U_1 \nearrow U_2 \end{cases}$$

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 x} U_{11} + C_2 e^{\lambda_1 x}(x U_{11} + U_2) + C_3 e^{\lambda_1 x} U_{12}$$

3) λ - кр. 3, гом. кр 1

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (A - \lambda I) U_1 = 0, \; U_1 - \text{h.} \\ (A - \lambda I) U_2 = U_1, \; U_2 - \text{пр} \\ (A - \lambda I) U_3 = U_2, \; U_3 - \text{пр} \end{cases}$$

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cdot U_1 + C_2 e^{\lambda_1 x}(x U_1 + U_2) +$$
$$+ C_3 e^{\lambda_1 x}\left(\frac{x^2}{2} U_1 + x U_2 + U_3\right)$$

Приклад:

$$\begin{cases} x' = -4x - 6y - 6z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = 2x + 4z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & -6 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

2.10.2019

Приклад:

N1
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2 \quad r = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2x_1 + x_2 = 0$

$x_2 = 2x_1$
$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ c \end{pmatrix}$$

$(A - \lambda I)V_2 = V_1$, V_1 – вл. вектор

$(A - \lambda I)V_3 = V_2$, V_2 – приєд. вектор

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & a \\ -4 & 2 & 0 & 2a \\ -2 & 1 & 0 & c \end{array}\right] = \left| \begin{array}{c} a = c \\ ① = ③ \end{array} \right| =$$

$$= [\overset{d}{-2} \; 1 \; \overset{e}{0} \mid a]$$

$-2x_1 + x_2 = a$

$\Rightarrow x_2 = a + 2x_1$
$$\begin{pmatrix} d \\ a+2d \\ e \end{pmatrix}$$

$a = 1 \quad c = 0 \qquad V_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};$

при $a = c \qquad V_2 = (1, 2, 1)^T$

$\hat{V}_2 = (0, 1, 0)^T$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$$y_{\text{заг. роз.}} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \left(t \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right)$$

базис

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = U J U^{-1}$$