$L_p[a,b]$ - можна отримати з $\tilde{L}_p[a,b]$ поповненням по нормі.

3) $C_{[a,b]}$ - банаховий, повний, сепараб.

$$\|x(t)\| = \max_{t\in[a,b]} \{|x(t)|\}$$

Означення:

Два лінійних нормованих простори називають ізоморфними, якщо існує взаємнооднозначне відображення $I: E_1 \leftrightarrow E_2$, яке:

1) Узгоджене з операціями

$\forall x, y \in E_1 \quad \forall \alpha, \beta$

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{I x}_{E_2} + \beta \underbrace{I y}_{E_2}$$

2) I - непер, I^{-1} - непер.

! **Теорема про ізоморфізм всіх скінченномірних лінійних норм. просторів**

Всі лінійні нормовані простори виміру n над полем $\mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) є ізоморфними простору $\mathbb{R}^n$ (або $\mathbb{C}^n$), а значить ізоморфні між собою.

Ідея доведення:

Нехай $\{e_1, \dots e_n\}$ - базис в E_1, тоді $\forall x \in E_1, \ \exists! \{\alpha_1, \dots \alpha_n\} \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$

$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$I: x \in E_1 \longleftrightarrow \{\alpha_1, \dots \alpha_n\} \in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$

I, I^{-1} - непер

$E_1 \longleftrightarrow \mathbb{R}^n \longleftrightarrow E_2$.

! **Наслідок:**

Всі скінченно мірні ЛНП банахові.

Означення:

Нехай в E задано дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ - ці норми називаються еквівалентними, якщо $\exists c_1 > 0, c_2 > 0$:

$C_1 \cdot \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C_2 \cdot \|\cdot\|_1$

або (екв. озн.) еквівалентне означення:

$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ (еквівалентні), якщо $\forall \{x_n\} \in E$ і $\forall x \in E$:

$\|x_n - x\|_1 \to 0 \iff \|x_n - x\|_2 \to 0.$

Теорема.

У скінченновимірному ЛНП всі норми еквівалентні.

Базиси в нескінченновимірних лінійних просторах

Є два типи базисів: Гамеля, Шаудера.

Означення.

Система елементів $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in A$ називається базисом Гамеля в лінійному просторі L, якщо ця система лінійно незалежна, це означає, що будь-яка скінченна підсистема з $\{e_\alpha\}$ є лінійно незалежною, і для $\forall x \in L$ існує єдине представлення

$x = \lambda_1 e_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n e_{\alpha_n}$

$\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$.

Відмітимо, що в базисі Гамеля представлення елемента відбувається у вигляді скінченної лінійної комбінації.

В нескінченно мірних л.п. базис Гамеля є незчисленним.

Приклад використання базису Гамеля

Розглянемо функціональне рівняння Коші:

$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$f(x) = kx$ — неперервний розв'язок р-ня Коші.

За допомогою базису Гамеля можна побудувати інший розв'язок (розривний розв'язок)

Розглянемо $L = \mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$.

→ Існує базис Гамеля $\{e_\alpha\} \subset \mathbb{R}$; (він буде мати потужність континууму). Тоді

$\forall x \in \mathbb{R} : x = \lambda_1 e_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n e_{\alpha_n}$.

Де $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{Q}$ — коефіцієнти розкладу за базисними елементами

Побудуємо $f(x)$ таким чином:

Нехай e_α - деякий елемент нашого базису. Тоді $\forall x \in \mathbb{R}$ цей елемент e_α або входить в розклад $x = \lambda_\alpha e_\alpha + \lambda_1 e_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_k e_{\alpha_k}$ (тобто $\lambda_\alpha \neq 0$), або не входить, тобто $\lambda_\alpha = 0$.
Покладемо $f(x) := \lambda_\alpha$. Ця ф-ція задов. р-ня Коші.
Дійсно, нехай $x = \lambda_\alpha e_\alpha + \ldots$; $y = \mu_\alpha e_\alpha + \ldots$. Тоді $x + y = (\lambda_\alpha + \mu_\alpha) e_\alpha + \ldots$. Отже, $f(x) = \lambda_\alpha$ $f(y) = \mu_\alpha$ $f(x+y) = \lambda_\alpha + \mu_\alpha$ тобто $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Ф-ція $f(x)$ приймає лише раціональні значення, оскільки λ_α - коефіцієнт, значить $\in \mathbb{Q}$ (розглядаємо пр-стір $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$). Якщо $x = e_\alpha \Rightarrow \lambda_\alpha = 1 \Rightarrow f(e_\alpha) = 1 \Rightarrow$ $f(x)$ не тотожній нуль. Таким чином $f(x)$ не стала і приймає лише рац. значення $\Rightarrow$ вона не є <u>неперервною</u>. Більше того, можна показати, що вона розривна скрізь в кожній точці.

Базис Шаудера

<u>Означение:</u>

Система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ називається базисом Шаудера в нескінченно мірному лінійному нормованому просторі, якщо ця система лінійно-незалежна (кожна скінченна підсистема лін. незал.) і $\forall x \in L$ існує єдине представлення

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

<u>приклад:</u>

ℓ_2

$e_1 (1, 0, 0 \ldots)$

$e_2 (0, 1, 0, \ldots)$

$e_k (0, \ldots 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots)$

$\ldots\ldots$

9.10.2019

Нехай X - довільний ЛНП

Означення:

Множина $X_0 \subset X$ називається підпростором ЛНП X, якщо:

1) X_0 - є лінійним простором.

2) X_0 - замкнена множина

!

Передгільбертові і Гільбертові простори.

Нехай X лінійний простір над полем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

Означення:

Відображення яке $\forall x, y \in X$ ставить у відповідність число (x, y) причому це число $\in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, так що виконуються аксіоми:

1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

3) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$

4) $(x, y) = (y, x)$, якщо $(x, y) \in \mathbb{R}$

$(x,y) = \overline{(y,x)}$, якщо $(x,y) \in \mathbb{C}$

називається скалярним добутком елементів x та y.

Означення:

Пару $(X, (\cdot,\cdot))$ - називають передгільбертовим простором.

Якщо X - скінченномірний над $\mathbb{R}$ то $(X, (\cdot,\cdot))$ - назив. евклідовим, а якщо над $\mathbb{C}$ то Ермітовим.

Позначимо норму $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$

(поки не стверджуємо що це норма)

Теорема: !

В передгільбертовому просторі має місце нерівність Коші - Буняковського

$\forall x, y \in X: \quad |(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \quad (1)$

Доведення:

1) Нехай X лінійний простір над $\mathbb{R}$, тобто $(x,y) \in \mathbb{R}$.

Розглянемо $(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

$(x,x) - \lambda (x,y) - \lambda (y,x) + \lambda^2 (y,y) \geq 0$

$\lambda^2 (y,y) - 2\lambda (x,y) + (x,x) \geq 0$ (2)

Якщо $y = 0$, то нерівність (1) очевидна.

Нехай $y \neq 0$, тоді (2) кв. тричлен з $(y,y) > 0$ і цей кв. тричлен ≥ 0 $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow D \leq 0$, $D = 4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0$

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)} \sqrt{(y,y)}$$

2) Нехай X ЛП над $\mathbb{C}$, тобто $(x,y) \in \mathbb{C}$.

Позначимо $\arg(x,y) = \varphi$. Розглянемо $\tilde{x} = x e^{-i\varphi}$

Розглянемо $(\tilde{x}, y) = (x e^{-i\varphi}, y) = e^{-i\varphi}(x,y) = e^{-i\varphi} \cdot \rho e^{i\varphi} = \rho \in \mathbb{R}$

Отже, $(\tilde{x}, y) \in \mathbb{R}$

$|(\tilde{x}, y)| \leq \|\tilde{x}\| \cdot \|y\|$ (3)

$|(\tilde{x}, y)| = |e^{-i\varphi} \cdot (x,y)| = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{|e^{-i\varphi}|}\, |(x,y)| = |(x,y)|$

$\|\tilde{x}\| = \sqrt{(\tilde{x}, \tilde{x})} = \sqrt{(e^{-i\varphi}x, e^{-i\varphi}x)} =$

$= \sqrt{e^{-i\varphi} e^{i\varphi}(x,x)} = \sqrt{(x,x)}$ - підставляємо в (3) і отримаємо нерівність К-Б. ■

Зауваження:

З доведення нерівності К.-Б. $\Rightarrow$ що "=" в (2) буде тоді і тільки тоді коли $x = \lambda y$ (елементи x і y лін. зал.)

<u>Наслідки з аксіом скалярного добутку</u>:

1) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$

$(x, y_1 + y_2) = \overline{(y_1 + y_2, x)} =$

$= \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2)$

2) $(x, 0) = 0$

3) $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$

$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha (y, x)} = \bar{\alpha}\overline{(y, x)} =$

$= \bar{\alpha}(x, y).$

!

Зауваження:

Нехай X - дійсний передгільбертів простір, розглянемо нерівність К.-Б. для $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$-\|x\| \cdot \|y\| \leq (x,y) \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$-1 \leq \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Тоді буде існувати $\exists \alpha : \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos(\alpha)$

тоді α - це кут між елементами ~~(x,y)~~ x та y.

Зазначимо, що в ~~##~~ просторі над $\mathbb{C}$ не кажуть про кут, тому, що (x,y) - комплексне число. ~~про кут не кажуть~~

Маємо $(x,y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\alpha$

Означення:

x і y - називаються ортогональними, якщо $(x,y) = 0$

(це означення для $\mathbb{R}$ і для $\mathbb{C}$).