Поняття про інтеграл.

Перший інтеграл нормальної системи диференціальних рівнянь.

Ω - область в $\mathbb{R}^{n+1}$ $(t, x_1, \ldots x_n)$

Розглянемо нормальну систему д.р.

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots x_n) \end{cases} \quad (1)$$

$x_1 = x_1(t)$, $x_n = x_n(t)$

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ - область

єдиності системи, тобто для $\forall$ початк. даних $\forall (t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \Omega$ задачі Коші для системи (1) має єдиний розв'язок $(x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$ визначений в деякому околі точки $t = t_0$

$x_1(t_0) = x_{10}$, $x_n(t_0) = x_{n0}$

Нагадаємо <u>означення</u> загального розв'язку сис-ми (1):
Система функцій:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, \dots C_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, \dots C_n) \end{cases} \quad (2)$$

називається <u>загальним розв'язком</u> системи (1) в області $\overline{U} \subset \Omega$, якщо:

1) $\forall (t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) \in \overline{U}$, система

$$\begin{cases} x_{10} = \varphi_1(t_0, C_1, \dots C_n) \\ \vdots \\ x_{n0} = \varphi_n(t_0, C_1, \dots C_n) \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $(C_{10}, C_{20}, \dots C_{n0})$

2) $$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_{10}, \dots C_{n0}) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t, C_{10}, \dots C_{n0}) \end{cases}$$

Ця система є розв'язком (1).

Іншими словами (2) є загальним розв'язком системи (1), якщо довільний розв'язок системи (1) записується у вигляді (2) при певних значеннях сталих.

Отже, якщо (2) є загальним розв'язком

(1), то $\forall (t, x_1, \dots x_n) \in \bar{U}$ система (2) має єдиний розв'язок

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1 (t, x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ C_n = \psi_n (t, x_1, \dots x_n) \end{cases} \quad (3)$$

Відмітимо, що всі $\psi_k \in C^1(\bar{U})$ (бо $\varphi_k \in C^1$) і всі ψ_k будуть тотожно дорівнювати константам при підстановці в (3) замість $x_1, \dots, x_n$ довільного розв'язку $x_1(t), \dots, x_n(t)$ системи (1).

$y = 2x + C$ (2)

$C = y - 2x$ (3)

на прикладі маємо:

$y = 2x + C$

$C = y - 2x$

$y - 2x = \left| y = 2x + 5 \right| = 2x + 5 - 2x = 5 = C$

Якщо $x = 2t + C$ (2), тоді $C = x - 2t$ (3)

Нехай $x = 2t + 7$ – деякий розв'язок.

Підставимо його в (3) $\Rightarrow$ $x - 2t = 2t + 7 - 2t \equiv 7$ – const.

Означення:

Відмінна від тотожної сталої функція $\psi(t, x_1, \dots x_n)$ називається <u>інтегралом</u> системи (1), якщо вона перетворюється на тотожну сталу на будь-якому розв'язку системи (1).

$\psi(t, x_1(t), \ldots x_n(t)) \equiv Const$

$\forall$ розвязку $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ системи (1)

Означення:

Рівність $\psi(t, x_1, \ldots x_n) = C$,

де функція ψ - інтеграл (1), називається першим інтегралом системи (1).

Означення:

Неперервні функції $\psi_1(t, x_1, \ldots x_n) \ldots$

$\ldots \psi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(k \le n)$ називаються

функціонально залежними в області Ω,

якщо існує неперервна (відмінна від сталої) функція k-змінних в Ω, ~~якщо~~ $(\exists \varphi(\xi_1, \ldots \xi_k) \not\equiv const)$,

така, що $\varphi(\psi_1(t, x_1, \ldots x_n), \ldots, \psi_n(t, x_1, \ldots x_n)) \equiv 0$

$\forall (t, x_1, \ldots x_n) \in \Omega$

В іншому випадку $\psi_1 \ldots \psi_k$

функціонально незалежні.

Для незалежності непер. дифф. функцій $\psi_1, \ldots \psi_k$ необхідно і достатньо

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial t} & \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} = k$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

або щоб вектори-градієнти були лінійно незалежними. У випадку $k=n$ умова $\operatorname{rang}[\ ]=k \Leftrightarrow \det[A]\neq 0$.

Теорема: Для системи (1) існує не більше ніж n функціонально незалежних інтегралів. !

Означення:

Система з n незалежних перших інтегралів системи (1), тобто система (3) в якій ψ_1 і... ψ_n - незалежні інтеграли, називається загальним інтегралом системи (1).

Отже, в припущенні непер. диф. правих частин $f_1, \ldots f_n$ системи (1), загальний розв'язок і загальний інтеграл еквівалентні. !

Системи ДР у симетричній формі

Означення: Система вигляду

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1 \dots x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \dots x_n)} \quad (4)$$

називається системою д.р. в <u>симетричній формі</u>. Тут змінні $x_1, \dots x_n$ – <u>рівноправні</u>. Тут $n-1$ рівнянь (наприклад, x_1 – незал. зм., тоді $x_2(x_1) \dots x_n(x_1)$ – невідомі функції).

Розглядаємо (4) в області $G \subset \mathbb{R}^n$, припускаємо, що f_k – непер. диференційовні і одночасно <u>не</u> дорівнюють нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_1, \dots x_n) \neq 0 \quad \forall (x_1, \dots x_n) \in G$$

Нехай $f_1 \neq 0$ в т. $(x_{10}, \dots, x_{n0})$, тоді $f_1 \neq 0$ в околі цієї точки.

Тоді систему (4) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1} \\ \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{f_3}{f_1} \quad (5) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{f_n}{f_1} \end{cases}$$

тобто перепишемо її в нормальну форму (в околі точки $(x_{10}, \dots, x_{n0})$).

Відмітимо, що кожна нормальна система, це окремий випадок системи в симетричній формі. Дійсно:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1 \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{dx_1}{f_1} \\ \vdots \\ dt = \frac{dx_n}{f_n} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1}{f_1} = \dots = \frac{dx_n}{f_n}.$$

Означ: Розв'язком системи (4) називається розв'язок системи (5), до якої зводиться система (4).

Для системи (4) буде не більше ніж $n-1$ незалежний перший інтеграл (оскільки це правильно для системи (5)). Для розв'язування системи (4) потрібно знайти $(n-1)$ незалежний перший інтеграл. Для цього використовують інтегровні комбінації:

$$\frac{dx_i}{f_j(x_1, \dots x_n)} = \frac{dx_k}{f_k(x_1, \dots x_n)} \quad \left(\text{приклад: } \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y}\right),$$

!

а також намагаються їх створити

використовуючи наступну вл. пропорції:

$$\alpha = \frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow (\forall \lambda_1, \dots \lambda_n) : ? \to$$

} довести

$$\to \frac{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n} = \alpha.$$

$$\boxed{\alpha b_1 = a_1 \Rightarrow \frac{a_1}{\alpha b_1} = 1 \quad \dots \quad \frac{a_n}{\alpha b_n} = 1}$$

Доведення:

$$\frac{a_k}{b_k} = \alpha$$

$$\frac{\lambda_k a_k}{\lambda_k b_k} = \alpha$$

$$\lambda_k a_k = \alpha \lambda_k b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$$

Складемо лінійну комбінацію

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}{\alpha(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)} = 1 / \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n} = \alpha.$$

Приклад: $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$

Розв'язання:

1) $$\frac{dx}{y-z} = \frac{dx + dy + dz}{(y-z) + (z-x) + (x-y)}$$

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{d(x+y+z)}{0} \Rightarrow d(x+y+z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x + y + z = C_1$$

один перший інтеграл

2) $$\frac{dx}{y-z} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{\frac{1}{2} d(x^2+y^2+z^2)}{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

це один перший інтеграл

Відповідь:

$$\begin{cases} x+y+z=C_1 \\ x^2+y^2+z^2=C_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}=2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ інтеграли функціонально незалежні.

Приклад: $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{1}$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1} \Rightarrow dx=dy \Rightarrow x=y+C_1$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dz}{1} \Rightarrow x=z+C_2$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x-y=C_1 \\ x-z=C_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=2 \Rightarrow$$ функц. незалежні.