Неперервні відображення компактів

Нехай є (X_1, ρ_1); (X_2, ρ_2); $f: X_1 \to X_2$.

Точка $a \in X_2$ є границею відображення $f(x)$ при $x \to x_0$ в X_1 якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$ $\forall x \in X_1$ $\rho_1(x, x_0) < \delta$: $\rho_2(f(x), a) < \varepsilon$.

f називається неперервним в точці x_0 (гранична точка) якщо $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$.

Якщо x_0 - ізольована точка множини X, то за озн. вважають відображення в x_0 неперервне

Нехай $f: X_1 \to X_2$; відображення f називається неперервне на множині $A \subset X_1$, якщо воно непер. в кожній точці множини A.

Приклад:

Нехай (X, ρ) - м.п., $x_0 \in X$ фікс. точка. Розглянемо відображення

$f: \forall x \in X \to \rho(x, x_0) \in R_1$ $f: X \to [0; +\infty)$,

[f - відстань від довільної точки x до фіксованої точки x_0)

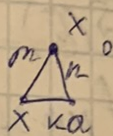
$f(x) = \rho(x_0, x)$.

Довести, що f неперервна на X.

Доведення:

Нехай $a \in X$. Треба довести, що $x \to a$ $(\rho(x, a) < \delta)$ то $f(x) \to f(a)$

$\Rightarrow (|\underbrace{\rho(x, x_0)}_{f(x)} - \underbrace{\rho(a, x_0)}_{f(a)}| < \varepsilon)$



$|m - n| < k$

$m < k + n$

$|\rho(x, x_0) - \rho(a, x_0)| \le \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \varepsilon = \delta$ ■

Означення:

Образом множини A при відображенні f, називається множина Y, $Y = \{y \in X_2 \; \exists x \in A : f(x) = y\}$.

Приклад:

$A = [0, 2]$

f – неперервна функція. Чи може $f(A) = [1, 3)$ – такого бути не може,

$\cancel{f(x) = \varnothing}$

бо множина $[1, 3)$ не містить найбільшого елемента.

Теорема:

Нехай (X, ρ) - компактний метричний простір. Відображення $f: X \to Y$ є неперервним. Тоді образ $f(X) \subset Y$ є компакт!

(неперервний образ компакту є компакт)

Приклад:

f задана $[0,1] := A$, f - непер.

чи може 1) $f(A) = [1, +\infty)$? - ні, не компакт.

2) $f(A) = (3;5)$ - ні, не компакт.

3) $f(A) = [1;2] \cup [3;4]$ - ні, 2 т. Больцано-Коші.

Узагальнена теорема Вейєрштрасса

Нехай (X, ρ) - компактний метричний простір, f - непер. відображення на X і $f: X \to \mathbb{R}$.

Тоді: 1) $\exists K > 0 \ \forall x \in X : |f(x)| \le K$.

2) $\exists x_0, x_1 \in X$, що $\sup\limits_{x \in X} \{f(x)\} = f(x_0)$

$\inf\limits_{x \in X} \{f(x)\} = f(x_1)$

Доведення: 1) Непер. образ компакту це компакт $\Rightarrow |f(x)| \leq k$.

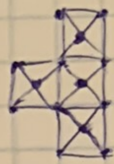
2) Компакт множина замкнена, отже (позначимо $\{f(x) : x \in X\} = B$) $\sup B \in B$, і $\inf B \in B$ це означає що $\exists\, x_0, x_1$, що виконуються ті рівності.

28.09.2019.

Лінійні простори

Означення: Два лінійних простори L_1 і L_2 називаються ізоморфними, якщо між ними існує взаємнооднозначна відповідність, яка узгоджена з операціями:

$$\begin{matrix} x \in L_1 \to x^* \in L_2 \\ y \in L_1 \to y^* \in L_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y \to x^*+y^* \\ \alpha x \to \alpha x^* \end{matrix}$$



Означення:

Лінійний простір називається **n-мірним**, якщо в ньому існує система n лінійно-незалежних елементів, а будь-яка система з $n+1$ елемента є лінійно залежною.

Означення:

Лінійний простір називається **нескінченно мірним**, якщо $\forall n \in N$ існує система з n лінійно-незалежних елементів.

Означення (підпростору):

Непорожня множина $L_1 \subset L$ називається підпростором лінійного простору L, якщо сама множина L_1 є лінійним простором.

Приклад: $L = \mathbb{R}^2$

$L_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\}$ - є лін. підпрост.

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x + 1\}$ - не лін. простір так як не існує нульового елемента.

Означення (фактор простору):

Нехай L - лінійний простір, L_1 - підпростір. Скажемо, що $x \sim y$ $(x, y \in L)$, якщо різниця $x - y \in L_1$. Таке відношення є відношенням еквівалентності і розбиває лінійний простір на класи еквівалентних елементів. Множину таких класів називають фактор простором простору L по підпростору L_1, позначають L/L_1.

ЛНП (лінійні нормовані простори)

Нехай є лінійний простір E, відображення $x \in E \to \|x\| \in \mathbb{R}_+$ називається <u>нормою</u>, якщо:

1) $\forall x \in E: \|x\| \geq 0$ і $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$
2) $\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3) $\forall x, y \in E: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

<u>Означення:</u>

Лінійний простір з визначеною на ньому нормою, називають ~~нор~~ лінійним <u>нормованим</u> простором $(E, \|\cdot\|)$

<u>Лема</u>:

Норма $\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

Доведення: $\|x\| \geq \|y\|$

$$\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

$$\|x-y\| + \|y\| \geq \|x\|$$

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \blacksquare$$

Лема:

Кожний нормований простір є метричним з метрикою $\rho(x,y) = \|x-y\|$

Наслідок:

У нормованому просторі мають місце всі поняття і твердження, що вводили для метричного простору, зокрема: обмежена множина, фунд. посл., збіжна посл., повнота простору, сепарабельність прост., відкриті і замкнені; компактні множини.

Властивості норми:

1) $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$

$0 \le \big| \|x_n\| - \|x\| \big| \le \|x_n - x\| =$

$= \left\{ \underbrace{\rho(x_n, x)}_{\to 0} = \|x_n - x\| \right/ = \underbrace{\rho(x_n, x)}_{\to 0}$

$0 \subset E: x_n \to x$

Навпаки не правильно: $x_n = (-1)^n$ розб.

$\|x_n\| = |(-1)^n| = 1 \to 1$

2) $x_n \to x$, $y_n \to y$ то $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$

3) x_n – обмежена, а α_n – неск. мала, то $\alpha_n x_n \to \Theta$

4) Якщо $x_n \to \Theta$, α_n – обм. $\alpha_n x_n \to \Theta$

Оскільки нормований простір є !! метричний, то будь-який нормований простір можна поповнити.

Означення:

Повний відносно норми лінійний нормований простір називається !! банаховим.

Приклади важливих норм. просторів:

1) l_p $1 \le p < \infty$ – цей простір банаховий, і він є сепарабельним

$x(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Покажемо сепарабельність l_p

$x \in l_p \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$

Нехай задамо $\varepsilon > 0$ Тоді $\exists N: \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}$

$x(x_1, \dots x_N, x_{N+1}, \dots)$

$r(r_1, \dots r_N, 0, 0, \dots) \in l_p$

$r_1, \dots r_N$ - раціональні числа

вибрані так, що $\sum_{k=1}^{N} |x_k - r_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}$

$\rho(x, r) = \|x - r\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - r_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$

$= \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - r_k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} := \varepsilon_1$

Множина елементів $r(r_1, \dots r_N, 0, 0 \dots)$ $\forall N \in \mathbb{N}$ є зчисл.

2) $L_{p[a,b]}$ $1 \le p < +\infty$

$x(t) \in L_{p[a,b]} \Leftrightarrow \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty$

$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$

$L_{p[a,b]}$ - цей простір є банаховим і сепарабельним.

$L_p[a,b]$ - можна отримати з $\tilde{L}_p[a,b]$ поповненням по нормі.

3) $C_{[a,b]}$ - банаховий, повний, сепараб.

$$\|x(t)\| = \max_{t \in [a,b]} \{|x(t)|\}$$

Означення:

Два лінійних нормованих простори називають ізоморфними, якщо існує взаємнооднозначне відображення

$I: E_1 \leftrightarrow E_2$, яке:

1) Узгоджене з операціями

$\forall x, y \in E_1 \quad \forall \alpha, \beta$

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{I x}_{E_2} + \beta \underbrace{I y}_{E_2}$$

2) I - непер, I^{-1} - непер.

Сепарабельність l_p

Розглянемо множини послідовностей

$A_1 = \{(r_1; 0; 0; \dots)\}$, де $r_1 \in Q$

$A_2 = \{(r_1; r_2; 0; 0 \dots)\}$, де $r_1, r_2 \in Q$

\- - - - - - - -

$A_N = \{(r_1, \dots, r_N, 0; 0 \dots)\}$, де $r_1, \dots r_N \in Q$

\- - - - - - - - - - -

кожна A_k - зчисленна $\Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ - зчисленна.

Покажемо, що $\forall x(x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_p$

$\exists r(r_1, \dots, r_s, 0, 0, \dots) \in l_p : \rho_p(x, r) < \varepsilon.$

Оскільки $x \in l_p$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}$

Далі раціональні числа $r_1, \dots, r_N$ вибираємо так, щоб $|x_i - r_i|^p < \frac{\varepsilon}{2N}$. Таким чином маємо

$$\rho_p(x, r) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - r_i|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{1/p} =$$

$= \varepsilon^{1/p} = \varepsilon_1$. [Ми наблизили елемент $x(x_1, \dots, x_n, \dots)$ елементом $r(r_1, \dots, r_N, 0, 0, 0, \dots)$].