Лінійні диф. рівняння другого порядку з довільними коефіцієнтами.
Крайові задачі

Поняття про самоспряжений диференціальний вираз

Нехай D деяка множина функцій на $[a;b]$

$\forall u, v \in D: (u, v) = \int_a^b u(x) v(x) dx$

Нехай L - деякий оператор визначений на D

Означення: Оператор L називається самоспряженим, якщо $\forall u, v \in D$ виконується $(Lu, v) = (u, Lv)$

Розглянемо диф. оператор

$$L := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x) \quad (1)$$

тут $p(x)$ - неперервно диф. на інтервалі (a, b) і $p(x) \neq 0$ на $[a, b]$, $q(x)$ - неперервна функція.

$$Lu(x) = (p(x) \cdot u'(x))' - q(x) \cdot u(x)$$

Покажемо, що диф. оператор (1) буде самоспряженим на множині двічі неперервно диф. функцій які задовольняють такі умови:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

Це так звані стандартні однорідні крайові умови.

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

$$\int_a^b ((pu')' - qu) v \, dx = \int_a^b u((pv')' - qv) \, dx$$

$$\int_a^b (pu')' v \, dx = \int_a^b (pv')' u \, dx$$

$$(*)\ pu'v \Big|_a^b - \int_a^b pu'v' \, dx = pv'u \Big|_a^b - \int_a^b pu'v' \, dx$$

$$u'v \Big|_a^b = v'u \Big|_a^b$$

$$u'(b)v(b) - u'(a)v(a) = u(b)v'(b) - u(a)v'(a)$$

Відомо, що $\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) = -\alpha_2 u'(a) \\ \alpha_2 v'(a) = -\alpha_1 v(a) \end{cases}$$

$u(a)v'(a) = u'(a)v(a)$ і аналогічно для точки b. Рівність доведена.

Неха u і v - довільні двічі непер. дифо. функції з попереднього доведення випливає наступна формула:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = p(u'v - uv')\Big|_a^b =$$

$$= p(x)\begin{vmatrix} v(x) & u(x) \\ v'(x) & u'(x) \end{vmatrix}\Bigg|_a^b$$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = p(x) \cdot W(x)\Big|_a^b$$

Зведення лін. дифо. рівняння другого порядку до самоспреженого виду

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \quad (2)$$

a, b, c - неперервні на $[a, b]$, $a(x) \neq 0$

$$\left[\begin{array}{l} (py')' + qy = f_1(x) \\ py'' + p'y' + qy = f_1(x) \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\mu(x)\,a(x)}_{p}y'' + \underbrace{b(x)\mu(x)}_{p'}y' + \mu(x)c(x)y = \underbrace{f(x)\mu(x)}_{f_1}$$

$$\mu(x)b(x) = (\mu(x)a(x))'$$

$$\mu b = a\mu' + a'\mu; \quad \mu(b - a') = a\frac{d\mu}{dx}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{b - a'}{a}$$

$$\ln|\mu| = \int\frac{b - a'}{a}dx; \quad \mu = C \cdot e^{\int\frac{b - a'}{a}dx};$$

Нехай $C = 1$

$$(3)\ \mu(x) = e^{\int \frac{b-a'}{a}dx} = e^{\int \frac{b}{a}dx - \int \frac{a'}{a}dx} =$$

$$= e^{\int \frac{b}{a}dx - \ln|a|} = \frac{e^{\int \frac{b}{a}dx}}{a}$$

$$\underbrace{\left(e^{\int \frac{b}{a}dx} y'\right)'}_{p} + \underbrace{\frac{c}{a} e^{\int \frac{b}{a}dx}}_{q} y = \underbrace{\frac{f}{a} e^{\int \frac{b}{a}dx}}_{F}$$

Крайові задачі для лінійних диф. рівнянь

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$ – дані Коші

Замість умов Коші розглянемо крайові умови

$$(4)\quad \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_1 \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

Задача (2), (4) називається крайовою задачею (двоточковою), але бувають і багатоточкові.

Із загальних крайових умов (4) виділяють окремі випадки

1) Крайові умови Діріхле

$y(a) = \gamma_1$

$y(b) = \gamma_2$

2) Крайові умови II-типу (Неймана):

$y'(a) = \gamma_1$

$y'(b) = \gamma_2$

Загальні крайові умови, це умови третього типу.

Крайова задача може мати один, безліч або жодного розв'язку в залежності від $(f(x), \gamma_1, \gamma_2)$

$y'' + y = 0 \Rightarrow y_{з.о} = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$

$y(0) = 0 \qquad y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y(a) = y_0 \qquad y = C_1 \sin(x) \Rightarrow C_1 \sin(a) = y_0$

Випадки: $a = \pi n$

$C_1 \cdot 0 = y_0 = 0$

$C_1 \cdot 0 = 0$

$C_1 \in \mathbb{R}$

$y = C_1 \sin(x)$

безліч розв'язків

$C_1 \cdot 0 = y_0 \neq 0$

$0 = y_0 \neq 0$

Розв'язків нема

$a \neq \pi n$

$\sin(a) \neq 0$

$C_1 = \frac{y_0}{\sin(a)}$

$y = \frac{y_0}{\sin(a)} \cdot \sin(x)$

Функціє Гріна

$$Ly := a(x)y'' + b(x)y' + C(x) = f(x) \quad (1)$$

$$B_1 y := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$

$$B_2 y = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \quad (2)$$

$x \in [a;b]$

Задачу (1)(2) заміною змінних можна завжди звести до задачі з нульовими крайовими умовами:

$y(x) = u(x) + V(x)$, тут $u(x)$ - нова невідома

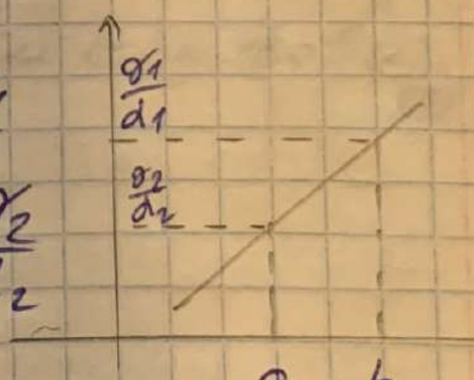
$V(x)$ - двічі неперервно дифф. на $[a,b]$ функція, що задовольняє кр. умови (2): $B_1 V = \gamma_1$

$B_2 V = \gamma_2$

Наприклад, якщо крайові умови першого типу:

$\alpha_1 V(a) = \gamma_1$ $\qquad V(a) = \dfrac{\gamma_1}{\alpha_1}$

$\alpha_2 V(b) = \gamma_2$ $\qquad V(b) = \dfrac{\gamma_2}{\alpha_2}$



Підстановкою $y = u + v$ задача (1)-(2) зводиться до $L(u+v) = f$;

$$L u + \underbrace{L v}_{f_1} = f$$

$$L u = \underbrace{f - f_1}_{f_2}$$

$$B_1 y = B_1(u+v) = B_1 u + \underset{\underset{\gamma_1}{\shortparallel}}{B_1 v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 u = 0$$

$$B_2 y = B_2(u+v) = B_2 u + \underset{\underset{\gamma_2}{\shortparallel}}{B_2 v} \Rightarrow B_2 v = 0$$

$$L u = f_2 \quad (3)$$

$$B_1 u = 0$$

$$B_2 u = 0 \quad (4)$$

Теорема:

Якщо однорідна крайова задача $Lu = 0$, $B_1 u = 0$, $B_2 u = 0$ має лише нульовий розв'язок, то задача (3)-(4) ($Lu = f_2$, $B_1 u = 0$, $B_2 u = 0$) має не більше одного розв'язку.

Доведення:

Припустимо, що u_1 і u_2 - розв'язки (3)-(4). Розглядаємо функцію $u_1 - u_2$, підставляємо в рівняння і крайові умови

$L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = f_2 - f_2 = 0$

$B_1(u_1 - u_2) = B_1 u_1 - B_1 u_2 = = 0 - 0 = 0$

$B_2(u_1 - u_2) = B_2 u_1 - B_2 u_2 = 0 - 0 = 0$

Отже $u_1 - u_2$ - розв'язок однорідної задачі, за припущенням він є нульовим ■

Функція Гріна

$Lu = f_2$ (3)

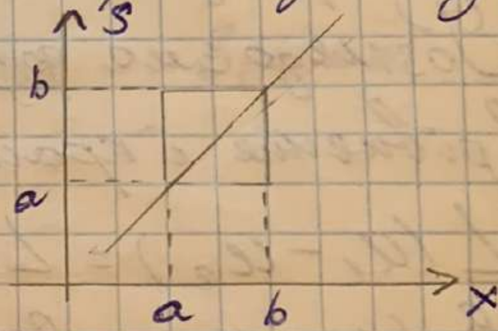
$B_1 u = 0$ (4)

$B_2 u = 0$

Означення:

Функцію $G(x,s)$ двох змінних x та s яка задовольняє наступні умови:

1) Визначена і неперервна в прямокутнику $[a;b]\times[a;b]$



2) Для кожного фіксованого $S = const$, $G(x) = G(x, const)$

Є розв'язком однорідного рівняння $Lu = 0$ при всіх $x \neq S = const$

3) при $x = a$ і $x = b$ функція $G(x,s)$

$B_1 G(a,s) = 0;$ $B_2 G(b,s) = 0.$

4) При $x = s$, функція $G(x,s)$ є неперервною по x, а її похідна по x має розрив першого роду зі

стрибком $\frac{1}{a(s)}$

$$\lim_{x \to s-} G(x,s) = \lim_{x \to s+} G(x,s);$$

$$\lim_{x \to s+} G'_x - \lim_{x \to s-} G'_x = \frac{1}{a(s)}.$$

називається функцією Гріна задачі (3)-(4).

Теорема:

Нехай однорідна задача має лише нульовий розв'язок, тоді задача (3)-(4) має єдиний розв'язок, який можна подати у вигляді:

$$u(x) = \int_a^b G(x,s) \cdot f(s)\, ds$$

тут $G(x,s)$ - функція Гріна задачі (3)-(4) і вона має вигляд:

$$G(x,s) = \begin{cases} u_1(x) \cdot \varphi(s), & a \le x \le s \le b \\ u_2(x) \cdot \psi(s) & a \le s \le x \le b \end{cases} \quad (5)$$

$u_1(x)$ - ненульовий розв'язок однорідної задачі $Lu_1 = 0$ $B_1 u_1 = 0$

$u_2(x)$ - ненульовий розв'язок $L_2 u_2 = 0$ $B_2 u_2 = 0$

А функції $\varphi(s)$ та $\psi(s)$ підбираються таким чином, щоб виконувалась умова (4) з означення функції Гріна

$$u_1(s)\varphi(s) = u_2(s)\psi(s)$$

$$u_2'(s)\psi(s) - u_1'(s)\varphi(s) = \frac{1}{a(s)}$$

Доведення:

$\underline{\overline{I}}$) Існування функцій $u_1(x)$ і $u_2(x)$

Розглянемо задачу Коші

$Lu_1 = 0$

$\alpha_1 u_1(a) + \beta_1 u_1'(a) = 0$

$$\begin{cases} Lu_1 = 0 \\ u_1(a) = -\beta_1 \leftarrow \text{одночасно} \neq 0 \Rightarrow \\ u_1(a) = \alpha_1 \swarrow \quad \Rightarrow \exists \text{ нетривіальний р-к } u_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lu_2 = 0 \\ u_2(b) = -\beta_2 \\ u_2'(b) = \alpha_2 \end{cases}$$

Для визначення функції φ і ψ використаємо умову (4) з означення функції Гріна

$$\begin{cases} u_2(s)\psi(s) - u_1(s)\varphi(s) = 0 \\ u_2'(s)\psi(s) - u_1'\varphi(s) = \frac{1}{a(s)} \end{cases} \quad (6)$$

Покажимо, що це система матиме єдиний розв'язок

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} u_2(s) & -u_1(s) \\ u_2'(s) & -u_1'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{vmatrix} =$$

$= W(u_1, u_2) \neq 0$, для цього покажемо що u_1 і u_2 лін. незалежні.

Припустимо: $u_2 = ku_1$, тоді маємо $Lu_2 = 0$, і до того ж $B_1 u_2 = B_1(ku_1) = k\underbrace{B_1 u_1}_{0} = 0$

$B_2 u_2 = 0$

Маємо $\left.\begin{matrix} Lu_2 = 0 \\ B_1 u_2 = 0 \\ B_2 u_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_2 \equiv 0$ - суперечність, бо u_2 не нульова функ.

І тепер безпосередньою перевіркою встановлюємо, що функція $u(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds$ є розв'язком задачі (3)-(4)

Алгоритм:

1) $Lu_1 = 0 \Rightarrow u_1 \neq 0$

$B_1 u_1 = 0$

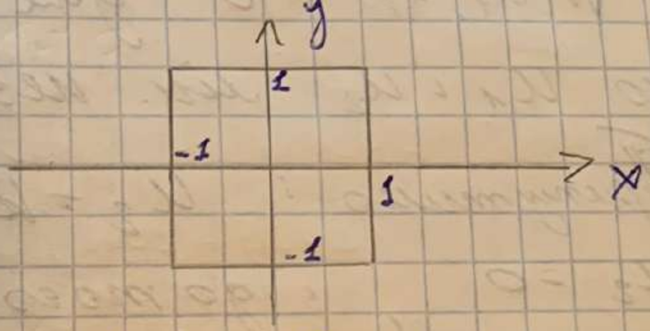
$L u_2 = 0$

$B_2 u_2 = 0 \Rightarrow u_2 \neq 0$

2) Визначаємо $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ з системи (6)

Приклад:

$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(-1) = y(1) = 0 \end{cases}$$



1) $y'' = 0$ $\qquad y = C_1 x + C_2$

$y(-1) = 0$ $\qquad y = x + 1 := u_1$

2) $y'' = 0$ $\qquad y = x - 1 := u_2$

$y(1) = 0$

$$G(x,s) = \begin{cases} (x+1)\varphi(s) & -1 \le x \le s \le 1 \\ (x-1)\psi(s) & -1 \le s \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-1)\psi(s) - (s+1)\varphi(s) = 0 \\ \psi(s) - \varphi(s) = 1 \end{cases}$$

$\psi(s) = 1 + \varphi(s)$

$a(s)$ – коеф при y''

$$(s-1)(1+\varphi(s)) - (s+1)\varphi(s) = 0$$

$$s + \cancel{s\varphi(s)} - 1 - \varphi(s) - \cancel{s\varphi(s)} - \varphi(s) = 0$$

$$s - 1 - 2\varphi(s) = 0$$

$$-2\varphi(s) = 1 - s$$

$$\begin{cases} \varphi(s) = \dfrac{s-1}{2} \\ \psi(s) = 1 + \dfrac{s-1}{2} = \dfrac{s+1}{2} \end{cases}$$

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(s-1)}{2}, & -1 \le x \le s \le 1 \\ \dfrac{(x-1)(s+1)}{2}, & -1 \le s \le x \le 1 \end{cases}$$

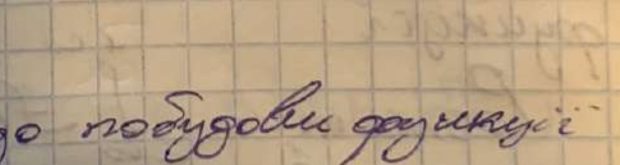
$$y(x) = \int_a^b G(x,s)\cdot f(s)\,ds =$$

$$= \int_{-1}^{x} \frac{(x-1)(s+1)}{2} f(s)\,ds + \int_x^1 \frac{x+1}{2}(s-1) f(s)\,ds.$$

Інший підхід до побудови функції Гріна.

δ - функція Дірака

$n > 1$



$l = \frac{2}{n}$

$\rho = \frac{n}{2}$