21.09.

Компактні множини

Нехай X - довільна множина, T - множина індексів.

Означення:

Сім'я множин $\{O_\alpha\}$, де $\alpha \in T$ називається покриттям множини X, якщо $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in T} O_\alpha$.

Означення:

Покриття називається відкритим, якщо всі $\{O_\alpha\}$ відкриті.

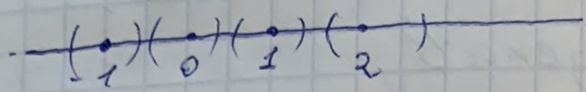
Нехай $T' \subset T$, якщо $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in T'} O_\alpha$, то $\{O_\alpha : \alpha \in T'\}$ називаються підпокриттям множини X.

Покриття називається зліченним, якщо множина індексів зліченна.

Приклад: $X = \mathbb{R}_+$, $T = \mathbb{N}$, $O_n = [n, n+1)$ то $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ буде ~~зчис~~ зліченне покриття множини $\mathbb{R}_{+1} = \{x \geq 1, x \in \mathbb{R}\}$; якщо $\{O_n : n \in \mathbb{Z}\}$ - то покриття $\mathbb{R}$.

Приклад:

$$T = \mathbb{Z}, \quad O_n = \left(n - \frac{1}{3}; n + \frac{1}{3}\right), \; n \in \mathbb{Z}$$

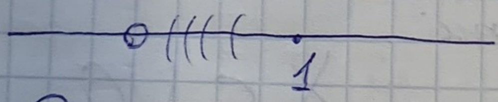


$\{O_n\}$ - це відкрите покриття множини $\mathbb{Z}$ (цілих чисел).

В покритті множини можуть перетинатися.

П: $X = (0, 1]$ $\quad T = \mathbb{N}$.

$$O_n = \left(\frac{1}{n}; 1\right]$$



Означення:

Множина X називається компактною якщо з будь-якого її відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття.

Приклад:

1) Будь-яка скінченна множина є компактом $X = \{x_1, \dots x_n\}$

Доведення:

Нехай $\{O_\alpha : \alpha \in T\}$ довільне відкрите покриття X, тоді $\forall k = 1, \dots n$, $\exists \alpha_k \in T : x_k \in O_{\alpha_k} \Rightarrow \{O_{\alpha_k} : k = \overline{1,n}\}$ – є покриттям всього X ■

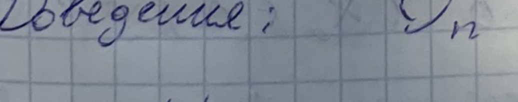
2) Множина $\mathbb{Z}$ не є компактом.

Доведення:

Розглянемо покриття $O_n = (n - \frac{1}{3}; n + \frac{1}{3})$, $n \in \mathbb{Z}$. Від супротивного, припустимо, що існує $\{O_{n_k} : n_k$ - скінченна множина,$\}$ тоді $\exists n \notin \cup \{n_k\}$. Тоді точка $x = n$ не покрита, тому що $O_i \cap O_j = \emptyset$ ■

3) $X = (0, 1)$ – не компакт

Доведення: $O_n = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$



, Якщо припустити, що $\{O_{n_k} : n_k$ - скінченне$\}$, тоді $\bar{n} = \max\{n_k\}$, $O_{n_k} \subset (\frac{1}{\bar{n}}, 1 - \frac{1}{\bar{n}})$, тоді

$\frac{1}{\bar{n}+1}$

Властивості компактних множин.

1) Компактна множина замкнена.

2) Компактна множина обмежена.

3) Замкнена підмножина компактної множини є компактною.

Секвенціальна компактність

Нехай (X, ρ) – метричний простір, множина X - називається секвенціально компактною, якщо з довільної послідовності $\{X_n\} \subset X$ можна виділити збіжну підпослідовність $\{X_{n_k}\} \to x_0 \in X$.

Приклад: 1) $X = [a, b]$

$\forall \{X_n\} \subset [a, b] \Rightarrow$ Б.-В. маємо $\{X_{n_k}\} \to 0$, $a \leq x_0 \leq b$ $(x_0 \in X) \Rightarrow$

$\Rightarrow [a, b]$ – секвенціально компактна множина.

2) $X = (a, b)$ - не сек. комп.

$\{X_n\} = \{a + \frac{1}{n}\} \to a \notin X = (a, b)$

В метричному просторі секвенціально-компактна множина обмежена і замкнена.

Не кожна замкнена і обмежена множина в метричному просторі є секвенціально компактною.

Приклад: l_2 - простір нескінченних послідовностей. $X(x_1, x_2, \dots)$

$$x \in l_2 \iff \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

Розглянемо в l_2 одиничну сферу $S(0,1)$

0 - центр сфери $O(0,0,0,0,0..)$, $R=1$,

це множина обмежена і замкнена.

Розглянемо послідовність $\{a_n\} \subset S(0,1)$

$a_1(1,0,0,\dots 0)$, $a_2(0;1;0;\dots 0)$, $a_3(0,0,1\dots 0)\dots$

$\dots a_n(0,\dots 1)$

Покажемо що з цієї послідовності не можна виділити збіжну підпослідовність.

Припустимо, що $\exists \{a_{n_k}\} \to a_0$,

тоді $\{a_{n_k}\}$ - фундаментальна, отже

$\rho(a_{n_k}, a_{n_m}) < \varepsilon$, для великих n_k, n_m. З іншого боку $a_{n_k} = (0, \ldots 0, \underset{n_k}{1}, 0 \ldots)$

$a_{n_m} = (0, \ldots 0, 0, \ldots 0, \underset{n_m}{1}, 0 \ldots)$

$$\rho(a_{n_k}, a_{n_m}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left(a_{n_k}^{(i)} - a_{n_m}^{(i)}\right)^2} = \sqrt{1^2+1^2} =$$

$= \sqrt{2} > \varepsilon$, отже це множина не є сек. комп.

Критерій компактності

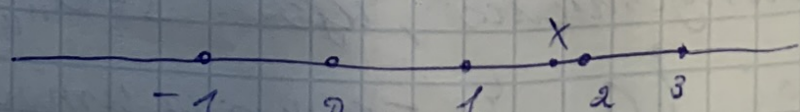
Нехай (X, ρ) - метричний простір і $A \subset X$.

Означення:

Множина C називається ε-сіткою для A, якщо $\forall x \in A$ $\exists y \in C$, що $\rho(x, y) < \varepsilon$.

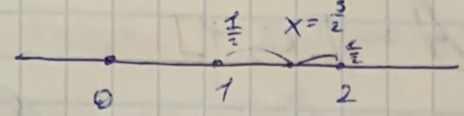
Приклад:

1) Нехай $X = \mathbb{R}$ $\rho = |x - y|$ $C = \mathbb{Z}$, множина $\mathbb{Z}$ буде ε сіткою для $\mathbb{R}$, для $\forall \varepsilon > \frac{1}{2}$ (і не буде сіткою для $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$)



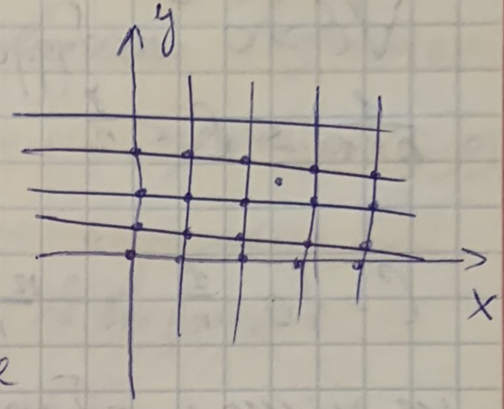
$\varepsilon > \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad |x-n| < \varepsilon$

$\varepsilon > \frac{1}{2}$



2) $X = \mathbb{R}^2 \quad C = \mathbb{Z}^2$

$\varepsilon > \frac{\sqrt{2}}{2}$



З введенням поняття ε-сітки означення сепарабельності можна дати наступним чином:

Метричний простір (X, ρ) називається сепарабельним, якщо існує така зчисленна множина A, яка є ε-сіткою для X для $\forall \varepsilon > 0$.

Множина A називається цілком обмеженою в (X, ρ), якщо $\forall \varepsilon > 0$ для множини A існує скінченна ε-сітка.

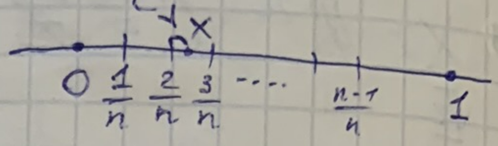
Зауваження:

В скінченновимірному просторі обмежена і цілком обмежена множина попарно еквівалентні.

Приклад: $A = [0;1]$

$\forall \varepsilon > 0$ побудуємо скінченну ε-сітку.

$\frac{1}{n+1} \le \varepsilon < \frac{1}{n}$



$C = \{0, \frac{1}{n}, \dots \frac{n-1}{n}, 1\}$, отже відрізок це цілком обмежена множина.

В нескінченномірному просторі прикладом обмеженої, але не цілком обмеженої ~~такої~~ множини є сфера $S(0,1)$ з простору l_2.

Критерій компактності в $\mathbb{R}^n$

A в $\mathbb{R}^n$ є компакт $\Leftrightarrow$ A - замкнена і обмежена.

Теорема про критерій компактності

Наступні три твердження еквівалентні:

1) Метричний простір (X,ρ) компактний.

2) М.п. (X,ρ) секвенціально компактний.

3) М.п (X,ρ) повний, а X - множина цілком обмежена.

Еквівалентність (1)<=>(2) кр. компактності Кантора, (1)<=>(3) кр. Хаусдорфа.

Множина A називається відносно-компактною в метричному просторі (X,ρ) якщо її замикання є компактним.

Зауваження: В $\mathbb{R}^n$ A-відносно компактна <=> A - обмежена.

(a,b) - відносно комп., $\overline{(a,b)} = [a,b]$

Передкомпактна множина:

Множина A називається передкомпактною в (X,ρ) якщо вона є відносно компактною в поповненні (X_0, ρ_0) простору (X,ρ).

Отже, якщо (X,ρ) повний метричний простір, то відносна компактність <=> передкомпактності.

Критерій відносної компактності (передкомпактності) в просторі $C_{[a,b]}$

Означення: Множина функцій A з простору $C_{[a,b]}$ називається рівномірно обмеженою, якщо існує $\exists C>0 \ \forall x(t) \in A$

$\forall t \in [a,b] \ |x(t)| \le K.$

Означення:

Множина функцій $A \subset C_{[a,b]}$ називається одностайно неперервною, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \forall x(t) \in A \ \forall t_1, t_2 \in [a,b]$ $|t_1 - t_2| < \delta: \ |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$

Теорема Арцела

Множина функцій $A \subset C_{[a,b]}$ є відносно компактною (передкомпактною) тоді і тільки тоді коли A є рівномірно обмеженою і одностайно неперервною.

Доведення:

Необхідність: нехай сімейство Φ передкомпактно в $C_{[a,b]}$. Тоді в попередній теорем $\forall \varepsilon > 0$ в сімействі Φ існує скінченна $\varepsilon/3$-сітка $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. І кожна $|\varphi_i(x)| \le K_i$.

Покладемо $K = \max K_i + \varepsilon/3$

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_x |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi(x)| \le |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \le K_i + \frac{\varepsilon}{3} \le K$$

Розд: 2 Параграф 7 Пункт 4 Колмог. + Фомін

Д/З: довести, + Т. Пеано існування розв'язку для дод. р.