$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - (x, e_k))^2 + \underbrace{(x,x) - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2}_{\text{не залежить від } y}. \quad (*)$$

$= \left| \begin{array}{l} x \text{ - фіксований} \\ e_k \text{ - фіксований}, \\ \text{а } \alpha_k \text{ - змінюються з змінною } y \end{array} \right| \Rightarrow \forall k: \alpha_k = (x, e_k)$

Отже, щоб $(*) \to \min$ треба щоб $\alpha_k = (x, e_k)$.

Лінійні оператори та функціонали.

Нехай X і Y два ЛНП над $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

Означення:

Відображення $A: X \to Y$ називається лінійним оператором, якщо: 1) $\forall x_1, x_2 \in X$ $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $\forall x \in X$ $A(\alpha x) = \alpha A x$.

Зауваження:

Для лін. оператора $A(\overset{\text{нуль простору } X}{\Theta}) = \overset{\text{нуль простору } Y}{\Theta}$.

Доведення: $A(\Theta) = A(\underset{\text{число нуль.}}{0} \cdot x) = 0 \cdot Ax = \Theta$

Означення:

Якщо Y - числ. множина $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, то лін. оператор називають **функціоналом**.

Приклад: $X = C^1_{[a,b]}$ $Y = C_{[a,b]}$

$Ax(t) := x'(t)$ $X \to Y$

$$l\,x(t) = \int_a^b x(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

$l : X \to \mathbb{R}$ - функціонал.

Означення: Лінійний оператор називається неперервним в $x_0 \in X$, якщо $\forall \{x_n\} \to x_0$ в X : $\{Ax_n\} \to Ax_0$ в Y

Оператор A - називається неперервним на всьому просторі X, якщо він неперервний в кожній точці простору.

Означення:

Лін. Оператор A з $X \to Y$ називається обмеженим, якщо $\exists C > 0$ $\forall x \in X$: $\|Ax\|_Y \le C \cdot \|x\|_X$

Тут $\|Ax\|_Y$ - норма елемента Ax в просторі Y.

$\|x\|_X$ - норма елемента x в просторі X.

Властивості лін. оператора: !

1) Якщо лін. оператор неперервний в одній точці, то він неперервний скрізь! (в усіх точках).

Доведення: Нехай A - неперервний в точці x_0, візьмемо $x \neq x_0$.

Нехай довільна послідовність $\{x_n\} \to x$, тоді послідовність $\{x_n - x + x_0\} \to x_0$

З неперервності A в т. x_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow A(x_n - x + x_0) \to Ax_0$ (1). З іншого боку $A(x_n - x + x_0) = Ax_n - Ax + Ax_0$ (2)

З (1) і (2) $\Rightarrow Ax_n - Ax + Ax_0 \to Ax_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Ax_n \to Ax$ $\blacksquare$

~~$f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\varphi = kx$~~

2) Лінійний ~~непер~~ оператор є неперервним тоді і тільки тоді коли він обмежений. !

Доведення:

1) Нехай A - обмежений оператор. Покажемо, що він неперервний,

Для цього достатньо показати, що він неперервний в довільній одній точці.

Розглядаємо точку $x=0$.

Нехай $\{x_n\} \to 0$, тоді $\|x_n\| \to 0$

Розглянемо $0 \le \|Ax_n\| \le C \cdot \|x_n\| \Rightarrow$

$\underset{0}{\Downarrow}$

$\|Ax_n\| \to 0 \Leftrightarrow \{Ax_n\} \to \theta = A(0)$. Отже, A - непер. в точці 0, отже A - непер. скрізь.

<u>Навпаки:</u>

Нехай A - неперервний, методом від супротивного покажемо, що він обмежений.

Припустимо, що A <u>необмежений</u>.

Тоді $\forall n \in N \ \exists x_n \neq 0 : \|Ax_n\| > n \cdot \|x_n\|$; $\big| \|x_n\|$ (поділимо на)

$$\frac{1}{\|x_n\|} \cdot \|Ax_n\| \Big\} \ n < \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \| A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\|. \quad (3)$$

↑ число

Розглянемо послідовність $y_n = \frac{x_n}{n \cdot \|x_n\|} =$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x_n}{\|x_n\|}}_{\text{обмежена}} \to 0$$

A - непер $\Rightarrow Ay_n \to \theta \quad (4)$

(тобто $\|Ay_n\| \to 0$)

Розпишемо $\|Ay_n\| = A\left(\frac{x_n}{n\cdot\|x_n\|}\right) =$

$= \frac{1}{n} A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \geq 1$ – а це протирічче (використали (3)).

$\|Ay_n\| \geq 1$ – протирічче з (4).

<u>Означ:</u> <u>Ядро лін. оператора</u>:

Множина елементів які оператор переводить в нуль елемент називається <u>ядром</u>.

<u>Лема</u>: $\ker A$ – лін. непер. оператора – є <u>підростір</u> в X.

(лінійна замкнена множина) <u>Доведення</u>:

1) Нехай x_1 і $x_2 \in \ker A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \underset{0}{\underset{\|}{A x_1}} + \beta \cdot \underset{0}{\underset{\|}{A x_2}} = 0 \Rightarrow$ ← лінійність

$\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in \ker A$

2) $\{x_n\} \subset \ker A$, $\{x_n\} \to x_0$

A – непер. $\Rightarrow Ax_n \to Ax_0$ ← замкненість

але $Ax_n = 0 \Rightarrow Ax_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 \in \ker A$ ■

!

Норма лінійного неперервного оператора.

Нехай A - лін. непер. оператор $\Leftrightarrow$ A - обмежений: $\exists\, C > 0 : \|A\cancel{x}\|_Y \le C \cdot \|x\|_X$ $\forall x \in X$. Нехай $x \ne 0$, тоді

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \le C$$

Розглянемо множину $\left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, x \ne 0 \right\}$

Множина обмежена зверху, отже існує supremum:

$$\exists \sup_{\substack{x \in X \\ x \ne 0}} \left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

! Число $\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \ne 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|_Y^{*}$

$= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|_Y$ називається нормою лін. оператора

Показуємо $\forall x \in X, x \ne 0$ $\exists x^* : \|x^*\| = 1$ і $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|Ax^*\|$

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \frac{1}{\|x\|_X} \cdot \|Ax\|_Y = \Big\| A \Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|_X}}_{x^* \text{ - такий, що } \|x^*\| = 1} \Big) \Big\|_Y$$

20.11.2019 **Приклади:**

1) $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$x = (x_1, x_2)$ $\quad Ax = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$

$\exists\, C > 0 \quad \|Ax\| \le C \cdot \|x\|$ ← легко довести

$\|\bar{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ ~~або~~ $|y_1| + |y_2|$ ← норми в $\mathbb{R}^2$.

2а) **Приклад необмеженого оператора**

Розглянемо оператор диференціювання в просторі $C_{[a,b]}$

$A: x(t) \in C_{[a,b]} \to x'(t) \in C_{[a,b]}$

A визначений не на всому $C_{[a,b]}$, а лише на частині $C_{[a,b]}$

Покажемо, що цей оператор необмежений

Розглянемо послідовність функцій

$x_n(t) = e^{nt} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$\|A x_n(t)\|_{C_{[a,b]}} = \|x_n'(t)\| = \|n e^{nt}\|_{C_{[a,b]}}$

$= n \cdot \|e^{nt}\|_{C_{[a,b]}} \Rightarrow \not\exists\, C > 0 \quad \|Ax_n(t)\| \le C\|x_n(t)\|$

$\to \infty \qquad \|e^{nt}\|_{C_{[a,b]}} = \|x_n(t)\|$ $\qquad$ не існує

2б) А з іншого боку той самий оператор диференціювання буде обмеженим, як оператор, що діє з простору

$C^1_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$

Покажемо це:

$C^k_{[a,b]}$ – k раз непер. диф функції на $[a,b]$

і норма $C^k_{[a,b]} = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t)|$

$$\|x(t)\|_{C^1_{[a,b]}} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$$

Покажемо, що виконується:

$$\|Ax(t)\|_{C_{[a,b]}} \le C\cdot\|x(t)\|_{C^1_{[a,b]}}.$$

$$\|Ax(t)\|_{C_{[a,b]}} = \max_{t\in[a,b]} |\underbrace{Ax(t)}_{=x'(t)}| = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \le$$

$$\le \max |x(t)| + \max |x'(t)| = \|x(t)\|_{C^1_{[a,b]}}.$$

Сталу беремо $C=1$. Отримали $\max|x'(t)| \le \max|x(t)| + \max|x'(t)|$.

3) Довести, що тотожний оператор $I: C_{[a,b]} \to L_{1[a,b]}$ є обмеженим

$$\|Ix(t)\|_{L_1[a,b]} = \int_a^b |x(t)|\,dt \le$$

$$\le \max|x(t)| \cdot \int_a^b dt = (b-a)\cdot\|x(t)\|_{C[a,b]}.$$

норма $x(t)$ в $C[a,b]$. число C

Простір лінійних неперервних операторів

X і Y – лінійні норм. простори на $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

$L(X,Y)$ – множина лін. непер. операторів $A: X \to Y$

В множині $L(X,Y)$ вводиться структура лінійного простору.

$\forall A,B \in L \quad \forall x \in X \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$

$(\alpha A + \beta B)x := \alpha Ax + \beta Bx$

Отже $L(X,Y)$ – лін. п.

Тмо:

$L(X,Y)$ – з нормою оператора

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \quad \text{є ЛНП}$$