Добуток операторів. Обернений оператор:

Нехай X, Y, Z – ЛНП над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

$A: X \to Y$, $B: Y \to Z$

(область значень $A \subset$ область визн B)

Означення:

Оператор $C = BA$, що діє за правилом $\forall x \in X: Cx = B(Ax)$ називається добутком операторів A і B.

$$X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$$

Теорема:

Якщо A – лін. непер оператор з $X \to Y$, B – — " — з $X \to Z$, тоді $C = BA$ – лін. непер $X \to Z$ і $\|BA\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Ідея дов.:

$$\underbrace{\|B(Ax)\|_Z}_{= Cx} \le \|B\| \cdot \|Ax\|_Y \le$$

$\le \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X$.

Обернений оператор

Нехай є $f: X \to f(x)$ Y

$f(x)$ - множина значень відображення f (позначають $R(f)$)

Якщо f - взаємооднозначне $X \leftrightarrow f(x)$, то можна розглянути обернене відображення $f^{-1}: f(x) \to X$.

Взаємооднозначне $f \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ різним $x \in X$ відповідають різні $f(x) \in f(X)$ (Ін'єктивне відображення).

Нехай A-лін. оператор $X \to Y$ для лінійного оператора $A(0) = 0$. З цього випливає, щоб оператор A був ін'єктивним, необхідно і достатньо щоб $\ker A = \{0\}$.

1) Припустимо, що A - ін'єктивне, і що припустимо, що $\exists\ x \neq 0_x$ таке, що $x \in \ker A$, тоді $\begin{matrix} A0 = 0 \\ Ax = 0 \end{matrix} \Rightarrow$ суперечність з ін'єктивністю.

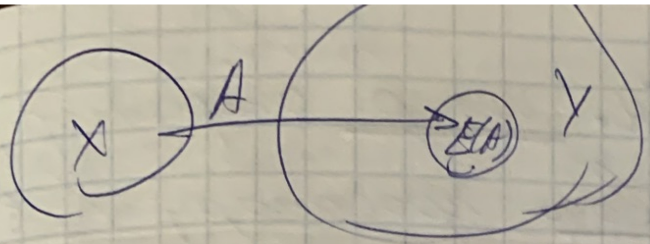
2) Нехай $\ker A = \{0\}$

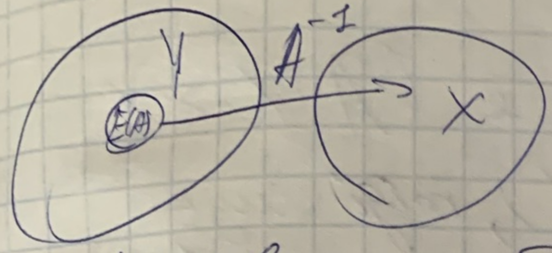
Припустимо, що A - не ін'єктивний, тоді $\exists\ x_1 \neq x_2$ такі, що $Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2) \in \ker A \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Означення: Нехай лін. оператор $A : X \to Y$, $E(A)$ - область значень опер A, $E(A) \subseteq Y$. Нехай $\ker A = \{0\}$. Відображення $A^{-1} : E(A) \to X$ називають алгебраїчно оберненим до оператора A.

Відмітимо, що оператор A може бути неперервним але обернений оператор (якщо існує) не завжди неперервний.

Нехай A має обернений оператор A^{-1}.





Існування оберненого оператора означає, що рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок $\forall y \in E(A)$ $x = A^{-1}y$.

Якщо додатково A^{-1} буде неперервним, то кажуть, що рівняння $Ax = y$ буде корректно розв'язане:

1) $\forall y$ має єдиний розв'язок
2) Розв'язок неперервно залежить від початкових даних y.

$$\underset{\text{розв'язок}}{x} = A^{-1}y.$$

<u>Теорема</u> <u>Банаха</u> (про обернений оператор)

↓

Теорема: Нехай A - лін. <u>непер.</u> оператор, що діє з <u>банахового</u> простору X в <u>банахів</u> простір Y.

! Якщо A біє́кція (A: $X \to Y$ взаємнооднозначна $E(A) = Y$), тоді існує <u>непер.</u> <u>обернений</u> оператор A^{-1}.

<u>Поняття</u> про <u>спектр</u> та <u>резольвенту</u> <u>лінійного</u> <u>неперервного</u> оператора.

Нехай X - банахів простір, A лін. непер. оператор $X \to X$

Розглянемо оператор $A - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (розглядаємо комплексні λ, а не лише дійсні).

В залежності від значення λ оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ може існувати або не існувати, а у випадку існування його область визначення може бути цілою в X ~~(скрізь щільною)~~, або може такою не бути. Ці умови розбіють множину комплексних чисел лямбда ($\lambda \in \mathbb{C}$) на 4-підмножини.

1) $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$

Тоді $(A - \lambda I)^{-1}$ не існує, а рівняння $(A - \lambda I)x = 0$ має ненульові розв'язки; множина чисел λ ~~так~~ називаються **власними значеннями**. Їх множина називається **точковим спектром** оператора A. ($\sigma_{Т}(A)$ — позначення.

2) $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$

$(A - \lambda I)^{-1}$ існує, його область визначення не співпадає з X, але щільна в X. [$(A - \lambda I)^{-1}$ – необм.]

Такі λ утворюють **неперервний спектр** ($\sigma_{Н}(A)$)

3) $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$

$(A - \lambda I)^{-1}$ існує (обм, необм), область визначення $(A - \lambda I)^{-1}$ **не є щільною в** X [позначають $\sigma_{З}(A)$]. Такі λ назив. **залишковим спектром**

Зазначимо, що обл. значень $R(A-\lambda I) = D\left((A-\lambda I)^{-1}\right)$.

4) $\ker(A-\lambda I)=\{0\}$
$\exists (A-\lambda I)^{-1}$, область визначення дорівнює всьому X (тоді за т. Банаха про обер. оп. $(A-\lambda I)^{-1}$ - непер. Такі λ - назив регулярними. ρ_A - називають резольвентна множина (множина регулярних точок λ).

$\mathbb{C} = \rho_A \cup \sigma(A)$

$\sigma(A) = \sigma_\pi(A) \cup \sigma_н(A) \cup \sigma_з(A)$

ρ_A - ~~замкнена~~ відкрита множина, тоді $\sigma(A)$ - замкнена

1. Приклад: X - скінченновимірний простір, тоді A - задається матрицею. Нехай λ таке, що $(A-\lambda I)$ - має обернений $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \det(A-\lambda I)\neq 0$
Область визначення $(A-\lambda I)^{-1}$ буде весь X.

Таким чином це будуть λ - що є регулярні точки.

Якщо $(A-\lambda I)^{-1}$ не існує $\Leftrightarrow \det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \lambda$ - власні числа, тобто точковий спектр. $\sigma(A)=\sigma_\pi(A)$.

Задача 1. Знайти спектр та резольвентну множину оператора $Ax(t) = tx(t)$ в $C[0;1]$.

Розглянемо оператор $(A-\lambda I)x(t) = tx(t) - \lambda x(t) = (t-\lambda)x(t)$.

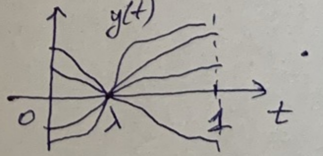
З'ясуємо ~~коли~~ (для яких λ) існує $(A-\lambda I)^{-1}$ і яка його область визначення (або, що те саме, область значень $R(A-\lambda I)$).

Нехай $\lambda \notin [0;1]$. Тоді рівняння $(t-\lambda)x(t) = y(t)$ матиме єдиний розв'язок $x(t) = \frac{1}{t-\lambda} \cdot y(t)$ для $\forall y(t) \in C[0;1]$, причому $x(t)$ також буде з $C[0;1]$.

Отже, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0;1]$ $\exists (A-\lambda I)^{-1}$ і $D(A-\lambda I)^{-1} = C[0;1]$.

(1) Тому $\mathbb{C} \setminus [0;1] \subset \rho_A$.

Нехай $\lambda \in [0;1]$. Тоді $\forall x(t) \in C[a;b]: (A-\lambda I)x(t) \equiv (t-\lambda)x(t) = y(t)$, де $y(t)$ буде з $C[0;1]$ (неперервна) і $\underline{y(\lambda) = 0}$. Тобто, при $\lambda \in [0;1]$ область значень $R(A-\lambda I) \subset \{g(t) \in C[0;1] : g(\lambda) = 0\}$ – <u>не</u> весь простір $C[0;1]$. Також відмітимо, що одержана область значень не є щільною в $C[0;1]$



Таким чином, при $\lambda \in [0;1]$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ існує, але визначений не на всьому $C[0;1]$ і не на щільній підмножині простору $C[0;1]$. ~~Тому~~

(2) Тому $[0;1] \subset \sigma_{з}(A)$. Поєднуючи (1) і (2) робимо висновок, що $\sigma(A) = \sigma_{з}(A) = [0;1]$, $\rho_A = \mathbb{C} \setminus [0;1]$.

Відмітимо, що точковий спектр $\sigma_{т}(A) = \varnothing$. Це легко видно з того, що, якщо $(A-\lambda I)x(t) = (t-\lambda)x(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$ скрізь крім $t=\lambda$, а оскільки $x(t)$ – неперервна, то $x(t) \equiv 0$ $\forall t \in [0;1]$.