Поняття про Банахові алгебри

Означення:

Лінійний простір L з введеною операцією множення елементів між собою так, що виконуються наступні аксіоми:

1) $\forall x, y, z \in L: x(yz) = (xy)z$
2) $\forall x, y, z \in L: (x+y)z = xz + yz$
3) $\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}): (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$,

називаються алгеброю.

Якщо існує елемент $\exists e \in L$:

4) $\forall x \in L: xe = ex = x$, то алгебру називают алгеброю з одиницею.

Якщо

5) $\forall x, y \in L: xy = yx$, то алгебру називают комутативною.

Якщо L – лінійний нормований простір, який є алгеброю з одиницею, і виконуються $\|e\| = 1$ та

6)

7) $\forall x, y \in L : \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ то

<u>таку алгебру називають нормованою.</u>

Означення:

Якщо L - повний нормований простір і L - нормовна алгебра, то таку алгебру називають <u>Банаховою.</u>

Приклад:

1) $L = \mathbb{C}$ $\quad \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$

2) $C_{[a,b]}$ $\quad \|x(t)\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$

3) $\{A_{n \times n}\}$

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Нехай L - Банахова алгебра, нехай $x \in L$, оскільки в Б. алгебрі визначені "+" та "$\times$" то можемо записувати для функції ряди.

Розглянемо ряд $I + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ (1), покажемо, що цей ряд буде збіжний.

Для доведення збіжності треба показати $\exists \lim\limits_{n \to \infty} S_n$, $S_n = e + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

Доведемо: $\|S_n - S_m\| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Доведення: $\|S_n - S_m\| = \left\|\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right\| \leq$

$n > m$

$$\leq \frac{\|x^{m+1}\|}{(m+1)!} + \ldots + \frac{\|x^n\|}{n!} \leq \left| \begin{array}{l} \|x\cdot x\| \leq \|x\|\cdot\|x\| \\ \|x^k\| \leq \|x\|^k \\ \text{за аксіомою 7)} \end{array} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\|x\|^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots \frac{\|x\|^n}{n!} < \varepsilon. \Rightarrow \{S_n\} \text{– фундаментальна}$$

(простір повний) значить $\{S_n\}$ – збіжна

Означення:

V Експонента елемента x банах. алг. L назвемо вираз

$$e^x = I + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \qquad (1)$$

Теорема:

Множина матриць $\{A_{n\times n}\} = (a_{ij})$ є банаховою алгеброю.

Доведення:

Треба перевірити аксіоми лінійного простору, одиничний елемент $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix}$

Треба перевірити $\|A\cdot B\| \le \|A\|\cdot\|B\|$

$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \qquad \|B\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2$

$\|A\cdot B\| = \sum_{i}\sum_{j}(a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj})^2 \le$

$\le \sum_{i,j}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{i,j=1} b_{ij}^2 =$

$= \|A\|^2\cdot\|B\|^2$ $\blacksquare$

Означення:

$$\boxed{e^{A} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots \quad (2)}$$

$e^{tA} \quad t\in\mathbb{R}$

$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \ldots, \quad (3)$

Властивості e^A:

1) $e^0 = E$, тут 0 – нульова матриця, E – одинична

2) $e^{tE} = e^t\cdot E$

3) Якщо $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A\cdot e^B$

4) Якщо $A = UJ\cdot U^{-1}$ (U – невироджена м.)

то $e^A = U e^J U^{-1}$

$A^2 = U\cdot J U^{-1} U J U^{-1} = U J^2 U^{-1}$

$A^n = U J^n U^{-1}$

Обчислення e^A:

Нехай $A = UJU^{-1}$, де J – жорд. матр.

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_k} \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot E + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{F_{n \times n}}$$

$F^n = 0$ (n – розмір матриці F)

$$e^{J_1} = e^{\lambda_1 E + F} = e^{\lambda_1 E} e^{F} =$$

вред.!

$$= e^{\lambda_1 E} \cdot \left(E + F + \frac{F^2}{2!} + \dots + \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

$$e^J = \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{e^{J_k}} \end{pmatrix};$$ тоді $e^A = U e^J U^{-1}$.

Якщо маємо ЛОС $Y' = AY$, то загальний розв'язок, матиме вигляд $Y = e^{tA} \cdot C$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)\, Y(t)\, dt$$

$$Y(x) = e^{tA} \cdot Y_0$$

Розв'язок задачі Коші

Розв'яжемо задачі Коші

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Нехай $A = UJU^{-1}$.

а) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

2 блоки

б) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tJ} = e^{\lambda_1 t E + tF} =$

$= e^{\lambda_1 t} E \cdot e^{tF} = \rightarrow$

$\rightarrow = \left| \begin{array}{l} F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ F^2 = 0 \end{array} \right| = e^{\lambda_1 t} \cdot E \cdot \left(E + tF \right) =$

в ряд e^{tF} розклали, вийшло два доданки, бо $F^2 = 0$

$= e^{\lambda_1 t}(E + tF) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}.$

Д/З:

- $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

- $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & \cdots & \lambda_1 \end{pmatrix}$

ДОПОЛНЕНИЕ
БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ
В. М. Тихомиров

В третьей главе этой книги изучались линейные пространства. Там был выделен важный класс линейных пространств — банаховы пространства. Здесь, в этом дополнении, будут изучаться банаховы алгебры, т. е. банаховы пространства, в которых определено умножение элементов. Наличие умножения в сочетании с линейной и метрической структурой наделяет банаховы алгебры рядом замечательных свойств.

§ 1. Определения и примеры банаховых алгебр

1. Банаховы алгебры, изоморфизмы банаховых алгебр. Напомним, что линейным пространством называется непустое множество элементов, в котором введены две операции — сложение и умножение на числа, удовлетворяющие восьми аксиомам, сформулированным в § 1 гл. III.

Определение 1. Линейное пространство X называется *алгеброй*, если в нем введена еще одна алгебраическая операция — умножение, которое подчинено следующим аксиомам:

1. $(xy)z = x(yz)$.
2. $x(y+z) = xy + xz$; $(y+z)x = yx + zx$.
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.
4. Если существует элемент $e \in X$ такой, что $ex = xe = x$ для всех $x \in X$, то e называется *единицей* алгебры X, а сама алгебра называется *алгеброй с единицей*[1]).
5. Если операция умножения коммутативна, т. е. если выполняется аксиома:

$$xy = yx,$$

то алгебру X называют *коммутативной алгеброй*.

Коммутативные алгебры с единицей и будут в основном объектом нашего дальнейшего рассмотрения.

Всюду в этом дополнении числовое поле, над которым рассматриваются наши алгебры, это поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел.

В § 3 гл. III было введено понятие нормированного пространства, т. е. линейного пространства, снабженного нормой $\|x\|$, удовлетворяющей трем аксиомам, сформулированным на стр. 139.

Определение 2. Нормированное пространство X называется *нормированной алгеброй*, если оно является алгеброй с единицей и при этом выполнены еще две аксиомы:

6. $\|e\| = 1$.
7. $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Если нормированная алгебра X вдобавок полна (т. е. является банаховым пространством), то она называется *банаховой алгеброй*.

[1]) Единица в алгебре всегда единственна, ибо если бы элемент e' также обладал свойством 4, то мы бы получили $ee' = e = e'$.

Отображение $F: X \to Y$ называют *гомоморфизмом* алгебры X в Y, если удовлетворяются условия:

$$F(x+y) = Fx + Fy, \tag{1}$$

$$F(\alpha x) = \alpha Fx, \tag{2}$$

$$F(xy) = Fx \cdot Fy. \tag{3}$$

Две алгебры, X и Y, называют *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение F, удовлетворяющее условиям (1)—(3).

Нормированные пространства X и Y называют *изометричными*, если существует взаимно однозначное отображение F: $X \leftrightarrow Y$, для которого выполнены условия (1) и (2) и, кроме того,

$$\|Fx\|_Y = \|x\|_X.$$

Определение 3. Две банаховые алгебры X и Y мы назовем *изометрически изоморфными*, если существует алгебраический изоморфизм $F: X \leftrightarrow Y$, являющийся изометрией X и Y как нормированных пространств.

2. Примеры банаховых алгебр.

1. Поле **C**. Комплексные числа $\{z\}$ доставляют простейший пример банаховой алгебры, если ввести норму формулой:

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z = x + iy).$$

Комплексные числа образуют поле **C**. В **C** для всех элементов, кроме нуля, определено деление — операция, обратная умножению. Мы покажем в дальнейшем, что **C** есть *единственная нормированная алгебра, являющаяся полем*.

2. Алгебра C_T. Пусть T — некоторое компактное хаусдорфово топологическое пространство. Обозначим через C_T линейное пространство всех непрерывных комплексных функций $x(t)$, заданных на T с обычными для функций операциями сложения и умножения на число, в котором норма определяется равенством

$$\|x\| = \max_{t \in T} |x(t)|.$$

Ранее в гл. II и III рассматривался частный случай пространства C_T, когда $T = [a, b]$ есть отрезок вещественной прямой. Другим важным частным случаем пространства C_T является пространство $\mathbf{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n)\}$ n-мерных комплексных векторов, т. е. функций на пространстве из n точек. Сложение, умножение на числа и умножение элементов $\mathbf{C}^n$ производится покоординатно, а норма определяется формулой

$$\|z\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|.$$

Алгебра C_T является коммутативной банаховой алгеброй. Единицей в C_T служит функция $e(t) \equiv 1$. Проверка всех аксиом не составляет труда.

3. Алгебра $\mathcal{A}$ аналитических функций в круге. Обозначим через $\mathcal{A}$ линейное пространство всех функций $x(z)$ комплексного переменного z, определенных и непрерывных в круге $K \equiv \{z: |z| \leqslant 1\}$ и аналитических внутри этого круга. Определим умножение в $\mathcal{A}$, как обычное умножение функций и зададим норму формулой

$$\|x\| = \max_{|z| \leqslant 1} |x(z)|.$$

Этим путем мы превратим $\mathcal{A}$ в коммутативную банахову алгебру с единицей. Справедливость всех аксиом и здесь вполне очевидна.

§ 1. Норма матрицы и ее свойства

Матрица $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ — прямоугольная таблица, составленная из элементов некоторого множества $\mathfrak{J}$ и содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Транспонированная матрица имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если не оговорено противное, то в дальнейшем считается, что элементами a_{ij} матрицы являются вещественные или комплексные числа.

Матрица строка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Матрицу столбец $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ будем называть вектором. Операция умножения матрицы на число имеет вид

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для матриц одного размера определена операция сложения:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведение AB матриц определено, если количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B. Если матрица A имеет размер $m \times p$, а матрица B имеет размер $p \times n$, то

$$C = AB = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i, j = \overline{1, p}.$$

Норма матрицы A имеет вид

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a|_{ij}^2}. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Справедливо неравенство для нормы произведения двух матриц:*

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|. \tag{1.3}$$

$\triangle$ Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского, получаем, что

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ \ldots a_{in} b_{nj}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (|a_{i1}|^2 + \ \ldots |a_{in}|^2)(|b_{1j}|^2 + \ \ldots |b_{nj}|^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (|a_{i1}|^2 + \ldots + |a_{in}|^2) \sum_{j=1}^{n} (|b_{1j}|^2 + \ldots + |b_{nj}|^2) = \|A\|^2 \|B\|^2. \quad \blacktriangle$$

Следствие 1.1. *Если x — произвольный вектор, то*

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|.$$

Следствие 1.2. *Для квадратных матриц справедливо неравенство*

$$\|A^s x\| \leqslant \|A\|^s \|x\|, \quad s \geqslant 1.$$

$\triangle$ $\|A^s x\| = \|A(A^{s-1} x)\| \leqslant \|A\| \cdot \|A^{s-1} x\| \leqslant \ \ldots \leqslant \|A\|^s \|x\|.$ $\blacktriangle$

Теорема 1.2. *Норма матрицы обладает следующими свойствами:*

$$\|\alpha A\| \leqslant |\alpha| \cdot \|A\|, \quad \|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad \|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0.$$

Решение уравнения (8.14) определяется формулой Лиувилля:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{w(t)}{x_1^2(t)}\, dt. \tag{8.15}$$

Решение неоднородного уравнения (8.13) имеет следующий вид:

$$x(t) = x_1(t)C_1(t) + x_2(t)C_2(t), \tag{8.16}$$

где функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяются из системы уравнений

$$x_1(t)\dot{C}_1(t) + x_2(t)\dot{C}_2(t) = 0, \quad \dot{x}_1(t)\dot{C}_1(t) + \dot{x}_2(t)\dot{C}_2(t) = f(t). \tag{8.17}$$

Упражнение 8.1. Рассмотрите уравнение

$$t\ddot{x} - 2(t+1)\dot{x} + (t+2)x = 3te^t.$$

1) Разрешите уравнение относительно старшей производной

$$\ddot{x} - 2\left(1 + \frac{1}{t}\right)\dot{x} + \left(1 + \frac{2}{t}\right)x = 3e^t.$$

2) Найдите вронскиан из уравнения $\dot{w} - 2\left(1 + \frac{1}{t}\right)w = 0$.
3) Покажите, что однородное уравнение имеет решение $x_1(t) = e^t$.
4) Найдите второе частное решение по формуле Лиувилля:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{w(t)}{x_1^2(t)}\, dt = e^t \int e^{-2t} w(t)\, dt.$$

5) Решите систему уравнений

$$e^t\dot{C}_1(t) + x_2(t)\dot{C}_2(t) = 0, \quad e^t\dot{C}_1(t) + \dot{x}_2(t)\dot{C}_2(t) = 3e^t.$$

6) Запишите общее решение неоднородного уравнения в виде

$$x(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)x_2(t).$$

√

§ 9. Матричная экспонента

Определим матрицу e^A как сумму ряда

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,. \tag{9.1}$$

Так как мажорантный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k}{k!}$ сходится, то и ряд (9.1) сходится.

Теорема 9.1. *Если матрицы A и B перестановочны, $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.*

$\triangle$ Для перестановочных матриц справедлива формула бинома Ньютона:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}. \qquad (9.2)$$

Воспользовавшись правилом перемножения абсолютно сходящихся рядов, получаем, что

$$e^A \cdot e^B = \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots \right) \times$$
$$\times \left(I + B + \frac{B^2}{2!} + \ldots + \frac{B^k}{k!} + \ldots \right) =$$
$$= I + A + B + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{A^m}{m!} \cdot \frac{B^{k-m}}{(k-m)!} + \ldots =$$
$$= I + A + B + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} A^m B^{k-m} + \ldots =$$
$$= I + A + B + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} + \ldots = e^{A+B}. \quad \blacktriangle$$

Упражнение 9.1. Приведите пример таких матриц, что $AB \neq BA$.

Теорема 9.2. *Если матрица $A = S^{-1}BS$, то $e^A = S^{-1}e^B S$.*

$\triangle$ Так как $A = S^{-1}BS$, то

$$A^2 = S^{-1}BSS^{-1}BS = S^{-1}B^2S, \quad \ldots, \quad A^n = S^{-1}B^nS.$$

Следовательно,

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{-1}B^nS}{n!} = S^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) S = S^{-1}e^B S. \quad \blacktriangle$$

√

Теорема 9.3. *Если матрица A блочно-диагональная $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$, то $e^A = \operatorname{diag}(e^{A_1}, \ldots, e^{A_k})$.*

$\triangle$ Доказательство следует из легко проверяемого тождества $A^n = \operatorname{diag}(A_1^n, \ldots, A_k^n)$. $\blacktriangle$

Рассмотрим матричную функцию скалярного аргумента

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}. \qquad (9.3)$$

Теорема 9.4. *Матрица e^{At} является решением задачи Коши для матричного уравнения $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$, $\Phi(0) = I$.*

$\triangle$ Так как матрицы At и As перестановочны, то $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ и

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA}e^{tA} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA} - I}{h} e^{tA} = \left(I + \frac{Ah}{2!} + \ldots\right) Ae^{At}. \qquad (9.4)$$

Переходя в формуле (9.4) к пределу при $h \to 0$, получаем, что

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At}.$$ $\blacktriangle$

В силу формулы Лиувилля (8.4)

$$w(t) = \det e^{At} = e^{t \operatorname{Sp} A} > 0. \qquad (9.5)$$

Следовательно, столбцы матрицы e^{At} линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \qquad (9.6)$$

Пусть задана фундаментальная система решений $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ уравнения (9.6), невырожденная матрица $\Psi(t)$, столбцами которой являются векторы $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, будет удовлетворять матричному уравнению $\dot{\Psi} = A\Psi$. Так как матрицы $\Psi(t)\Psi(0)^{-1}$ и e^{At} удовлетворяют матричному уравнению $\dot{X}(t) = AX(t)$ и начальному

Нехай $A = CJC^{-1}$ $\left(J = C^{-1}AC\right)$, тоді $e^A = Ce^JC^{-1}$

J - розпадається на жорд. клітини. Нехай $K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + F$, де $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Тоді $e^{\lambda E} = Ee^{\lambda}$ (оск. $E^n = E$ $\forall n$)

e^F за доп. ряду, оск $F^m = 0$, де m - розмір F.

Обчислення e^A.

1) Подаємо A у вигляді $A = CJC^{-1}$, де J - жорд. форма

Тоді $e^A = Ce^JC^{-1}$.

2) Обчислимо e^J. J - розпадається на жорд. клітини

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

Тоді $e^J = \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{e^{J_k}} \end{pmatrix}$. Отже, обчислимо e^{J_i}, $1 \le i \le k$.

Нехай $J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + F$, де $F \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Тоді $e^{J_i} = e^{\lambda E + F} = e^{\lambda E} \cdot e^F = E \cdot e^{\lambda} \cdot e^F = Ee^{\lambda}\left(E + F + \frac{F^2}{2!} + \ldots + \frac{F^{m-1}}{(m-1)!}\right)$

<u>Пояснення</u>: 1) $e^{\lambda E} = E \cdot e^{\lambda}$ (за доп. ряду, оскільки $E^n = E$ $\forall n$)

2) $F^m = 0 \Rightarrow F^{m+1} = F^{m+2} = \ldots = 0$.