$$\|Ix(t)\|_{L_1[a,b]} = \int_a^b |x(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \underset{\text{норма } x(t) \text{ в } C[a,b]}{\max|x(t)|} \cdot \int_a^b dt = \underset{\text{число } C}{(b-a)} \cdot \|x(t)\|_{C[a,b]}.$$

Простір лінійних неперервних операторів.

X і Y – лінійні норм. простори на $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

$L(X,Y)$ – множина лін. непер. операторів $A: X \to Y$

В множині $L(X,Y)$ вводиться структура лінійного простору.

$\forall A, B \in L \quad \forall x \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

$(\alpha A + \beta B)x := \alpha Ax + \beta Bx$

Отже, $L(X,Y)$ – лін. простір

Лема:

$L(X,Y)$ – з нормою оператора

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \quad \in ЛНП.$$

(лінійним нормовним простором).

Для доведення треба перевірити аксіоми норми для $\|A\|$.

Теорема:

Якщо ЛНП Y – є банаховий (повний) то ЛНП $L(X,Y)$ також банаховий

Ідея доведення:

Беремо послідовність $\{A_n\} \in L(X,Y)$ та довільний $x \in X$; маємо послідовність $\{A_n x\} \in Y$

Припустимо, що $\{A_n\}$ – фундаментальна ($\|A_n - A_m\| \to 0$),

довести, що вона є збіжною.

Покажемо, що послідовність значень $\{A_n x\}$ – фунд. в просторі Y:

$$0 \leq \|A_n x - A_m x\|_Y = \|(A_n - A_m) x\|_Y \overset{(1)}{\leq}$$
$$\leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_X < \varepsilon$$
$$\to 0, \text{ бо } \{A_n\} - \text{фунд.}$$

Тобто $\{A_n x\}$ – фунд. в Y, а Y – повний

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} A_n x := Ax$ (позначимо цю границю через Ax, і так для $\forall x \in X$, отже, визначили оператор A).

Фактично $\{A_n\} \to A$. Дійсно $\|A_n x - A_m x\| \to 0$, далі $m \to \infty \Rightarrow A_m x \to Ax$ (за озн. A) $\Rightarrow \|A_n x - Ax\| \to 0 \Rightarrow A_n \to A$.

Залишилось показати, що $A \in$ лін. опер + + A обмеж. $\Rightarrow A \in L(X,Y) \Rightarrow \{A_n\}$ – зб. $\Rightarrow$

$\Rightarrow L(X,Y)$ повний.

Нерівність (1) $\Rightarrow$ з означення норми оператора.

Дійсно, $\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Наслідок:

ЛНП функціоналів $L(X, \mathbb{R})$ або $L(X, \mathbb{C})$ - буде банаховим (повним).

Означення:

Простір ЛН (лінійних неперервних) функціоналів на ЛНП X називається спряженим до X і позначається X' (ікс штрих).

Якщо X над $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, то $X' = L(X, \mathbb{R})$ $(\mathbb{C})$

Продовження лін. оператора за неперервністю.

Нехай X, Y - ЛНП, $X_1 \subset X$ - лін. підпр. $A_1 : X_1 \to Y$ - лін. оператор.

Означення:

Оператор A - називається продовженням лін оператора A_1 на весь простір X, якщо $\forall x \in X_1$: $A_1 x = A x$.

! **Теорема** про продовження лін. обмеженого оператора за **неперервністю**:

Нехай $X_1 \subset X$ - лін. підпростір X, X_1 - скрізьщільно в X; Y-банахів простір; $A_1 \in L(X_1, Y)$.

Тоді $\exists! A_{\in L(X,Y)}$ такий, що є продовженням A_1 і $\|A\| = \|A_1\|$

Ідея доведення:

~~Не побудувати~~ З щільності X_1 в $X \Rightarrow$ $\forall x \in X \ \exists \{x_n\} \in X_1$,

така, що $\{x_n\} \to x$.

Розглядаємо послідовність $\{A_1 x_n\}$

вона буде фундаментальною: $0 \le \|A_1 x_n - A_1 x_m\|_Y =$

$= \|A_1(x_n - x_m)\|_Y \le \|A_1\| \cdot \underbrace{\|x_n - x_m\|_X}_{\to 0} < \varepsilon$

$\{A_1 x_n\}$ - фунд. в Y.

Y - повний

$$(*) \quad \exists \lim_{n\to\infty} A_1 x_n := Ax \quad (\forall x \in X)$$

Рівність (*) визначає $\forall x \in X$ значення Ax, тобто оператор A, заданий на всьому X. Далі перевіряємо лінійність, обмеженість оператора A.

Наслідок:

Кожний лін. непер. функціонал, заданий на скрізьщільному підпросторі, можна за неперервністю продовжити на весь простір без збільшення норми.

Теорема Хана - Банаха. !

Про продовження ЛН функціонала заданого на підпросторі (підпростір X_1 може бути не щільним в X)!

Нехай l_1 - лінійний непер. функціонал заданий на підпросторі $X_1 \subset X$. Тоді існує такий лін. непер. функціонал l на X ($l \in X' = L(X, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$, що

1) l є продовження l_1

2) $\|l\| = \|l_1\|$

Не вимагається щоб X_1 - щільно в X.!

Зауваження: На відміну від продовження по неперервності, тут продовження може бути не єдиним. !