28. Определить порядок уравнений:
   а) $u_x u_{xy}^2 + \left(u_{xx}^2 - 2u_{xy} + u_y\right)^2 - 2xy = 0$;
   б) $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0$;
   в) $2(u_x - 2u)u_{xy} - \dfrac{\partial}{\partial y}(u_x - 2u)^2 - xy = 0$.

29. Выяснить, какие из следующих уравнений являются линейными и какие нелинейными (квазилинейными):
   а) $u_x u_{xy}^2 + 2xuu_{yy} - 3xyu_y - u = 0$;
   б) $u_y u_{xx} - 3x^2 uu_{xy} + 2u_x - f(x,y)u = 0$;
   в) $2\sin(x+y)u_{xx} - x\cos yu_{xy} + xyu_x - 3u + 1 = 0$;
   г) $x^2 yu_{xxy} + 2e^x y^2 u_{xy} - \left(x^2y^2 + 1\right)u_{xx} - 2u = 0$;
   д) $3u_{xy} - 6u_{xx} + 7u_y - u_x + 8x = 0$;
   е) $u_{xy}u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xyu = 0$;
   ж) $2xu_{xy} - 6\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^2 - xy\right) + u_{yy} = 0$;
   з) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(yu_y + u_x^2\right) - 2u_x u_{xy} + u_x - 6u = 0$.

2.2. Примеры простейших дифференциальных уравнений в частных производных

Рассмотрим некоторые примеры уравнений в частных производных.

Пример 1
Найти функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1.$$

Р е ш е н и е
Интегрируя, получим

$$u = x + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция. Это общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 2
Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y,$$

где $u = u(x,y)$.

Р е ш е н и е
Дважды интегрируя по y, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x), \quad u = y^3 + y\varphi(x) + \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции.

Пример 3
Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Р е ш е н и е
Интегрируя уравнение по x, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y).$$

Проинтегрировав полученный результат по y, находим

$$u = \varphi(x) + \psi(y),$$

где $\psi(y) = \int f(y)dy$, $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольные функции.

2.

Пример 4

Решить уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x\frac{\partial u}{\partial y}=0\,,\ x\neq 0\,.$$

Р е ш е н и е

Данное уравнение можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\,.$$

Проинтегрировав уравнение по переменной x, получим

$$x^2\frac{\partial u}{\partial y}=f(y)\,,$$

где $f(y)$ — произвольная функция.

Интегрируя полученный результат по переменной y, находим

$$u=\varphi(x)+\psi(y)\,,$$

где $\psi(y)=\frac{1}{x^2}\int f(y)dy$, $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольные функции.

Пример 5

Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+u\right)+x\left(\frac{\partial u}{\partial x}+u\right)+x^2y=0\,.$$

Р е ш е н и е

Введем обозначение

$$v=\frac{\partial u}{\partial x}+u\,, \qquad (*)$$

тогда заданное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial v}{\partial y}+xv=-x^2y\,.$$

Общее решение полученного дифференциального уравн
строим в виде суммы общего решения соответствующего од
го уравнения $v_0(x,y)$ и частного решения неоднородного у
$\tilde v(x,y)$:

$$v(x,y)=v_0(x,y)+\tilde v(x,y)=\psi(x)e^{-xy}+\tilde v(x,y)\,,$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция. Нетрудно установить, ч

$$\tilde v(x,y)=1-xy\,.$$

Таким образом, учитывая обозначение (*), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u=\psi(x)e^{-xy}+1-xy\,.$$

Теперь решим уравнение (**). Так как уравнение (**) .
неоднородное, то сначала построим общее решение соответ
го однородного уравнения. Оно будет иметь вид

$$u(x,y)=\varphi(y)e^{-x}\,.$$

Далее применим метод вариации произвольной постоян

$$u(x,y)=\varphi(x,y)e^{-x}\,.$$

Подставим выражение (***) в уравнение (**):

$$\varphi_x=e^x\left(\psi(x)e^{-xy}+1-xy\right).$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$\varphi(x,y)=\int\limits_0^x e^{\xi}\left(\psi(\xi)e^{-\xi y}+1-\xi y\right)d\xi+\chi(y)\,,$$

где $\chi(y)$ — произвольная функция.

Учитывая равенство (***), получаем общее решение уравн

$$u(x,y)=e^{-x}\left\{\int\limits_0^x e^{\xi}\left(\psi(\xi)e^{-\xi y}+1-\xi y\right)d\xi+\chi(y)\right\}.$$

Остаточно розв'язок набуде вигляду
$u(x,y)=(-xy^2+C_1(y))x$, де функція C_1 повинна бути константою відносно змінної x, але може залежати від параметра y. Таким чином, загальний розв'язок містить довільну функцію $C_1=C_1(y)$.

Розглянемо ще випадок квазілінійного диференціального рівняння першого порядку із двома незалежними змінними. За означенням таке рівняння має вигляд:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z).$$

$z=z(x,y)$

Функції P, Q, R будемо вважати неперервними в розглянутій області й такими, що не перетворюються в нуль одночасно.

Розглянемо векторне поле $\vec{F}$:

$$\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}, \tag{1.5}$$

де $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орти. Векторні лінії цього поля (тобто лінії, дотична до яких у кожній точці має напрямок, що збігається з напрямком вектора $\vec{F}$ в цій же точці) визначаються з умови колінеарності вектора $\vec{F}$ й напрямного вектора дотичної до шуканої лінії $\vec{t}=\vec{i}dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz$, тобто з умови

$\vec{l}\,(dx, dy, dz)$

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{1.6}$$

Поверхні, що утворені з векторних ліній, називаються векторними поверхнями. Очевидно, векторні поверхні можна одержати, розглядаючи множину точок, що лежать на довільно обраному неперервно залежному від параметра однопараметричному сімействі векторних ліній.

Векторна поверхня характеризується тим, що вектор $\vec{N}$, спрямований по нормалі до неї, у будь-якій точці поверхні буде ортогональним до вектора поля $\vec{F}$, тобто

$$(\vec{N},\vec{F})=0. \tag{1.7}$$

Якщо векторна поверхня визначається рівнянням $z=f(x,y)$, то вектор нормалі має вигляд

$$\vec{N}=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{i}-\vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{N}\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right).$$

$\underbrace{f(x,y)-z}_{F}=0$

$N(F'_x, F'_y, F'_z)$

Тоді з умови (1.7) маємо

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z). \tag{1.8}$$

Якщо векторна поверхня задається рівнянням $u(x,y,z)=0$, то

2.

$$\vec{N}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \quad \text{або} \quad N=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$ і з умови (1.7) одержимо, що

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{1.9}$$

Отже, для знаходження векторних поверхонь треба проінтегрувати квазілінійне рівняння (1.8) або (1.9). Оскільки векторні поверхні можуть бути складені з векторних ліній, то інтегрування рівнянь (1.8) або (1.9) зводиться до інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь векторних ліній (1.6). Нехай $\Psi_1(x,y,z)=C_1$ і $\Psi_2(x,y,z)=C_2$ два незалежних перших інтеграли системи (1.6), які називаються характеристиками системи (1.6) та утворюють двопараметричне сімейство векторних ліній. Виділимо з нього довільним способом однопараметричне сімейство, встановлюючи якунебудь неперервну залежність $\Phi(C_1,C_2)=0$ між параметрами C_1 і C_2. Крім параметрів C_1 і C_2, із системи $\Psi_1(x,y,z)=C_1$, $\Psi_2(x,y,z)=C_2$, $\Phi(C_1,C_2)=0$, одержуємо шукане рівняння векторних поверхонь

$$\Phi(\Psi_1(x,y,z),\Psi_2(x,y,z))=0,$$

де Φ – довільна функція.

***Приклад* 2**. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

Розв'язання. Складемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{1}.$$

Перші інтеграли цієї системи визначаються таким чином:

$$x-y=C_1,$$
$$z-x=C_2.$$

Тоді інтегралом вихідного рівняння є $\Phi(C_1,C_2)=0$ або $\Phi(x-y,x-z)=0$.

Можна покласти $C_2=\varphi(C_1)$, тоді рівняння поверхні в явному вигляді буде таким:

$z=x+C_2=x+\varphi(x-y)$, тобто $z=x+\varphi(x-y)$.

***Приклад* 3**. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

Розв'язання. Складемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{-x+y}=\frac{dz}{z}.$$

Перші інтеграли цієї системи визначаються методом інтегрованих комбінацій. Виконаємо тотожні перетворення системи й використаємо основну властивість пропорції

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3}{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3}.$$

Вихідна система перетвориться таким чином:

$$\frac{xdx}{x^2+xy}=\frac{ydy}{-xy+y^2}=\frac{dz}{z};$$

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+xy-xy+y^2}=\frac{dz}{z};$$

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{z};$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln z+\ln C_1 \Rightarrow C_1=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Для знаходження другого інтегралу помножимо перший дріб вихідної системи на y, а другий на $-x$, потім скористаємося основною властивістю пропорції, тоді одержимо

$$\frac{ydx}{y^2+xy}=\frac{-xdy}{-xy+x^2}=\frac{dz}{z}.$$

Звідки

$$\frac{ydx-xdy}{y^2\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)}=\frac{dz}{z}\Rightarrow\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=d\ln z\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)=\ln z+C_2;$$

$$C_2=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)-\ln z.$$

Інтеграл вихідного рівняння $\Phi(C_1,C_2)=0$ або

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-\ln z\right)=0.$$

***Приклад* 4**. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Розв'язання. Складемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}.$$

Як і в попередньому прикладі перші інтеграли цієї системи визначаються методом інтегрованих комбінацій. Використовуючи основну властивість пропорцій, одержимо

$$\frac{dx+dy+dz}{z-y+x-z+y-x}=\frac{dz}{y-x}\Rightarrow\frac{d(x+y+z)}{0}=\frac{dz}{y-x}.$$

Перший загальний інтеграл вихідної системи диференціальних рівнянь:

$$x+y+z=C_1.$$

Другий інтеграл одержимо аналогічно:

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(z-y)+y(x-z)+z(y-x)}=\frac{dz}{y-x}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{0}=\frac{dz}{y-x}.$$

Звідки

$$x^2+y^2+z^2=C_2.$$

Розв'язком вихідного диференціального рівняння у частинних похідних є довільна функція, аргументами якої будуть C_1 і C_2. Тобто

$\Phi(C_1,C_2)=0$ або $\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$.

Якщо потрібно знайти не довільну векторну поверхню поля, а поверхню, що проходить через задану лінію, визначену рівняннями

$$\begin{cases}\Phi_1(x,y,z)=0,\\ \Phi_2(x,y,z)=0,\end{cases}$$

то функція Φ вже не буде довільною, а буде знайдена шляхом виключення змінних x, y, z із системи рівнянь

$$\Phi_1(x,y,z)=0,\Phi_2(x,y,z)=0;$$

$$\Psi_1(x,y,z)=C_1,\Psi_2(x,y,z)=C_2,$$

які повинні одночасно задовольнятися в точках заданої лінії

$$\begin{cases}\Phi_1(x,y,z)=0;\\ \Phi_2(x,y,z)=0,\end{cases}$$

через яку проводимо характеристики, визначені рівняннями $\Psi_1(x,y,z)=C_1$, $\Psi_2(x,y,z)=C_2$.

Зауважимо, що задача стане невизначеною, якщо задана лінія є характеристикою, тому що в цьому випадку цю лінію можна включити в різні однопараметричні сімейства характеристик і тим самим одержати різні інтегральні поверхні, що проходять через цю лінію.

***Приклад* 5.** Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

яка проходить через криву

$$x=0,\ z=y^2.$$

Формулювання цієї задачі може бути іншим.
Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє умовам Коші.

Розв'язання. Складемо відповідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0},$$

тоді перші інтеграли цієї системи визначаться як

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\frac{C_1}{2};\ z=C_2$$

або

$$x^2+y^2=C_1, z=C_2.$$

Загальний розв'язок рівняння визначиться таким чином
$\Phi(C_1,C_2)=0$ або $\Phi(x^2+y^2,z)=0$.
З того, що

$$x=0,\text{ а } z=y^2 \text{ і } x^2+y^2=C_1,\ z=C_2,$$

випливає

$0+y^2=C_1$, тобто $\begin{cases} z=C_1, \\ z=C_2, \end{cases} \Rightarrow C_1=C_2$ й векторна поверхня набуде вигляду

$$z=x^2+y^2.$$

Отримуємо таку ж відповідь інакше.
З того, що $\Phi(x^2+y^2,z)=0$ випливає $z=\varphi\left(x^2+y^2\right)$, з даних Коші $y^2=\varphi\left(y^2\right)$, звідси $\varphi(t)=t$, а отже

$$z=\varphi\left(x^2+y^2\right)=x^2+y^2.$$

Приклад 6. Знайти розв'язок рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

який задовольняє умовам Коші

$$z=1,\ x^2+y^2=4.$$

Розв'язання. Оскільки задана лінія є характеристикою при $C_1=4$, то задача є невизначеною. Дійсно, вважаючи $C_2=\varphi(C_1)$, одержимо загальний розв'язок у вигляді $z=\varphi(x^2+y^2)$, тобто загальний розв'язок представляє всілякі поверхні обертання з віссю обертання Oz. Очевидно, що існує не-

скінченна множина поверхонь обертання, які проходять через коло $z=1,\ x^2+y^2=4$, наприклад, параболоїди обертання

$$z=x^2+y^2-3,\ 4z=x^2+y^2,\ z=-(x^2+y^2)+5,$$

сфера

$$x^2+y^2+z^2=5$$

й т. ін.
Якщо рівняння кривої, через яку проходить поверхня, задано в параметричній формі:

$$x=x_0(s), y=y_0(s), z=z_0(s),$$

то звичайно й розв'язок зручно шукати в параметричній формі

$$x=x(t,s), y=y(t,s), z=z(t,s).$$

С цією метою в систему (1.6) вводиться додатковий параметр t

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}=dt. \qquad (1.10)$$

Для того щоб характеристики проходили через задану криву, шукаємо розв'язок системи (1.10), який задовольняє при $t=0$ (або $t=t_0$) початкові умови:

$$x=x_0(s), y=y_0(s), z=z_0(s).$$

Приклад 7. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

який задовольняє умови Коші $x_o=s, y_o=s^2, z_o=s^3$.

Розв'язання. Складемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{1}=dt$$

або

$$dx=-dy=dz=dt.$$

Розв'язком її є

$$\begin{cases} x=t+C_1; \\ y=-t+C_2; \\ z=t+C_3 \end{cases}$$

з того, що

$$\begin{cases} x=s, \\ y=s^2, \\ z=s^3 \end{cases}$$

Квазілінійні д.р. першого порядку в частинних похідних

Означення:

Д.р. вигляду

$$P(x,y,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)\quad(I)$$

називають квазілінійним д.р. I-го порядку в частинних похідних

$z=f(x,y)$ $(x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3$

P,Q,R - неперервні в D і $\neq 0$.

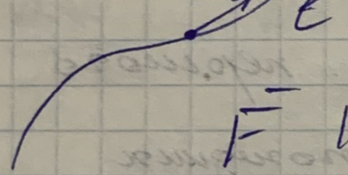
Покажемо, що розв'язки рівняння (1) співпадають з розв'язками деякої симетричної системи.

Розглянемо векторне поле

$\vec{F}(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

Означення:

Лінія яка в кожній своїй точці (x, y, z) має напрям поля $\vec{F}$ (дотична до лінії має напрямний вектор $\parallel \vec{F}$) називається векторною лінією.



$\bar{l}(dx, dy, dz)$

$$F \parallel \bar{l} \Leftrightarrow \frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \quad (2)$$

Поверхні які утворені з векторних ліній називаються векторними поверхнями.

Векторну поверхню можна отримати як однопараметричну сім'ю векторних ліній.

Розглянемо поверхні задані $z = z(x,y)$ і $P(x,y,z) = 0$: (неявно) а) Якщо поверхня має рівняння $z = z(x,y)$, то нормаль: $\bar{N}\left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; -1\right)$

б) Якщо поверхня має рівняння: $P(x, y, z) = 0$, то вектор-нормаль до неї буде $\bar{N}(P'_x, P'_y, P'_z)$.

Умова ортогональності $\bar{N} \perp \bar{F} =$
$\Rightarrow (\bar{N}, \bar{F}) = 0$.

Тоді
а) $P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} - R(x, y, z) = 0$ (3)

Розв'язавши (3) знайдемо вект. поверхню, що є те саме, що і рівняння (1). Таким чином розв'язки рівняння (1) - це векторні поверхні.

А векторні поверхні можна знайти по іншому, тобто розв'язавши симетричну систему (2).

б) Якщо пов $P(x, y, z) = 0$, то рівність $P(x, y, z) \cdot P'_x + Q(x, y, z) \cdot P'_y +$
$+ R(x, y, z) \cdot P'_z = 0$ (3')

Для знаходження векторної поверхні інтегруємо (3) або, що те саме р-ня (1).

А оскільки векторна поверхня складається з векторних ліній, то інтегрування рівняння (3) ((1)) зводиться до інтегрування симетричної системи (2).

Нехай $\Phi_1(x, y, z) = C_1$ – це два
$\Phi_2(x, y, z) = C_2$

незалежних перших інтеграли системи (2). Вони утворюють двопараметричну сім'ю векторних ліній. Для утворення однопараметричної сім'ї потрібно встановити довільний непер. зв'язок між параметрами C_1 та C_2: $\Psi(C_1, C_2) = 0$

Тепер маємо рівняння вект. поверхонь

$$\Psi(\Phi_1(x,y,z), \Phi_2(x,y,z)) = 0$$

Приклад:

1) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ знайти заг. розв'язок д.р.

$P = 1 \quad Q = 1 \quad R = 1$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1}$$

$$\begin{cases} x = y + C_1 \\ x = z + C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = C_1 \\ x - z = C_2 \end{cases}$$

$\Psi(C_1, C_2)$ – довільна функ

$\Psi(C_1, C_2) = 0$

Заг. розв'язок: $\Psi(x-y, x-z) = 0$

Можна записати явно $C_2 = \varphi(C_1)$

$x - z = \varphi(x-y)$

$z = x - \varphi(x-y)$

2) $(z-y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$u(x,y,z) = 0$

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$$

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dx+dy+dz}{(z-y)+(x-z)+(y-x)} \Rightarrow x+y+z = C_1$$

$$\frac{dz}{y-x} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} d(x^2+y^2+z^2) = 0$$

$$x^2+y^2+z^2 = C_2$$

$\Psi(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2) = 0$

Задача Коші для квазілінійного рівняння

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

Полягає в тому, щоб знайти ту вект. поверхню, що проходить через задану векторну лінію.

$$l: \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \\ z = \gamma(t) \end{cases}$$

Приклад: $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$l: \begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0} \qquad z = C_1$$

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

$$x\,dx = -y\,dy$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_2$$

$$x^2 - y^2 = C_2$$

$$\begin{cases} z = C_1 \\ x^2+y^2 = C_2 \end{cases} \to \text{заг. розв. рівн. } \Psi(z, x^2+y^2)=0$$

Звʼязок між C_1 і C_2:

$$l: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 = C_1 \\ 0+t^2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2$$

$$\Psi(C_1, C_2) = C_1 - C_2$$

$$C_1 - C_2 = 0$$

$$z - x^2+y^2 = 0$$

$$z = x^2+y^2$$

3) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{1}$$

$$l: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$

$$x = -y + C_1$$

$$x = z + C_2$$

$$\begin{cases} x+y = C_1 \\ x-z = C_2 \end{cases}$$

$$\Psi(C_1, C_2) = 0$$

$$\Psi(x+y, x-z) = 0$$

$t + t^2 = C_1$

$t - t^3 = C_2$

$t(t+1) = C_1$

$t(1-t)(1+t) = C_2$

$1 - t = \frac{C_2}{C_1}$

$t = 1 - \frac{C_2}{C_1}$

$(1 - \frac{C_2}{C_1})(-\frac{C_2}{C_1}) = C_1$

$C_2^2 - C_1 C_2 = C_1^3$

Д3. задача Коші для квазілінійного д. р. першого порядку.