Доведення:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad S_m = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k, \quad m > n$$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ – зб. $\Leftrightarrow$ S_n – збіжна $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ S_n – фундаментальна

через те, що гільб. <u>повний</u>.

норму записали через скал. добуток

$$\|S_n - S_m\|^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k\Big\|^2 = \Big(\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k, \sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k\Big) =$$

$\|S_n - S_m\| \to 0$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \underbrace{(e_k, e_k)}_{=1} = \left(\begin{array}{c}\text{там де}\\ \text{індекси не співпадають}\\ \text{буде } 0\end{array}\right) =$$

$$= \Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2}_{= S'_n} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}_{= S'_m}\Big| \Leftrightarrow S'_n = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \text{ – фунд} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow S'_n$ – збіжна $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ – зб. ∎

! <u>Теорема про нерівність Беселя:</u>

Нехай $\{e_k\}$ – ОНС в г. п. H

Тоді $\forall x \in H$: $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \le \|x\|^2}_{\text{нерівність Беселя}}$.

(г. п. – гільбертів простір)

Доведення: Достатньо довести, що $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)| \leq \|x\|^2$.

Розглядаємо $0 \leq \| \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \cdot e_k - x \|^2 =$

$= \left(\sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \cdot e_k - x, \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k - x \right) =$

$= \dots = \underbrace{(x, x)}_{\|x\|^2} - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \Rightarrow$

використовуємо властивості скал. добутку

$\Rightarrow \|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2$. Далі переходимо до границі при $n \to \infty$.

~~нескінченності~~ ~~$\lim$~~ $\lim_{n \to \infty}$ [Пам'ятаємо що (x, e_k) – число]

Означення:

Нехай H – гільб. простір, $\{e_k\}$ – ОНС, x – довільний з H

Числа $(x, e_k) = c_k$ – називаються коефіцієнтами Фур'є елемента x, по ортонормованій системі $\{e_k\}$.

Означення:

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ –

– називається рядом Фур'є елемента x.

! (Назва "ряд Фур'є" елемента x – це не означає що цей ряд збіжний до x).

! **Теорема:**

Ряд Фур'є є збіжним.

Доведення: кінець поперед. лекції

З леми 1 $\sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$ - зб $\Leftrightarrow$

$\{c_k = (x, e_k)\}$ $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|(x, e_k)|^2$ - зб., а цей ряд збіжність

з нерівності Бесселя.

! **Означення ортонормованого базису в г. п. (ОНБ)**

ОНС $\{e_k\}$ - називається ортонормованим базисом в г. п. H, якщо $\forall x \in H$

ряд Фур'є $\sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$ збігається до x,

тобто $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$.

Теорема:

Ортонормована система $\{e_k\}$ є ОН базисом в г. п. H тоді і тільки тоді, коли виконується рівність Парсеваля: $\forall x \in H$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2 \leftarrow \text{рівність Парсеваля}$$

Доведення: При доведенні н-сті Беселя отримали:

$$\underbrace{\Big\|\sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k - x\Big\|^2}_{=0 \text{ - то зб. р. Фур'є}} = \|x\|^2 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2}_{} = 0 \text{ - то рівн. Парс.}$$

Перейшовши до границі $\underbrace{\text{отримаємо}}_{\text{при } n\to\infty}$ потрібне.

Повні і замкнені ОНС.

Нехай $\{e_k\}$ - ОНС, H - г.п. над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

Означення:

ОНС $\{e_k\}$ - називається повною, якщо лінійна оболонка на $\{e_k\}$

$$\text{Л.О.}\{e_k\} = \{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \{\alpha_1 \ldots \alpha_n\} \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})\}$$

є скрізьщільною в H, тобто $\forall x \in H\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}: \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| < \varepsilon.$

Приклад:

$$H = L_2(0; 2\pi)$$

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad e_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

$$e_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$$

Л.О. $\{e_n, n \geq 0\}$ - буде щільною в $\tilde{C}_{[0;2\pi]} = \{f(x) \in C_{[0;2\pi]} : f(0) = f(2\pi)\}$

В свою чергу множина $\tilde{C}[0;2\pi]$ - щільна в $L_2(0;2\pi)$.

Означення:

~~Замкнена~~ Ортонормована система ОНС $\{e_n\}$ - називається замкненою в H, якщо її ортогональне доповнення складається лише з $\{0\}$ ($\{e_n\}^{\perp}=\{0\}$)

! Теорема:

Нехай $\{e_n\}$ - ОНС в H тоді наступні три твердження еквівалентні

1) $\{e_n\}$ є базисом.

2) $\{e_n\}$ є повною.

3) $\{e_n\}$ є замкненою.

6.11.2019

! Теорема Грама - Шмідта

Для кожної скінченної або зліченної лінійно-незалежної систем $\{f_n\}$ - елементів Гільбертового простору

Існує така ортонормована система $\{e_n\}$, що $\forall k \in \mathbb{N}$:
л.о. $\{f_1, \dots f_k\}$ = л.о. $\{e_1, \dots e_k\}$.

Наслідок 1:

Кожний скінченновимірний Гільбертів простір має ортонормований базис.

Доведення: беремо довільний базис і ортонормуємо.

Наслідок 2:

Кожний нескінченновимірний сепарабельний Гільбертів простір має ортонормований базис.

Дов-ня: H — сепарабельний гільб. п. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ скрізьщільна зчисленна множина $\{f_n\}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$ відкинемо f_k, якщо він є лінійною комбінацією $\{f_1, \dots f_{k-1}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \{g_n\}$ — лінійно незалежну.

Ортогоналізуємо і отримуємо $\{e_n\}$ - ортонормована система.

$\forall k \in \mathbb{N}$ л.о. $\{g_1, \dots g_k\}$ = л.о. $\{e_1, \dots e_k\}$

Отже л.о. $\{e_n, n \geq 1\}$ - буде скрізьщільна в $H \Rightarrow \{e_n\}$ - повна $\Rightarrow \{e_n\}$ - ортонормований базис.

Означення:

Два гільбертові простори H_1 і H_2 над полем $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) називаються ізоморфними, якщо $\exists \varphi: H_1 \xleftrightarrow{\text{біекція}} H_2$ і зберігає лінійність і скалярний добуток.

$\forall x, y \in H_1$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$:

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

$$\forall x, y \in H_1 \quad (x, y)_{H_1} = (\varphi(x), \varphi(y))_{H_2}$$

! **Теорема:**

Кожний нескінченно мірний сепарабельний гільбертів простір ізоморфний простору l_2.

(H і l_2 над одним полем, тобто над $\mathbb{R}$ або над $\mathbb{C}$).

H - сепарабельний г.п., то $H \cong l_2$.

Доведення:

Сепарабельний гільб. п. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ ОНБ $\{e_n\}$

Нехай $\{e_n^*\}$ - ОНБ в l_2

$$\begin{pmatrix} (1, 0, 0 \ldots) \\ (0, 1 \ldots 0) \\ 0, 0, 1 \ldots 0) \\ \ldots \end{pmatrix} \qquad \varphi : e_k \to e_k^*$$

<u>Наслідок:</u>

Довільні два нескінченномірні сепарабельні гільб. простори (над <u>одним</u>! полем) ізоморфні між собою.

Приклад: $L_{2[a,b]} \sim l_2$

<u>Визначник Грамма</u>

<u>законспектувати!</u>

!

Теорема про найкраще наближення

Нехай H - гільбертовий простір, L - скінченномірний підпростір, $\{e_1, \dots, e_n\}$ - ОНбазис в L. Тоді $\forall x \in H$

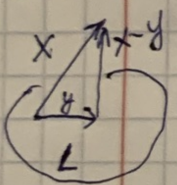
існує єдиний $\exists! \, y \in L$: такий, що норма $\|x - y\| =$

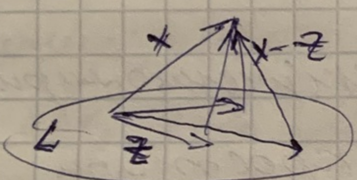
$$= \inf_{z \in L} \|x - z\|$$

Причому $y = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$,

де $c_k = (x, e_k)$, $k = \overline{1,n}$

коефіцієнти Фур'є вектора x по ОНБ $\{e_1, \dots, e_n\}$ в підпросторі L.





Доведення:

(розглядаємо випадок H - дійсний, над $\mathbb{R}$).

Нехай $y \in L$, тоді $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$: $y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Розглянемо $\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) =$

$= (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) =$ | для простоти H - дійсний, $y \in L$, $y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ | $=$

$$= (x, x) - 2(x, y) + (y, y) = (x, x) - 2 \cdot \left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x, e_k) +$$

$(y, y) = \|y\|^2$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2 + (x, x) - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2 =$$

додали і відняли вираз

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - (x, e_k))^2 + \underbrace{(x,x) - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2}_{\text{не залежить від } y}. \quad (*)$$

$= \Big|$ x - фіксований, e_k - фіксовані, а α_k - змінюються зі зміною y $\Big|$ $\Rightarrow \forall k: \alpha_k = (x, e_k)$ $\blacksquare$

Отже, щоб $(*) \to \min$ треба щоб $\alpha_k = (x, e_k)$.

Лінійні оператори та функціонали

Нехай X і Y два ЛНП над $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

Означення:

Відображення $A: X \to Y$ називається лінійним оператором, якщо:

1) $\forall x_1, x_2 \in X \quad A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \forall x \in X \quad A(\alpha x) = \alpha A x$.

Зауваження:

Для лін. оператора $A(\Theta) = \Theta$.

Доведення: $A(\Theta) = A(0x) = 0Ax = \Theta$

Означення:

Якщо Y - числ. множина $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, то лін оператор називають функціоналом