30.10.2019 — оператор стиску

$\exists\ 0 \le \alpha < 1 \quad \forall x, y \in X: \rho(Ax, Ay) \le \alpha \rho(x, y)$

$Ax = x \quad \exists!\ x_0 \in X: Ax_0 \equiv x_0$

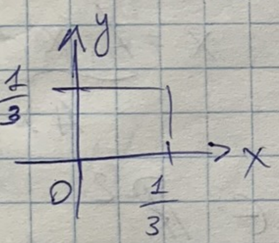
Приклади застосування

1) Метричний простір $X = [0; \frac{1}{3}]$

$Ax = x^2, \quad \rho(x, y) = |x - y|$

Питання, чи є A - оператор стиску?

$$\rho(Ax, Ay) = |x^2 - y^2| = \underbrace{|x+y|}_{\le \frac{2}{3}} \underbrace{|x-y|}_{\rho(x,y)} =$$



$$\le \underbrace{\frac{2}{3}}_{\alpha < 1} \rho(x, y)$$

Розглянемо рівняння $Ax = x$

Беремо довільне $x_0 \in X$

$x_n = Ax_{n-1} \quad n \in N$

$\{x_n\} \to \bar{x}$ - корінь рівняння $Ax = x$

Для нашого рівняння $x^2 = x$

$x_0 = \frac{1}{3} \quad x_1 = Ax_0 = x_0^2 = \frac{1}{9}$

$x_2 = Ax_1 = x_1^2 = \frac{1}{81} \quad x_n \to 0$

$\ldots$

б) Система лінійних рівнянь

$CX = \overline{D}$

$CX - D = 0$

$\underbrace{CX + D + X}_{Ax} = X$

$Ax = x$

З'ясуємо за яких умов оператор A для C - буде оператором стиску.

Розглянемо для простоти

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1 \\ x_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_2 \end{cases}$$

$x = \underbrace{A_1 x + B}_{Ax}$

$x(x_1, x_2) \quad y(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$\rho(Ax, Ay)$

$$Ay = \begin{pmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + b_1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$\rho(Ax, Ay) = |a_{11}(x_1 - y_1) + a_{12}(x_2 - y_2)| +$

$+ |a_{21}(x_1 - y_1) + a_{22}(x_2 - y_2)| \leq$

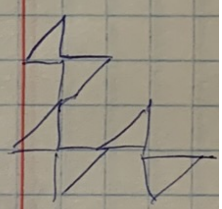
$$\le (|a_{11}| + |a_{21}|)|x_1 - y_1| + (|a_{12}| + |a_{22}|)|x_2 - y_2|$$

$$\le \max\{|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\}\rho(x,y)$$

$$\alpha := \max_k \left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\right\} < 1, \quad k = \overline{1,n}.$$

беремо суми модулів по стовпчиках

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \text{ – довільне}$$



в) Інтегральні рівняння

$$x(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds + f(t)$$

$k(t,s)$ – ядро непер. на $[a,b] \times [a,b]$ – функк

λ – числовий параметр,

$f(t)$ – задана неперервна на $[a,b]$ функція.

$x(t)$ – невідома функція

Розглянемо це рівняння в просторі $C_{[a,b]}$ встановимо за яких умов на λ, оператор

$$Ax(t) := \lambda \int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds + f(t)$$ – буде оператором стиску.

$$\rho(Ax, Ay) = \max \left| \lambda \int_a^b k(t,s)(x(s) - y(s))\,ds \right| \le$$

$$\le |\lambda| \max_t \int_a^b |k(t,s)|\,ds \cdot \underbrace{\max_s |x(s) - y(s)|}_{\rho(x,y)} \le$$

замінили на max і перетворилось на const

$$\le \left\{ \begin{array}{l} k(t,s) - \text{непер} \Rightarrow \\ \Rightarrow |k(t,s)| < M \end{array} \right\} \le \underbrace{|\lambda| \cdot M \cdot (b-a)}_{<1} \cdot \rho(x, y)$$

$$|\lambda| \cdot M \cdot (b-a) < 1$$

$$|\lambda| \le \frac{1}{M(b-a)}$$

Приклад:

При якому λ оператор $Ax(t) = \lambda \int_0^1 (t-s)^2 \cdot x(s)\,ds$ є оператором стиску в $C_{[0,1]}$

$k(t,s) = (t-s)^2$ $\quad \max\limits_{\substack{t \in [0,1] \\ s \in [0,1]}} k = 1$

$$|\lambda| < \frac{1}{1 \cdot (1-0)}$$

$$|\lambda| < 1$$

Розв'язати рівняння

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 x(s)\,ds + \sin(\pi t) \quad в \ C_{[0,1]}$$

$$K(t,s) \equiv 1 \ ; \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{1(1-0)} = 1 \ ; \quad \lambda = \frac{1}{2} < 1$$

$x_0(t) \in C_{[0,1]}$, напр, $x_0(t) = 0$

$$x_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 0\,ds + \sin(\pi t) = \sin(\pi t)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi s)\,ds + \sin(\pi t) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(-1-1) = \frac{1}{\pi} + \sin(\pi t)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin(\pi s) + \frac{1}{\pi}\right)ds + \sin(\pi t) =$$

$$= \sin(\pi t) + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} = \sin + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}$$

$$x_n \to \bar{x}(t) = \sin(\pi t) + \frac{2}{\pi}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{t-s}\, x(s)\, ds + e^t$$

$k(t,s) = e^{t-s}$ $\quad \max |e^{t-s}| = e^1$

$t \in [0;1]$ $\quad |\lambda| < \frac{1}{e(1-0)}$

$s \in [0;1]$ $\quad \frac{1}{2} > \frac{1}{e}$ $\quad C_{[0,1]}$ – не стиснення

Розглянемо рівняння в просторі $L_2[a,b]$

$$x(t) = \lambda\int_a^b k(t,s)\, x(s)\, ds + f(t)$$

$$\rho^2(Ax, Ay) = \|Ax - Ay\|^2_{L_2[a,b]} =$$

$$= \cancel{\lambda^2 \int_a^b k^2(t,s)(x(s)-y(s))}$$

$$= \int_a^b \left(\lambda \int_a^b k(t,s)(x(s)-y(s))\, ds\right)^2 dt \le$$

(нер. К-Б) $\le \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b k^2\, ds \cdot \int_a^b (x(s)-y(s))^2 ds\right) dt =$

$$= \lambda^2 \underbrace{\int_a^b (x(s)-y(s))^2 ds}_{\rho^2} \cdot \int_a^b\int_a^b k^2(t,s)\, ds\, dt$$

$$\lambda^2 \iint k^2(t,s)\,ds\,dt = \alpha^2 < 1$$

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b k^2(t,s)\,ds\,dt}}$$

$$k(t,s) = e^{t-s}$$

$$\int_0^1\int_0^1 e^{(t-s)\cdot 2}\,ds\,dt = 1,38$$

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{1,38}} \approx 0,85 \qquad \lambda = \frac{1}{2} < 0,85$$

Приклади обчислення норм операторів

1) $A = \mathbb{1}$

$\mathbb{1} : X \to X$

$$\|\mathbb{1}\| = \sup \frac{\|\mathbb{1}\|}{\|x\|} = \sup \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

2) В l_2 оператор P_k $x(x_1, \dots x_n) \to$

$\to \tilde{x}(x_1, \dots x_k, 0, 0 \dots)$

Доведемо обмеженість

$$\|P_k \tilde{x}\| = \|\tilde{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \|x\|^2$$

$$\|P_k x\| / \|x\| \leq 1$$

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Нехай* $K(t,s)$ *– неперервна фнукція в прямокутнику* $[a,b]\times[a,b]$*. При якому* λ *оператор* $Ax(t)=\lambda\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds+\varphi(t)$, $\varphi(t)\in C_{[a,b]}$ *є оператором стиску в просторі* $C_{[a,b]}$.

Розв'язання. Оператор $Ax(t)$ є оператором стиску, якщо

$$(\exists\alpha\in(0,1))\ \left(\forall x(t),y(t)\in C_{[a,b]}\right):\ \rho(Ax,Ay)\le\alpha\rho\left(x(t),y(t)\right).$$

Справедливі такі співвідношення:

$$\rho\left(Ax,Ay\right)=\max_{a\le t\le b}\left|\lambda\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds+\varphi(t)-\lambda\int\limits_a^b K(t,s)y(s)ds-\varphi(t)\right|=$$

$$=\max_{a\le t\le b}\left|\lambda\int\limits_a^b K(t,s)\left(x(s)-y(s)\right)ds\right|\le\max_{a\le t\le b}|\lambda|\int\limits_a^b|K(t,s)|\,|x(s)-y(s)|\,ds\le$$

$$\le|\lambda|\,M\int\limits_a^b\max_{a\le s\le b}|x(s)-y(s)|\,ds=|\lambda|\,M\max_{a\le s\le b}|x(s)-y(s)|\,(b-a)=$$

$$=|\lambda|\,M\,(b-a)\,\rho(x,y).$$

В процесі даних оцінок ми використали те, що функція $K(t,s)$ є неперервна на замкненій обмеженій множині $[a,b]\times[a,b]$, тому вона є й обмежена на ній, тобто $\forall(t,s)\in[a,b]\times[a,b]$, $|K(t,s)|\le M$. Крім того врахували властивості інтегралів Рімана.

Таким чином, для того щоб $Ax(t)$ був оператором стиску достатньо, щоб $0<|\lambda|\,M\,(b-a)<1$, або $0<|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$.

Завдання 2. *Довести, що рівняння* $x(t)+\dfrac{1}{2}\cos x(t)+\varphi(t)=0$, *де* $x(t)$ *та* $\varphi(t)\in C_{[a,b]}$ *має єдиний розв'язок в* $C_{[a,b]}$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$-\frac{1}{2}\cos x(t)-\varphi(t)=x(t),$$

тоді якщо $Ax(t)=-\dfrac{1}{2}\cos x(t)-\varphi(t)$, то рівняння має вигляд

$$Ax(t)=x(t).\tag{1}$$

Оскільки метричний простір $C_{[a,b]}$ є повним, то існування і єдиність розв'язку операторного рівняння (1) випливає з теореми Банаха, оскільки A є оператором стиску, що є очевидним:

$$\rho\left(Ax(t), Ay(t)\right) = \max_{t\in[a,b]}\left|-\frac{1}{2}\cos x(t) - \varphi(t) + \frac{1}{2}\cos y(t) + \varphi(t)\right| =$$

$$= \max_{t\in[a,b]}\left|-\frac{1}{2}\cos x(t) + \frac{1}{2}\cos y(t)\right| = \max_{t\in[a,b]}\left|\sin\frac{x(t)+y(t)}{2}\cdot\sin\frac{x(t)-y(t)}{2}\right| \leq$$

$$\leq \max_{t\in[a,b]}\left|\sin\frac{x(t)-y(t)}{2}\right| \leq \max_{t\in[a,b]}\frac{1}{2}\left|x(t)-y(t)\right| = \frac{1}{2}\rho(x(t), y(t)).$$

В останньому ланцюжку перетворень ми використали нерівності $|\sin x| \leq |x|$ та $|\sin x| \leq 1$.

Таким чином для $\alpha = \dfrac{1}{2}$ оператор A є оператором стиску. Тому рівняння, що задане в умові, має єдиний розв'язок.

Завдання 3. *Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння задане в просторі* $C_{[0,1]}$:

а) $x(t) = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2x(s)ds + 1;$

б) $x(t) = \dfrac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t x(s)ds.$

Розв'язання. а) Спочатку перевіримо, чи є відображення

$$Ax(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2x(s)ds + 1$$

є стискаючим в просторі $C_{[0,1]}$:

$$\rho\left(Ax(t), Ay(t)\right) = \max_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2x(s)ds + 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2y(s)ds - 1\right| =$$

$$= \max_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2\left(x(s)-y(s)\right)ds\right| \leq \max_{0\leq t\leq 1}\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left|ts^2\right| \max_{0\leq s\leq 1}\left|x(s)-y(s)\right| ds =$$

$$= \max_{0\leq t\leq 1}\frac{1}{2}t\cdot\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1\cdot\rho\left(x(t), y(t)\right) = \frac{1}{6}\rho\left(x(t), y(t)\right).$$

Таким чином, застосування методу послідовних наближень до розв'язання інтегрального рівняння є можливим. Виберемо нульове наближення. Нехай $x_0(t) = 0$. Тоді

$x_1(t) = 1;$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2 ds + 1 = \frac{1}{2}t\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 + 1 = \frac{1}{6}t + 1;$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2\left(\frac{1}{6}s + 1\right)ds + 1 = \frac{1}{12}t\left.\frac{s^4}{4}\right|_0^1 + \frac{1}{2}t\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 + 1 = \frac{t}{3!}\left(1 + \frac{1}{8}\right) + 1;$$

$$x_4(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2\left(\frac{s}{3!}\left(1 + \frac{1}{8}\right) + 1\right)ds + 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{8} + 1\right)t\left.\frac{s^4}{4}\right|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{2}t\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 + 1 = \frac{t}{3!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2}\right) + 1.$$

За індукцією одержимо

$$x_n(t) = \frac{t}{3!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{8^{n-2}}\right) + 1.$$

Для знаходження розв'язку здійснимо граничний перехід:

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \frac{t}{3!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{8^n} + \ldots\right) + 1 =$$

$$= \frac{t}{3!}\frac{1}{1 - \frac{1}{8}} + 1 = \frac{t}{3!}\cdot\frac{8}{7} + 1.$$

б) Безпосередньою перевіркою (див. приклад а)) переконуємося в тому, що відображення $Ax(t) = \dfrac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t x(s)ds$ є оператором стиску. Тому для знаходження розв'язку інтегрального рівняння можемо застосовувати медод послідовних наближень. За нульове наближення виберемо $x_0(t) = 0$.

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + t = \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right) - 1\right] + \left[(1 + t) - t - 1\right].$$

$$x_2(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t\left(\frac{s^2}{2} + s\right)ds = \frac{t^2}{2} + t + \left.\left(\frac{s^3}{3!} + \frac{s^2}{2}\right)\right|_0^t = \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} =$$

$$= \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) - 1\right] + \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right) - t - 1\right].$$

$$x_3(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t \left(\frac{s^2}{2} + s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^2}{2!} \right) ds = \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^3}{3!} =$$

$$= \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \right) - 1 \right] + \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) - t - 1 \right].$$

$$x_4(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t \left(\frac{s^2}{2} + s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^3}{3!} \right) ds = \frac{t^2}{2} + t +$$

$$+ \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^4}{4!} =$$

$$= \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right) - 1 \right] + \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \right) - t - 1 \right].$$

Таким чином за індукцією отримаємо, що

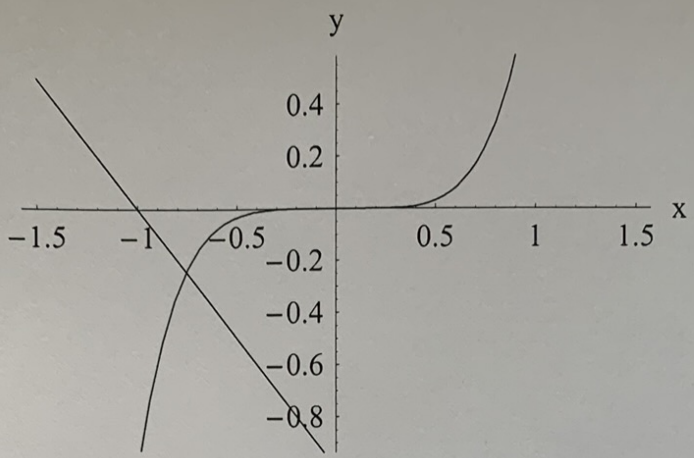
$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - t - 1.$$

Знайшовши границю $x_n(t)$, отримаємо розв'язок:

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - t - 1 = 2e^t - t - 2.$$

Завдання 4. *Довести, що рівняння $x^5 + x + 1 = 0$ має єдиний корінь та знайти проміжок, якому цей корінь належить. Звести рівняння до такого вигляду, щоб його можна було розв'язати методом послідовних наближень. Знайти кількість ітерацій необхідних для знаходження кореня з точністю, що не перевищує $0,01$.*

Розв'язання. Доведення існування і єдиності кореня здійснимо графічними міркуваннями. Перепишемо рівняння у вигляді $x^5 = -x - 1$. Намалюємо графіки функцій $y = x^5$ та $y = -x - 1$.



Мал. 1

З мал. 1 видно, що графіки мають єдину точку перетину, причому її абсциса $x \in (-1, 0)$.

Зобразимо рівняння у вигляді $x = x - \lambda\left(x^5 + x + 1\right)$ та підберемо параметр λ так, щоб формула $Ax = x - \lambda\left(x^5 + x + 1\right)$ визначала оператор стиску. Тоді, оскільки $\mathbf{R}$ є повним метричним простором, оператор A матиме єдину нерухому точку. Звідси випливатиме, що початкове рівняння має єдиний розв'язок.

Позначимо $g(x) = x^5 + x + 1$. Розглянемо рівності (врахувавши, що метрика в $\mathbf{R}$ визначається так: $\rho(x, y) = |x - y|$):

$$\rho\left(Ax, Ay\right) = |x - \lambda g(x) - y + \lambda g(y)| = |(x - y) + \lambda\left(g(y) - g(x)\right)| =$$

$$= \left|(x - y) - \lambda g'(z)\left(x - y\right)\right| = |x - y|\left|1 - \lambda g'(z)\right|.$$

Оскільки $g'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, функція $g(x)$ зростає на $[-1, 0]$, то $\min\limits_{x \in [-1,0]} g(x) = g(-1) = -1$, $\quad \max\limits_{x \in [-1,0]} g(x) = g(0) = 1$, тому вибравши $\lambda = \dfrac{1}{6}$, матимемо

$$\rho\left(Ax, Ay\right) = |x - y|\left|1 - \frac{1}{6}g'(z)\right| \le |x - y|\left|1 - \frac{1}{6} \cdot 1\right| = \frac{5}{6}|x - y| = \frac{5}{6}\rho(x, y).$$

Використаємо формулу

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\rho(Ax_0, x_0).$$

За нульове наближення виберемо $x_0 = 0$, тоді $Ax_0 = -\dfrac{1}{6}$, $\rho\left(Ax_0, x_0\right) = \dfrac{1}{6}$. Тому для знаходження кількості ітерацій залишається розв'язати нерівність

$$\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,01\,,$$

$$n > \log_{\frac{5}{6}} 0,01.$$

Найменший натуральний розв'язок останньої нерівності є шукана кількість ітерацій.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння в просторі* $C_{[a,b]}$:

1. $x(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,1];$
2. $x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(t-s) + \sin(t+s))\,x(s)\,ds + 1, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,\pi];$
3. $x(t) = 2^t + \int_0^t 2^{t-s} x(s)\,ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,1];$
4. $x(t) = 1 + t^2 - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1+t^2}{1+s^2} x(s)\,ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,1];$
5. $x(t) = t - \int_0^t (t-s)\,x(s)\,ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,1];$
6. $x(t) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 s\,x(s)\,ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,\pi];$
7. $x(t) = t^2 + \int_0^2 x(s)\,ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,2];$
8. $x(t) = 1 + \int_0^1 s^3 x(s)\,ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,1];$
9. $x(t) = 1 + \int_0^1 t^2 s^2 x(s)\,ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,1];$
10. $x(t) = 2\cos t - \dfrac{\cos t}{2\pi}\int_0^\pi t^2 s\,x(s)\,ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,\pi].$

Завдання 2. *Довести, що задане рівняння має єдиний корінь та знайти проміжок, якому цей корінь належить. Звести рівняння до такого вигляду, щоб його можна було розв'язати методом послідовних наближень. Знайти кількість ітерацій необхідних для знаходження кореня з точністю, що не перевищує* 0, 01, *якщо:*

1.	$x^3 + x - 3 = 0;$	**2.**	$x^5 + 2x - 1 = 0;$
3.	$x^7 + x - 4 = 0;$	**4.**	$x^5 + x - 5 = 0;$
5.	$x^3 + 3x - 1 = 0;$	**6.**	$x^5 + 3x - 2 = 0;$
7.	$x^5 + x + 4 = 0;$	**8.**	$x^3 + 3x + 3 = 0;$
9.	$x^5 + 6x + 1 = 0;$	**10.**	$x^5 + 10x - 1 = 0.$

зывают *последовательностью последовательных приближений*, или *итераций*, для отображения f.

Если отображение f непрерывно, а последовательность итераций $\{x_n\}$ для f сходится, то предел этой последовательности является неподвижной точкой отображения f (докажите это!).

Для сжимающего отображения f последовательные приближения образуют фундаментальную последовательность (докажите это!).

Теорема 7.1 (теорема Банаха, или принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение f полного метрического пространства имеет одну и только одну неподвижную точку, причем эта точка является пределом последовательных приближений для f, построенных при любом выборе начальной точки x_0.

Пример 7.3. Применим принцип сжимающих отображений для доказательства того, что при вычислении квадратного корня из любого положительного числа a можно использовать формулу последовательных приближений

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right),$$

где $x_0 \geq a$.

Рассмотрим метрическое пространство $X = \left[\sqrt{a}; \infty\right)$ с обычной метрикой. Это пространство полно, так как является замкнутым подпространством полного метрического пространства (см. упражнение 6.9). Отображение

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

переводит пространство X в себя (докажите это!) и является сжимающим, так как

$$\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) = \left|f(x_1) - f(x_2)\right| = \frac{1}{2}\left|x_1 - x_2\right|\left|1 - \frac{a}{x_1 \cdot x_2}\right|,$$

а при $x_1 \geq a$ и $x_2 \geq a$

$$0 < 1 - \frac{a}{x_1 \cdot x_2} < 1,$$

откуда $\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) \leq \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2)$.

По теореме Банаха существует единственная неподвижная точка рассмотренного отображения, т. е. единственное решение уравнения:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right), \\ x \geq \sqrt{a}, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{a},$$

при этом последовательность $\{x_n\}$ является последовательностью итераций для отображения f. Это доказывает сходимость данной последовательности к значению $\sqrt{a}$.

Пример 7.4. Докажем, что последовательность цепных дробей

$$2, \quad 2+\frac{1}{2}, \quad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}, \quad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}, \quad \ldots,$$

имеет предел, и найдем его.

Действительно, данная последовательность задается соотношением

$$x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad x_0 = 2$$

и является последовательностью итераций для отображения $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ полного метрического пространства $[2;\infty)$ в себя. Тогда имеем

$$\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) = \left|f(x_1) - f(x_2)\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq \frac{1}{4}\rho(x_1, x_2),$$

следовательно данное отображение – сжимающее.

По теореме Банаха найдется единственная неподвижная точка отображения f, причем эта точка является пределом соответствующей последовательности итераций. Получим предел этой последовательности:

$$\begin{cases} x = 2 + \dfrac{1}{x}, \\ x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 1 + \sqrt{2}.$$

Задачи и упражнения

7.1. Найдите неподвижные точки отображения $f(x)=x^2$ числовой прямой в себя.

7.2. Докажите, что отображение $f(x)=5x^2+2x+3-2\sin x$ числовой прямой в себя не имеет неподвижных точек.

7.3. Найдите неподвижные точки отображения $(x, y)\to(u, v)$, где

$$u=x(y-1)-2y^2+5y+x-3;\quad v=-x(y+1)+5,$$

где пространства $\mathbb{R}^2$ в себя.

7.4. Найдите неподвижные точки отображения $F(g)=g^2(t)-g(t)-t^2$ пространства $C[0;1]$ в себя.

7.5. Проверьте, отображает ли функция $f(x)=4x-4x^2$ промежуток $[0;1]$ в себя. Является ли это отображение сжимающим?

7.6. Является ли сжимающим отображение $f(x)=3+\dfrac{1}{x}$ промежутка $[3;\infty)$ в себя?

7.7. Является ли сжимающим отображение $f(x)=\sin x$ числовой прямой в себя?

7.8. Является ли сжимающим отображение $(x, y)\to(u, v)$, где

$$u=0,7x+0,8y;\quad v=0,2x-0,05y,$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ в себя, если $\mathbb{R}^2$ рассматривается как метрическое пространство с метрикой: а) ρ_2; б) ρ_1 (эти метрики введены в примерах метрических пространств на с. 12–13)?

7.9. Является ли сжимающим отображение $(x, y)\to(u, v)$, где

$$u=0,2x+0,4y+7;\quad v=-0,3x-0,6y-15,$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ в себя, если $\mathbb{R}^2$ рассматривается как метрическое пространство с нормой: а) ρ_2; б) ρ_1; в) ρ_0 (эти нормы введены в примерах метрических пространств на с. 12–13)?

7.10. Является ли отображение $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+x-\operatorname{arctg} x$ числовой прямой в себя сжимающим? Имеет ли оно неподвижные точки?

7.11. Докажите, что указанные ниже последовательности, заданные рекуррентными соотношениями, имеют пределы, и найдите их:

а) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}} \ (x_0 = 1)$;

б) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{3 - x_{n-1}} \ (x_0 = -5)$;

в) $x_n = \dfrac{5 + x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \ (x_0 = 5)$.

7.12. Докажите, что приведенные ниже последовательности имеют пределы, и найдите их:

а) $\sqrt{2}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \ldots;$

б) $\sqrt{3}, \quad \sqrt{3+\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \quad \ldots .$

7.13. Для определения точки орбиты, в которой находится спутник в указанный момент времени, приходится решать уравнение Кеплера

$$x - \varepsilon \sin x = m.$$

Докажите, что при любом m и $0 < \varepsilon < 1$ уравнение Кеплера имеет единственное решение и его можно найти методом последовательных приближений.

7.14. Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными вида

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Докажите, что если для этой системы выполняется хотя бы одно из условий:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^2 < 1$;

б) $\max\limits_{k} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}| < 1$;

в) $\max\limits_{i} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}| < 1$,