Тема 10. Нормы линейных функционалов и операторов

Определение 10.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$, $A\colon X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. *Нормой* оператора A называется величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|.$$

Справедливы равенства

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} =$$
$$= \inf\{K : \forall x \in X \quad \|Ax\| \leqslant K\|x\|\}.$$

Если в пространстве X существует элемент x такой, что $\|x\| = 1$ и $\|Ax\| = \|A\|$, то говорят, что норма A *достижима*, если же такого элемента не существует, норма A *недостижима*.

Пример 10.1. Оператор $A\colon C[0,2] \to C[0,2]$ задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\, ds.$$

Найти норму A, выяснить, является ли она достижимой.

Решение. Сначала оценим $\|A\|$ сверху:

$$\begin{aligned}\|Ax\| = \max_{t\in[0,2]} \left|\int_0^t x(s)\,ds\right| \leqslant \max_{t\in[0,2]} \int_0^t |x(s)|\,ds \leqslant \\ \leqslant \max_{t\in[0,2]} \max_{s\in[0,1]} |x(s)| \int_0^t 1\,ds = \max_{t\in[0,2]} \|x\| t = \|x\|\cdot 2.\end{aligned} \tag{10.1}$$

Таким образом, мы получили оценку $\|Ax\| \leqslant 2\,\|x\|$, следовательно $\|A\| \leqslant 2$. Если взять $x(t) \equiv 1$, все неравенства (10.1) обратятся в равенства. Значит, $\|A\| = 2$, норма достигается. ✌

√

Пример 10.2. Функционал $f\colon C[0,3] \to \mathbb{R}$ задан формулой

$$f(x) = \int_0^2 tx(t)\,dt - \int_2^3 tx(t)\,dt.$$

Найти норму f, выяснить, является ли она достижимой.

Решение. Мы можем записать f в виде

$$f(x) = \int_0^3 \varphi(t)\cdot x(t)\,dt, \quad \text{где} \quad \varphi(t) = \begin{cases} t, & t\in[0,2],\\ -t, & t\in(2,3].\end{cases}$$

Сначала оценим $\|f\|$ сверху:

$$\begin{aligned}|f(x)| = \left|\int_0^3 \varphi(t)\cdot x(t)\,dt\right| \overset{(*)}{\leqslant} \int_0^3 |\varphi(t)\cdot x(t)|\,dt \overset{(**)}{\leqslant} \\ \leqslant \max_{t\in[0,3]} |x(t)| \int_0^3 |\varphi(t)|\,dt = \|x\|\cdot\frac{9}{2}.\end{aligned} \tag{10.2}$$

Следовательно, $\|f\| \leqslant \dfrac{9}{2}$. Проанализируем, возможна ли ситуация, когда оба неравенства в (10.2) обратятся в равенство. Неравенство $(*)$ обращается в равенство, когда функция $\varphi(t)\cdot x(t)$ сохраняет знак п. в. на $[0,3]$, что для непрерывной функции x возможно, только если $x(t) \geqslant 0$, $t\in[0,2)$, и $x(t) \leqslant 0$, $t \in (2,3]$. Неравенство $(**)$ обращается в равенство, когда $|x(t)| = \text{const}$ на $[0,3]$. Таким образом, «идеальная» функция должна иметь вид

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,2), \\ -1, & t \in (2,3]. \end{cases}$$

Функция x не определена в точке $t = 2$. При этом ясно, что доопределить функцию x так, чтобы она стала непрерывной в этой точке, невозможно. Рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right], \\ n(2-t), & t \in \left(2 - \dfrac{1}{n}, 2 + \dfrac{1}{n}\right), \\ -1, & t \in \left[2 + \dfrac{1}{n}, 3\right]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\|x_n\| = 1$, а $|f(x_n)| \to \dfrac{9}{2}$ при $n \to \infty$. Поскольку

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geqslant |f(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{9}{2},$$

то $\|f\| \geqslant \dfrac{9}{2}$, а значит, $\|f\| = \dfrac{9}{2}$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что не существует такого элемента x, для которого $\|x\| = 1$ и $|f(x)| = \dfrac{9}{2}$, следовательно, норма не достигается.

Пример 10.3. Оператор $A\colon L_1[0,1] \to C[0,1]$ задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 (e^t + e^{-s})x(s)\,ds.$$

Найти норму A.

Решение. Сначала оценим $\|A\|$ сверху:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 (e^t + e^{-s})x(s)\,ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 (e^t + e^{-s})|x(s)|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0,1]} \max_{s\in[0,1]} (e^t + e^{-s}) \int_0^1 |x(s)|\,ds = (e+1)\|x\|.$$

Итак, $\|A\| \leqslant e+1$. Выражение $(e^t + e^{-s})$ достигает своего максимума по s в точке $s = 0$. Рассмотрим последовательность функций, сосредоточенных в окрестности 0:

$$x_n(s) = \begin{cases} 1, & s \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & s \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Ясно, что $\|x_n\| = \dfrac{1}{n}$. При этом

$$\|Ax_n\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^{\frac{1}{n}} (e^t + e^{-s})\,ds =$$
$$= \max_{t\in[0,1]} \left(\frac{e^t}{n} - e^{-1/n} + 1\right) = \frac{e}{n} - e^{-1/n} + 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{e}{n} - e^{-1/n} + 1\right) = e+1.$$

Таким образом, $\|A\| \geqslant e+1$. Оценка сверху и оценка снизу совпали, значит, $\|A\| = e+1$. ✌

☞ В задачах **10.1–10.8** вычислить норму функционала.

V **10.1.** $f(x) = \displaystyle\int_0^3 (s^3 - 9s)x(s)\,ds$,

а) $X = C[0,3]$; б) $X = L_1[0,3]$.

1.2 Задачи для самостоятельной работы

1.1. Показать, что линейный функционал F в банаховом пространстве X ограничен тогда и только тогда, когда гиперплоскость $\ker F$ замкнута в X.

1.2. Проверить, при каких A и B приведенные ниже функционалы линейны в $C[0,1]$: и найти их норму.

$$(a)\quad F : x \mapsto Ax(0) + B, \qquad \|F\| = A \quad (B=0)$$

$$(b)\quad F : x \mapsto \int_0^1 x(t)dt + Ax^2(0) + Bx(1), \qquad \|F\| = 1+|B| \quad (A=0)$$

$$(c)\quad F : x \mapsto A\int_0^1 x(t)dt + B|x(0)|,$$

$$(d)\quad F : x \mapsto \int_0^1 (Ax(t)+1)(x(t)+B)\,dt.$$

1.3. Пользуясь определением, проверить ограниченность линейных функционалов в $C[0,1]$

$$(a)\quad F : x \mapsto x(0), \qquad (b)\quad F : x \mapsto \int_0^1 (2t-1)x(t)dt,$$

$$(c)\quad F : x \mapsto \int_0^1 x(t)dt, \quad (d)\quad F : x \mapsto \int_0^1 \cos\pi t x(t)dt - x(1).$$

1.4. Найти нормы линейных функционалов в задаче 1.2 и проверить, достигаются ли они на функциях из $C[0,1]$.

1.5. Пусть $X = C^1[0,1]$ – нормированное пространство с нормой

$$\|x\|_X = x(0) + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|, \quad x \in C^1[0,1].$$

Показать, что линейный функционал $F : x \mapsto x(1)$ непрерывен в X.

1.6. Пусть X совпадает как множество с $C^1[0,1]$ и снабжено нормой

$$\|x\|_X = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|, \quad x \in C^1[0,1].$$

Показать, что линейный функционал $F : x \mapsto x'(0)$ не является непрерывным в X.

1.7. Проверить, является ли непрерывным функционал $F : x \mapsto x(1)$ в пространстве $\widetilde{L}_1(0,1)$ ($= C(0,1)$ как множество) с нормой $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$.

1.8. Пользуясь определением проверить ограниченность линейных функционалов в $L_1[0,1]$

$$(a)\quad F:\ x \mapsto \int_0^1 \frac{x(t)}{1+t}dt, \quad (b)\quad F:\ x \mapsto \int_0^1 \sin 2\pi t x(t)dt.$$

Достигается ли норма $\|F\|$ в $L_1[0,1]$?

Замечание. Если E — полное нормированное пространство, а

$$M_2 = \{x \in E : \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = +\infty\},$$

то $M_2 = E \setminus M_1$ и, так как (по теореме Бэра) E — множество второй категории, M_1 — также множество второй категории.

Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть E — линейное пространство, f — линейный функционал на нем и $\ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}$. Доказать, что если для линейных функционалов f_1 и f_2 справедливо равенство $\ker f_1 = \ker f_2$, то $f_1 = \lambda f_2$ при некотором λ.

Указание. Выбрать такой элемент x_0, что $f_1(x_0) = 1$ (если, конечно, $f_1 \neq 0$), и рассмотреть множество элементов y вида $y = x - f_1(x)x_0$, где $x \in E$.

2. Являются ли линейными, непрерывными в $C[0;\ 1]$ следующие функционалы:

а) $f(x) = \int_0^1 t^2 x(t)\,dt$; б) $f(x) = \int_0^1 t^2 |x(t)|\,dt$;

в) $f(x) = \max_{t\in[0;1]} |x^2(t)|$;

г) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha^k x(\alpha^k)\quad (0 < \alpha < 1)$?

3. Проверить линейность, непрерывность и найти нормы следующих функционалов:

а) $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \to \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\xi_k$ в l_1;

б) $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\xi_k$ в l_2;

в) $x = x(t) \to \int_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right)dt$ в $C[0;\ 1]$; $\|\ell\| = 1$

г) $x = x(t) \to \int_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right)dt$ в $L_2[0;\ 1]$. $\|\ell\| = 1$

4. Найти нормы следующих функционалов:

а) $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \to \sum_{k=1}^{\infty}[1 - (-1)^k]\,\frac{k-1}{k}\,\xi_k$ в l_1;

б) $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \to \xi_k$ (k — фиксировано) в l_2; $\|\ell\| = 1$

в) $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \to \xi_k - \xi_{k-1}$ (k — фиксировано) в l_2;

г) $x = x(t) \to \int_0^1 x(t)\cos \pi t\,dt$ в $C[0;\ 1]$;

д) $x = x(t) \to x(0) - x(-1) - x(1)$ в $C[-1;\ 1]$; $\|\ell\| = 3$

е) $x = x(t) \to \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,dt$ в $L_2[0;\ 1]$.

5. Найти норму функционала $f(x) = \int_{-1}^{1} t x(t)\,dt$ в пространствах:

а) $C[-1;\ 1]$; б) $L_2[-1;\ 1]$; в) $L_1[-1;\ 1]$.

Додатково $\ell(x) = \int_0^1 t^{2/3} x(t)\,dt$, $x(t) \in C[0;1]$, $\|\ell\|$ - ? $\left(\|\ell\| = \frac{3}{5}\right)$

Довести, що оператори є лінійними обмеженими та знайти їх норми.

а) $A\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau;$ $\|A\| = 1$

б) $A\colon C[-1,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = x(t);$ $\|A\| = 1$

в) $A\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = t^2 x(0);$ $\|A\| = 1$

г) $A\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = x(t^2);$

д) $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b], \quad Ax(t) = x(t);$

е) $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b], \quad Ax(t) = \dfrac{dx}{dt};$ $\|A\| = 1;$ $x_n(t) = t^n$

ж) $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = t\int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau;$ $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

з) $A_\lambda\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad A_\lambda x(t) = \begin{cases} x(t), & t \leqslant \lambda,\ \lambda \in (0,1), \\ 0, & t > \lambda,\ \lambda \in (0,1); \end{cases}$

и) $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau;$

к) $A\colon H^1[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = x(t);$

л) $A\colon H^1[0,1] \to H^1[0,1], \quad Ax(t) = tx(t);$

м) $A\colon H^1[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = tx(t).$

7.13. Будет ли ограниченным оператор $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = dx/dt$, с областью определения L — линейным многообразием непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций?

7.14. Будет ли ограниченным оператор $A\colon H^1[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = dx/dt$?

7.15. Для каких функций $\varphi(t)$ оператор $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ будет ограничен, если он рассматривается как действующий:

а) из $C[0,1]$ в $C[0,1]$; б) из $\widetilde{L}_2[0,1]$ в $\widetilde{L}_2[0,1]$?

7.16. Доказать, что оператор $A\colon C^k[a,b] \to C[a,b]$,

$$Ax(t) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(t)\,x^{(i)}(t),$$

где функции $\varphi_i(t)$ для $i = 0, 1, \ldots, k$ непрерывны на $[a,b]$, является ограниченным.

7.17. Пусть e_n $(n \in \mathbf{N})$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, $\lambda_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$. Доказать, что если последовательность λ_n ограничена, то равенства $Ae_n = \lambda_n e_n$ $(n \in \mathbf{N})$ определяют ограниченный линейный оператор $A\colon H \to H$ с $D(A) = H$ и $\|A\| = \sup\limits_n |\lambda_n|$.

7.18. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства $A\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор с $D(A) = X$. Всегда ли существует $x \in X$, $x \neq 0$ такое, что $\|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|$?