2) Якщо функція f кусково монотонна і обмежена на відрізку $[a, b]$ то маємо поточкову збіжність ряду (5) до функції f,

$$(x) = \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$$

де $S(x)$ – сума (5)

$S(x) = f(x)$ в точках неперервності $f(x)$

Системи диференціальних рівнянь

Означення:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, \ldots y_n) \\ \ldots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \ldots y_n) \end{cases} \quad (2)$$

Система співвідношень, де x – незалежна змінна $y_1, y_2 \ldots y_n$ невідомі функції, називається нормальною системою диференціальних рівнянь порядку n.

Систему д.р. де входить похідні вищих порядків, можна завжди зовнішньо звести до системи (1), а тому далі будемо розглядати системи виду (1)

Поряд з системою (1) розглядаємо рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) \quad (2)$$

вони тісно пов'язані між собою.
Рівняння (2) можна завжди звести до системи (1), а систему (1) при певних припущеннях до рівняння (2)

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y_1 = y(x); \; y_2 = y'(x)$$

$$\begin{cases} y_2' = f(x, y_1, y_2) \\ y_1' = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases} \Big| \cdot \frac{d}{dx}$$

$$y_1'' = (f_1)'_x + (f_1')_{y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + (f_1)'_{y_2} \frac{dy_2}{dx} =$$

$$= (f_1)'_x + (f_1)'_{y_1} \cdot y_1' + (f_1)'_{y_2} \cdot y_2'$$

$$y_2 = \varphi_1(x, y_1, y_2')$$

Тоді $y_2' = f_2(x, y_1, \varphi_1(x, y_1, y_1')) = F_2(x, y_1, y_1')$

$y_1'' = F_1(x, y_1, y')$

Приклад:

$$\begin{cases} y' = x + y + z \\ z' = -4y - 3z + 2x \end{cases}$$

$y = y(x)$ $z = z(x)$ – невідомі

x – змінна.

$$y'' = 1 + y' + z' = 1 + y' + (-4y - 3z + 2x) =$$

$$= 1 + y' - 4y - 3(y' - x - y) + 2x =$$

$$= 1 + y' - 4y - 3y' - 3x - 3y + 2x$$

$$y'' + 2y' + y = 5x + 1$$

$\to$ $y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + f(x)$

підставити в ~~(2)~~ перше

і знаходимо z

Сталих тільки дві

Означення:

Сукупність неперервно диф. на (a,b) функцій $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ які перетворюють кожне рівняння системи (1) на тотожність називається розв'язком системи (1)

Розглянемо параметрично задану криву на просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ $x \in (a,b)$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y_1(x) \\ \vdots \\ x_n = y_{n-1}(x) \\ x_{n+1} = y_n(x) \end{cases}$$

Нехай $\varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)$ – розв'язок системи (1), тоді крива

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \varphi_1(x) \\ \vdots \\ x_{n+1} = \varphi_n(x) \end{cases} \quad (3)$$

- це буде графік розв'язку системи (1), або інтегральна крива

Перепишимо систему (1) у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{f_1} = dx \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{f_n} = dx \end{cases} \quad (1')$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{d\varphi_1}{f_1} = \ldots = \frac{d\varphi_n}{f_n}$$

$\vec{a}\,(dx, d\varphi_1, \ldots d\varphi_n)$ - вектор дотичний до інт. кривої

він колінеарний з $(1, f_1, \ldots f_n)$, тому якщо кожній точці з області $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ поставити у відповідність $(1, f_1, f_2 \ldots f_n)$

$$\begin{bmatrix} (x_1, \ldots x_{n+1}) \in G \\ f_1(x_1, \ldots x_{n+1}), \ldots, f_n(x_1, \ldots x_{n+1}) \end{bmatrix}$$

то отримаємо векторне поле напрямів, таким чином розв'язати систему (1) означає знайти такі гладкі криві в просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ дотичні до яких у кожній точці мають напрями векторного поля (1). Задача Коші для системи (1) полягає у знаходженні розв'язку який проходить через задану точку:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y_1(x_0) = y_{10} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases} \quad (4)$$

Точка $(x_0, y_{10}, \ldots y_{n0})$ в $\in G \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Задача Коші, це (1) + (4)

Теорема Пікара

Існування і єдиності розв'язку задачі Коші для нормальної системи (1)

Нехай функції $f_1(x, y_1, \dots y_n)$ і т.д. … $f_n(x_1, y_1, \dots y_n)$ визначені в деякій області $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ неперервні в усій області та задовольняють умову Ліпшиця по змінних $y_1, \dots y_n$, тобто існує така константа:

$\exists L > 0 \quad \forall (x, \bar{y}_1, \dots \bar{y}_n), (x, \bar{\bar{y}}_1, \dots \bar{\bar{y}}_n) \in G$

$|f_k(x, y_1, \dots y_n) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \dots \bar{\bar{y}}_n)| \leq \quad \forall k = 1..n$

$\leq L \cdot \sum_{i=1}^{n} |\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i|$

тоді система (1) для довільної точки $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in G$ має єдиний розв'язок $y_1 = \varphi_1(x), \dots y_n = \varphi_n(x)$, що задовольняє початкові умови (4) і визначений в деякому околі точки x_0.

Доведення аналогічне одному рівнянню.

Нормальні лінійні системи д-р.

Система вигляду:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (1)$$

називається нормальною лінійною системою д-р.

$a_{ij}(x)$ - коефіцієнти, $b_i(x)$ - вільні члени

$y_1, \ldots y_n$ - невідомі функції

Якщо всі $\forall b_i(x) \equiv 0$ то (1) називається ЛОС

Якщо $\exists k : b_k(x) \neq 0$ то (1) ЛНС

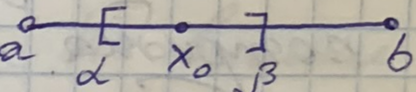
Якщо всі коефіцієнти та вільні члени є неперервними на (a, b) функціями, то система (1) задовольняє умови т. Пікара в смузі $[\underbrace{\alpha, \beta}_{x}] \times \underbrace{\mathbb{R}}_{y_1} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{y_2} \times \ldots \times \underbrace{\mathbb{R}}_{y_n} =$

$= [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$

де $[\alpha, \beta] \subset (a; b)$

Таким чином система (1) має єдиний розв'язок для довільних початкових умов $x_0 \in (a,b)$,

$$y_1(x_0) = y_{10} \in \mathbb{R}$$
$$\vdots$$
$$y_n(x_0) = y_{n0} \in \mathbb{R}$$



Причому цей розв'язок буде єдиний на всьому інтервалі (a,b)

ЛНС та ЛОС зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n \end{cases} \quad (2)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

функції   функції   сталі $b_1, \ldots b_n$ - функ.

$Y' = AY + B$ - ЛНС

$Y' = AY$ - ЛОС

Для ЛОС $\exists$ фунд. система розв'язків

$Y_1(x), \dots Y_n(x)$

$Y_{\text{заг ЛОС}} = C_1 Y_1(x) + \dots + C_n Y_n(x)$, $C_1, \dots C_n \in \mathbb{R}$

Для побудови загального розв'язку потрібно побудувати ФСР.

Будемо шукати розв'язки ЛОС у вигляді: $Y = e^{\lambda x} \cdot H$ де $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

λ - невідома

невідомий вектор

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ h_n e^{\lambda x} \end{pmatrix}}_{e^{\lambda x} \cdot H}$$

; $Y = e^{\lambda x} \cdot H$ в ЛОС

для цього:

$$Y' = \begin{pmatrix} \lambda h_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ \lambda h_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda x} \cdot H$$

$$\lambda e^{\lambda x} H = A e^{\lambda x} \cdot H$$

$$\lambda H = A H$$

$$(A - \lambda I) H = 0 \qquad (3)$$

Коли потрібні ненульові розв'язки системи (3) ; (3) - має ненульові розв'язки $\Leftrightarrow$ $\underline{\det(A - \lambda \bar{I}) = 0}$ (4)

Тобто, тоді λ - буде власним числом матриці A, а H - власним вектором.

Задача побудови ФСР для ЛОС звелась до знаходження власних чисел і власних векторів матриці A.

Розглянемо $\det(A - \lambda \bar{I}) = 0$:

1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ - різні, тоді маємо n - власних векторів $H_1 \ldots H_n$ - лін. нез.

отже маємо ФСР ЛОС $\{H_1 e^{\lambda_1 x}, \ldots H_n e^{\lambda_n x}\}$

$Y_{заг\,лос} = C_1 H_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots C_n H_n e^{\lambda_n x}$; $C_1, \ldots C_n \in \mathbb{R}$.

Зауваження:

Коли $\lambda_k = a + bi$, комплексне

$\bar{\lambda}_k = a - bi$

H_k - власний вектор $\quad \bar{H}_k$ вл. вектор,

Тоді у ФСР увійдуть функції $Y_k(x) = e^{(a+bi)x} H_k$,

$\bar{Y}_k(x) = e^{(a-bi)x} \bar{H}_k$

Замінимо Y_k і $\bar{Y}_k$ на їх лінійні комбінації ще дійсними функціями.

$$\Phi_k := \frac{Y_k(x) + \bar{Y}_k(x)}{2} = Re(Y_k(x))$$

$$\Phi_{k+1} := \frac{Y_k(x) - \bar{Y}_k(x)}{2i} = Im(Y_k(x))$$

$$\begin{cases} x' = y + z - x \\ y' = -x - y \\ z' = -3x - z \end{cases} ; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$-(\lambda+1)^3 - 4(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \qquad \lambda_3 = -1$$

$$\lambda_1 = -1 + 2i$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2i \cdot a + b + c = 0 \\ -a - 2i\, b = 0 \\ -3a - 2i\, b = 0 \end{cases}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$Y_1(x) = e^{(-1+2i)\cancel{t}} \cdot \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t}(\cos(2t) + i\sin(2t))\begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) + 2i\cos(2t) \\ -\cos(2t) - i\sin(2t) \\ -3\cos(2t) - 3i\sin(2t) \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ -\cos(2t) \\ -3\cos(2t) \end{pmatrix} + ie^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ -\sin(2t) \\ -3\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Y_3(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

В-дь:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \vdots \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \vdots \end{pmatrix} +$$

$$+ C_3 e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) Серед власних значень матриці A є кратні, але кожному кратному власному значенню відповідає стільки власних векторів яка кратність цього значення.