9.10.2019

ЛНС

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)\,y_1 + \dots + a_{1n}(x)\,y_n + b_1(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}(x)\,y_1 + \dots + a_{nn}(x)\,y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (1)$$

$$Y'(x) = A(x)\cdot Y(x) + B(x) \quad (2)$$

A - стала матриця

(!) $Y_{\substack{\text{заг.}\\\text{неод.}}}(x) = Y_{\substack{\text{заг.}\\\text{одн.}}}(x) + Y_{\text{чн.}}(x) = \underbrace{C_1 Y_1(x) + \dots + C_n Y_n(x)}_{\text{ФСР}} + Y_{\text{чн.}}(x)$

$C_1, C_2, \dots C_n$ - довільні сталі.

ЛНС - 2-го порядку

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + b_1(x) & (3) \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + b_2(x) & (4) \end{cases}$$

З (3) $\Rightarrow y_2 = \dfrac{y_1' - a_{11} y_1 - b_1(x)}{a_{12}}, \; a_{12} \neq 0$

$$y_2' = \frac{y_1'' - a_{11} y_1' - b_1'(x)}{a_{12}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в (4)

Метод варіації довільних сталих розв'язування ЛНС довільного порядку

$$Y' = AY + B \quad ЛНС$$

1) Розв'язання ЛОС: $Y' = AY \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_{заг. одн} = C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n$;

$\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ – ФСР

2) Шукаємо загальний розв'язок ЛНС у вигляді: $Y = C_1(x) Y_1 + \ldots + C_n(x) Y_n$,

де $C_1(x) \ldots C_n(x)$ – невідомі функції.

Далі цього шукаємо Y' і підставляємо в ЛНС

$$Y'_{з.о.} = C_1' Y_1 + \ldots + C_n' Y_n + C_1 Y_1' + \ldots + C_n Y_n'$$

$$C_1' Y_1 + \ldots + C_n' Y_n + C_1 Y_1' + \ldots + C_n Y_n' =$$

$$= A(C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n) + B$$

$$C_1' Y_1 + \ldots + C_n' Y_n + \underline{C_1 Y_1'} + \ldots + \underline{\underline{C_n Y_n'}} = \underline{C_1 A Y_1} + \ldots + \underline{\underline{C_n A Y_n}} + B$$

$$C_1' Y_1 + \ldots + C_n' Y_n = B$$

$$\begin{pmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

стовпчики лін. незалежні, отже $\det \neq 0$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} \Rightarrow \text{інтегруємо} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1(x) \\ \vdots \\ C_n(x) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ підставляємо в (5)

Фазові портрети автономних систем

Означення:

Система вигляду

$$(1) \begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}, \quad \text{де } x = x(t),\ y = y(t)$$

невідомі функ.

$t \in [\alpha, \beta]$ (t - час)

називається автономною системою.

Зауваження:

В системі (1) праві частини рівнянь незалежать явно від t.

Точка з координатами $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ буде описувати на площині XOY деяку криву

В цьому випадку XOY називають фазовою площиною, а криву $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$,

$\left(\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{- розв'язки (1)} \right)$

фазовою кривою системи (1)

Сукупність всіх фазових кривих системи (1) називається фазовим портретом. Зазначимо, що в області XOY, де виконуються теорема існування і єдиності розв'язки задачі Коші для системи (1), через кожну точку області проходить <u>єдина</u> фазова крива.

Покажемо, що систему (1) можна звести до д.р. першого порядку.

$$\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = x'dt \\ dy = y'dt \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Припустимо, що $P(x,y) \neq 0$

Тоді $\frac{y'}{x'} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P} \Rightarrow$

$\Rightarrow P dy = Q dx \Rightarrow P dy - Q dx = 0$ (2)

<u>Зауваження:</u>

Якщо в деякій області площини XOY одночасно P і $Q \neq 0$ і є неперервними, то в цій області кожна фазова крива системи (1) є інтегральною кривою рівняння (2) і навпаки.

Означення:

Точка (x_0, y_0), де $\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0 \\ Q(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$!

називається особливою точкою системи ~~один~~ (1) і д. р. (2).

Розглянемо систему (1) де

$x = x_0$, $y = y_0$ (тоді $P = 0$ і $Q = 0$)

$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$ Отже, $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ =>

=> сталий р-ок системи (1)

Сталий розв'язок $\overbrace{\text{автономної системи (1),}}$ називають її

положенням рівноваги. [~~Лінійна однорідних систем та поведінки розв'язків біля положення рівноваги~~]

23.10.2019

$$\begin{cases} x' = a_{11} x + a_{12} y \\ y' = a_{21} x + a_{22} y \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y = 0 \\ a_{21} x + a_{22} y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Розглянемо спочатку лінійні однорідні системи другого порядку зі сталими коефіцієнтами і вивчимо поведінку розв'язків біля положення рівноваги. Це положення знаходимо з сис-ми (4).

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ Випадки: 1) $\det A \neq 0$
$(x, y) = (0,0)$

2) $\det A = 0$ система має безліч розв'язків, тобто (3) має безліч положень рівноваги.

Будемо досліджувати поведінку системи (3) біля її положень рівноваги, зробимо це графічно за допомогою побудови фазових портретів. Класифікація положень рівноваги визначається власними числами матриці A.

бо розв'язки сис-ми (3) записуються через вл. числа та вл. вектори

$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} = 0$

$$\lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\operatorname{tr} A}\lambda + \underbrace{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}_{\det A} = 0$$

Нехай $\det A \neq 0 \Rightarrow O(0,0)$ - маємо єдине положення рівноваги.

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Для визначеності нехай $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

Запишемо загальний розв'язок системи (3)

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \underbrace{\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}}_{V_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \underbrace{\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix}}_{V_2},$$

V_1, V_2 - вл. вектори

При $t \to +\infty$ $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(бо $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 < 0$).

В цьому випадку всі розв'язки прямують до положення рівноваги.

Уточнимо напрями фазових траєкторій.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} V_{21} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} V_{22}}{C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} V_{11} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} V_{12}} =$$

$$= \frac{C_1 \lambda_1 V_{21} + C_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t} V_{22}}{C_1 \lambda_1 V_{11} + C_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t} V_{12}} \xrightarrow[t \to +\infty]{(C_1 \neq 0)} \frac{V_{21}}{V_{11}}$$

Фазові траєкторії при $t \to +\infty$ стають паралельні до вектора $\underline{V_1}$.

$C_1 = 0 \quad y'_x = \frac{V_{22}}{V_{12}}$

$(C_2 \neq 0)$

Фазові траєкторії паралельні вектору V_2

$V_2 \quad \begin{cases} x(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} V_{12} \\ y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} V_{22} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{V_{22}}{V_{12}} \Rightarrow$

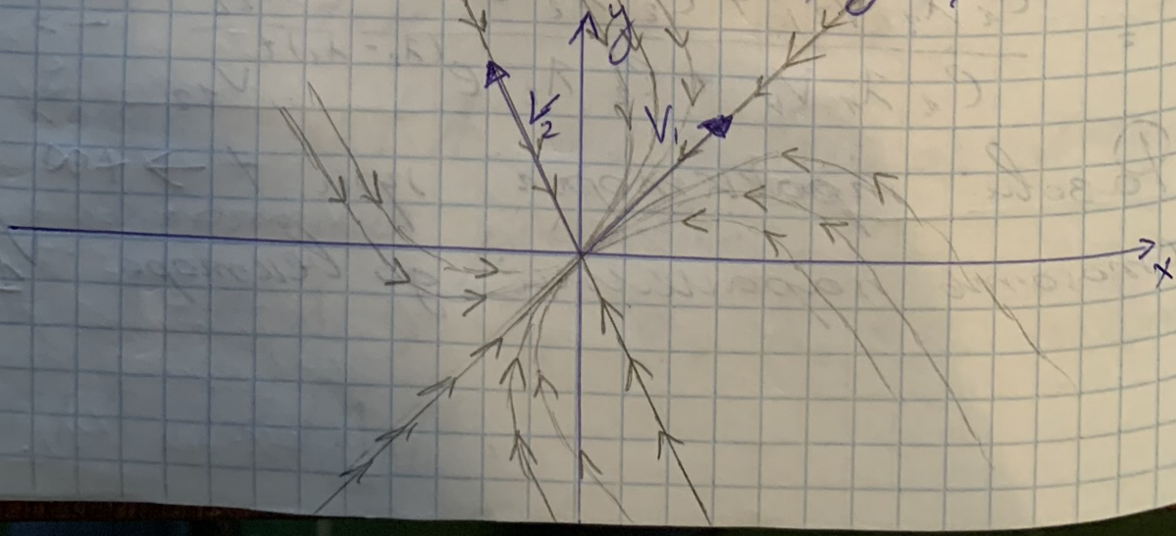
$\Rightarrow y = \frac{V_{22}}{V_{12}} x$ — фазова траєкторія

$(t \to -\infty) \quad y'_x = \frac{C_1 \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} V_{11} + C_2 \lambda_2 V_{12}}{C_1 \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} V_{21} + C_2 \lambda_2 V_{22}} \to$

$\underset{\substack{t \to -\infty \\ (C_2 \neq 0)}}{\longrightarrow} \frac{V_{12}}{V_{22}}$, $\Rightarrow$ фазові траєкторії $\parallel$ вектору V_2

$C_2 = 0 \quad \begin{matrix} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_{11} \\ y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_{21} \end{matrix} \Rightarrow y = \frac{V_{21}}{V_{11}} x$

пряма паралельна вектору V_1



V_1 - власний вектор, у якого вл. значення менше за модулем

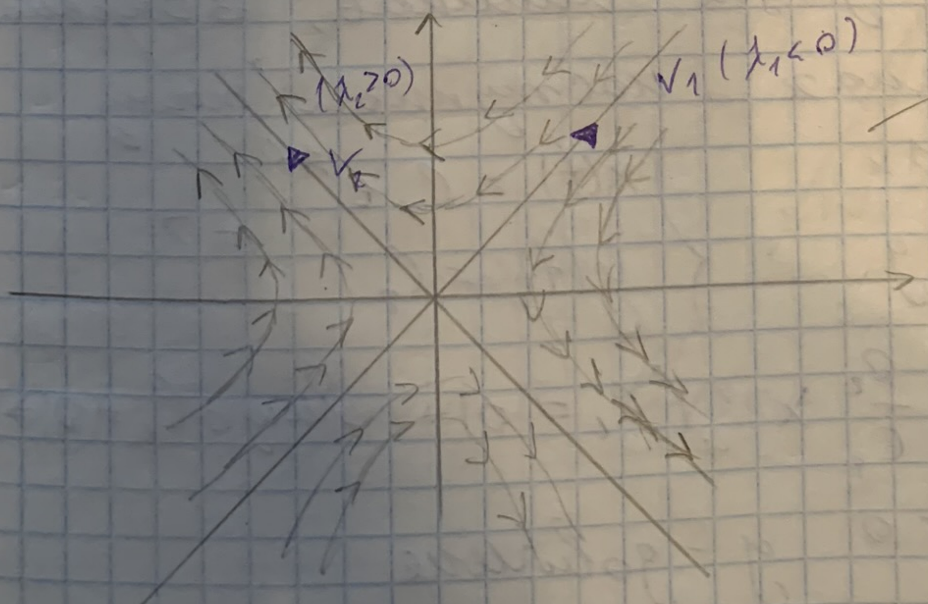
В даному випадку точку (0,0) - називають стійким вузлом

2) λ_1, λ_2 - дійсні и різні і обидва додатні

Все те ж саме, тільки стрілки буду направлені від (0,0) і це точка буде називатися нестійким вузлом

3) $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

Нехай $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$



наз. Сідло

Фазові портрети автономних систем в околі положення рівноваги.

Система вигляду

$$(1)\quad \begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases} \qquad x=x(t),\ y=y(t) \quad t\in(\alpha;\beta)$$

праві частини якої явно не залежать від t називається автономною системою 2-го порядку.

Змінні $x=x(t)$ і $y=y(t)$ змінюються з плином часу t згідно з системою (1). Отже, кожному стану сис-ми в момент часу t відповідає точка (x,y) на коорд. площині. Така площина наз. *фазовою площиною*. ~~Сукупність всіх точок M(x(t),y(t))~~

Лінію, що описує точка $M(x(t),y(t))$, де $(x(t),y(t))$ – р-к сис-ми (1) називають *фазовою кривою* цієї сис-ми, або траєкторією ~~початкової~~ точки $(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$, $t_0\in(\alpha;\beta)$. Сукупн. фазових кривих – *фаз. портрет*.

Сис-му (1) можна звести до ДР 1-го порядку.

$$\frac{y'}{x'} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \Rightarrow y'_x = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \Rightarrow P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0. \quad (2)$$

Якщо P і Q одночасно $\neq 0$ в деякій обл. $D\subset R^2$ і є неперер., то кожна фазова крива сис-ми (1) є інтегр. кривою р-ня (2) і навпаки.

Озн. Точку (x_0,y_0) в якій $P(x_0,y_0)=0$ і $Q(x_0,y_0)=0$ наз *особливою точкою* д.р. (2).

Якщо (x_0,y_0) – особлива точка, то $x=x_0$ і $y=y_0$ є сталий р-к сис-ми (1).

Сталий р-к автономної сис-ми (1) називають її *положеннями рівноваги*.

Розглянемо спочатку лінійні однор. сис-ми 2-го пор. зі сталими коефіцієнтами. (2)

$$(3)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Положення рівноваги визначаються розв'язками сис-ми $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$

Позначимо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

~~Припустимо, що~~ Якщо $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Тоді у сис-ми (3) єдине положення рівноваги т. $O(0;0)$. Якщо $\det A = 0$, то у сис-ми безліч. положень рівноваги. Будемо досліджувати поведінку р-нь (3) в околі положення рівноваги. Зробимо це графічно за доп. побудови фазових портретів.

Класифік. положень рівноваги визначається вл. числами матр. A.

Ці числа знах. з р-ня $\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}A\cdot\lambda + \det A = 0.$$

Розглянемо випадки.

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Для визначеності $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

Заг. р-к сис-ми буде $X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2$,

$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$ $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ – вл. вект. матр. A.

При $t \to +\infty$ $X(t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (оск. $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$). Уточнимо напрямок фаз. траєкт.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1 e^{\lambda_1 t} v_{21} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}}{c_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{12}} = \frac{c_1 v_{21} + c_2 \overbrace{e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}^{\to 0} v_{22}}{c_1 v_{11} + c_2 \underbrace{e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}_{\to 0} v_{12}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{v_{21}}{v_{11}} \quad (c_1 \neq 0)$$

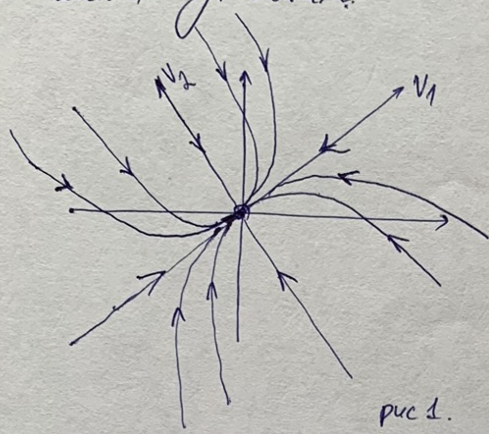
тобто, при $t \to +\infty$ фазові траєкт. стають $\parallel$ вектору $\vec{V}_1$.

У випадку $c_1 = 0$ маємо $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v_{22}}{v_{12}}$ $\forall t \Rightarrow$ траєкт. лежить на прямій $\parallel \vec{V}_2$.

Тепер $t \to -\infty$. $c_2 \neq 0$ $\dfrac{dy}{dx} \to \dfrac{v_{22}}{v_{12}}$, тобто траєкт. стають $\parallel \vec{V}_2$

$c_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v_{21}}{v_{11}}$ $\forall t \Rightarrow$ траєкт. лежить на прямій $\parallel \vec{V}_1$.

З вигляду р-ків випливає, що в усіму випадку при $t \to +\infty$, тобто маємо $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$. Тобто точки по траєкт. рухаються до положення рівноваги.



V_1 – той у якого вл. знач. менше за модулем.

рис 1.

стійкий вузол.

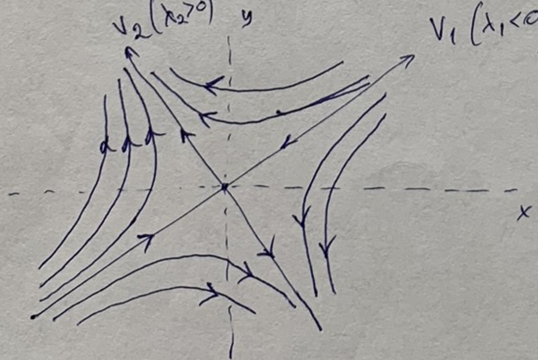
т. $(0;0)$ – сток

2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$

Все те саме, тільки стрілки навпаки. Нестійкий вузол. Джерело.

3) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (різних знаків)

Нехай $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$.



гіперболічного типу траєкторії

наближаються до тієї прямої що відповідає додатному власн. числу.

седло