Лінійні непер. функціонали в Гільбертовому просторі:

Теорема Рісса:

(Про загальний вигляд лін. непер. функціонала в гільб. просторі)

Нехай H – гільб. простір, для $\forall a \in H$ функціонал $l_a(x) := (x, a)$ (1) є лінійним і неперервним і $\|l_a\| = \|a\|_H$ $\forall x \in H$

Навпаки, $\forall l$ на H (тобто $l \in H'$) існує єдиний елемент $\exists! a \in H$, такий, що $l = l_a$ (тобто $l(x) = (x, a)$)

Доведення:

Лінійність l_a випливає з властивості скалярного добутку, а обмеженість з нерівності К-Б.

$|l_a(x)| = |(x, a)| \leq \|x\|_H \cdot \|a\|_H$

при $x = a$ маємо "=" $\overset{\text{"C"}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \|l_a\| = \|a\|_H$.

Навпаки, Нехай $l \in H'$. Якщо $l \equiv 0$,

тоді $l = l_0 = (x, 0)$

Нехай $l \neq 0$

Розглянемо $\ker l \neq H$ і розглянемо $(\ker l)^{\perp}$, покажемо, що вимірність $\dim (\ker l)^{\perp} = 1$

Беремо довільні e_1 і $e_2 \in (\ker l)^{\perp}$ - покажемо їх лінійну залежність (це означатиме, що $\dim(\ker l)^{\perp} \leq 1$).

Позначимо $\alpha_1 := l(e_1)$, $\alpha_2 := l(e_2)$

Розглянемо $l(\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2) =$

$= \alpha_2 \, l(e_1) - \alpha_1 \, l(e_2) = \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow (\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2) \in \ker l.$

Оскільки $(\ker l)^{\perp}$ - підпр. і $e_1, e_2 \in (\ker l)^{\perp}$, то

лін комб $\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2 \in (\ker l)^{\perp}$

$(\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2) \in (\ker l) \cap (\ker l)^{\perp} = \{0\}$

$\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2 = 0 \Rightarrow e_1$ і e_2 - лін. зал. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim (\ker l)^{\perp} \leq 1$

Оскільки $\ker l \neq H$, то $\dim(\ker l)^{\perp} \geq 1$ $\Bigg\} \Rightarrow \dim (\ker l)^{\perp} = 1.$

З теореми про ортогональний розклад буде витікати: $\forall x \in H$:

$x = g + h$, $g \in \ker l$, $h \in (\ker l)^{\perp}$

Нехай $\{e\}$ – базис в $(\ker l)^{\perp}$

Тоді $x = g + \lambda e$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $h = \lambda e$.

Розглянемо $l(x) = l(g + \lambda e) =$

$= \underset{\substack{\parallel \\ 0\ (g \in \ker l)}}{l(g)} + \lambda l(e) = \lambda l(e)$ (2)

Розглянемо $(x, e) = (g + \lambda e, e) =$

$= \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{(g, e)} + \lambda \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{(e, e)} = \lambda$

$\lambda = (x, e)$ (3)

З (2) та (3): $l(x) = l(e) \cdot (x, e) =$

$= (x, \overline{l(e)} \cdot e)$ (4)

Покладемо $a := \overline{l(e)} \cdot e \Rightarrow l(x) = (x, a)$

$l(x) = (x, a)$, де $a = \overline{l(e)} \cdot e$. Довели існування такого a, що $l(x) = (x, a)$.

<u>Єдиність</u>:

Нехай $l(x) = (x, a)$ і $l(x) = (x, b)$ $\forall x \in H$

$(x, a) = (x, b) \Leftrightarrow (x, a - b) = 0$

Візьмемо $x = a - b$

$(a-b,\ a-b) = 0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$ ■

10:30 – 11:30

–25 – 11:15

Зауваження:

Нехай H – дійсний гільбертів простір, H' – спряжений простір (простір лін. неперервних функціоналів). $\forall l \in H' \ \exists!\, a \in H$:

$l(x) = (x, a) \ \forall x \in H$. Маємо відповідність: (взаємнооднозначну)

(5) $\underset{\in H'}{l} \longleftrightarrow \underset{\in H}{a} \Rightarrow H' \simeq H$

Відповідність (5) є лінійною, якщо H – дійсний: тобто $\forall l_1, l_2 \in H'$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha l_1 + \beta l_2 \leftrightarrow \alpha a_1 + \beta a_2$.

Якщо H – комплексний, то відповідність антилінійна:

$f \in H'$, то функ-лу $\alpha f \leftrightarrow \bar{\alpha} \cdot a$

Приклад: l_2 – дійсний (комплексний)

1) $\forall l \in (l_2)'$ $\exists!\, a\ (a_1, a_2, \dots) \in l_2$

$l(x) = (x, a) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \bar{a}_k$; $\|l\| = \|a\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2}$.

2) $L_{2[a,b]}$ $\forall l \in (L_{2[a,b]})'$

$\exists!\, a(t) \in L_{2[a,b]}$: $l(x(t)) = \int\limits_a^b x(t)\overline{a(t)}\,dt$.

$\|l\| = \|a\| = \left(\int\limits_a^b |a(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.