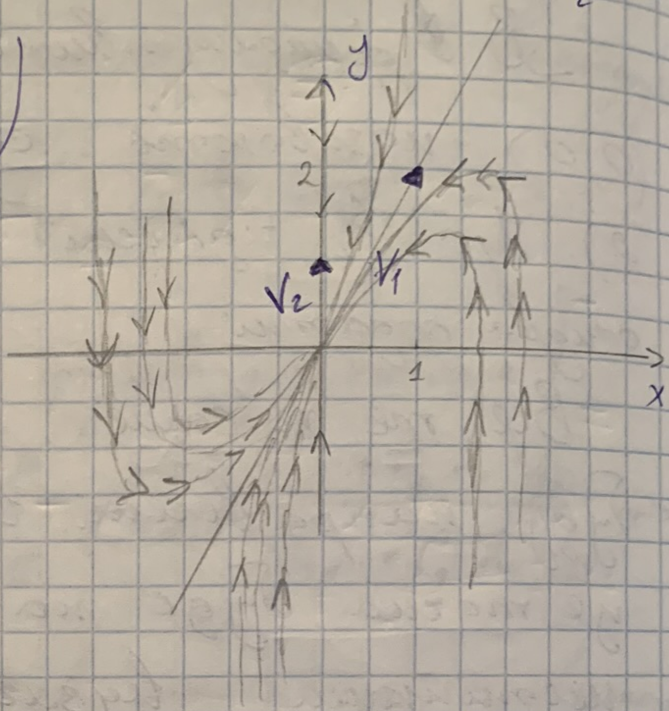
ПРИКЛАД

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2$$

$$V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

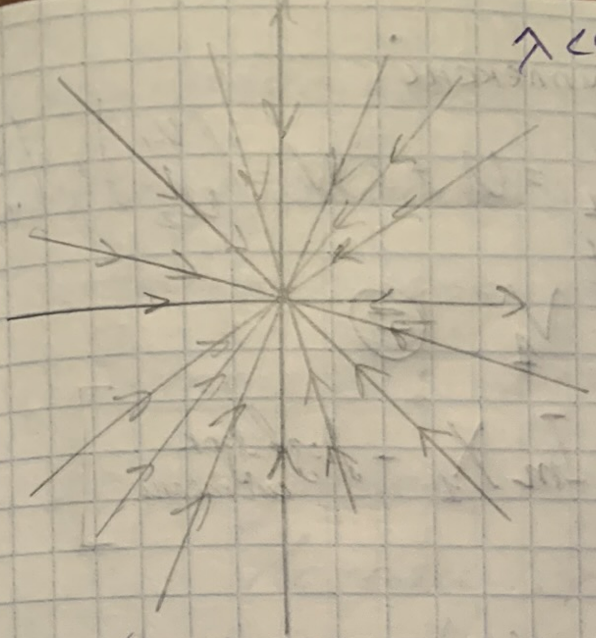
Нехай геометрична кратність $= 2$

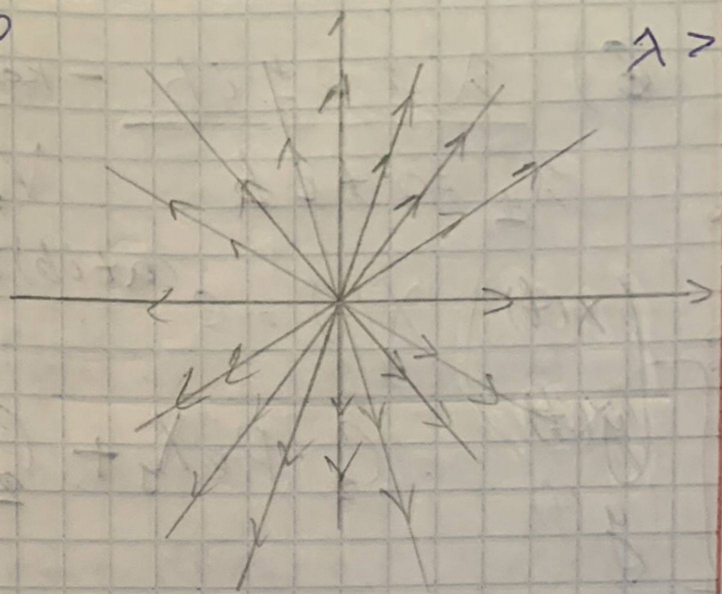
Така ситуація виникає, зокрема, в системах наступного типу:

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = C_2 e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{C_2}{C_1} x \quad (C_1 \neq 0) \quad \text{Якщо } C_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \underbrace{y \text{ - довільне}}_{\text{вісь } Oy}$$



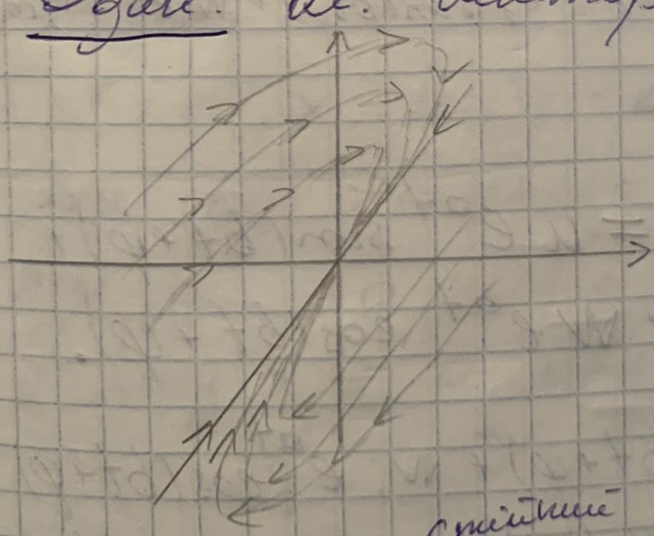


точка $(0,0)$ – дикритичний вузол

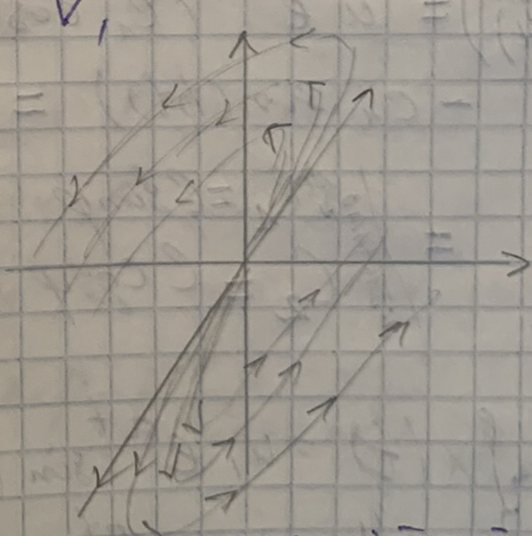
при $\lambda<0$ стійкий $\lambda>0$ – нестійкий.

5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, геом кр. $= 1$

Один вл. вектор V_1



стійкий



нестійкий

$(0,0)$ – вироджений вузол

б) $\lambda = a \pm ib$ — комплексні

$\lambda_1 = a + ib \qquad V_1 = u + iw = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$X_1(t) = e^{(a+ib)t} \cdot V_1 \; \circeq$$

тут підставили $Re\, X_1$ та $Im\, X_1$ у формулу і погрупували доданки з u і w.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \cdot Re\, X_1 + C_2\, Im\, X_1 \text{ — розв'язок системи}$$

$$\circeq e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))(u + iw) =$$

$$= e^{at}(u \cos(bt) - w \sin(bt)) + \quad \leftarrow Re\, X_1$$

$$+ i e^{at}(w \cos(bt) + u \sin(bt)). \quad \leftarrow Im\, X_1$$

Тоді $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = u e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) + w e^{at}(C_2 \cos(bt) -$

$- C_1 \sin(bt)) =$

$$= \left| \text{позначимо } \begin{cases} C_1 = C \sin\varphi \\ C_2 = C \cos\varphi \end{cases} \right| = u e^{at} \sin(bt + \varphi) + w e^{at} \cos(bt + \varphi).$$

нагадаємо $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x(t) = u_1 e^{at} \sin(bt + \varphi) + w_1 e^{at} \cos(bt + \varphi) \\ y(t) = u_2 e^{at} \sin(bt + \varphi) + w_2 e^{at} \cos(bt + \varphi) \end{cases}$$

В цьому випадку фазові траєкторії являють собою спіралі. При $a < 0$ вони будуть закручуватися

наближаючись до $(0,0)$, а при $a > 0$
розкручуватись відходячи від
початку координат;

<u>Питання</u>: визначити <u>напрям</u>
закручування спіралі?

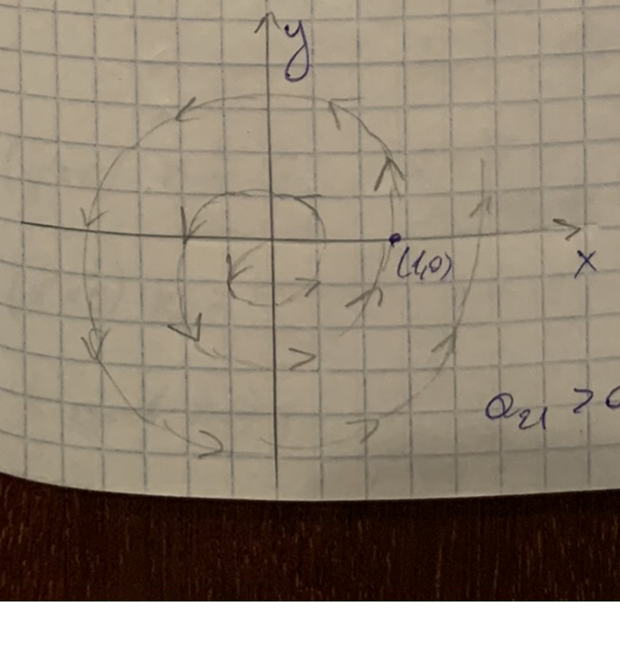
Напрям закручування спіралей
за годинниковою стрілкою чи проти,
можна визначити за знаком числа
a_{21}. Дійсно, a_{21} це значення
похідної $\frac{dy}{dt}$ в точці $(1;0)$

$[y' = a_{21} x + a_{22} y = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0]$

при $a_{21} > 0$ коорд. $y \nearrow$ (в околі т. $(1,0)$)

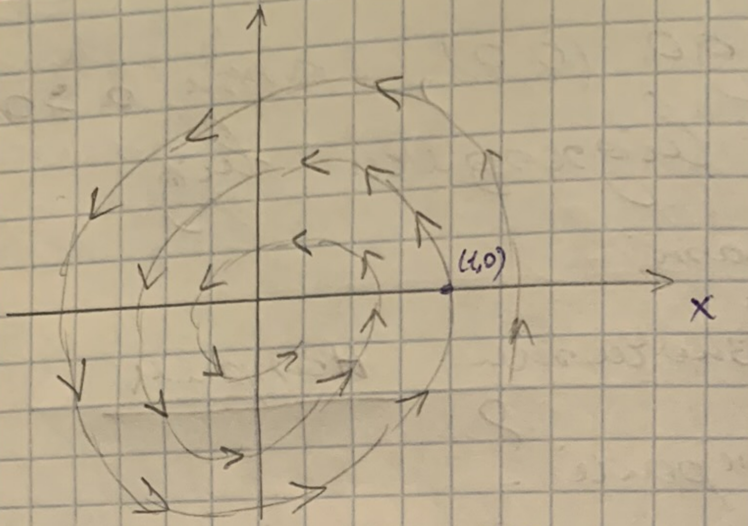
при $a_{21} < 0$ коорд. $y \searrow$ (в околі т. $(1,0)$)

[Якщо $a_{21} = 0$ тоді х.р.: $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) = 0$]
і його корені <u>дійсні</u>



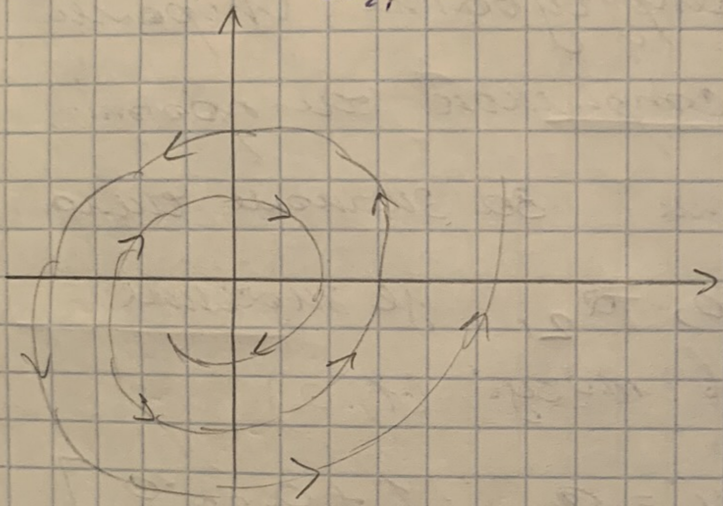
$(0,0)$ - нестійкий фокус

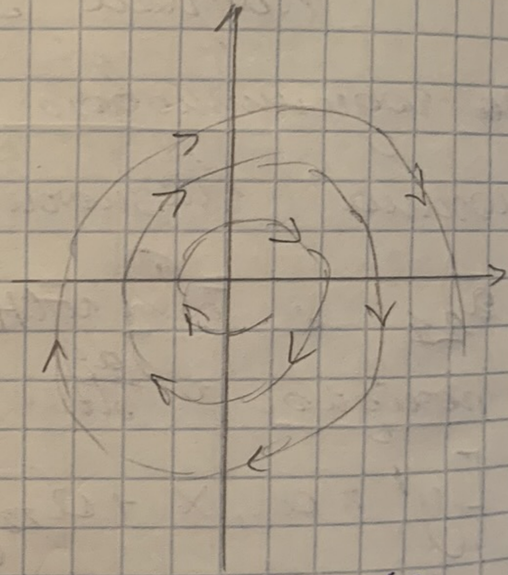
$a_{21} > 0$ $(y' > 0)$



(0,0) - стійкий фокус

$a_{2,1} > 0$





$a_{21} < 0$

$a_{21} < 0$

Приклади:

Знайти положення рівноваги і зобразити ~~ФП~~ ФП (фазовий портрет)

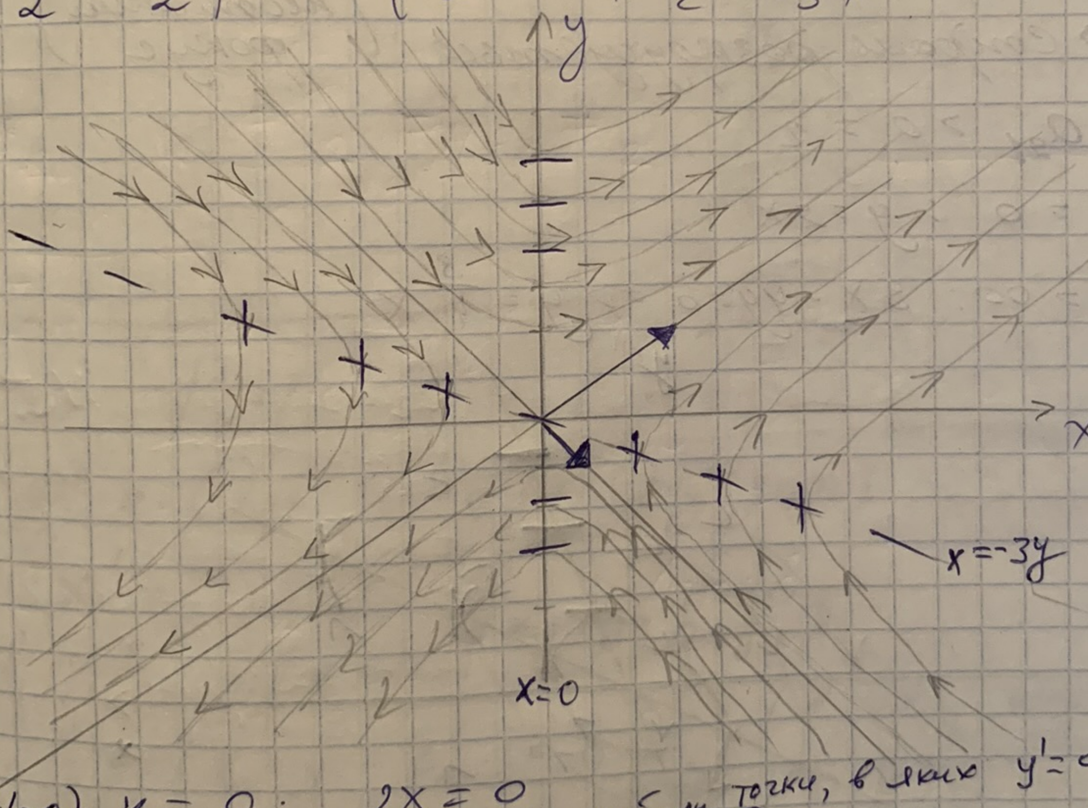
ще з сайту №27

1) $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 2x \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \quad x = \frac{3}{2}y \quad V_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$(y'=0)$ $k = 0$: $2x = 0$

$x = 0$ ← знайшли точки, в яких $y' = 0$

$(x'=0)$ $k = \infty$: $x + 3y = 0$

$x = -3y$

точки в яких $x' = 0$

k - кутов. коефіц.

[Якщо $y' = 0$, то дотичні до розв'язків паралельні осі OX

Якщо $x' = 0 \Rightarrow \parallel OY$] !

з білету №3

(2) $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$(3-\lambda)(-1-\lambda)+8 = -3+\lambda-3\lambda+\lambda^2+8 =$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 5$

$D = 4 - 20 = -16$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

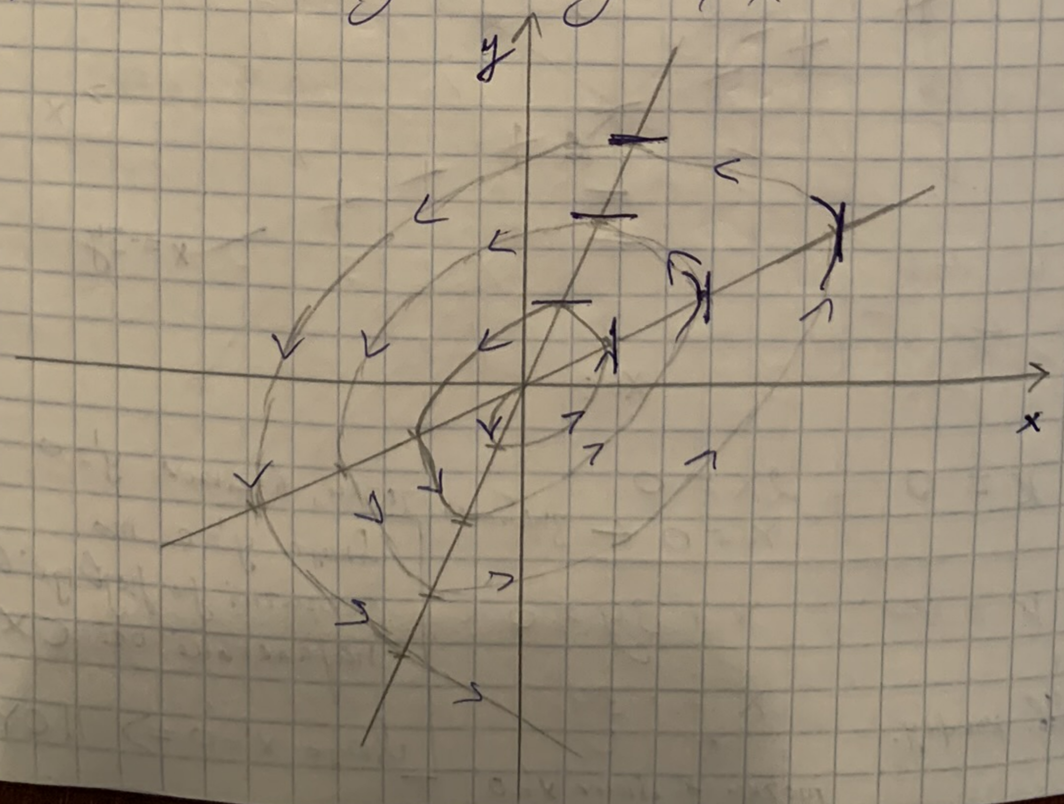
Дійсна частина вл. числа $>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ спіраль розкручується (нестійкий фокус)

$a_{21} > 0 = 2$

$k = 0: \; y = 2x$

$k = \infty: \; 3x - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$



③ $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = x - 4y \end{cases}$ $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}$

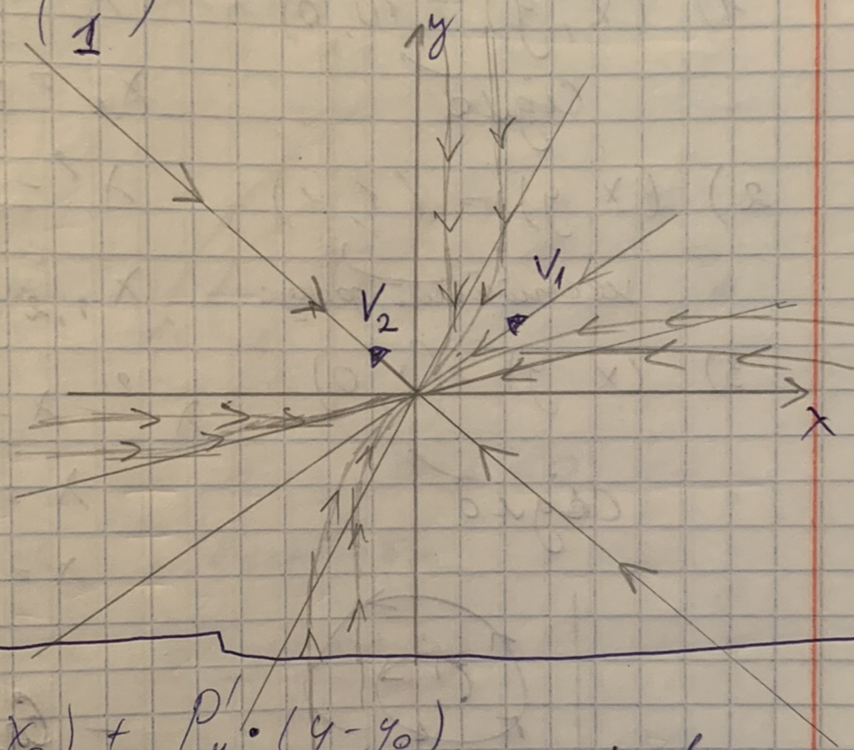
[№5.39
Самойленко]

$\lambda_1 = -2$: $V_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← власн.

$\lambda_2 = -5$: $V_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ↙ вектори

$k = 0$: $x = 4y$

$k = \infty$: $y = \frac{3}{2}x$



$\begin{cases} x' = P'_x \cdot (x - x_0) + P'_y \cdot (y - y_0) \\ y' = Q'_x \cdot (x - x_0) + Q'_y \cdot (y - y_0) \end{cases}$ ← лінеаризація системи $\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}$

④ Умова: $\begin{cases} x' = x(x+y-2) \\ y' = y(1-x) \end{cases}$ ← тут $P = x(x+y-2)$, $Q = y(1-x)$

$\begin{cases} x(x+y-2) = 0 \\ y(1-x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $(1;1)$, $(0;0)$, $(2;0)$ ← положення рівноваги шукаємо $\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x' = (2x_0 + y_0 - 2)(x - x_0) + x_0(y - y_0) \\ y' = -y_0(x - x_0) + (1 - x_0)(y - y_0) \end{cases}$

↳ лінеаризована система

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2x_0+y_0-2-\lambda & x_0 \\ -y_0 & -1-x_0-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^2-(x_0+y_0-1)\lambda+4x_0-2x_0^2+y_0-2=0$$

1) $(x,y)=(0,0)$ $\quad \lambda^2+\lambda-2=0$

сідло $\quad \lambda_1=1 \quad \lambda_2=-2$

2) $(x,y)=(1,1)$ $\quad \lambda^2-\lambda-1=0$

нестійкий фокус $\quad \lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

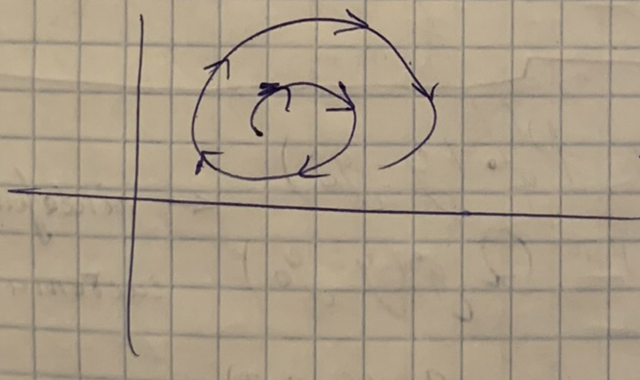
3) $(x,y)=(2,0)$

$\lambda^2-\lambda-2=0$

сідло

$\lambda=2$

$\lambda=-1$



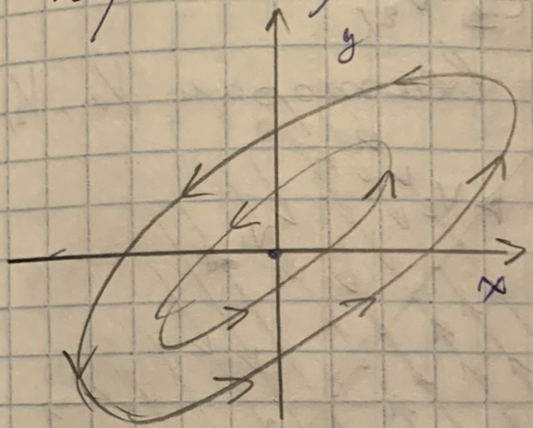
– Самойленко і др. N 5.51 стор 383

"Диф. рівняння у прикладах і задачах" Київ, 1994 рік

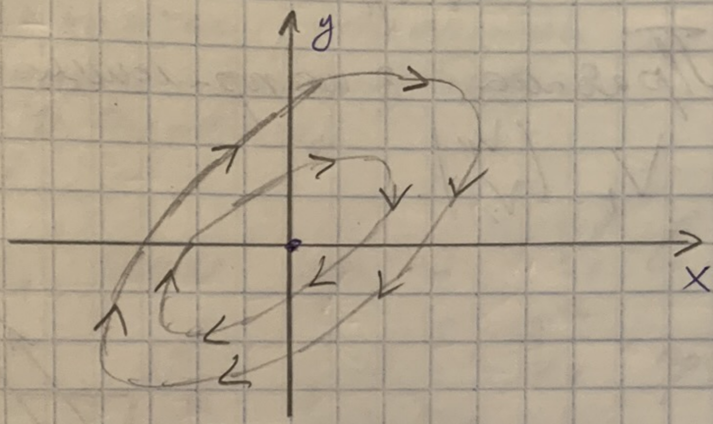
6.11.2019

6.а) $\lambda_{1,2} = \pm bi$: $Re\,\lambda_{1,2} = 0$ $(a=0)$.

Див. пункт (6) тоді спіралі перетворяться в еліпси



$a_{21} > 0$



$a_{21} < 0$

Таке положення рівноваги називається центром.

7) $\det A = 0$

хар. рівняння $\lambda^2 - trA \cdot \lambda + \det A = 0$

$$\lambda^2 - trA \cdot \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - trA) = 0$$

① $\lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 = 0$

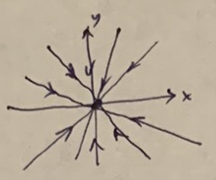
$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 V_2$$

Фазові портрети (продовження).

4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, причому <u>геометрична кратність</u> λ також $= 2$.
Тобто два вл. вектори.

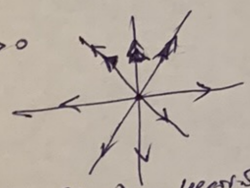
Така ситуація виникає, зокрема, в системах вигляду
$\frac{dx}{dt} = \lambda x$, $\frac{dy}{dt} = \lambda y$. Напрям фазових траєкторій залежить від знаку λ.

а) $\lambda < 0$



$O(0;0)$ стійкий дикритичний вузол

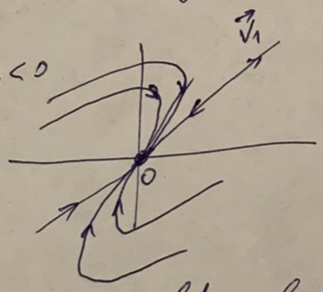
б) $\lambda > 0$



$O(0;0)$ нестійкий дикритич. вузол

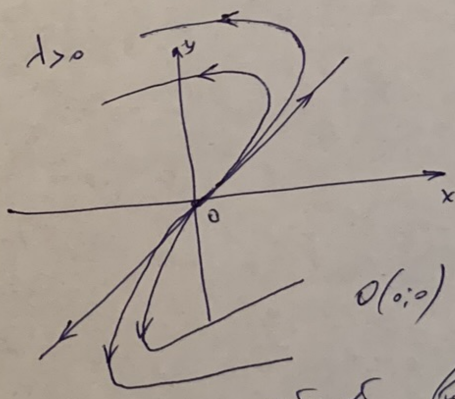
5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, причому <u>геометр. кратність</u> λ дор. 1. Тобто лише один вл. вектор $\vec{v}_1$

а) $\lambda < 0$



$O(0;0)$ стійкий вироджен. вузол.

б) $\lambda > 0$



$O(0;0)$

нестійкий виродж. вузол

6) Нехай $\lambda_{1,2} = a \pm ib$

Р-к для $\lambda_1 = a + bi$ буде $X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 = e^{(a+bi)t}(u + iw)$, $V_1 = u + iw$ – компл. значн. вл. вектор для знач. λ_1.

Виділивши в $X_1(t)$ дійсну і уявну частини, отримаємо

р-к сис-ми: $X(t) = C_1 \operatorname{Re} X_1 + C_2 \operatorname{Im} X_1 = e^{at}\left(u(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt) + w(C_2 \cos bt - C_1 \sin bt)\right)$

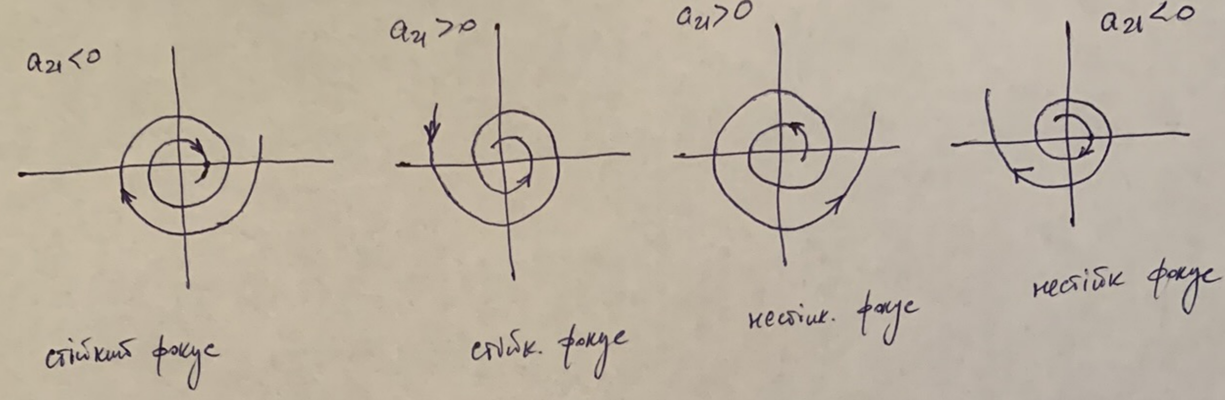
<u>позначимо:</u> $C_1 = C \sin \delta$, $C_2 = C \cos \delta$, тоді $X(t) = Ce^{at}\left(u \sin(bt + \delta) + w \cos(bt + \delta)\right)$

Т.ч. фазові траєкт. являють собою <u>спіралі</u>. При $a < 0$ вони будуть закручуватись, наближ. до поч. коорд. При $a > 0$ розкручуватися віддаляючись від початку координат.

Напрям закручування спіралей (за год. стрілкою, чи проти) можна визначити за знаком числа a_{21}. Дійсно, розглянемо $\frac{dy}{dt}$ в точці $(1;0)$ (2.)

$$\frac{dy}{dt}(1;0) = 1\cdot a_{21} + 0\cdot a_{22} = a_{21}.$$ При $a_{21}>0$ $y\nearrow$; $a_{21}<0$ $y \searrow$.

(Якщо $a_{21}=0$? $\Rightarrow$ х.р. $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)=0$ з дійсн. коренями).



<u>прикл.</u> розгл. сис-му $\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \lambda\rho \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega \end{cases}$ в полярних коорд.

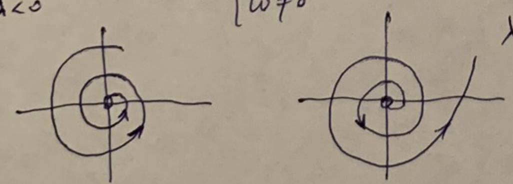
Тоді $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$

φ - кут; ρ - пол. радіус

λ, ω - сталі параметри.

Р-к. сис-ми буде $\rho=\rho_0 e^{\lambda t}$, $\varphi=\omega t+\varphi_0$ тут (ρ_0, φ_0) - поч. точка

Полож. рівноваги $\begin{cases} \lambda\rho = 0 \\ \omega \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\underline{\rho = 0}$ - пол. фокус (в дек. коорд. $O(0;0)$)



При $\lambda<0$ ця сис-ма описує коливання затухаючого маятника.

ρ - затух. амплітуда

φ - фаза

ω - частота.

6а) $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$ (суто уявні) Р-ня фазових траєкт. одерж. з попер. випадку при $\alpha=0$. Це будуть <u>еліпси</u>.

Положення рівноваги при цьому наз. <u>центром</u>