5) (кожна λ_m де $Re\,\lambda_m = 0$ відповідала одномірна клітинка ~~Ж~~ Жордана).

Наслідок: Якщо в матриці A $\exists\, \lambda_j$: таке, що $Re\,\lambda_j > 0$, то система нестійка;

Якщо $\exists\, \lambda_\tau$ таке, що $Re\,\lambda_\tau = 0$ і чому λ_τ відповідає така кількість вл. векторів ~~ін~~ що менша його кратності, то система нестійка (λ_τ відп. неодномірна клітина Жордана).

Теорема:

Для того, щоб система (7) була асимпт. стійкою, необхідно і достатньо, щоб дійсні частини всіх $Re\,\lambda_k < 0$.

Критерій Рауса-Гурвіца. !

Перевірка на асимптотичну стійкість.

У випадку, коли хар. многочлен степені $n \geq 3$ незавжди вдається знайти його корені, потрібен певний критерій для визначення знаку дійсних частин коренів полінома

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

$a_0 > 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots n$.

Утворимо матрицю Гурвіця H:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & \ldots & & & & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \ldots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & a_n \\ 0 & \ldots & & & & & \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & & & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Схема побудови матриці Г.:

1) на головну діагональ виписуємо числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 2) вліво в кожному рядку зі збільшенням індекса, як закінчаться числа a_i, решта нулі 3) вправо зі зменшенням індекса, після a_0 решта нулі

Можна так записати $H = (h_{ij})$, де

$$h_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & 0 \le 2i-j \le n \\ 0, & \text{для інших } i \text{ та } j. \end{cases}$$

Критерій Р.-Г.

Для того, щоб всі $\operatorname{Re} \lambda_i$ були < 0, **необхідно і достатньо**, щоб усі головні діагональні мінори матриці H були додатними

$$\Delta_k = \det H_k > 0, \quad \forall k = \overline{1,n}$$

$$\left(H_k = (h_{ij})_{\substack{i=\overline{1,k} \\ j=\overline{1,k}}} \right).$$

$\Delta_1 = a_1 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0$ і т.д.

Зауваження:

Оскільки $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$,

то у випадку $\Delta_{n-1} > 0$, маємо: $\Delta_n > 0 \Leftrightarrow$

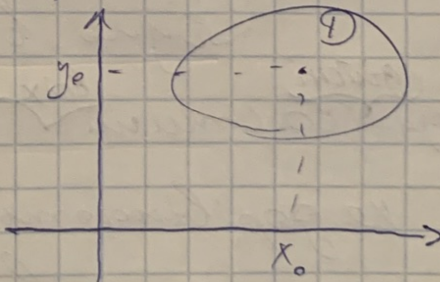
$a_n > 0$. Тобто Δ_n можна не обчислювати.

Лінеаризація автономної системи.

Стійкість за першим наближенням.

$$\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases} \quad (1)$$

$P(x,y)$ і $Q(x,y)$ - диференційовані в $D \subset \mathbb{R}^2$. Нехай (x_0, y_0) - ізольоване положення рівноваги:



$P(x_0, y_0) = 0$

$Q(x_0, y_0) = 0$, при цьому

$\exists$ окіл точки (x_0, y_0), де P і $Q \neq 0$.

Запишемо перші ~~два~~ чотири члени ф-ли Тейлора для P і Q вокол і т. (x_0, y_0):

Враховуємо, що $P(x_0, y_0) = 0$ і $Q(x_0, y_0) = 0$ (залишаться лише P' і Q').

тут $o(\rho)$ — нескінч. мала, $\rho = |x-x_0| + |y-y_0|$ →

$$P(x,y) = P'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + P'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\rho)$$

$$Q(x,y) = Q'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + Q'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\rho)$$

$$\begin{cases} x' = P'_x(x-x_0) + P'_y(y-y_0) \\ y' = Q'_x(x-x_0) + Q'_y(y-y_0) \end{cases} \quad (2)$$

<u>Означення:</u> Тоді система (2) називається <u>лінеаризованою</u> в околі положення рівноваги (x_0, y_0).

<u>Означення:</u> Систему (2) називають першим наближенням системи (1).

Заміною $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$ системи (1) і (2) зводяться до таких, що положення рівноваги буде $(0;0)$: $(x_0, y_0) \to (0,0)$.

Було встановлено, що ~~дійсні~~ якщо дійсні частини всіх вл. значень $A = \begin{bmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{bmatrix}$ а не дорівнюють нулю,

то існує взаємнооднозначне відображення в околі (x_0, y_0), яке переводить фазові портрети системи (1) в фазові портрети системи (2).

Це означає, що ці фазові портрети будуть дуже схожі, а тому можна класифікувати положення рівноваги системи (1) так як і для лінійної системи (2).

(окрім випадку коли $\lambda_{1,2} = \pm bi;\ a = 0$).

Приклад:

$$\begin{cases} x' = \ln(x+y) \\ y' = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{y}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln(x+y) = 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{y}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ \frac{2x}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$(0;1)$ - положення рівноваги

$$A = \begin{pmatrix} P'_x(0;1) & P'_y(0;1) \\ Q'_x(0;1) & Q'_y(0;1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};\ A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \cdot (1-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$D = 9 \qquad \sqrt{D} = 3$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1+3}{2} = 2 \\ \lambda_2 &= \frac{1-3}{2} = -1 \end{aligned}\right\}$$

- дійсні і різні, отже $\Downarrow$

- сідло в т. $(0;1)$.

~~не стійке~~ положення рівноваги, бо $\lambda_1 = 2 > 0$.

Стійкість за першим наближенням.

Розглянемо n-вимірну автономну систему

$$x' = f(x) \qquad (1)$$

Нехай x_0 - полож. рівноваги $f(x_0)=0$. Будемо досл. його на стійкість. Припустимо, що в деякій кулі $B_r(x_0)=\{x\in R^n: \|x-x_0\|<r\}$ вектор-функція $f(x)$ непер. диф-на. Зробимо заміну $x = x_0+y$ і одержану сис-му подамо у вигляді:

$$(x_0+y)'=f(x_0+y); \quad \underbrace{x_0'}_{=f(x_0)=0}+y'=f(x_0+y)\equiv Ay+o(\|y\|), \quad A:=\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$$

Тобто, $y'=Ay+o(\|y\|)$. Лінеаризована сис-ма (сис-ма першого наближення) буде $y'=Ay$ і має сталі коефіцієнти. А, отже, питання стійкості її вже досліджене раніше. Як же пов'язана стійкість лінеариз. сис-ми з стійк. р-ку x_0 сис-ми (1).

Т-ма (про стійкість за 1-м наближенням)
Нехай $f(x)\in C^1(B(x_0,r))$ і $f(x_0)=0$. Якщо дійсні частини всіх вл. знач. матр. $A:=\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$ від'ємні, то x_0 - ас. ст. положення рівноваги сис-ми (1).

Т-ма (про нестійкість). Якщо серед вл. чисел матриці A знайдеться хоча б одне з додатн. дійсн. частиною, то x_0 - нестійке полож. рівноваги сис-ми (1).