从空间站起飞直接进入行星际转移轨道的可能性

朱 仁 璋

（北京空间飞行器总体设计部）

摘要 航天技术的发展使空间站作为行星际飞行器的发射基地成为可能。充分利用双曲线剩余速度，使空间飞行器在从空间站起飞、离开空间站轨道后能直接进入飞向其它行星的转移轨道，从能量观点来看，是十分有利的。文章给出这种可能性的约束条件。

主题词 航天站，行星际航天器，转移轨道，分析。

一、前 言

行星际转移轨道的最佳化，至今已研究得相当透彻了。航天技术的发展使一个新的可能性出现在我们面前，这就是将空间站作为向其它行星（例如火星）飞行的行星际飞行器的发射基地，将空间站轨道作为一个行星际飞行器“伺机”起飞的停泊轨道。由于行星轨道的不共面性，行星际轨道转移至少应由两次冲量实现。转移轨道最佳化的研究可以将这些冲量加以确定。我们假设在地球引力作用范围球面上的第一冲量使飞行器具有相对于日心的星际轨道速度为$\vec{V}_0$，则飞行器相对于地心的速度$\vec{V}_1$为

$$\vec{V}_1=\vec{V}_0-\vec{V}_e$$

式中 $\vec{V}_e$表示地球绕太阳运转的速度。

从能量观点来看，如果空间飞行器从空间站起飞脱离空间站轨道后，到达地球引力作用范围球面上的双曲线剩余速度矢量恰好等于$\vec{V}_1$，是有利的。本文就是初步分析这种可能性。

二、在地球引力作用范围球面上的速度增量$\vec{V}_1$

我们假设，根据行星际（如地球—火星）转移轨道最佳化的研究，在日心坐标系中，第一冲量施加点的位置矢量及提供的速度矢量已被确定，由它们给出的转移轨道第一弧段的日

本文于1991年3月23日收到

心轨道的半通径、偏心率分别为 p_1、e_1，该日心轨道面与黄道面的夹角为 w_1，冲量施加点在该日心轨道上的真近点角为f_1。

又设地球的日心轨道半通径、偏心率分别为 p_0、e_0，在第一冲量施加时刻地心在其日心轨道中的真近点角为f_0。

为了确定$\vec{V}_1$，我们建立这样的日心坐标系：其坐标原点位于日心，x_0轴指向地心，z_0轴垂直于地球轨道面（黄道面），y_0轴完成右旋系（指向地心绕日心的运动方向）。这样，我们不难得到$\vec{V}_1$在该坐标系中的分量[2]：

$$V_{1x_0}=(k/p_1)^{\frac{1}{2}}e_1\sin(f_1)-(k/p_0)^{\frac{1}{2}}e_0\sin(f_0) \tag{1}$$

$$V_{1y_0}=(kp_1)^{\frac{1}{2}}(r_0)^{-1}\cos(w_1)-(kp_0)^{\frac{1}{2}}(r_0)^{-1} \tag{2}$$

$$V_{1z_0}=(kp_1)^{\frac{1}{2}}(r_0)^{-1}\sin(w_1) \tag{3}$$

式中 k是日—地系或日—飞行器系的引力常数。

为简单起见，我们将地心绕日心的轨道取作圆，令 V_e 表示圆轨道速度，则有

$$V_{1x_0}=(k/p_1)^{\frac{1}{2}}e_1\sin(f_1) \tag{4}$$

$$V_{1y_0}=(kp_1)^{\frac{1}{2}}(r_0)^{-1}\cos(w_1)-V_e \tag{5}$$

$$V_{1z_0}=(kp_1)^{\frac{1}{2}}(r_0)^{-1}\sin(w_1)$$

三、在地球引力作用范围球面上的剩余速度$\vec{V}_r$

显然，飞行器沿以地心为焦点的双曲线轨道到达地球引力作用范围球面。令$\vec{V}_r$表示飞行器在该作用球面上的双曲线速度，由于作用球半径很大，可将$\vec{V}_r$近似取作离地球无限远处的双曲线剩余速度。下面，我们首先确定剩余速度方向。$\vec{V}_r$在日心黄道坐标系中的分量可表为

$$V_{rx}=V_r\cos(B_v)\cos(l_v) \tag{6}$$

$$V_{ry}=V_r\cos(B_v)\sin(l_v) \tag{7}$$

$$V_{rz}=V_r\sin(B_v) \tag{8}$$

式中 l_v、B_v 表示$\vec{V}_r$在天球上的指向点的黄经、黄纬。

令地心的黄经为 l_e（地心黄纬为零），则$\vec{V}_r$在日心 $x_0y_0z_0$ 系中的分量为：

$$V_{rx_0}=V_r\cos(B_v)\cos(l_v-l_e) \tag{9}$$

$$V_{ry_0}=V_r\cos(B_v)\sin(l_v-l_e) \tag{10}$$

$$V_{rz_0}=V_r\sin(B_v) \tag{11}$$

如果使剩余速度$\vec{V}_r$全被用作行星际轨道转移的第一冲量速度增量$\vec{V}_1$，这两者应相等，则有

$$\frac{V_{1x_0}}{V_r}=\cos(B_v)\cos(l_v-l_e) \tag{12}$$

$$\frac{V_{1y0}}{V_r}=\cos(B_v)\sin(l_v-l_e) \tag{13}$$

$$\frac{V_{1z0}}{V_r}=\sin(B_v) \tag{14}$$

$$V_r=(V^2{}_{1x_0}+V^2{}_{1y_0}+V^2{}_{1z_0})^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

如前所述，$\vec{V}_0$已由最佳转移轨道的研究（这不属本文范围）确定，则$\vec{V}_1$也被确定。因此，$\vec{V}_r$便由（12）～(15)式确定。问题是，从空间站起飞的行星际飞行器是否能具有这样的剩余速度，我们在下面作出分析。

四、空间站轨道升交点赤经的求解

空间站轨道平面由轨道升交点赤经及对赤道面的倾角确定。升交点赤经直接与空间站的地面发射窗口相关。下面，我们先试求空间站轨道升交点赤经。令i，Ω表示空间站轨道在地心赤道坐标中的（对赤道面的）倾角与（过赤道面的）升交点的赤经，令i'，Ω'表示空间站轨道在地心黄道坐标系中的（对黄道面的）倾角与（过黄道面的）升交点的黄经，令ε为黄赤交角。则有

$$\cos(i')=\cos(\varepsilon)\cos(i)+\sin(\varepsilon)\sin(i)\cos(\Omega) \tag{16}$$

$$\sin(i')\cos(\Omega')=-\sin(\varepsilon)\cos(i)+\cos(\varepsilon)\sin(i)\cos(\Omega) \tag{17}$$

$$\sin(i')\sin(\Omega')=\sin(i)\sin(\Omega) \tag{18}$$

由球面天文学，我们还有

$$\sin(l_v-\Omega')\mathrm{tg}(i')=\mathrm{tg}(B_v) \tag{19}$$

即

$$\sin(l_v)\cos(\Omega')\sin(i')-\cos(l_v)\sin(\Omega')\sin(i')=\mathrm{tg}(B_v)\cos(i') \tag{20}$$

将式（16）～（18）代入式（20）中，则有

$$[\cos(\varepsilon)\sin(l_v)-\sin(\varepsilon)\mathrm{tg}(B_v)]\mathrm{tg}(i)\cos(\Omega)-\cos(l_v)\mathrm{tg}(i)\sin(\Omega)=\sin(\varepsilon)\sin(l_v)+\cos(\varepsilon)\mathrm{tg}(B_v) \tag{21}$$

定义：

$$X=\frac{[\cos(\varepsilon)\sin(l_v)-\sin(\varepsilon)\mathrm{tg}(B_v)]\mathrm{tg}(i)}{\sin(\varepsilon)\sin(l_v)+\cos(\varepsilon)\mathrm{tg}(B_v)} \tag{22}$$

$$Y=\frac{-\cos(l_v)\mathrm{tg}(i)}{\sin(\varepsilon)\sin(l_v)+\cos(\varepsilon)\mathrm{tg}(B_v)} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{tg}(Z)=Y/X=\frac{\cos(l_v)}{\sin(\varepsilon)\mathrm{tg}(B_v)-\cos(\varepsilon)\sin(l_v)}\\&\cos(Z)=X/(X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}\\&\sin(Z)=Y/(X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

则

$$\cos(\Omega-Z)=(X^2+Y^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{|\sin(\varepsilon)\sin(l_v)+\cos(\varepsilon)\mathrm{tg}(B_v)|}{|\mathrm{tg}(i)|\sqrt{\cos^2(l_v)+[\cos(\varepsilon)\sin(l_v)-\sin(\varepsilon)\mathrm{tg}(B_v)]^2}} \tag{25}$$

如果 $(X^2+Y^2)^{-\frac{1}{2}}\leqslant 1$，即由式（25）得

$$|\sin(i)|\geqslant|\sin(\varepsilon)\cos(B_v)\sin(l_v)+\cos(\varepsilon)\sin(B_v)| \tag{26}$$

则方程（25）存在解Ω：

$$\Omega=Z\pm\arccos[(X^2+Y^2)^{-\frac{1}{2}}] \tag{27}$$

如果 $|\sin(i)|<|\sin(\varepsilon)\cos(B_v)\sin(l_v)+\cos(\varepsilon)\sin(B_v)|$ （28）

则Ω解不存在。

五、从空间站轨道起飞的位置与速度增量

令a_v，d_v表示剩余速度矢量$\vec{V}_r$在天球上的指向点的赤经与赤纬。于是

$$\cos(d_v)\cos(a_v)=\cos(B_v)\cos(l_v) \tag{29}$$

$$\cos(d_v)\sin(a_v)=\cos(\varepsilon)\cos(B_v)\sin(l_v)-\sin(\varepsilon)\sin(B_v) \tag{30}$$

$$\sin(d_v)=\sin(\varepsilon)\cos(B_v)\sin(l_v)+\cos(\varepsilon)\sin(B_v) \tag{31}$$

如果对给定的轨道倾角，不等式（26）成立，则

$$\cos(u_v)=\cos(d_v)\cos(a_v-\Omega) \tag{32}$$

这里 d_v，a_v由方程（29）～（31）得到，Ω是由（27）式解出。u_v是指向点的纬度幅角，角量u_v和$(a_v-\Omega)$位于同一象限。

令$u_{r_{\min}}$表示在空间站轨道上施加冲量的作用点$r_{\min}$的纬度幅角，这个冲量使空间飞行器脱离空间站轨道且具有剩余速度$\vec{V}_r$，于是应有

$$u_{r_{\min}}=u_v-f \tag{33}$$

式中 f是位置矢量$\vec{r}_{\min}$与剩余速度矢量之间的夹角。

令$\vec{V}_{\max}$表示在空间站轨道上施加冲量后空间飞行器的速度，它在空间站轨道平面内且与$\vec{r}_{\min}$正交。令V_{esc}表示空间站轨道上的逃逸速度

$$V^2_{esc}=\frac{2GM_e}{r} \tag{34}$$

式中 G是牛顿引力常数；M_e是地球质量；r是轨道向径。

则 $$V^2_{\max}=V_r^2+V^2_{esc} \tag{35}$$

令V_s表示空间站轨道速度，为简便起见，空间站轨道假设为圆轨道，则

$$V_s^2=\frac{GM_e}{r} \tag{36}$$

令V_{inc}表示在空间站轨道上，空间飞行器所获得的冲量速度增量，V_{inc}由下式给出（沿轨道切向加速）：

$$V_{inc}=V_{\max}-V_s \tag{37}$$

该冲量施加后，空间飞行器由圆形空间站轨道转入双曲线轨道，速度方向的最大转角是$f-\frac{\pi}{2}$，这里f，如对式（33）所述，是$\vec{r}_{\min}$与$\vec{V}_r$的夹角，它由下式给出[1]

$$\cos(f)=-\left\{1+4\left(\frac{V_{max}}{V_{esc}}\right)^2\left[\left(\frac{V_{max}}{V_{esc}}\right)^2-1\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\left\{1+4\left(\frac{V_r}{V_{esc}}\right)^2\left[\left(\frac{V_r}{V_{esc}}\right)^2+1\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (38)$$

这样，我们就确定了在空间站轨道上的起飞位置及所需的速度增量。起飞位置由起飞点的纬度幅角$u_{r\min}$表示，该量由（32）、（33）及（38）式给出。

速度增量由V_{inc}确定，它由（15）、（34）～（37）式给出。

六、空间站的地面发射时间及飞行器从空间站轨道上的起飞时间

空间站地面发射窗口由空间站轨道升交点赤经的解的范围确定，见（26）与（27）式。自然，约束条件（26）式使发射窗口变窄。

当空间飞行器达到地球引力作用范围球面上时，地球黄经应为l_e，此值由式（9）～（11）确定。由此可给出飞行器从空间站轨道上起飞的时间。

七、特例两则

①如果剩余速度$\vec{V}_r$与地球绕太阳的旋转速度$\vec{V}_e$平行，假设地球的公转轨道为圆，则由式（9）～（11）应有

$$l_v \quad l_e=\frac{\pi}{2} \quad (39)$$

$$B_v=0 \quad (40)$$

式（40）意味着，$\vec{V}_r$沿空间站轨道面与黄道面的节线。将以上两式代入（26）式中，我们得到对此情况的条件：

$$|\sin(i)|\geqslant|\sin(\varepsilon)\cos(l_e)| \quad (41)$$

或即

$$|\cos(l_e)|\leqslant|\sin(i)/\sin(\varepsilon)| \quad (42)$$

对此特例，如果$i\geqslant\varepsilon$，则对任意值l_e，上述条件均被满足。在此情况下，飞向其它行星的转移轨道的第一弧段轨道面与黄道面相合，即式（3）中w_1为零。

②如果行星际飞行器从空间站轨道起飞的时间是这样选择的：即当飞行器达到地球引力作用范围球面时，地球恰好位于黄道面与目标行星轨道面的交线上，并且若在确定$\vec{V}_0$时限定w_1等于上述两行星轨道面的交角（若目标行星是火星，此角为1.85°），则具有适合剩余速度的空间飞行器有可能直接进入目标行星轨道平面。

参考文献

1　Ruppe Harry O. Introduction to Astronautics. Academic Press New York, London: 1966, 1. 1967, 2

2　Eckel K. Optimal Switching Conditions for Minimum Fuel Fixed Time Transfer between Non Coplanar Elliptical Orbits. Astronautica Acta. 1981, 11 (10/11): 621～631

（下转第10页）

5 Wismer D A, Chattergy R. Introduction to Nonlinear Optimization. Elsevier North-Holland.Inc., 1978.
6 蔡宣三.最优化与最优控制.北京：清华大学出版社，1982.
7 李大耀，李大治.关于脉冲式轨道改变的讨论.中国空间科学技术，1991，11（1）：22～29

FURTHER DISCUSSION ON OPTIMAL TRANSFER BETWEEN TWO CIRCULAR ORBITS BY DUAL IMPULSE

Li Dayao (Beijing Institute of Space Machine and Electricity)
Li Dazhi (Nantong Medical college)

Abstract This paper deals with the optimal transfer between two circular orbits by dual impulse according to the theory of optimization. The mathematical formulation and the solving equations of this problem are given. Solutions for several special examples are obtained.

Subject Term Optimum solution, Transfer orbit, Pulse, Demonstration.

（上接第36页）

POSSIBILITY OF FLYING DIRECTLY INTO INTERPLANETARY TRANSFER ORBIT FROM SPACE STATION

Zhu Renzhang
(Beijing Institute of Spacecraft Systems Engineering)

Abstract With development of the space technology it is possible to apply the space station as a launch base for spacecrafts of interplanetary flight. From the point of view of energy requirement it is of benefit to make full use of the hyperbolic velocity excess to put the spacecraft directly into the transfer orbit for the other planet after the spacecraft takes off from the space station and flies away from the orbit of space station.

Subject Term Space station, Interplanetary spacecraft, Transfer orbit, Analyzing.