一、基本概念、定性&半定量分析

学科要素：自然力与控制力，质心轨道运动+航天器姿态运动

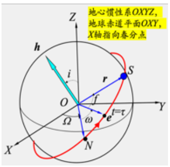
二体问题：两质点，仅万有引力，绕质心做圆锥曲线运动

首次积分：机械系统不变量，独立首次积分不多于系统维数；分别为 h, e, ξ, τ

开普勒三大定律：椭圆定律（太阳在椭圆焦点）、面积定律、调和定律（周期-半长轴关系）

轨道根数：轨道的几何直观描述，6 个独立参数：$p(a), e, i, \Omega, \omega, \tau(f)$

奇异：平面轨道、圆轨道、逆行轨道



$i \in [0,\pi]$，$\Omega \in [0,2\pi)$，$\omega \in [0,2\pi)$，$p > 0$，$e \geq 0$

轨道根数和位置速度互转；二体初值问题关键：真（平）近点角的演化

轨道边值问题：特殊轨道

最小能量轨道：$a_m = s/2$，虚焦点在P_1P_2连线上

最小偏心率轨道：$e_F = |r_2 - r_1|/c$，偏心率矢量在P_1P_2连线投影为常数

虚焦点轨迹：椭圆虚焦点为双曲线左支，双曲虚焦点为双曲线右支

速度关系：斜交轴速度乘积只和转移三角形有关；转移之后弦方向速度不变，径方向速度反向**（不是径向速度！）**

共轭轨道：矢端曲线为双曲线，拱线处对应最低能量轨道，为$\triangle FP_1P_2$外角平分线，共半长轴

轨道机动：脉冲变轨

脉冲：工作时间短，推力大，可认为瞬间改变速度，不改变位置

轨道改变：新旧轨道有交点，交点施加一次脉冲

轨道转移：新旧轨道无交点，交点施加两次脉冲

过渡/转移轨道：连接圆轨道和新轨道的中间轨道

轨道拱线夹角：新旧轨道长轴夹角

飞行角：飞行速度与当地水平面夹角，$\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$

比冲：推进效率，质量比冲就是喷气速度

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{I_{sp}g_0}$$

齐奥尔科夫斯基方程：

$$m_f = m_0 e^{-\Delta V/V_e}$$

可达域：脉冲后速度大小固定，方向任意，航天器可到达的最大范围，椭圆，可通过最小能量轨道或包络面两种方法证明

轨道根数最佳调整点：

半长轴：近拱点切向脉冲

偏心率：变扁-近拱点切向加速/远拱点切向减速；变圆-近拱点切向减速/远拱点切向加速

轨道倾角：近圆轨道在升降交点处加法向脉冲，倾角只能在升降点调！

升交点赤经：近圆轨道最南或最北处加法向脉冲

轨道面：远拱点加法向脉冲

经典轨道转移方法：

特征速度：脉冲之和

霍曼转移：在两个共面圆轨道之间的最佳转移方式

优点：所有双脉冲转移中特征速度最小

缺点：时间最长，转移轨道半周期

椭圆一般化：**椭圆轨向外**-近拱点出发；**圆轨向外**-远拱点到达；**向内至椭圆轨**-近拱点到达；**向内至圆轨**-远拱点出发

非共面一般化：关键是最佳角度，升降点余弦定理，求导为 0，牛顿迭代可求解

双椭圆三脉冲转移：共面圆轨道半径或者倾角相差过大时比霍曼转移更优；**在半径大于 11.94 时，**一定存在一个三脉冲方案优于霍曼转移；**在半径比大于 15 时，**任何距离的三脉冲总是优于霍曼转移

关于轨道转移的几点注意：

1. 非平角共切的轨道通常不优，但可以减少时间

2. 特征速度大小和时间的优化往往是矛盾的

3. 双脉冲可通过霍曼转移做初值进行迭代

调相机动：

可追赶/等待，通过改椭圆轨道周期实现；算好调相时间（重点是算好追上时原轨道上的飞行器运行了多大角度）

注意：可以不在近拱点调相，但是此时可能需要求解 Lambert 问题，称为定时拦截

双脉冲拱线变轨：

同向双脉冲-两次加速，转移轨道半长轴介于中间，切点连线在中心天体

反向双脉冲-一次加速一次减速，转移轨道半长轴比两个轨道都大，切点连线在中心天体

轨道摄动：

地球非球形引力、大气阻力、太阳光压力、日月引力

它们使得航天器偏离开普勒轨道，但相比于地球中心引力是小量

注意：摄动目前只在地外轨道范围内考虑，行星际飞行中不考虑摄动！

开普勒轨道：二体模型不考虑摄动影响，遵循开普勒三大定律的轨道，也称二体轨道

高斯型摄动方程：轨道根数变化的微分方程，可同时处理摄动力有势或无势的情况

拉格朗日行星运动方程：摄动力有势可用

星下点：卫星在地面的投影点，覆盖范围：全部经度，纬度$[-i, i]$；

星下点轨迹：卫星在地面的投影点在地球表面通过的路径

轨道摄动处理方法：

1. **考威尔方法**-直接解摄动下的二体方程，吃算力，但是计算机升级之后重新启用
2. **恩克方法**-以开普勒轨道为初轨列写偏差量的动力学方程，小偏差下有效，大偏差需要考虑新的开普勒初轨
3. **轨道根数变易法**-将轨道根数视为缓慢变化的量

密切轨道：认为实际轨道的每一瞬时都是瞬时开普勒轨道

地球非球形引力摄动：

J2 摄动：默认地球为旋转椭球时，只有球谐系数$C_{2,0} \neq 0$，此即J_2系数，约为 1.083e-3 **（球谐函数：规则形状逼近不规则形状）**

平均法：快变量f，慢变量为其他 5 个根数；

短周期项：变化周期与轨道周期相当；**长周期项：**变化周期与慢变量的变化周期相当；**长期项：**时间的线性函数，甚至幂函数

注意：这意味着轨道形状是慢变的

J2 摄动平均法结果：$\boldsymbol{a, e, i}$不变，Ω减小，升节线沿卫星运动相反方向旋转，称为交点退行

非球形引力摄动的特殊轨道：

太阳同步轨道：J2 项对轨道面方向角速率的影响与地球绕太阳周年转动同步

特征：同纬度星下点的地方时和光照度基本不变，通常为极轨（倾角必在 90°以上，逆行轨道）

$$\dot{\bar{\Omega}} = \frac{2\pi}{365.24218968 * 86400}(rad/s)$$

临界轨道：特殊倾角(63.43°或 116.57°，临界倾角)的轨道，其拱线(近地点)在地球 J2 项摄动影响下仍不转动，即$\dot{\bar{\omega}} = 0$，主要用于高纬度地区大椭圆轨道广播通信卫星

回归轨道：利用 J2 项对轨道的影响，星下点轨迹能够周期性地重叠的轨道，主要用于侦查卫星、气象卫星、地球资源卫星等

N 圈历时 M 天（节点日）后回归：

$$NT_N\left(\omega_e - \dot{\bar{\Omega}}\right) = 2\pi M$$

$$T_N \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[1 - \frac{3J_2}{2}\left(\frac{R_e}{a}\right)^2(3 - 4sin^2 i)\right]$$

其中ω_e是地球自转角速度

其他摄动：

日月引力摄动：

$$a_T = -\mu_s\left(\frac{r - r_s}{\|r - r_s\|^3} + \frac{r_s}{r_s^3}\right)$$

1. 月球引力摄动强度约为太阳 2.2 倍
2. 轨道高度：<10k(km)，弱于 J2 外的地球非球形引力；>20k(km)，强于 J2 外的地球非球形引力；>50k(km)，强于 J2
3. 对半长轴无长期和周期影响，对升节线和拱线有长期影响，轨道越高影响越明显
4. 对地球静止轨道卫星倾角影响为 0.75-0.95°/年

太阳光压摄动：

$$a_R = KC_R\frac{S}{m}\frac{L}{4\pi c}\frac{r - r_s}{\|r - r_s\|^3}$$

r 和 rs 分别表示航天器和太阳在地心惯性系中的位置矢量；S/m 表示航天器的面质比；CR 表示太阳辐射系数，全吸收为 1，全反射为 2；L 为太阳发光度，c 为光速

1. 对所有轨道根数有周期影响，周期可能长达一年。考虑地影时，光压力的影响变得更复杂。轨道越高影响越明显
2. 轨道高度>800km，强于大气阻力；

大气阻力摄动：$a_D = -\frac{1}{2}C_D\frac{S}{m}\rho V_e V_e$

$[r, V_e]$为航天器相对地心惯性系的位置和相对于地面的速度

大气模型：静态的指数模型和美国标准大气模型 1976 Standard，动态的 NRLMSISE-00 模型

影响：长期减小半长轴、偏心率、轨道倾角，使轨道角运动更快。轨道越低，影响越显著

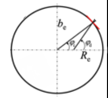
地球形状：赤道略鼓，两极略扁的椭球

经度：本初子午线起始，东正西负

地心纬度φ_c和地理纬度φ_d：

$$(1 - e^2)tan\varphi_d = tan\varphi_c$$

大地水准面：海洋处于静平衡时形成的大洋面(等势面)，也即平均海平面通过大陆延伸勾画出的一个连续的封闭曲面；



与参考椭球面的区别：参考椭球面为规则的形状，大地水准面不规则。大地水准面与参考椭球面的偏差在[−107, 85]m，粗略计算中忽略

正高/海拔：地面上物体到大地水准面的距离

天球：地心为中心，半径无限大的球

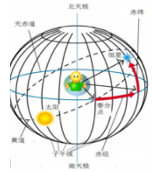
基本平面：赤道面

参考方向：春分点，太阳由南向北经过赤道与黄道的交线的时刻对应的方向。

描述天体的位置：赤经、赤纬

赤经 α：春分点起，天赤道上逆时针为正，[0h, 24h]

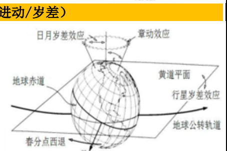
赤纬 δ：天赤道起，向北为正，[-90°, 90°]同理有黄经、黄纬



地球的运动（章动和进动/岁差）

日月岁差：假想的平天极绕黄极的小圆运动，对应有平赤道、平春分点

章动：真天极绕平天极的运动，忽略掉短周期的微小运动，做顺时针的椭圆运动，周期 18.6 年



影响：春分点西退，12″/100y

赤道岁差参数：

$$\zeta_A = 2.650545 + 2306.083327T + 0.2988499T^2 + 0.01826837T^3$$

$$z_A = -2.650545 + 2306.083327T + 1.09273487T^2 + 0.01826837T^3$$

$$\theta_A = 2004.191903T - 0.4294934T^2 - 0.04182264T^3$$

平黄赤交角：

$$\bar{\varepsilon} = 84381.406 - 46.836769T - 0.0001831T^2 + 0.002003407T^3$$

黄经章动：ΔΨ

交角章动：Δε

极移：地球的瞬时极绕其平均极存在运动

坐标系统转换会用！

基本时间：均匀+与地球自转协调

恒星年：太阳在黄道上连续两次通过某一恒星所需的时间，365.25636606d

回归年：太阳连续两次经过平春分点所需的时间，或连续两次直射北(或南)回归线的时间，365.24218968d（太阳同步轨道用的就是这个年）

真太阳日：太阳连续两次经过上中天的时间间隔，随季节变化，长短最多差 51s

平太阳日：平太阳连续两次经过上中天的时间间隔

均匀变化的时间系统：

国际原子时（TAI）：位于海平面上的铯原子Cs^{133}基态的两个超精细能级在零磁场中跃迁辐射振荡为 9192631770 周所经历的时间为 1 秒，适应现代科学技术发展的严格的时间度量

地球时（TT）：地心时空标架下理论上的时间度量，与地球公转运动相关的参数以此为自变量表达

地球自转为基准的时间系统：

恒星时（ST）：春分点连续两次经过上中天的时间间隔为一恒星日

地方恒星时θ_{LST}：数值上等于春分点的地方时角

格林尼治恒星时θ_{GST}：春分点相对格林尼治子午圈的恒星时，主要用于描述地球自转角度

格林尼治平恒星时θ_{GMST}：平春分点相对格林尼治子午圈的恒星时，

$$\theta_{GST} = \theta_{GMST} + \Delta\Psi cos\bar{\varepsilon}$$

世界时（UT）：太阳连续两次经过上中天的时间间隔为一太阳日，真太阳时(地方时)=真太阳的地方时角(描述天体相对观测者的角度，[0h, 24h]，顺时针为正)+12h

UT0：格林尼治的平太阳时，一天 24h 整

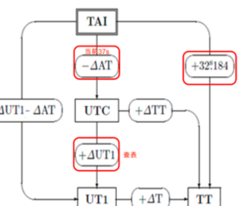
UT1：格林尼治平太阳时加上极移修正，与真太阳时相差[−16, 14]分钟。日常用时

注意：UT 和 ST 的区别-经过上中天的点，UT-太阳，ST-春分点

兼顾地球自转与均匀性的时间系统：

协调世界时（UTC）：秒长与原子时秒长一致，与世界时 UT1 的差值(ΔUT1=UT1−UTC)要求保持在±0.9s 以内，否则进行跳秒。IERS 记录每天的ΔUT1 的值。服务于日常生活，又能与严格定义的时间相联系

不同时间的转换（主要是 TAI, TT, UTC）：



历法：时间记录格式

儒略历：以回归年为基本单位，奇数月 31 天，偶数月 30 天，2 月平年 29 天，闰年 30 天。四年一闰，平均年长 365.25 天

格里历：平年 365 天，闰年 366 天(能够被 4 整除但不能被 100 整除，或者能够被 400 整除)。平均长度: 365.2425 天

儒略日（JD）：一天 86400 秒，一年 365.25 天。以公元前 4713 年 1 月 1 日格林尼治平午时(世界时)为起点来计算任意一个日期与之相距的天数。一个儒略世纪为 36525 天

简约儒略日（MJD）：从 1858 年 11 月 17 日 0 时起算，MJD=JD-2400000.5

注意：时间系统相当于参考系，而历法只是记录时间的格式，历法不能改变某时刻在某一时间系统下的取值，但是更换时间系统之后同一时刻在时间轴上的位置就会不同

坐标系统——地心赤道坐标系

坐标系	基本平面	x轴指向
历元J2000平赤道地心系(J2000)	历元J2000平赤道面	历元J2000的平春分点
瞬时平赤道地心系(MOD)	计算瞬时的平赤道面	计算瞬时的平春分点
瞬时真赤道地心系(TOD)	计算瞬时的真赤道面	计算瞬时的真春分点
准地固坐标系(ECPF)	计算瞬时的真赤道面	基本平面与格林尼治子午面的交线方向
地固坐标系(ECF)	垂直地心与CIO连线的平面	基本平面与格林尼治子午面的交线方向

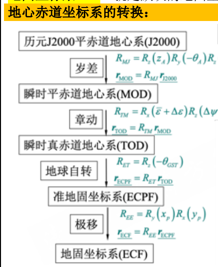
历元 J2000 平赤道地心坐标系：就是默认的地心惯性系，又称历元地心天球坐标系

历元 J2000.0 含义：标准历元

2000-01-01 12:00:00 TT

地固坐标系 ECF：就是默认的地固坐标系

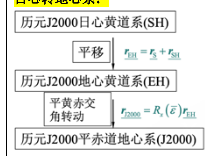
地心赤道坐标系的转换：



坐标系统——日心黄道坐标系：

J2000 日心黄道坐标系：基本平面为 J2000 平黄道，X 轴指向 J2000 春分点

日心转地心系：



r_{SH}: 矢量r在历元J2000日心黄道系中的列阵

r_S: 太阳在历元J2000地心黄道系中位置矢量的列阵

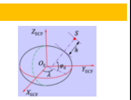
r_{EH}: 矢量r在历元J2000地心黄道系中的列阵

r_{J2000}: 矢量r在历元J2000地心平赤道系中的列阵

注意：这里用到的物理量在前面地球的运动部分都已经提及，这些坐标变换主要就是有地球自身运动引起（如果没有这些运动，那么就是普通圆型限制性三体问题）

坐标系统——大地坐标系

大地高h，大地经度λ（地心经度），大地纬度φ_d（地理纬度）



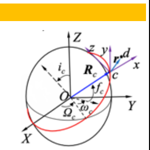
地固坐标系与大地坐标的转换：SOFA

相对运动：

应用场景：卫星编队飞行、空间交会对接

忽略两卫星间引力：地球引力远大于卫星间引力

只考虑地心引力：摄动力与地心引力强度之比最大为千分之一，控制力在控制问题才会考虑



主星圆化轨道：大多数航天器运行在近圆轨道上；椭圆轨也可以，只不过方程变了，是 T-H/Lawden 方程

推导：基于转动系的运动方程（计算部分会写）

解的特性：

一般情况：x, z 方向简谐振动，y 方向发散；xy 平面内是中心平移，长轴沿 y 方向，长短轴比为 2:1 的椭圆（扁形摆线）

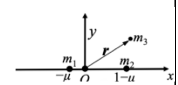
周期解条件：$C_4 = 2nx_0 + \dot{y}_0 = 0$，周期相对轨道是中心在 y 轴上，长轴在 y 方向，长短轴比为 2:1 的椭圆

圆形限制性三体问题：

三体问题：三个质点在万有引力下的运动

限制性三体问题：m_3质量远小于m_1, m_2，研究m_3在m_1, m_2万有引力作用下的运动

圆型限制性三体问题：m_2相对m_1运动轨迹为圆



动系&无量纲化：动系如图，[M]=m1+m2，[L]=a1+a2，[T]=动系旋转周期，令$\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$，如此总长、角速度、质量归一

方程列写：左边只含有动系相对加速度和归一化科氏加速度，右边是势能梯度，势能包括引力势能、离心力势能、其他外力对距离积分生成的势能

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}}$$

注意：势能的列写很重要，决定了拉格朗日点

雅可比积分：$\frac{1}{2}v^2 - U = E$，E 是广义能量积分，−2E 是雅可比积分

零速度面：初始广义能量 E<0 时，可能存在 E+U=0 的情况，也即速度为 0，此时有禁区，其边界就是零速度面

星际高速公路：零速度面会生成两种空间，无法从一个空间穿过零速度面进入另一空间

拉格朗日点：相对平衡位置，是 CRTBP 的 5 个特解。

L1-L3 是不稳定平衡点，在两个主要天体连线上；

L4, L5 是稳定平衡点，和两个主要天体构成等边三角形

此时势能 U 的梯度为 0，这是因为我们要求朗格朗日点在动系中静止，所以三体方程左边变成 0，如果实际给的运动方程加入的可能不是有势力，也要抓住**相对静止**条件进行分析。

Lyapunov 轨道：L1-L3 附近由通解可知一般这三个点附近轨道面内偏离量以指数形式增大，故不稳定，如果初始条件合适，使得指数增加项系数为 0，则可得到绕拉格朗日点的椭圆轨道，此即 Lyapunov 轨道

Lissajous 轨道：轨道面内椭圆轨道周期和面外振动周期可约时，Lyapunov 轨道变成 Lissajous 轨道

Halo 轨道：上述轨道面内椭圆轨道周期和面外振动周期相同时，得到 Halo 轨道

优点：很好的冷环境，对设备、试验有利；月球对地日相对几何位置几乎恒定，适宜进行观测和通讯；节省能量（低能量转移）；卫星保持对日，可利用太阳能；L 点附近相对速度小，适宜交会对接

L4-L5：稳定，适宜需要长期存在的航天器（鹊桥），地日 L4L5 有 Trojan 小行星群

二、定量计算&证明

二体初值问题：

运动方程：$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

轨道方程：$r = \frac{p}{1+ecosf}$，$p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}$

矢量三重积：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

角动量：$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$，**证明：**两边左叉乘 r 后对时间积分

能量：$\xi = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}$，**证明：**两边点乘 v 后对时间积分

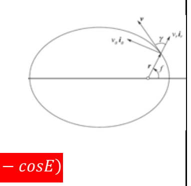
活力积分：$\xi = -\frac{\mu}{2a}$**，判断轨道类型**

偏心率矢量（mu 倍则为 Laplace 矢量）：$\boldsymbol{e} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h} - \frac{\boldsymbol{r}}{r}$

证明：对 e 矢量求导得 0 矢量

方向：垂直于h，近心点幅角会需要

大小：$e^2 = 1 + \frac{2\xi h^2}{\mu^2}$，直接 e 矢量点乘



时间积分：

$$t = \tau + \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\int_0^f\frac{1}{(1+ecosf)^2}df,$$

证明：$h = r^2\dot{f}$，$r = \frac{p}{1+ecosf}$，$p = \frac{h^2}{\mu}$

几何关系：

$h = r^2\dot{f}$，$h^2 = \mu p$，$r = \frac{p}{1+ecosf} = a(1 - cosE)$

$r\cdot e = p - r.$

速度关系：

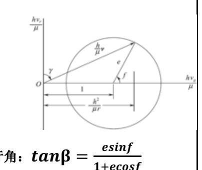
横向速度：$v_\theta = r\dot{f} = \frac{\mu}{h}(1 + ecosf)$

径向速度：$v_r = \dot{r} = \frac{\mu}{h}esinf$

速度大小：$v = \frac{\mu}{h}\sqrt{1 + e^2 + 2ecosf}$

航向角：

$sin\gamma = \frac{\mu}{hv}(1 + ecosf)$，$cos\gamma = \frac{\mu}{hv}esinf$



平均角速度（平近点角速度）：$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$，**飞行角：**$tan\beta = \frac{esinf}{1+ecosf}$

轨道根数和笛卡尔坐标系互换&二体初值问题（重要）

f, E, M 互换：

E2M & M2E：开普勒方程+牛顿迭代法，$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$M = E - esinE$（椭圆，开普勒方程），迭代时以 M 为初值收敛快些

f2E & E2f：几何转换

E 与 f 的转换关系式：$tan\frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tan\frac{1}{2}E$，

注意：f 和 E 不一定在同一象限，但它们的半角一定在，所以运算的时候尽量算半角，避免正负号错误

其他关系式：

$$cosf = \frac{cosE-e}{1-ecosE},\ cosE = \frac{e+cosf}{1+ecosf},\ sin\frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{a(1+e)}{r}}sin\frac{1}{2}E$$

$$sinf = \frac{\sqrt{1-e^2}sinf}{1+ecosf},\ sinE = \frac{\sqrt{1-e^2}sinf}{1+ecosf},\ cos\frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{a(1-e)}{r}}cos\frac{1}{2}E$$

f0dt2ft: f0 → ft

过程：f2E → E2M → M=M0+nt → M2E → E2f

rv2coe: r, v → a, e, i, Ω, ω, f

机械能 E：活力公式：$\xi = -\frac{\mu}{2a}$ → 半长轴 a

角动量 h：$p = \frac{h^2}{\mu}$，$p = a(1 - e^2)$ → 偏心率 e

或者$e = \frac{1}{\mu}v\times h - \frac{r}{r}$ → 偏心率矢量 e，近心点幅角ω（后面求）

$cosi = \frac{h\cdot\overrightarrow{OZ}}{\|h\|}$ → 轨道倾角 i，

升节线$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OZ}\times h}{\|\overrightarrow{OZ}\times h\|}$ → 升交点赤经Ω，不用判断范围

$cos\omega = \frac{\overrightarrow{ON}\cdot e}{e}$ → 近心点幅角ω，若$\overrightarrow{OZ}\cdot e > 0$，则$\omega \in [0,\pi)$

$cosf = \frac{r\cdot e}{re}$ → 真近点角 f，若$r\cdot v > 0$，则$f \in [0,\pi)$

coe2rv：a, e, I, Ω, ω, f

方法 1：欧拉转动

欧拉转动定理：具有固定点的刚体从某一位置到另一位置的变化（定点转动）可通过绕定点某轴一次转动实现。

总旋转矩阵：

$$A = A_3(\Omega)A_1(i)A_3(\omega+f)$$

距离和角动量：$r = \frac{p}{1+ecosf}$, $h = \sqrt{\mu p}$

位置：$r = A[r, 0, 0]^T$

速度：$v = \frac{\mu}{h}A[esinf, 1+ecosf, 0]^T$

方法 2：转轨道平面极坐标系

轨道平面极坐标系：$i_e = \frac{e}{e}$，$i_p = \frac{h}{h}\times i_e$

位置：$r = rcosf i_e + rsinf i_p$

速度：$v = -\frac{\mu}{h}sinf i_e + \frac{\mu}{h}(e+cosf)i_p$

rv02rvf：r0, v0 → rf, vf

过程：rv2coe → f0dtft → coe2rv

其他：抛物线&双曲线情况

抛物线：

巴克方程：$tan^3\frac{1}{2}f + 3tan\frac{1}{2}f = 6\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau)$

$$tan\frac{1}{2}f = \left(B+\sqrt{1+B^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(B+\sqrt{1+B^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

换元：$B = 3\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t-\tau)$

双曲线：

开普勒方程：$N = esinhH - H$，

$$tan\frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}tanh\frac{1}{2}H$$

轨道边值问题：

Lambert 定理：

$$\sqrt{\mu}(t_2-t_1) = F(a, r_1+r_2, c)$$

边值问题方程组：

$\sqrt{\mu}(t_2-t_1) = 2a^{\frac{3}{2}}(\Psi - sin\Psi cos\varphi + N\pi)$

$r_1 + r_2 = 2a(1-cos\Psi cos\varphi)$

$c = 2asin\Psi sin\varphi$，其中

$\Psi = \frac{1}{2}(E_2-E_1)$，$cos\varphi = ecos\frac{1}{2}(E_2+E_1)$

证明：

方程 1（t 的方程）：考虑 N 圈，计算平近点角 M2-M1，开普勒方程转偏近点角 E2-E1 形式，和差化积，给 E2-E1 和 E2+E1 换元

方程 2（r1, r2 的方程）：利用 r 和 E 的关系，和差化积，再给 E2-E1 和 E2+E1 换元

方程 3（弦长 c 的方程）：弦长利用余弦定理计算，两条边夹角即为真近点角 f2-f1。括号内抽出(r1+r2)的平方，利用三角函数和差公式，得到$r_1r_2cos^2\frac{1}{2}\theta = a(cos\Psi - cos\varphi)$，合起来就可以得到弦长的方程

Lagrange 方程：

$$\sqrt{\mu}(t_2-t_1) = a^{\frac{3}{2}}[(\alpha - sin\alpha) - (\beta - sin\beta) + 2N\pi]$$

重点在于对角度做了二次包装：

$\alpha = \varphi + \Psi$，$\beta = \varphi - \Psi$，

特征：（s 为三角形半周长）

$sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s}{2a}}$，$sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{s-c}{2a}}$ ***或者负值***，取决于转移角是否在 180° 以内

速度性质：斜交轴分解

利用极坐标下位置的表示，用r_1, r_2表示i_e, i_p，代入速度的矢量式，即可得到斜交轴下的速度公式：

$$v_c = \frac{c\sqrt{\mu p}}{r_1r_2sin\theta},\quad v_\rho = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{1-cos\theta}{sin\theta},$$

初轨确定（重要）

共面三点定轨：给定三个点的极坐标，求平面开普勒轨道（p, e, ω）

利用轨道方程得到对每个点都有

$$\frac{p}{r} - Pcos\theta - Qsin\theta = 1$$

其中$P = ecos\omega$，$Q = esin\omega$

$e = \sqrt{P^2+Q^2}$，$tan\omega = \frac{Q}{P}$

共面三位置矢量定轨：给定共面三个矢量，求平面开普勒轨道（6 个根数）

$r_2 = \alpha r_1 + r_3$，分别叉乘r_1, r_3消去对方，得

$\alpha = \frac{(r_2\times r_3)\cdot n}{n^2}$，$\beta = \frac{(r_1\times r_2)\cdot n}{n^2}$，$n = r_1\times r_3$

$e\cdot r_2 = p - r_2$ → $p = \frac{\alpha r_1+\beta r_3-r_2}{\alpha+\beta-1}$

$(n\times e)\times n = n^2e$ →

$$e = \frac{1}{n^2}[(p-r_1)(r_3\times n) - (p-r_3)(r_1\times n)]$$

$cosi = \frac{n\cdot\overrightarrow{OZ}}{||n||}$ → i

升节线$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OZ}\times n}{||\overrightarrow{OZ}\times n||}$ → Ω

其余根数确定方法和 rv2coe 一样

连续三次定位确定近似轨道：三个时刻，三个位置矢量，不保证共面，确定位置速度

幂级数展开法：

$r = c_0 + c_1t + \cdots + c_5t^5$，$v = \dot{r}$

定义时间间隔$d_1 = t_2 - t_1, d_2 = t_3 - t_2$，

$r_1 = c_0 - c_1d_1 + c_2d_1^2 - c_3d_1^2 + c_4d_1^4 - c_5d_1^5$

$r_2 = c_0$

$r_3 = c_0 + c_1d_2 + c_2d_2^2 + c_3d_2^2 + c_4d_2^4 + c_5d_2^5$

$-\frac{\mu}{r_1^3}r_1 = 2c_2 - 6c_3d_1 + 12c_4d_1 - 20c_5d_2^3$

$-\frac{\mu}{r_2^3}r_2 = 2c_2$

$-\frac{\mu}{r_3^3}r_3 = 2c_2 + 6c_3d_2 + 12c_4d_2 + 20c_5d_2^3$

求解可得向量系数 c1~c5，代回位置速度表达式

连续三次测距：三个时刻，三个距离，不保证共面，确定位置速度

幂级数展开法：

$r = c_0 + c_1t + \cdots + c_5t^5$

$\ddot{r} - r\dot{f}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$

$\ddot{r} = \frac{\mu}{r^3}(p-r) = 2c_2 + 6c_3t + 12c_4t^2$

定义时间间隔d_1, d_2，

$r_1 = c_0 - c_1d_1 + c_2d_1^2 - c_3d_1^3 + c_4d_1^4$

$r_2 = c_0$

$r_3 = c_0 + c_1d_2 + c_2d_2^2 + c_3d_2^3 + c_4d_2^4$

$-\frac{\mu}{r_1^3}(p-r_1) = 2c_2 - 6c_3d_1 + 12c_4d_1^2$

$-\frac{\mu}{r_2^3}(p-r_2) = 2c_2$

$-\frac{\mu}{r_3^3}(p-r_3) = 2c_2 + 6c_3d_2 + 12c_4d_2^2$

求解得到 c1~c5，代回位置表达式

轨道机动

轨道根数最优调节的证明：

半长轴：$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$ → $\Delta a = \frac{2a^2}{\mu}v\cdot\Delta v$

可以得到结论：切向+近拱点最好

也可以用做功快速记忆，但不可以用来证明

偏心率：$2e\Delta e = \frac{2\Delta\xi h^2}{\mu^2} + \frac{2\xi\Delta(h^2)}{\mu^2}$

$\Delta\xi = v\cdot\Delta v = v_r\Delta v_r + v_t\Delta v_t$

$\Delta h = r\times\Delta v = r\Delta v_te_n - r\Delta v_ne_t$

$\Delta h^2 = 2h\cdot\Delta h = 2hr\Delta v_t$

→$e\Delta e = \frac{h^2}{\mu^2}(v_r\Delta v_r + v_t\Delta v_t) - \frac{hr\Delta v_t}{\mu a}$

$e\Delta e = \frac{h}{\mu}[esinf\Delta v_r + (1+ecosf)\Delta v_\theta] - \frac{hr}{\mu ae}\Delta v_\theta$

→$\Delta e = \frac{h}{\mu}[sinf\Delta v_r + (cosf + cosE)\Delta v_\theta]$

又$\Delta v_r = \Delta vsin\beta$，$\Delta v_\theta = \Delta vcos\beta$，β 是飞行角，所以

$$\Delta e = \frac{h}{\mu}\Delta v[cos(f-\beta) + cosEcos\beta]$$

括号内→最大值为 2。f=β=E=0 对应在近拱点切向加速，f=β=E=π 对应在远拱点切向减速。最小值为−2。β=0 且 f=E=π 或 β=π 且 f=E=0 时，前者对应在远拱点切向加速，后者对应在近拱点切向减速。

轨道倾角和升交点赤经&轨道面：

$\Delta i = \frac{rcos\theta}{h}\Delta v_n$，$\Delta\Omega = \frac{rsin\theta}{hsini}\Delta v_n$，$\Delta e_n = -\frac{r\Delta v_n}{h}e_t$

调整脉冲大小和变轨时机可以同时调这两个角度，概念部分已经提及结论。

可达域计算：

任意方向距离焦点 F 最远的点一定是最小能量轨道上的点，$s = \frac{2\mu r_1}{2\mu - v_1^2r_1}$，可达域以 F 和 P_1 为焦点，

$a_l = \frac{1+k}{1-k}r_1$，$e_l = \frac{1-k}{1+k}$，$k = \frac{r_1v_1^2}{2\mu}$

最优单脉冲转移：

最小的Δv1 对应 v0 的端点与双曲线的最短距离，就是做速度矢端双曲线的切线，向切线作垂线

双曲线的性质：过双曲线上的点 P 作渐近线的平行线，交渐近线于两点，两点的连线与 P 点的切线平行，代入该情景就有$(v_{\rho1} - v_{c1})\cdot(v_{\rho1} + v_{c1} - v_0) = 0$

霍曼转移：

老实计算中间轨道半长轴，算出出发到达的速度，即可得到脉冲（两次加速）

非共面时转移轨道半长轴不变，但是要挑选**最佳角度**，在**升降节点用余弦定理**即可

共面最优双脉冲转移：

一阶必要条件：

$$\frac{(v_1-v_0)\cdot\delta v_1}{\Delta v_1} = \frac{(v_3-v_2)\cdot\delta v_2}{\Delta v_2}\quad \frac{\Delta v_1}{\Delta v_1}\cdot(v_{\rho1} - v_{c1}) = \frac{\Delta v_2}{\Delta v_2}\cdot(v_{\rho2} - v_{c2})$$

Δv1 和 δv2 分别在Δv1 和Δv2 的方向的投影必须相等，△代表脉冲，δ代表变分

考虑 v1 与 v0 平行，v2 与 v3 平行（共切轨道），

$$\frac{v_1}{v_1}\cdot(v_{\rho1} - v_{c1}) = \frac{v_2}{v_2}\cdot(v_{\rho2} - v_{c2})$$

要使等式成立只有 v1=v2, r1=r2，或者转移角为π

调相机动：

相位追赶/等待：调相时间 t=NT（T 是调相轨道周期）内，调相轨道运行角度为2Nπ，被追赶/等待飞行器飞行角度为φ + 2Nπ：

$$\frac{2N\pi}{n} = \frac{2N\pi - M_B}{n_0}$$

M_B为正，是相位追赶，否则是相位等待。

使用平均角速度进行计算时，如果轨道不是圆，应该用平近点角计算。先算出半长轴，然后计算速度。

注意：N 圈指的是调相轨道运行了 N 圈，不是原轨道运行 N 圈，原轨道运行角度接近 N 圈，多相位（落后）或少相位（超前）

线性非齐次微分方程：常数变易法

本质：将非齐次方程的解转化为齐次方程通解和一个函数的乘积

一阶：

$$\frac{dy}{dt} + f(t)y = g(t),$$

先求齐次通解：$y = Ce^{-\int f(t)dt}$

然后把常数变成变量：$C = C(t)$

代回原非线性微分方程组，对时间积分求 C(t)：

$$\frac{dC}{dt}e^{-\int f(t)dt} = g(t)$$

合起来就可以求得通解。

注意：求 C(t)的时候不要忘记常数项，不然通解会不全

n 阶：

$$L(y) = g(t)\qquad L(y) \equiv \frac{d^ny}{dt^n} + f_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + f_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + f_n(t)y$$

$$\begin{cases} y^T = \begin{bmatrix} y & \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} & \cdots & \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} & \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \\ g^T = [0\ \ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ g] \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -f_n & -f_{n-1} & -f_{n-2} & \cdots & -f_2 & -f_1 \end{bmatrix}$$

原方程可等价为$\frac{dy}{dt} = Fy + g$

假设已知齐次方程 L(y)=0 的 n 个线性无关的解，记为$y_1(t)$，$y_2(t)$，。。。，$y_n(t)$，**那么就有**$\frac{dW}{dt} = FW$

仿照一阶的方法，就可以得到$\frac{dc}{dt} = W^{-1}g$

对时间积分求 c(t)，带回去：$y = Wc(t)$

轨道根数变易法

拉格朗日行星运动方程：摄动加速度可以用位函数 R 的梯度表示

摄动方程：$\frac{dr}{dt} = v$，$\frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{r^3}r = \left[\frac{\partial R}{\partial r}\right]^T$

用 6 个密切轨道根数和时间描述位置速度：

$r = r(t, \alpha)$，$v = v(t, \alpha)$

密切条件：$\frac{\partial r}{\partial t} = v$，$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\mu}{r^3}r$

受摄运动：$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$，$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$

于是可得：$\frac{\partial r}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = 0$，$\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \left[\frac{\partial R}{\partial r}\right]^T$

化简可得：$L\frac{d\alpha}{dt} = \left[\frac{\partial R}{\partial\alpha}\right]^T$

Lagrange 矩阵：

$$L = \left[\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right]^T\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \left[\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right]^T\frac{\partial r}{\partial\alpha}$$

第 i 行，第 j 列记为$[\alpha_i, \alpha_j]$**，称为 Lagrange 括号，分子代表行，分母代表列，即：**

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \frac{\partial r}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial\alpha_j} - \frac{\partial r}{\partial\alpha_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial\alpha_i}$$

注意：L 不显含时间，只依赖于运动状态，反对称

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\lambda} \\ \frac{de}{dt} = -\frac{b}{na^3e}\frac{\partial R}{\partial\omega} + \frac{b^2}{na^4e}\frac{\partial R}{\partial\lambda} \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{nab\sin i}\frac{\partial R}{\partial\Omega} + \frac{\cos i}{nab\sin i}\frac{\partial R}{\partial\omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{nab\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{nab\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{b}{na^3e}\frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{b^2}{na^4e}\frac{\partial R}{\partial e} \end{cases}$$

得到 Lagrange 行星运动方程：

高斯型摄动方程：不要求摄动力有势

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{h}\left(e\sin f a_{dr} + \frac{p}{r}a_{d\theta}\right) = \frac{2a^2v}{\mu}a_{dt} \\ \frac{de}{dt} = \frac{1}{h}\{p\sin f a_{dr} + [(p+r)\cos f + re]a_{d\theta}\} \\ \frac{di}{dt} = \frac{r\cos\theta}{h}a_{dh} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin\theta}{h\sin i}a_{dh} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{he}[-p\cos f a_{dr} + (p+r)\sin f a_{d\theta}] - \frac{r\sin\theta\cos i}{h\sin i}a_{dh} \\ \frac{dM}{dt} = n + \frac{b}{ahe}[(p\cos f - 2re)a_{dr} - (p+r)\sin f a_{d\theta}] \end{cases}$$

摄动加速度沿自然坐标系分解，e=0 或 i=0 或π时奇异，改用春分点轨道根数可将奇异情况推到倾角 180°的情况（一般少见）

几大摄动（主要是 J2 平均法）

非球形引力摄动：

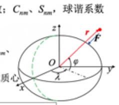
在地固坐标系Oxyz中坐标为(r, λ, φ)的外部的点受到的引力位函数：

$$V = \frac{\mu}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\varphi)(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)\right\}$$

R_e，地球参考半径；μ，地心引力系数；C_{nm}、S_{nm}，球谐系数

球谐系数的物理意义：

1. 与经度λ关系：C_{n0}，无关，带谐系数；C_{nm}、$S_{nm}(m\neq0)$，有关，田谐系数。
2. 一阶项：$[C_{1,0}, C_{1,1}, S_{1,1}] = [z_c, x_c, y_c]/R_e$，地球质心在地固系中坐标。
3. 二阶项：$[C_{2,0}, C_{2,2}, C_{2,1}, S_{2,1}, S_{2,2}] = \frac{1}{m_eR_e^2}\left[\frac{1}{2}(I_x+I_y) - I_z, \frac{1}{4}(I_y - I_x), I_{xz}, I_{yz}, \frac{1}{2}I_{xy}\right]$



地固系为地球中心主轴坐标系时，$C_{2,1} = S_{2,1} = S_{2,2} = 0$；

地球为旋转椭球时，只有$C_{2,0}\neq0$，称为地球扁率参数($J_2 \triangleq C_{2,0} = 1.083\times10^{-3}$)

$$\begin{bmatrix} a_{dr} \\ a_{d\theta} \end{bmatrix} = \frac{h}{pv}\begin{bmatrix} e\sin f & -(1+e\cos f) \\ 1+e\cos f & e\sin f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{dt} \\ a_{dn} \end{bmatrix}$$

J2 摄动：

惯性系：Re 为地球参考半径

$$V_{J2} = \frac{\mu}{r}\frac{J_2R_e^2}{2r^2}(1-3\sin^2\varphi)\qquad \begin{bmatrix} a_{xJ2} \\ a_{yJ2} \\ a_{zJ2} \end{bmatrix} = -\frac{\mu}{r^3}\frac{3J_2}{2}\left(\frac{R_e}{r}\right)^2\begin{bmatrix} \left(1-5\frac{z^2}{r^2}\right)x \\ \left(1-5\frac{z^2}{r^2}\right)y \\ \left(3-5\frac{z^2}{r^2}\right)z \end{bmatrix}$$

极坐标系：

极坐标系下的加速度(径向r, 横向θ, 法向h)：

$$\begin{bmatrix} a_{rJ2} \\ a_{\theta J2} \\ a_{hJ2} \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}\frac{\mu}{r^2}J_2\left(\frac{R_e}{r}\right)^2\begin{bmatrix} 1-3\sin^2 i\sin^2(\omega+f) \\ \sin^2 i\sin2(\omega+f) \\ \sin2i\sin(\omega+f) \end{bmatrix}$$

$$\sin\varphi = \sin i\sin(\omega+f)$$

平均法：a, e, i 不变，

$\frac{\overline{d\Omega}}{dt} = -\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_e}{p}\right)^2 ncosi$，

$\frac{\overline{d\omega}}{dt} = \frac{3}{4}J_2\left(\frac{R_e}{p}\right)^2 n(5cos^2i - 1)$，

$\frac{\overline{d\lambda}}{dt} = \frac{3}{4}J_2\left(\frac{R_e}{p}\right)^2\sqrt{1-e^2}n(2-3sin^2i)$，

几种特殊轨道：按照平均法结果，结合概念部分对几种轨道的定义公式求解轨道根数即可

相对运动：

主星轨道坐标系：c 为主星质心、x 轴指向径向、z 轴沿轨道角动量方向、y 轴构成右手系

注意：主星轨道坐标系是转动系，但是主星做质点的参考系不是转动系；前者要考虑离心力、科氏力，后者就是简单的点的复合运动

转动系运动方程：

$$\ddot{\tilde{r}} + 2\omega\times\dot{\tilde{r}} + \omega\times(\omega\times r) + \varepsilon\times r = a_d - a_c$$

注意：转动系下速度要考虑坐标系的转动！

只考虑地心引力：$a_c = -\frac{\mu}{R_c^3}R_c$

主星圆轨道：主星的地心距 Rc =const、ω为常矢量，且$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{R_c^3}}$，$\varepsilon = 0$

航天器离得很近：从星加速度线性化，以 r/Rc 为小量

向主星轨道系投影：以下 x, y, z 全部代表转动系内的运动

C-W 方程：

$\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = 0$

$\ddot{y} + 2n\dot{x} = 0$

$\ddot{z} + n^2z = 0$

求解&定解条件：

$$\begin{cases} x = C_1\cos nt + C_2\sin nt + \frac{2C_4}{n} \\ y = -2C_1\sin nt + 2C_2\cos nt - 3C_4t + C_3 \\ z = C_5\cos nt + C_6\sin nt \end{cases}$$

定解条件：

$t = 0, x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0$

常数：

$$\begin{cases} C_1 = -\left(3x_0 + 2\frac{\dot{y}_0}{n}\right) & C_3 = y_0 - 2\frac{\dot{x}_0}{n} & C_5 = z_0 \\ C_2 = \frac{\dot{x}_0}{n} & C_4 = 2nx_0 + \dot{y}_0 & C_6 = \frac{\dot{z}_0}{n} \end{cases}$$

特征的推导：

$$\begin{cases} x - \frac{2C_4}{n} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin(nt + \varphi_0) & \tan\varphi_0 = \frac{C_1}{C_2} \\ y - C_3 + 3C_4t = 2\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\cos(nt + \varphi_0) & \\ z = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}\sin(nt + \psi_0) & \tan\psi_0 = \frac{C_5}{C_6} \end{cases}$$

然后就可以得到概念部分关于相对运动轨道的特征。

周期解条件：

$$C_4 = 2nx_0 + \dot{y}_0 = 0$$

前面概念部分也已经提及。

状态转移矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{\tilde{r}}(t) \end{bmatrix} = \phi(t)\begin{bmatrix} r(0) \\ \dot{\tilde{r}}(0) \end{bmatrix},\quad \phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{rr}(t) & \phi_{rv}(t) \\ \phi_{vr}(t) & \phi_{vv}(t) \end{bmatrix}$$

$$\phi_{rr}(t) = \begin{bmatrix} 4-3\cos nt & 0 & 0 \\ 6(\sin nt - nt) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos nt \end{bmatrix}\quad \phi_{rv}(t) = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \sin nt & 2(1-\cos nt) & 0 \\ 2(\cos nt - 1) & 4\sin nt - 3nt & 0 \\ 0 & 0 & \sin nt \end{bmatrix}$$

$$\phi_{vr}(t) = \begin{bmatrix} 3n\sin nt & 0 & 0 \\ 6n(\cos nt - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n\sin nt \end{bmatrix}\quad \phi_{vv}(t) = \begin{bmatrix} \cos nt & 2\sin nt & 0 \\ -2\sin nt & 4\cos nt - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \cos nt \end{bmatrix}$$

圆型限制性三体问题：

无量纲化：$[M] = m_1 + m_2$，$[L] = a_1 + a_2$，$[T] = \sqrt{\frac{(a_1+a_2)^3}{G(m_1+m_2)}}$

从而新的引力常数为 1，若记μ=m2/(m1+m2)，有 1-μ=m1/(m1+m2)，a1=μ，a2=1-μ，ω=1

引力势能位函数：$V = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$，

$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}$，$r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}$

再引入离心势能（移项）：$U = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$

得到仅在两个天体引力作用下 m3 的运动方程：

$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}$，$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}$，$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}$

该方程有首次积分$\frac{1}{2}v^2 - U = E$，**证明：**两边点乘速度积分即可

拉格朗日点求解：

本质是转动系下相对速度、相对加速度均为 0，如果加进了其他的力，紧紧抓住相对稳定静止的概念。

$$U_x = \partial U/\partial x = -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} + x = 0$$

$$U_y = \partial U/\partial y = -y\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} - 1\right) = 0$$

$$U_z = \partial U/\partial z = -z\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0$$

注意：这里求解出来的点全都是无量纲化之后的，要求出实际坐标，必须换回原量纲才可以！

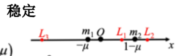
必有 z=0，也就是平衡点必须和三点共面

L4, L5：y≠0，两个正三角形，稳定

$\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} - 1 = 0$ ，**解得 r1=r2，**$x = 0.5 - \mu$，$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

L1-L3：y=0，和 m1，m2 共线，稳定

第2种情况（y=0）



$$F(x) = -\frac{\mu(x-1+\mu)}{|x-1+\mu|^3} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} + x = 0$$

$F(-\mu^+) < 0$，$F((1-\mu)^-) > 0$ → L_1位于x轴上m_1和m_2之间 $F(x) = x + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} = 0$

$F((1-\mu)^+) < 0$，$F(+\infty) > 0$ → L_2位于x轴上m_2右边 $F(x) = x - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} = 0$

$F(-\mu^-) > 0$，$F(-\infty) < 0$ → L_3位于x轴上m_1左边 $F(x) = x + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2} + \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} = 0$

系统稳定性：一阶近似理论

求平衡点。在平衡点附近进行一阶展开，取线性项，将会得到一个线性微分方程。系数矩阵 A 的特征值决定了平衡点的稳定性。

特征值实部都为负→渐进稳定

有一个特征值实部为正→不稳定

有实部为 0 的特征值，其他特征值无正实部→一阶近似理论无法判断

其他概念：

地球同步轨道：轨道周期与地球自转周期相同，半长轴为 42164.17Km

地球静止轨道：地球同步轨道的一种，轨道面在赤道面上

计算器的使用：

向量运算：设置→5 向量→OPTN→可以定义向量和向量运算，注意不要把已经输入的向量删了；点乘：点 OPTN 找点乘；叉乘：就是乘法符号

矩阵运算：设置→4 矩阵→OPTN→其他和向量运算差不多，可以求行列式、单位阵、转置、求逆（就是-1 次方）