# 数值分析第一次上机练习实验报告

## ——Lagrange 插值与三次样条插值

## 一、问题的描述

设 $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$，$x\in[-1,1]$,取 $x_i=-1+\frac{i}{5}, i=0,1,2,...,10$.试求出10次Lagrange插值多项式 $L_{10}(x)$ 和三次样条插值函数 $S(x)$(采用自然边界条件),并用图画出 $f(x), L_{10}(x)$, $S(x)$.

## 二、方法描述——Lagrange 插值与三次样条插值

我们取 $x_i=-1+\frac{i}{5}, i=0,1,2,...,10$，通过在 $x_i$ 点的函数值 $f(x_i)=\frac{1}{1+9x_i^2}$ 来对原函数进行插值，我们记插值函数为 $g(x)$，要求它满足如下条件：

$$g(x_i)=f(x_i)=\frac{1}{1+9x_i^2},\quad i=0,1,2,...,10 \tag{1}$$

我们在此处要分别通过 Lagrange 插值(即多项式插值)与三次样条插值的方法对原函数 $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$ 进行插值，看两种方法的插值结果，并进行结果的比较。

10 次的 Lagrange 插值多项式为：

$$L_{10}(x)=\sum_{i=0}^{10} y_i l_i(x) \tag{2}$$

其中：

$$y_i=f(x_i)=\frac{1}{1+9x_i^2},\quad i=0,1,2,...,10$$

以及

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)},\quad i=0,1,2,...,10$$

我们根据(2)进行程序的编写，我们可以通过几个循环很容易实现函数的 Lagrange 插值。

理论上我们根据区间 $[-1,1]$ 上给出的节点做出的插值多项式 $L_n(x)$ 近似于 $f(x)$，而多项式 $L_n(x)$ 的次数 $n$ 越高逼近 $f(x)$ 的精度就越好。但实际上并非如此，而是对任意的插值节点，当 $n\to+\infty$ 的时候 $L_n(x)$ 不一定收敛到 $f(x)$；而是有时会在插值区间的两端点附近

会出现严重的 $L_n(x)$ 偏离 $f(x)$ 的现象，即所谓的 Runge 现象。因此用高次插值多项式 $L_n(x)$ 近似 $f(x)$ 的效果并不总是好的，因而人们通常在选择插值方式的时候不用高次多项式插值，而用分段低次插值，而这样的插值效果往往是非常好的，能够克服高次多项式插值的弱点，达到令人满意的效果。

分段低次插值包括分段线性插值、分段三次 Hermite 插值、三次样条插值等。前两种插值函数都具有一致收敛性，但是光滑性较差，而在实际问题中我们往往要求函数具有二阶光滑度，即有二阶连续导数。而对第三种插值方式，我们得到的是一个样条曲线，它是由分段三次曲线拼接而成，在连接点(即样点)上二阶导数连续。

我们记三次样条插值函数为 $S(x)$，它在每个小区间 $\left[x_j, x_{j+1}\right], j=0,1,2,\ldots,9$ 上是三次函数，因此在每个区间上需要确定 4 个参数，总共有 10 个小区间，因此共需确定 40 个未知参数。首先我们有插值条件：

$$S(x_j)=y_j=\frac{1}{1+9x_j^2},\quad j=0,1,2,\ldots,10 \tag{3}$$

其次在每个节点 $x_j, j=1,2,\ldots,9$ 上满足连续性条件：

$$S(x_j-0)=S(x_j+0),\quad S'(x_j-0)=S'(x_j+0),\quad S''(x_j-0)=S''(x_j+0) \tag{4}$$

此外在端点处满足自然边界条件：

$$S''(x_0)=S''(-1)=0,\quad S''(x_{10})=S''(1)=0 \tag{5}$$

我们假设 $S''(x_j)=M_j, j=0,1,2,\ldots,10$。则在每个小区间 $\left[x_j, x_{j+1}\right], j=0,1,2,\ldots,9$ 上：

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+\left(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j} \tag{6}$$

其中：

$$x\in\left[x_j, x_{j+1}\right],\quad j=0,1,2,\ldots,9$$

及

$$h_j=x_{j+1}-x_j$$

我们利用边界条件(3)(4)(5)可以得到：

$$\mu_jM_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=d_j,\quad j=1,2,\ldots,9 \tag{7}$$

其中：

$$\mu_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j},\quad \lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}$$

以及

$$d_j = 6\frac{f\left[x_j, x_{j+1}\right] - f\left[x_{j-1}, x_j\right]}{h_{j-1} + h_j} = 6f\left[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\right]$$

两端点处的边界条件为：

$$M_0 = M_{10} = 0 \tag{8}$$

将边界条件写成矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_9 & 2 & \lambda_9 \\ & & & & \mu_{10} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_9 \\ M_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_9 \\ d_{10} \end{pmatrix} \tag{9}$$

其中根据自然边界条件(8)有：

$$\lambda_0 = \mu_{10} = 0, d_0 = d_{10} = 0$$

我们解方程(9)就可以得到$M_j, j = 0,1,...,10$，将他们代入(6)就可以得到各段区间上的$S\left(x\right)$的值。

## 三、方案设计

我们通过编写Matlab程序来进行10次Lagrange插值与三次样条插值的工作。在我们的程序文件中interplotion.m文件是主程序文件；L10.m文件是计算10次Lagrange插值多项式$L_{10}\left(x\right)$的子程序文件，给它任一个$x \in \left[-1,1\right]$，此程序将返回$L_{10}\left(x\right)$的值；Mspline.m是根据(9)计算各节点二阶导数值$M_j, j = 0,1,2,...,10$的子程序文件，它将会返回在自然边界条件下的各节点的二阶导数值$M_j$；然后spline.m是根据$M_j$以及(6)计算三次样条插值函数$S\left(x\right)$的子程序文件。然后运行主程序将给出三幅曲线图，分别是$f\left(x\right)$与$L_{10}\left(x\right)$曲线，$f\left(x\right)$与$S\left(x\right)$曲线，以及$f\left(x\right)$、$L_{10}\left(x\right)$与$S\left(x\right)$三条曲线共同画在一幅图上得到的图象。

解决这个问题的思路很简单，按部就班的来就可以。首先我们计算各节点$x_i$上的函数值$y_i = f\left(x_i\right)$以备后用，然后调用 Mspline.m 计算$M_j, j = 0,1,2,...,10$。随后我们给出一系列$x$的值，计算$f\left(x\right)$，并分别调用 L10.m 与 spline.m 分别计算$L_{10}\left(x\right)$与$S\left(x\right)$。然后根据我们得到的数据绘图观察插值结果。具体程序的实现可参见所给程序的相关注释。

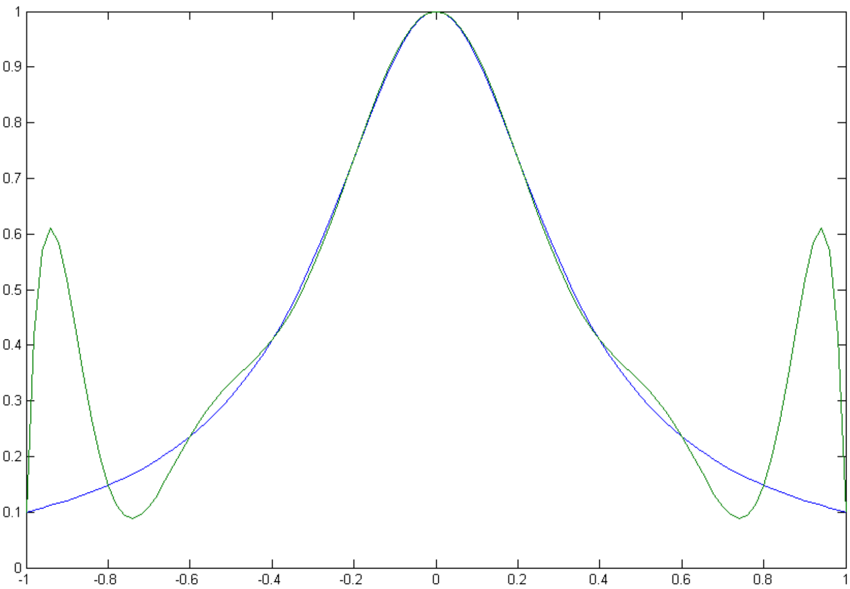
## 四、计算结果及其分析

下面是我们根据程序计算结果得到的数据，其中分别给出了在各典型 $x$ 处的的原函数的值 $f\left(x\right)$、Lagrange 插值结果 $L_{10}\left(x\right)$ 与样条插值结果 $S\left(x\right)$；以及绝对误差 $L_{10}\left(x\right)-f\left(x\right)$ 和 $S\left(x\right)-f\left(x\right)$，相对误差 $\dfrac{L_{10}\left(x\right)-f\left(x\right)}{f\left(x\right)}$，$\dfrac{S\left(x\right)-f\left(x\right)}{f\left(x\right)}$。由于在两端点处进行 Lagrange 插值插值的时候可能出现 Runge 现象，因此我们在两端点附近多给了几个点的数据。

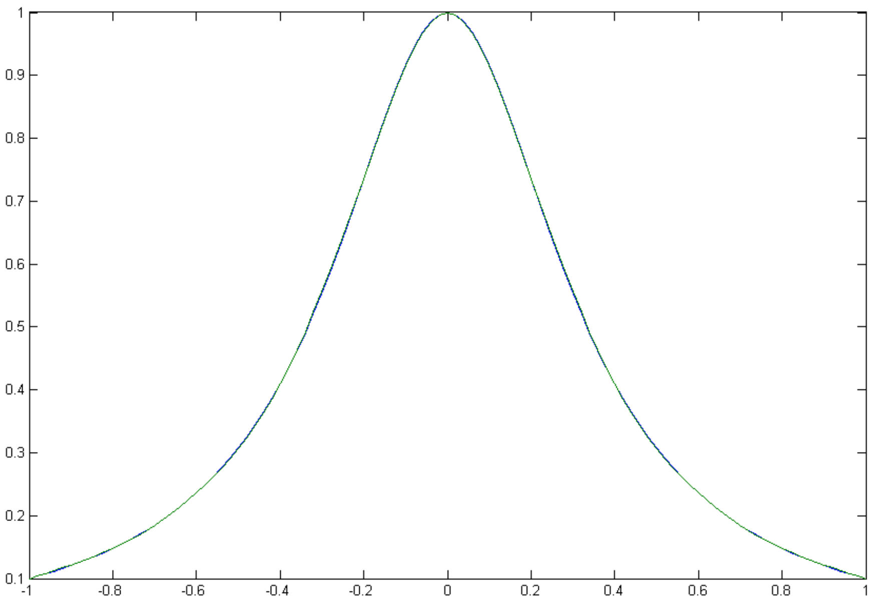
| *x* | *f*(*x*) | *L*10(*x*) | *S*(*x*) | 误差<br>*L*10(*x*)-*f*(*x*) | 相对误差<br>(*L*10(*x*)-*f*(*x*))/ *f*(*x*) | 误差<br>*S*(*x*)-*f*(*x*) | 相对误差<br>(*S*(*x*)-*f*(*x*))/ *f*(*x*) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1.00 | 0.10000 | 0.10000 | 0.10000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.98 | 0.10370 | 0.41597 | 0.10409 | 0.31228 | 3.01147 | 0.00040 | 0.00383 |
| -0.96 | 0.10759 | 0.56881 | 0.10823 | 0.46122 | 4.28677 | 0.00064 | 0.00592 |
| -0.94 | 0.11170 | 0.61150 | 0.11245 | 0.49980 | 4.47440 | 0.00075 | 0.00669 |
| -0.92 | 0.11604 | 0.58445 | 0.11680 | 0.46841 | 4.03656 | 0.00076 | 0.00651 |
| -0.90 | 0.12063 | 0.51779 | 0.12131 | 0.39716 | 3.29244 | 0.00069 | 0.00569 |
| -0.88 | 0.12548 | 0.43329 | 0.12604 | 0.30781 | 2.45313 | 0.00057 | 0.00452 |
| -0.86 | 0.13061 | 0.34608 | 0.13103 | 0.21547 | 1.64974 | 0.00042 | 0.00320 |
| -0.84 | 0.13605 | 0.26605 | 0.13631 | 0.13001 | 0.95560 | 0.00026 | 0.00192 |
| -0.82 | 0.14181 | 0.19906 | 0.14193 | 0.05725 | 0.40368 | 0.00012 | 0.00082 |
| -0.80 | 0.14793 | 0.14793 | 0.14793 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.70 | 0.18484 | 0.11010 | 0.18484 | -0.07474 | -0.40433 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.60 | 0.23585 | 0.23585 | 0.23585 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.50 | 0.30769 | 0.33383 | 0.30640 | 0.02614 | 0.08494 | -0.00129 | -0.00419 |
| -0.40 | 0.40984 | 0.40984 | 0.40984 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.30 | 0.55249 | 0.53935 | 0.55629 | -0.01314 | -0.02378 | 0.00380 | 0.00689 |
| -0.20 | 0.73529 | 0.73529 | 0.73529 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -0.10 | 0.91743 | 0.92247 | 0.91516 | 0.00504 | 0.00549 | -0.00227 | -0.00247 |
| 0.00 | 1.00000 | 1.00000 | 1.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.10 | 0.91743 | 0.92247 | 0.91516 | 0.00504 | 0.00549 | -0.00227 | -0.00247 |
| 0.20 | 0.73529 | 0.73529 | 0.73529 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.30 | 0.55249 | 0.53935 | 0.55629 | -0.01314 | -0.02378 | 0.00380 | 0.00689 |
| 0.40 | 0.40984 | 0.40984 | 0.40984 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.50 | 0.30769 | 0.33383 | 0.30640 | 0.02614 | 0.08494 | -0.00129 | -0.00419 |
| 0.60 | 0.23585 | 0.23585 | 0.23585 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.70 | 0.18484 | 0.11010 | 0.18484 | -0.07474 | -0.40433/ | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.80 | 0.14793 | 0.14793 | 0.14793 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.82 | 0.14181 | 0.19906 | 0.14193 | 0.05725 | 0.40368 | 0.00012 | 0.00082 |
| 0.84 | 0.13605 | 0.26605 | 0.13631 | 0.13001 | 0.95560 | 0.00026 | 0.00192 |
| 0.86 | 0.13061 | 0.34608 | 0.13103 | 0.21547 | 1.64974 | 0.00042 | 0.00320 |
| 0.88 | 0.12548 | 0.43329 | 0.12604 | 0.30781 | 2.45313 | 0.00057 | 0.00452 |
| 0.90 | 0.12063 | 0.51779 | 0.12131 | 0.39716 | 3.29244 | 0.00069 | 0.00569 |
| 0.92 | 0.11604 | 0.58445 | 0.11680 | 0.46841 | 4.03656 | 0.00076 | 0.00651 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.94 | 0.11170 | 0.61150 | 0.11245 | 0.49980 | 4.47440 | 0.00075 | 0.00669 |
| 0.96 | 0.10759 | 0.56881 | 0.10823 | 0.46122 | 4.28677 | 0.00064 | 0.00592 |
| 0.98 | 0.10370 | 0.41597 | 0.10409 | 0.31228 | 3.01147 | 0.00040 | 0.00383 |
| 1.00 | 0.10000 | 0.10000 | 0.10000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |

尽管从数据可以看出一些端倪，但是通过图象我们更能清楚地看到最终插值结果的定性情况。首先我们给出 $f(x)$ 与 $L_{10}(x)$ 曲线:




其中蓝色的曲线代表 $f(x)$ 曲线,绿色的曲线代表 $L_{10}(x)$ 曲线。可见此时两者之间具有很大的差别，尤其在端点附近会出现严重的 $L_{10}(x)$ 偏离 $f(x)$ 的现象，即出现了所谓的 Runge 现象。而此时 $f(x)$ 曲线与我们用样条插值得到的 $S(x)$ 的曲线为：



其中蓝色的曲线代表 $f(x)$ 曲线,绿色的曲线代表 $S(x)$ 曲线，可见两条曲线几乎完全重合，$S(x)$ 与 $f(x)$ 符合的很好。

上面我们由曲线定性看到的结论也可以通过表中的数据定量的看出。

## 五、 结论

插值方法中最基本的是多项式插值，而我们可以通过 Lagrange 多项式来方便的实现这种插值方式。理论上我们根据给定区间上的给定的节点做出的插值多项式 $L_n(x)$ 近似于 $f(x)$，而多项式 $L_n(x)$ 的次数 $n$ 越高逼近 $f(x)$ 的精度就越好。但实际上对任意的插值节点，当 $n \to +\infty$ 的时候 $L_n(x)$ 不一定收敛到 $f(x)$；而是有时会在插值区间的两端点附近会出现严重的 $L_n(x)$ 偏离 $f(x)$ 的现象，即所谓的 Runge 现象。因此用高次插值多项式 $L_n(x)$ 近似 $f(x)$ 的效果并不总是好的，而我们通过本次试验中的实际计算发现对本次试验中的函数确实出现了 Runge 现象，插值结果很不令人满意；我们转而采用分段的三次样条插值，得到了非常好的插值效果。