数值分析第五次上机练习报告

——函数逼近与函数拟合

周懿

力 1-2021013053

一、 问题的描述

设 $f(x)=x^2ln(2+x), x\in[-1,1]$，试求出权函数 $\rho(x)=1$ 的最佳平方逼近三次多项式. 另外请用 Tchebychev 截断级数的办法和插值余项极小化方法分别给出近似最佳一致逼近三次多项式，并画图比较。

二、 方法描述

(a) **最佳平方逼近三次多项式**

我们在这里为方便起见，直接采用 $\{1,x,x^2,x^3,...\}$ 为基函数，设为 $\varphi_0,\varphi_1,...$，因此我们先求出 Gram 矩阵：

$$G=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2)\\(\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2)\end{pmatrix}$$

然后求出法方程等号右段的向量：

$$b=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\\(\varphi_2,f)\end{pmatrix}$$

然后我们求解法方程

$$\mathbf{Ga}=\mathbf{b} \tag{1}$$

得到系数向量：

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}0.0125\\-0.0122\\0.5730\\0.5543\end{pmatrix}$$

于是我们得到最佳平方逼近三次多项式：

$$P_3(x)=0.0125-0.0122x+0.5730x^2+0.5543x^3 \tag{2}$$

(b)**Tchebychev 截断级数法**

我们先对函数做广义 Fourier 级数展开：

$$f \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k T_k(x) \tag{3}$$

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{4}$$

于是我们得到了 Tchebychev 级数每一项的系数（以 Tchebychev 多项式为基函数）：

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.2890 \\ 0.3952 \\ 0.2655 \\ 0.1306 \end{pmatrix}$$

即截断 Tchebychev 级数得到的近似最佳一致逼近多项式为

$$S_3^*(x) = 0.2890 + 0.3952T_1(x) + 0.2655T_2(x) + 0.1306T_3(x) \tag{5}$$

其中各阶 Tchebychev 多项式形式表格如下表所示：

Order	Tchebychev
0	1
1	x
2	$2x^2-1$
3	$4x^3-3x$
4	$8x^4-8x^2+1$

表 1: Tchebychev 多项式表

从而得到最佳一致逼近多项式：

$$S_3^*(x) = 0.0235 + 0.0034x + 0.5310x^2 + 0.5224x^3 \tag{6}$$

(c) **Lagrange 插值余项极小化法**

我们取 $T_4(x)$ 的零点 $x_k = cos\frac{(2k-1)\pi}{8}, k = 1,2,3,4$ 对 $f(x)$ 进行插值，可以得到插值多项式

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_{i+1}) \prod_{j=1, j\neq i+1}^{4} \frac{x-x_j}{x_{i+1}-x_j} \tag{7}$$

三、 方案设计

我们通过编写 MATLAB 程序来进行线性方程组的求解。文件结构如下：

1. main.m：主程序。该程序会生成题目给定的函数，并分别调用三个逼近方法的.m 文件，指定逼近多项式次数 n，使用不同的基函数对函数进行逼近。最终绘出三个函数逼近方法效果的示意图并给出误差。

2. sqr_approx.m：使用最佳平方逼近函数的程序。该程序接受被逼近函数句柄 @func 和多项式次数 n，利用最佳平方逼近进行插值，最终返回逼近之后各项基函数的系数向量。

3. tche_approx.m：使用 Tchebychev 级数截断法进行逼近的程序。该程序接受被逼近函数句柄 @func 和多项式次数 n，利用 Tchebychev 级数截断法进行逼近，最终返回逼近之后各项基函数的系数向量。

4. lag_approx.m：使用 Lagrange 插值余项最小化进行逼近的程序。该程序接受被逼近函数句柄 @func、多项式次数 n 和输入自变量 x，利用 Lagrange 插值余项最小化进行逼近，最终返回逼近函数在 x 点的函数值 y。

5. lagrange_interp.m：上机实验 4 中封装的的 Lagrange 插值函数，在 lag_approx.m 中调用。

四、 计算结果及其分析

我们根据三种方法编写程序后求解出对应的最佳逼近多项式后，一真实曲线作为对照，绘出了三种逼近方法的函数图像，如图 1所示。由图可知三种逼近方法均获得了不错的结果，下面我们对逼近的精度进行进一步分析。

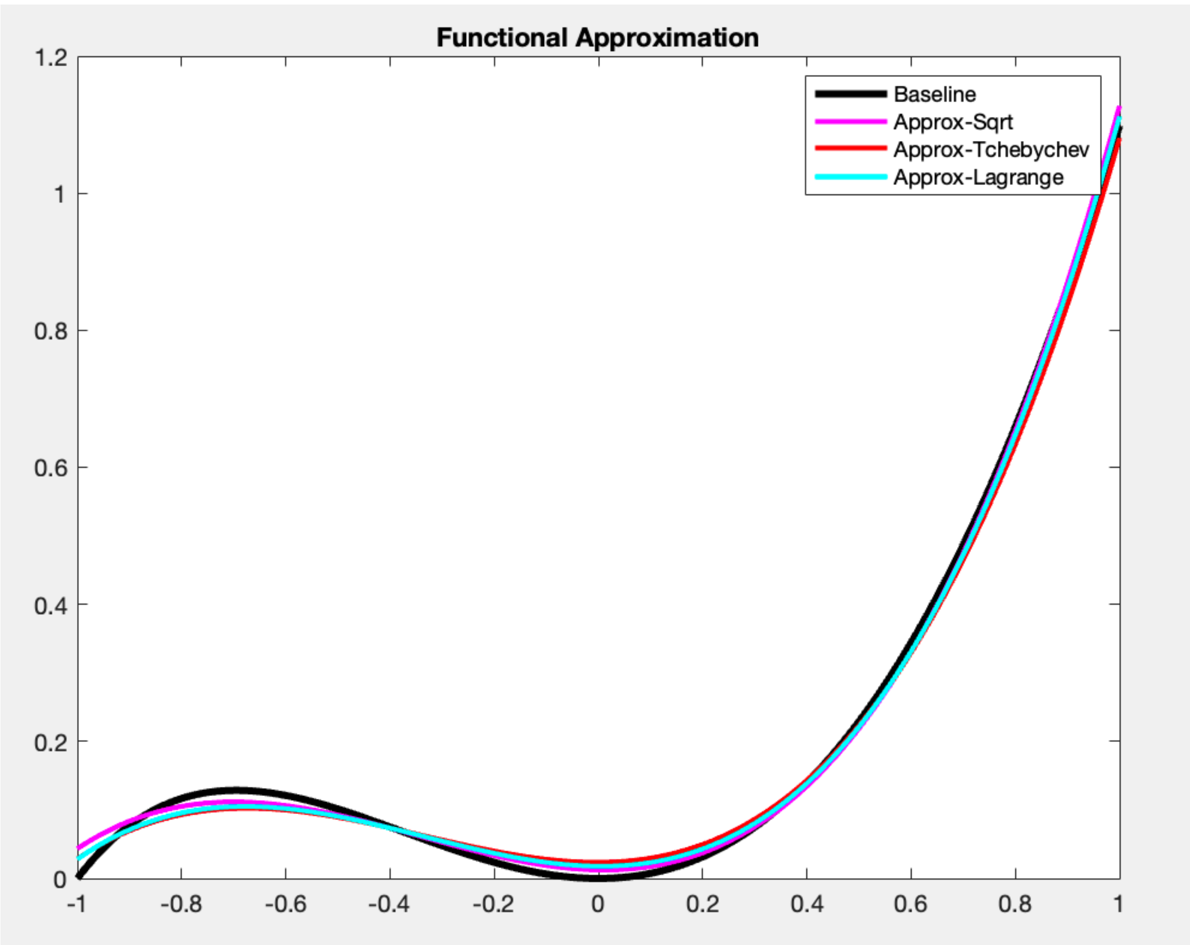

图 1: 三种函数逼近示意图

我们首先计算出三种逼近方法在各点的误差，并求出误差的 2-范数和无穷范数，结果如下表所示。

Error	Sqrt	Tchebychev	Lagrange
2-norm	0.1697	0.2579	0.1914
∞-norm	0.0434	0.0286	0.0281

表 2: 三种逼近方法的误差 2-范数和 ∞-范数

由表中数据可知，最佳平方逼近的误差 2-范数确实是几种逼近方法中最小的，而两种近似最佳一致逼近多项式的无穷范数误差比较接近，逼近多项式系数也接近，比较符合最佳一致逼近多项式的唯一性。三种逼近方法的误差如图 2所示。由图可知本次函数逼近实验中其中确实存在五个正负偏差点。

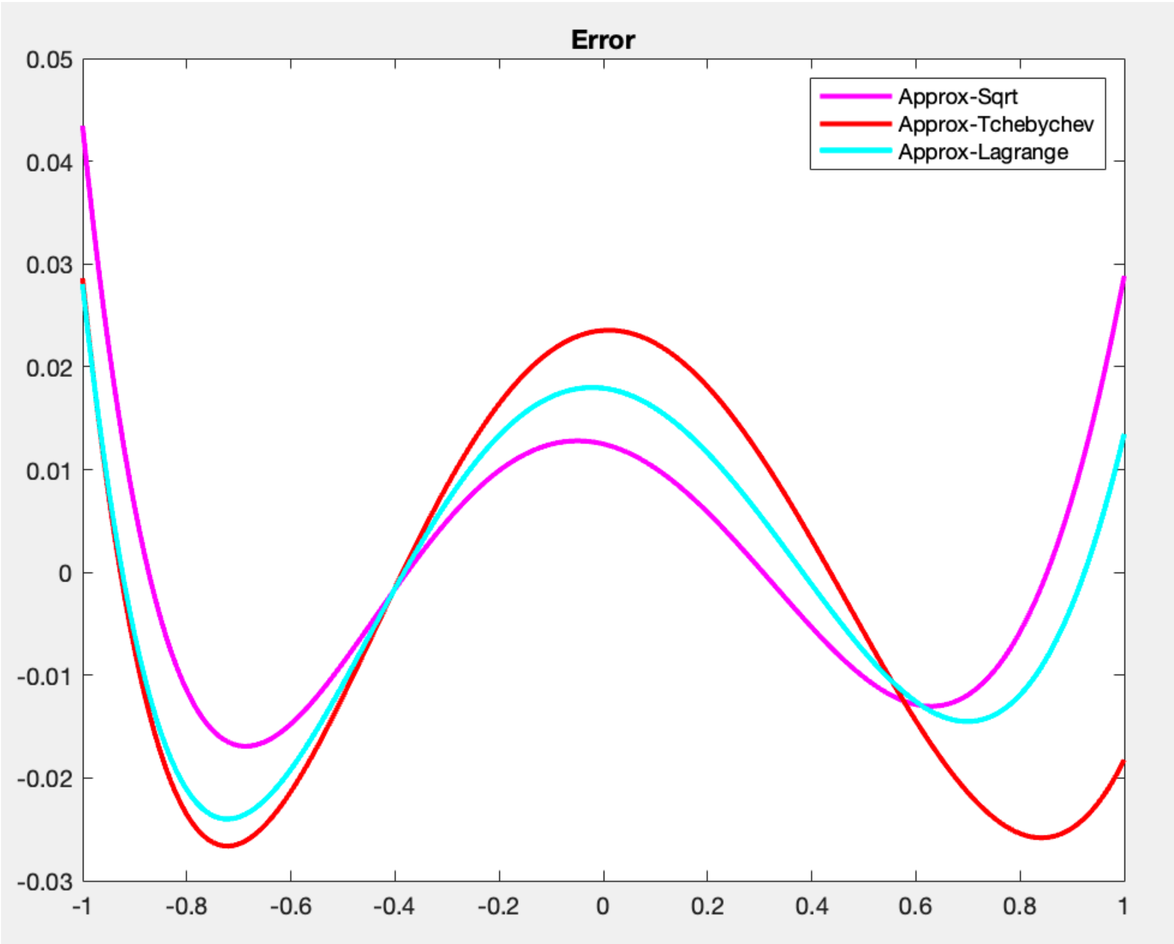

图 2: 三种函数逼近误差示意图

五、 结论

多项式插值是一种常用的函数近似方法，但是当函数高阶导很快趋于无穷的时候，多项式插值在端点处很容易出现 Runge 现象，但是使用函数逼近就没有这个问题。本次实验中我们分别使用了最佳平方逼近、Tchebychev 级数截断法近似最佳一致逼近和 Lagrange 余项最

小化近似最佳一致逼近三种方法进行函数逼近，均取得了较为精确的逼近结果，同时也对这三种逼近方法的特征和偏差点进行了验证。