Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт по лабораторной работе №2
по дисциплине «Математическая статистика»

Тема: Интервальные оценки
Студент: Карпова Е. О.
Группа: ИУ7-62Б
Вариант: 8
Преподаватели: Власов П. А.

Москва — 2023 г.

Оглавление

1. Теоретическая часть

1.1. Задание

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:

   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Данные для лабораторной работы по индивидуальному варианту:

Листинг 1..1: Выборка для варианта №8

```
x = [7.76, 6.34, 5.11, 7.62, 8.84, 4.68, 8.65, 6.90, 8.79, 6.61, 6.62,
    7.13, 6.75, 7.28, 7.74, 7.08, 5.57, 8.20, 7.78, 7.92, 6.00, 4.88, 6.75,
    6.56, 7.48, 8.51, 9.06, 6.94, 6.93, 7.79, 5.71, 5.93, 6.81, 5.76,
    5.88, 7.05, 7.22, 6.67, 5.59, 6.57, 7.28, 6.22, 6.31, 5.51, 6.69, 7.12,
    7.40, 6.86, 7.28, 6.82, 7.08, 7.52, 6.81, 7.55, 4.89, 5.48, 7.74,
    5.10, 8.17, 7.67, 7.07, 5.80, 6.10, 7.15, 7.88, 9.06, 6.85, 4.88, 6.74,
    8.76, 8.53, 6.72, 7.21, 7.42, 8.29, 8.56, 9.25, 6.63, 7.49, 6.67,
    6.79, 5.19, 8.20, 7.97, 8.64, 7.36, 6.72, 5.90, 5.53, 6.44, 7.35, 5.18,
```

```
8.25, 5.68, 6.29, 6.69, 6.08, 7.42, 7.10, 7.14, 7.10, 6.60, 6.35,
5.99, 6.17, 9.05, 6.01, 7.77, 6.27, 5.81, 7.80, 9.89, 4.39, 6.83, 6.53,
8.15, 6.68, 6.87, 6.31, 6.83]
```

1.2. Теоретические сведения

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой параметра θ уровня γ (γ-интервальной оценкой) называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$$

γ-доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня γ) для параметра θ называют реализацию (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра, то есть интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$ с детерминированными границами.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{X}$ – выборочное среднее, $S^2(\vec{X})$ – исправленная выборочная дисперсия, n – объем выборки, $t^{(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с n-1 степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии нормальной случайной величины:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

где $S^2(\vec{X})$ – исправленная выборочная дисперсия, n – объем выборки, $h^{(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения χ^2 с n - 1 степенями свободы.

2. Практическая часть

2.1. Код программы

```
x = [7.76,6.34,5.11,7.62,8.84,4.68,8.65,6.90,8.79,6.61,6.62,7.13,6.75,...
     7.28,7.74,7.08,5.57,8.20,7.78,7.92,6.00,4.88,6.75,6.56,7.48,8.51,...
     9.06,6.94,6.93,7.79,5.71,5.93,6.81,5.76,5.88,7.05,7.22,6.67,5.59,...
     6.57,7.28,6.22,6.31,5.51,6.69,7.12,7.40,6.86,7.28,6.82,7.08,7.52,...
     6.81,7.55,4.89,5.48,7.74,5.10,8.17,7.67,7.07,5.80,6.10,7.15,7.88,...
     9.06,6.85,4.88,6.74,8.76,8.53,6.72,7.21,7.42,8.29,8.56,9.25,6.63,...
     7.49,6.67,6.79,5.19,8.20,7.97,8.64,7.36,6.72,5.90,5.53,6.44,7.35,...
     5.18,8.25,5.68,6.29,6.69,6.08,7.42,7.10,7.14,7.10,6.60,6.35,5.99,...
     6.17,9.05,6.01,7.77,6.27,5.81,7.80,9.89,4.39,6.83,6.53,8.15,6.68,...
     6.87,6.31,6.83];

prompt = "Enter gamma: ";
gamma = input(prompt)

n = length(x);

mu = sum(x) / n
s2 = sum((x - mu) .^ 2) / (n - 1)

mu_low = mu - sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n)
mu_high = mu + sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n)

s2_low = (n - 1) * s2 / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1)
s2_high = (n - 1) * s2 / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1)

n_arr = zeros([1 n]);
mu_arr = zeros([1 n]);
mu_low_arr = zeros([1 n]);
mu_high_arr = zeros([1 n]);
s2_arr = zeros([1 n]);
s2_low_arr = zeros([1 n]);
s2_high_arr = zeros([1 n]);
```

```
mu_narr = zeros([1 n]);
s2_narr = zeros([1 n]);

for i = 1:n
    n_arr(i) = i;

    mu_narr(i) = mu;
    s2_narr(i) = s2;

    mu_arr(i) = sum(x(1:i)) / i;
    s2_arr(i) = sum((x(1:i) - mu) .^ 2) / (i - 1);

    mu_low_arr(i) = mu_arr(i) - sqrt(s2_arr(i)) * ...
        tinv((1 + gamma) / 2, i - 1) / sqrt(i);
    mu_high_arr(i) = mu_arr(i) + sqrt(s2_arr(i)) * ...
        tinv((1 + gamma) / 2, i - 1) / sqrt(i);

    s2_low_arr(i) = (i - 1) * s2_arr(i) / ...
        chi2inv((1 + gamma) / 2, i - 1);
    s2_high_arr(i) = (i - 1) * s2_arr(i) / ...
        chi2inv((1 - gamma) / 2, i - 1);
end

plot(n_arr, mu_narr, n_arr, mu_arr, ...
    n_arr, mu_low_arr, n_arr, mu_high_arr, 'LineWidth', 1.5);
title('Graphic for $\hat \mu$','interpreter','latex', 'FontSize', 14);
xlabel('n');
ylabel('y');
xlim([1 n]);
legend('$\hat \mu(\vec x_N)$', '$\hat \mu(\vec x_n)$', ...
    '$\underline{\mu}(\vec x_n)$', '$\overline{\mu}(\vec x_n)$', ...
    'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
figure;

plot(n_arr, s2_narr, n_arr, s2_arr, ...
    n_arr, s2_low_arr, n_arr, s2_high_arr, 'LineWidth', 1.5);
title('Graphic for $\hat S^2$','interpreter','latex', 'FontSize', 14);
xlabel('n');
```

```
ylabel('z');
xlim([1 n]);
legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', '$\hat S^2(\vec x_n)$', ...
    '$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
    '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
    'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
```

2.2. Результат работы программы

2.2.1. Числовые характеристики

Для $\gamma = 0.9$:

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = 6.9445$$

$$S^2(\vec{x}_n) = 1.1720$$

$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = 6.7807$$

$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = 7.1083$$

$$\underline{S^2}(\vec{x}_n) = 0.9588$$

$$\overline{S^2}(\vec{x}_n) = 1.4710$$

2.2.2. Графики

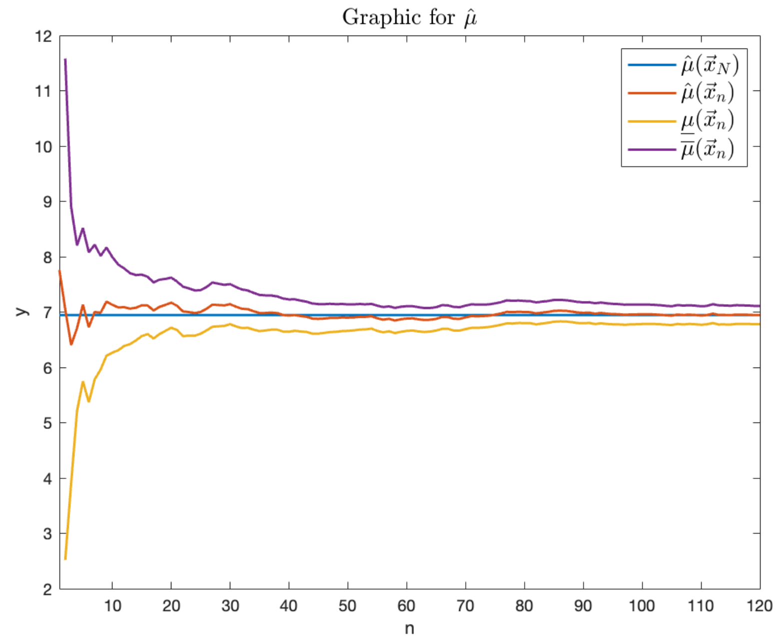

Рисунок 2.1 — Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

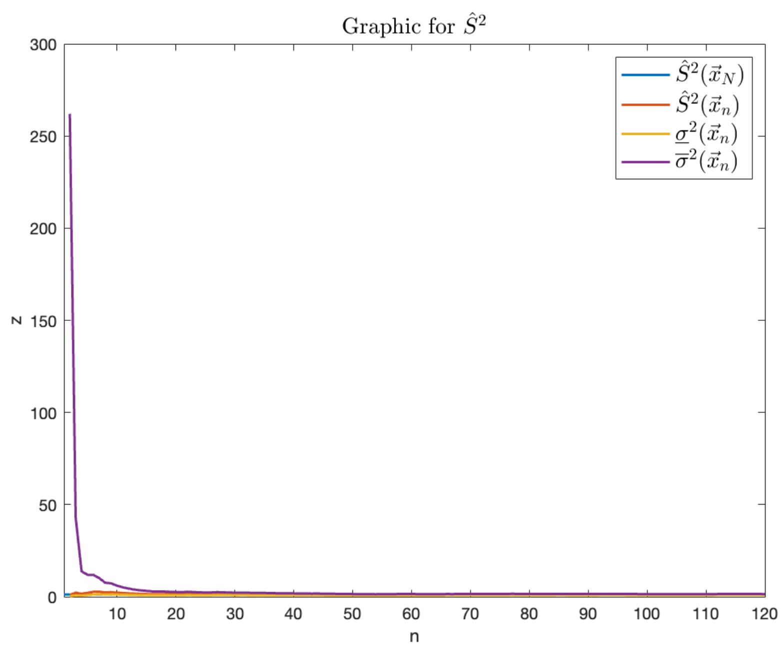

Рисунок 2.2 — Прямая $z = S^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = S^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N