

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

WYDZIAŁ INFORMATYKI

KATEDRA MATEMATYKI

PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

TEMAT: KONSTRUKCJA DWUWYMIAROWYCH  
KWADRATUR NEWTONA-COTESA I ICH  
ZASTOSOWANIE DO OBLICZANIA CAŁKI PODWÓJNEJ

WYKONAWCA: SZYMON DĄBROWSKI

.....  
podpis

PROMOTOR: DR JAN POPIOŁEK

.....  
podpis

BIAŁYSTOK 2017 r.

## Karta dyplomowa

Politechnika Białostocka Wydział Informatyki  Katedra Matematyki	Studia stacjonarne II stopnia magisterskie	Numer albumu studenta: 87901
		Rok akademicki 2016/2017
		Kierunek studiów: Informatyka Specjalność: Informatyka i finanse
<p style="text-align: center;"><b>Szymon Dąbrowski</b></p> <p><b>Temat pracy dyplomowej: Konstrukcja dwuwymiarowych kwadratur</b></p> <p><b>Zakres pracy:</b>  <b>Newtona-Cotesa i ich zastosowanie do obliczania całki podwójnej</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Wzrosty Lagrange'a jednej i dwóch zmiennych.</li> <li>2. Jednowymiarowe kwadratury Newtona-Cotesa.</li> <li>3. Dwuwymiarowe kwadratury Newtona-Cotesa.</li> <li>4. Zastosowanie kwadratur do obliczania całek.</li> </ol> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 20px;"> <div> <p>.....</p> <p>Imię i nazwisko promotora - podpis</p> </div> <div> <p>.....</p> <p>Imię i nazwisko kierownika katedry - podpis</p> </div> </div>		
<p>.....</p> <p>Data wydania tematu pracy dyplomowej - podpis promotora</p>	<p>.....</p> <p>Regulaminowy termin złożenia pracy dyplomowej</p>	<p>.....</p> <p>Data złożenia pracy dyplomowej - potwierdzenie dziekanatu</p>
<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div> <p>.....</p> <p>Ocena promotora</p> </div> <div> <p>.....</p> <p>Podpis promotora</p> </div> </div>		
<p>.....</p> <p>Imię i nazwisko recenzenta</p>	<p>.....</p> <p>Ocena recenzenta</p>	<p>.....</p> <p>Podpis recenzenta</p>

**Thesis topic:** Construction of twodimensional Newton-Cotes quadratures and their application to calculate of double integral.

## SUMMARY

**Key words:** Newton-Cotes quadratures; Lagrange polynomials;

Plik OświadczenieOSamodzielności.pdf

## Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>6</b>
<b>1 Wielomiany interpolacyjne <i>Lagrange’a</i></b>	<b>7</b>
1.1 Wielomiany <i>Lagrange’a</i> dla funkcji jednej zmiennej . . . . .	7
1.2 Wielomiany <i>Lagrange’a</i> dla funkcji dwóch zmiennych . . . . .	11
<b>2 Kwadratury Newtona-Cotesa dla całki pojedynczej</b>	<b>12</b>
2.1 Wzór trapezów . . . . .	13
2.2 Wzór Simpsona . . . . .	15
2.3 Wzór ’prostokątów’ . . . . .	15
<b>3 Kwadratury Newtona-Cotesa dla całek podwójnych</b>	<b>16</b>
3.1 Wzór trapezów . . . . .	16
3.2 Wzór Simpsona . . . . .	16
3.3 Wzór ’prostokątów’ . . . . .	16
<b>4 Zastosowanie kwadratur do obliczania całek po obszarach normalnych</b>	<b>17</b>
<b>Podsumowanie</b>	<b>18</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>19</b>
<b>Spis procedur w języku Maple</b>	<b>20</b>

# **Wstęp**

Treść wstępu

# 1. Wielomiany interpolacyjne *Lagrange'a*

W dzisiejszych czasach zaspokojenie głodu czy pragnienia nie wystarcza, by sprostać ludzkim potrzebom. Nieustanna chęć rozwoju naszego gatunku sprawia, że konieczne jest sięganie do wiedzy matematycznej w celu lepszego poznania otaczającego nas świata. Niejednokrotnie posiadamy tylko dyskretne dane pozyskane w trakcie badań i chcąc dokonać analizy matematycznej pewnych zdarzeń czy procesów musimy stworzyć/wyprowadzić regularne funkcje interpolacyjne, które w sposób ciągły i wystarczająco dokładny opisywałyby interesujące nas zjawiska. Jak możemy się spodziewać, często jest to ciężkie do wykonania zadanie.

Funkcje interpolujące w znacznym stopniu upraszczają prowadzenie obliczeń podczas wyznaczania przybliżonych wartości funkcji, których postać analityczna jest bardzo skomplikowana, lub wyliczenie kolejnych jej wartości wymaga wykonania zawiłych obliczeń komputerowych. W tym rozdziale pracy skupimy się zatem na sposobie w jaki możemy wyznaczać tak zwane wielomiany interpolacyjne *Lagrange'a* dla funkcji jednej oraz dwóch zmiennych.

## 1.1 Wielomiany *Lagrange'a* dla funkcji jednej zmiennej

Jak wspomnieliśmy we wstępie, często w celu uproszczenia obliczeń skłaniamy się do wykorzystania interpolacji. Stosując ją musimy liczyć się z faktem, że pozyskane wyniki są wartościami przybliżonymi, więc z reguły będą różniły się od wyników dokładnych. Przed przejściem do dalszych rozważań należy zdefiniować pojęcie interpolacji.

### **Definicja 1.** Interpolacja

Interpolacja jest metodą numeryczną przybliżania funkcji. Polega ona na konstruowaniu tak zwanych **funkcji interpolujących** (przybliżających)  $W(x)$ . Wykorzystujemy do tego znane nam wartości **funkcji interpolowanej** (przybliżanej)  $f(x)$ , dla wybranych argumentów należących do jej dziedziny.

Wielomian  $W(x)$  tworzony jest w oparciu o dwa powiązane ze sobą zbiory liczbowe [1]:

$$X = \{x_i : i = 0, 1, \dots, n\}, F = \{f_i : i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Zbiory  $X$  i  $F$  są równoliczne. Elementy  $x_i \in X$  definiują współrzędne punktów węzłowych w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , natomiast elementy z  $F$  określają wartości funkcji  $f(x)$  w węzłach  $x_i$ , tzn.

$$f_i = f(x_i), \quad (1.1)$$

przy czym  $f_i \in \mathbb{R}$

Wyjaśnijmy również pojęcie węzła, którym przed chwilą operowaliśmy:

**Definicja 2.** Węzły (Punkty węzłowe)

Węzłami nazywamy punkty w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , będące takimi argumentami funkcji  $f(x)$ , dla których jesteśmy w stanie wyznaczyć jej wartość.

W węzłach wartości funkcji interpolującej i interpolowanej są równe. Oznacza to, że:

$$W(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

**Uwaga 1.** W tym podrozdziale ograniczać będziemy się jedynie do funkcji jednej zmiennej niezależnej. Funkcje te badane będą na ograniczonym domkniętym przedziale  $[a, b]$ . W związku z tym, zbiór  $X$  zawierał będzie elementy  $x_i \in \mathbb{R}$  takie, że  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Definicja zbioru  $F$  nie ulega zmianie.

Na rysunku 2.1 zobrazowano w sposób symboliczny na czym polega interpolacja, oraz czym są węzły (punkty  $x_i$  przecięcia wykresów  $W(x)$  i  $f(x)$ , zachodzi dla nich równość (1.2)).





Rysunek 1.1: Funkcja interpolacyjna  $W(x)$  oraz interpolowana  $f(x)$

Mając już podstawy do tego, by wiedzieć czym jest interpolacja - przejdźmy o krok dalej. Rozważmy pewien liniowo niezależny układ funkcji, zdefiniowanych na domkniętym przedziale  $[a, b]$ :

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x) \quad (1.3)$$

oraz zbiór szukanych współczynników

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad (1.4)$$

takich, że ich kombinacja liniowa z (1.3) będzie spełniała poniższy układ równań:

$$\alpha_0 \phi_0(x_i) + \alpha_1 \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_i) = f_i \quad (1.5)$$

gdzie  $f_i \in F$  oraz  $x_i \in X$ .

W *interpolacji Lagrange'a* w skład (1.3) wchodzi wielomiany określone w następujący sposób:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (1.6)$$

Są one nazywane funkcjami bazowymi stopnia  $n$ . Warto zauważyć, że zachodzi następująca równość:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdzie } i = j \\ 0, & \text{w.p.p.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Z powyższego wynika, że tylko w jednym przypadku  $l_i(x)$  będzie miała wartość różną od 0 (gdy  $x = x_i$ ), zatem  $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$ . Dodatkowo zauważmy, że macierzą charakterystyczną układu (1.5) jest macierz jednostkowa. Skutkuje to tym, iż [2]

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (1.8)$$

będzie wielomianem o stopniu nie większym niż  $n$ , oraz przyjmie wartości (1.1) w punktach węzłowych. Wielomian (1.8) nazywany jest **wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a**. Z jego pomocą w dosyć przystępny sposób możemy interpolować dowolną funkcję.

**Przykład 1.** (Wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia  $n = 2$ )

Zbuduj wielomian interpolacyjny  $L_2(x)$  dla funkcji  $f(x) = e^{x^2}$  rozpatrywanej na ograniczonym przedziale  $[0, 1]$ . Kolejno oblicz  $L_2(0, 6)$  i wynik porównaj z wartością rzeczywistą wiedząc, że  $f(0, 6) = e^{(0,6)^2} = 1,4(3)$ .

W celu wyznaczenia wielomianu Lagrange'a stopnia  $n = 2$ , potrzebować będziemy  $n + 1$  węzłów takich, że  $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$ . Przyjmijmy zatem następujące ich wartości:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 1$ . Korzystając bezpośrednio z równania (1.8) dostajemy:

$$L_2(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Podstawiamy kolejno wartości węzłów do równania  $L_2(x)$ , otrzymując wielomian interpolujący naszą funkcję  $f(x) = e^{x^2}$  na  $[a, b] = [0, 1]$ :

$$L_2(x) = e^0 \frac{(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} + e^{(\frac{1}{4})} \frac{(x - 0)(x - 1)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} + e^1 \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})} = 2,30046x^2 - 0,58218x + 1$$

Ostatecznie wyznaczamy wartość  $L_2(0, 6)$ :

$$L_2(0, 6) = 2,30046 \cdot (0, 6)^2 - 0,58218 \cdot (0, 6) + 1 = 1,4788576$$

Wartość interpolowana  $L_2(0, 6)$  odbiega nieco od wartości dokładnej  $f(0, 6)$ .

Wyprowadzona w powyższym przykładzie dla funkcji  $f(x)$  i zadanych węzłów postać wielomianu  $L_2(x)$  jest jednoznaczna. Mówi o tym następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 1.** (O istnieniu i jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego *Lagrange'a*)

Niech  $R_n[x]$  będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia  $\leq n$  o współczynnikach rzeczywistych tzn.:  $R_n[x] = \{W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, (i = 0, 1, \dots, n)\}$ . Dla dowolnej funkcji  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  istnieje dokładnie jeden wielomian  $W(x) \in R_n[x]$  interpolujący  $f$  przy zadanych węzłach  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

W powyższym przykładzie zauważyliśmy, że wynik jest obarczony pewnym błędem. Nosi on miano *błędu interpolacji*. Dla wielomianów *Lagrange'a* definiujemy go w następujący sposób:

**Definicja 3.** (Błąd interpolacji wielomianu *Lagrange'a*)

Weźmy

$$M_{n+1} = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$m_{n+1} = \sup_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|,$$

przy czym  $\omega_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$ , zaś  $f(x)$  to funkcja interpolowana.

Błędem interpolacji wielomianu *Lagrange'a* (stopnia  $n$ ) nazywamy wówczas takie

$$\delta_L = \frac{M_{n+1} \cdot m_{n+1}}{(n+1)!} \quad (1.9)$$

dla którego zachodzi:

$$|L_n(x) - f(x)| \leq \delta_L, \quad x \in [a, b]$$

## 1.2 Wielomiany *Lagrange'a* dla funkcji dwóch zmiennych

## 2. Kwadratury Newtona-Cotesa dla całki pojedynczej

Niech  $f(x)$  będzie funkcją zdefiniowaną na przedziale  $[a, b]$  o wartościach rzeczywistych tzn.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Rozważmy pewną całkę

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (2.1)$$

Funkcję podcałkową zawsze możemy zastąpić inną funkcją taką, że w miarę możliwości poniższe przybliżenie będzie prawdziwe:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b g(x) dx \quad (2.2)$$

W praktyce często spotkać możemy się z przypadkiem takim, że do wyznaczenia przybliżonych wartości  $I(f)$  stosowane są wzory nazywane kwadraturami. Owe kwadratury opierają się jedynie na wartościach  $f(x)$  w punktach węzłowych i mogą niezbyt dokładnie przybliżać wynik tzn:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i), \quad x_i \in [a, b], \quad (2.3)$$

przy czym współczynniki  $a_i$  są niezależne od  $f(x)$  (nazywamy je współczynnikami kwadratury), zaś  $x_i$  nosi miano węzłów kwadratury.

Naszym celem jest jednak to, by jak najbardziej zminimalizować błąd pojawiający się podczas przybliżania wartości  $I(f)$ . W związku z tym możemy zastosować zabieg zastąpienia funkcji  $f(x)$  w całce  $I(f)$  wielomianem interpolującym ją. W tym celu wykorzystamy wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* (1.8). Po podstawieniu go do (2.3) otrzymamy:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) dx, \quad (2.4)$$

gdzie

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x), \quad (2.5)$$

natomiast

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2.6)$$

W związku z powyższym całkę (2.1) możemy wyrazić w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \quad (2.7)$$

Jeżeli w (2.7) rozpatrzmy tylko węzły takie, że  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ , a każdy węzeł pośredni leżący pomiędzy  $x_0$  a  $x_n$  jest postaci  $x_i = a + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),  $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ , to kwadraturę taką nazwiemy kwadraturą **Newtona-Cotesa**. Skupimy się na rozważeniu trzech różnych kwadratur tego typu, będą nimi: *wzór trapezów*, *wzór Simpsona* oraz *wzór prostokątów*.

## 2.1 Wzór trapezów

Do wyznaczenia wzoru trapezów będziemy wykorzystywać wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* rzędu  $n = 1$  ( $L_1(x)$ ) utworzony dla węzłów  $a$  i  $b$ . Zastosujmy w (2.6) następujące podstawienie:  $x = a + hs$ . Wartości  $a, h$  są pewnymi stałymi, natomiast  $s$  jest zmienną niezależną.

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{a + hs - (a + jh)}{(a + ih) - (a + jh)} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{s - j}{i - j}$$

Otrzymujemy zatem:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{s - j}{i - j} = \psi_i(s) \quad (2.8)$$

$\psi_i(s)$  to nasza nowa funkcja zmiennej  $s$ .

Całkę z równania (2.5) obliczymy metodą całkowania przez podstawienie. Skorzystamy z przedstawionego przed chwilą podstawienia  $x = a + hs$  oraz równania (2.8)

$$a_i = \int_a^b l_i(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a + hs \\ dx = hds \\ b = a + hs \Rightarrow \frac{b-a}{h} = s \Rightarrow s = n \\ a = a + hs \Rightarrow 0 = hs \Rightarrow s = 0 \end{array} \right\} = h \int_0^n \psi_i(s) ds$$

Chcemy wyliczyć teraz wartości współczynników kwadratury  $a_0$  i  $a_1$ . Pamiętamy o tym, że do obliczeń wykorzystujemy postać wielomianu *Lagrange'a* rzędu  $n = 1$ , zatem będziemy całkowali w granicach  $[0, n] = [0, 1]$

$$a_0 = h \int_0^1 \phi_0(s) ds = h \int_0^1 \frac{s-1}{0-1} ds = \int_0^1 (1-s) ds = h \left[ s - \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \frac{h}{2}$$

$$a_1 = h \int_0^1 \phi_1(s) ds = h \int_0^1 \frac{s-0}{1-0} ds = \int_0^1 (s) ds = h \left[ \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \frac{h}{2}$$

Po wstawieniu wyliczonych współczynników do (2.3) otrzymujemy

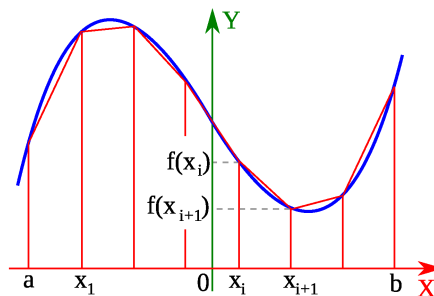
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=0}^1 a_i f(x_i) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) = \\ &= \frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wzór ten nazywamy **wzorem trapezów**. Zauważmy, że suma współczynników  $\alpha_0, \alpha_1$  jest równa  $h \cdot n$ . W późniejszych podrozdziałach również zetkniemy się z taką prawidłowością rozpatrując wyższy rząd wielomianów *Lagrange'a* dla  $n > 1$ .

Podczas wyznaczania (2.9) przyjęliśmy, że przedział całkowania nie został podzielony, a jedynymi węzłami były jego początek i koniec. W rzeczywistości rozpatrujemy przypadki z wielokrotnym podziałem przedziału. Jeżeli przedział całkowania  $[a, b]$  podzielimy na  $\geq 2$  równe części takie, że  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , to wzór przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \\ &\approx \left( \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \dots + \frac{h}{2} (f(x_{n-1}) + f(x_n)) \right) = \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \end{aligned} \quad (2.10)$$

W wyprowadzonym powyżej wzorze trapezów (jak sama nazwa sugeruje) przybliżamy wartość całek sumując pola trapezów o ustalonej wysokości  $h$  (odległość pomiędzy kolejnymi węzłami) i podstawach o długości  $f(x_i)$  i  $f(x_{i+1})$  dla  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Rysunek 2.1 z pewnością pomoże zrozumieć nam zagadnienie, któremu poświęcony jest ten podrozdział.



Rysunek 2.1: Graficzne przedstawienie idei zastosowania wzoru trapezów do całkowania

Wyznaczyć przybliżoną wartość całki  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  przyjmując, że przedział dzielimy na  $n=4$  równe części.

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}, x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1.$$

Do rozwiązania zadania sorzystamy ze wzoru (2.10)

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)) = \\ &= \frac{1}{8} (e^0 + 2e^{\frac{1}{16}} + 2e^{\frac{1}{4}} + 2e^{\frac{9}{16}} + e) \approx 1.49068 \end{aligned}$$

Wartość dokładna wynosi 1.46265, zatem różnica w wyniku jest nieznaczna. Ponadto im więcej podziałów przedziału wykonamy, tym dokładniejszy otrzymamy wynik.

## 2.2 Wzór Simpsona

## 2.3 Wzór 'prostokątów'

### **3. Kwadratury Newtona-Cotesa dla całek podwójnych**

#### **3.1 Wzór trapezów**

#### **3.2 Wzór Simpsona**

#### **3.3 Wzór 'prostokątów'**



#### **4. Zastosowanie kwadratur do obliczania całek po obszarach normalnych**

## **Podsumowanie**

Celem przyświecającym pisaniu pracy było...

## Bibliografia

- [1] Olszowski B., *Wybrane metody numeryczne : podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007, s. 27-37
- [2] Kosma Z., *Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich*, Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Radom 2007, s. 155-160
- [3]
- [4]

## **Spis procedur w języku Maple**