1 Wzór trapezów dla prostokąta

Niech dany będzie prostokąt $P = [a;b] \times [c;d]$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c < d < \infty$ oraz funkcja $z = z(x,y)$ określona na tym prostokącie. Podamy wzór trapezów dla całki

$$I = \iint_P z(x,y)\ dx\ dy$$

Weźmy podział odcinka $[a;b]$ na m części

$$a = x_0 < x_0 + h < x_0 + 2h < \ldots < x_0 + mh = b, \qquad h = \frac{b-a}{m}$$

oraz podział odcinka $[c;d]$ na n części

$$c = y_0 < y_0 + k < y_0 + 2k < \ldots < y_0 + nk = d, \qquad k = \frac{d-c}{n}$$

Całkę I można zapisać

$$I = \int_a^b F(x)\ dx, \text{ gdzie } \quad F(x) = \int_c^d z(x,y)\ dy$$

Stosując do całki $F(x)$ uogólniony wzór trapezów (por. ...), mamy

$$F(x) = \frac{k}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[\, z(x,y_j) + z(x,y_{j+1}) \,\right]$$

Analogicznie dla całki I otrzymujemy

$$I = \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \left[\, F(x_i) + F(x_{i+1}) \,\right]$$

Łącząc powyższe wzory dostajemy uogólniony wzór trapezów dla całki podwójnej w prostokącie

$$I = \frac{h \cdot k}{4} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\, z(x_i,y_j) + z(x_i,y_{j+1}) + z(x_{i+1},y_j) + z(x_{i+1},y_{j+1}) \,\right]$$

2 Wzór trapezów dla obszaru normalnego względem osi Ox

Niech dany będzie obszar normalny względem osi Ox postaci $D = [a;b] \times [c(x);d(x)]$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c(x) \leqslant d(x) < \infty$, dla każdego $x \in [a;b]$ oraz funkcja $z = z(x,y)$ określona na tym obszarze. Podamy wzór trapezów dla całki

$$I = \iint_D z(x,y)\ dx\ dy$$

Weźmy podział odcinka $[a;b]$ na m części

$$a = x_0 < x_0 + h < x_0 + 2h < \ldots < x_0 + mh = b, \qquad h = \frac{b-a}{m}$$

oraz dla każdego $x \in [a;b]$ podział odcinka $[c(x);d(x)]$ na n części

$$c(x) < c(x) + k(x) < c(x) + 2k(x) < \ldots < c(x) + nk(x) = d(x), \qquad k(x) = \frac{d(x) - c(x)}{n}$$

Całkę I można zapisać

$$I = \int_a^b F(x)\ dx, \text{ gdzie } \quad F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} z(x,y)\ dy$$

Stosując do całki $F(x)$ uogólniony wzór trapezów (por. ...), mamy

$$F(x) = \frac{k(x)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[\, z(x, c(x) + jk(x)) + z(x, c(x) + (j+1)k(x)) \,\right]$$

Analogicznie dla całki I otrzymujemy

$$I = \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \left[\, F(x_i) + F(x_{i+1}) \,\right]$$

Łącząc powyższe wzory dostajemy uogólniony wzór trapezów dla całki podwójnej w obszarze normalnym względem osi Ox

$$I = \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \Bigg[\ \frac{k(x_i)}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[\, z(x_i, c(x_i) + jk(x_i)) + z(x_i, c(x_i) + (j+1)k(x_i)) \,\right] +$$

$$+ \frac{k(x_{i+1})}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[\, z(x_{i+1}, c(x_{i+1}) + jk(x_{i+1})) + z(x_{i+1}, c(x_{i+1}) + (j+1)k(x_{i+1})) \,\right] \Bigg]$$