Politechnika Białostocka

Wydział Informatyki

Katedra Matematyki

Praca dyplomowa Magisterska

Temat: Konstrukcja dwuwymiarowych kwadratur Newtona-Cotesa i ich zastosowanie do obliczania całki podwójnej

Wykonawca: Szymon Dąbrowski

....

podpis

Promotor: dr Jan Popiołek

....

podpis

Białystok 2017 r.

Karta dyplomowa

Politechnika Białostocka Wydział Informatyki Katedra Matematyki	Studia stacjonarne II stopnia magisterskie	Numer albumu studenta: 87901 Rok akademicki 2016/2017 Kierunek studiów: Informatyka Specjalność: Informatyka i finanse

Szymon Dąbrowski

Temat pracy dyplomowej: Konstrukcja dwuwymiarowych kwadratur Newtona-Cotesa i ich zastosowanie do obliczania całki podwójnej

Zakres pracy:

1. Wielomiany Lagrange'a jednej i dwóch zmiennych.
2. Jednowymiarowe kwadratury Newtona-Cotesa.
3. Dwuwymiarowe kwadratury Newtona-Cotesa.
4. Zastosowanie kwadratur do obliczania całek.

....	....
Imię i nazwisko promotora - podpis	Imię i nazwisko kierownika katedry - podpis

....	....	....
Data wydania tematu pracy dyplomowej - podpis promotora	Regulaminowy termin złożenia pracy dyplomowej	Data złożenia pracy dyplomowej - potwierdzenie dziekanatu

....	....
Ocena promotora	Podpis promotora

....	....	....
Imię i nazwisko recenzenta	Ocena recenzenta	Podpis recenzenta

Thesis topic: Construction of twodimensional Newton-Cotes quadratures and their application to calculate of double integral.

SUMMARY

Key words: Newton-Cotes quadratures; Lagrange polynomials;

Plik OświadczenieOSamodzielności.pdf

Spis treści

Wstęp

Treść wstępu

1. Wielomiany interpolacyjne *Lagrange'a*

W dzisiejszych czasach zaspokojenie głodu czy pragnienia nie wystarcza, by sprostać ludzkim potrzebom. Nieustanna chęć rozwoju naszego gatunku sprawia, że konieczne jest sięganie do wiedzy matematycznej w celu lepszego poznania otaczającego nas świata. Niejednokrotnie posiadamy tylko dyskretne dane pozyskane w trakcie badań i chcąc dokonać analizy matematycznej pewnych zdarzeń czy procesów musimy stworzyć/wyprowadzić regularne funkcje interpolacyjne, które w sposób ciągły i wystarczająco dokładny opisywałyby interesujące nas zjawiska. Jak możemy się spodziewać, często jest to ciężkie do wykonania zadanie.

Funkcje interpolujące w znacznym stopniu upraszczają prowadzenie obliczeń podczas wyznaczania przybliżonych wartości funkcji, których postać analityczna jest bardzo skomplikowana, lub wyliczenie kolejnych jej wartości wymaga wykonania zawiłych obliczeń komputerowych. W tym rozdziale pracy skupimy się zatem na sposobie w jaki możemy wyznaczać tak zwane wielomiany interpolacyjne $Lagrange'a$ dla funkcji jednej oraz dwóch zmiennych.

1.1 Wielomiany *Lagrange'a* dla funkcji jednej zmiennej

Jak wspomnieliśmy we wstępie, często w celu uproszczenia obliczeń skłaniamy się do wykorzystania interpolacji. Stosując ją musimy liczyć się z faktem, że pozyskane wyniki są wartościami przybliżonymi, więc z reguły będą różniły się od wyników dokładnych. Przed przejściem do dalszych rozważań należy zdefiniować pojęcie interpolacji.

Definicja 1. Interpolacja
Interpolacja jest metodą numeryczną przybliżania funkcji. Polega ona na konstruowaniu tak zwanych **funkcji interpolujących** (przybliżających) $W(x)$. Wykorzystujemy do tego znane nam wartości **funkcji interpolowanej** (przybliżanej) $f(x)$, dla wybranych argumentów należących do jej dziedziny.

Wielomian $W(x)$ tworzony jest w oparciu o dwa powiązane ze sobą zbiory liczbowe [1]:

$$X = \{x_i : i = 0, 1, \ldots, n\}, F = \{f_i : i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Zbiory X i F są równoliczne. Elementy $x_i \in X$ definiują współrzędne punktów węzłowych w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, natomiast elementy z F określają wartości funkcji $f(x)$ w węzłach x_i, tzn.

$$f_i = f(x_i), \tag{1.1}$$

przy czym $f_i \in \mathbb{R}$

Wyjaśnijmy również pojęcie węzła, którym przed chwilą operowaliśmy:

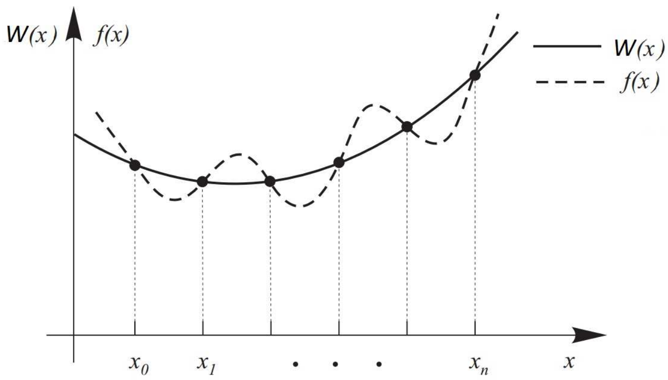
Definicja 2. Węzły (Punkty węzłowe)
Węzłami nazywamy punkty w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, będące takimi argumentami funkcji $f(x)$, dla których jesteśmy w stanie wyznaczyć jej wartość.

W węzłach wartości funkcji interpolującej i interpolowanej są równe. Oznacza to, że:

$$W(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Uwaga 1. W tym podrozdziale ograniczać będziemy się jedynie do funkcji jednej zmiennej niezależnej. Funkcje te badane będą na ograniczonym domkniętym przedziale $[a, b]$. W związku z tym, zbiór X zawierał będzie elementy $x_i \in \mathbb{R}$ takie, że $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Definicja zbioru F nie ulega zmianie.

Na rysunku 2.1 zobrazowano w sposób symboliczny na czym polega interpolacja, oraz czym są węzły(punkty x_i przecięcia wykresów $W(x)$ i $f(x)$, zachodzi dla nich równość (1.2)).



Rysunek 1.1: Funkcja interpolacyjna $W(x)$ oraz interpolowana $f(x)$

Mając już podstawy do tego, by wiedzieć czym jest interpolacja - przejdźmy o krok dalej. Rozważmy pewien liniowo niezależny układ funkcji, zdefiniowanych na domkniętym przedziale $[a, b]$:

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x) \tag{1.3}$$

oraz zbiór szukanych współczynników

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \tag{1.4}$$

takich, że ich kombinacja liniowa z (1.3) będzie spełniała poniższy układ równań:

$$\alpha_0\phi_0(x_i) + \alpha_1\phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n\phi_n(x_i) = f_i \tag{1.5}$$

gdzie $f_i \in F$ oraz $x_i \in X$.

W *interpolacji Lagrange'a* w skład (1.3) wchodzą wielomiany określone w następujący sposób:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \tag{1.6}$$

Są one nazywane funkcjami bazowymi stopnia n. Warto zauważyć, że zachodzi następująca równość:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & gdy\ i = j \\ 0, & wp.p. \end{cases} \tag{1.7}$$

Z powyższego wynika, że tylko w jednym przypadku $l_i(x)$ będzie miała wartość różną od 0 (gdy $x = x_i$), zatem $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$. Dodatkowo zauważmy, że macierzą charakterystyczną układu (1.5) jest macierz jednostkowa. Skutkuje to tym, iż [2]

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1.8}$$

będzie wielomianem o stopniu nie większym niż n, oraz przyjmie wartości (1.1) w punktach węzłowych. Wielomian (1.8) nazywany jest **wielomianem interpolacyjnym *Lagrange'a***. Z jego pomocą w dosyć przystępny sposób możemy interpolować dowolną funkcję.

Przykład 1. (Wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego *Lagrange'a* stopnia $n = 2$)
Zbuduj wielomian interpolacyjny $L_2(x)$ dla funkcji $f(x) = e^{x^2}$ rozpatrywanej na ograniczonym przedziale $[0,1]$. Kolejno oblicz $L_2(0,6)$ i wynik porównaj z wartością rzeczywistą wiedząc, że $f(0,6) = e^{(0,6)^2} = 1,4(3)$.

W celu wyznaczenia wielomianu *Lagrange'a* stopnia $n = 2$, potrzebować będziemy $n + 1$ węzłów takich, że $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$. Przyjmijmy zatem następujące ich wartości: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Korzystając bezpośrednio z równania (1.8) dostajemy:

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Podstawiamy kolejno wartości węzłów do równania $L_2(x)$, otrzymując wielomian interpolujący naszą funkcję $f(x) = e^{x^2}$ na $[a,b] = [0,1]$:

$$L_2(x) = e^0\frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(0-\frac{1}{2})(0-1)} + e^{(\frac{1}{4})}\frac{(x-0)(x-1)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)} + e^4\frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})} = 2,30046x^2 - 0,58218x + 1$$

Ostatecznie wyznaczamy wartość $L_2(0,6)$:

$$L_2(0,6) = 2,30046 \cdot (0,6)^2 - 0,58218 \cdot (0,6) + 1 = 1,4788576$$

Wartość interpolowana $L_2(0,6)$ odbiega nieco od wartości dokładnej $f(0,6)$.

Wyprowadzona w powyższym przykładzie dla funkcji $f(x)$ i zadanych węzłów postać wielomianu $L_2(x)$ jest jednoznaczna. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. (O istnieniu i jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego *Lagrange'a*)
Niech $R_n[x]$ będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia $\leq n$ o współczynnikach rzeczywistych tzn.: $R_n[x] = \{W(x) = a_n x^n + x_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, (i = 0, 1, \dots, n)\}$. Dla dowolnej funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden wielomian $W(x) \in R_n[x]$ interpolujący f przy zadanych węzłach x_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

W powyższym przykładzie zauważyliśmy, że wynik jest obarczony pewnym błędem. Nosi on miano *błędu interpolacji*. Dla wielomianów *Lagrange'a* definiujemy go w następujący sposób:

Definicja 3. (Błąd interpolacji wielomianu *Lagrange'a*)
Weźmy

$$M_{n+1} = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$m_{n+1} = \sup_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|,$$

przy czym $\omega_n(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$, zaś $f(x)$ to funkcja interpolowana.
Błędem interpolacji wielomianu *Lagrange'a* (stopnia n) nazywamy wówczas takie

$$\delta_L = \frac{M_{n+1} \cdot m_{n+1}}{(n+1)!} \tag{1.9}$$

dla którego zachodzi:

$$|L_n(x) - f(x)| \leq \delta_L \quad , x \in [a, b]$$

1.2 Wielomiany *Lagrange'a* dla funkcji dwóch zmiennych

2. Kwadratury Newtona-Cotesa dla całki pojedynczej

Niech $f(x)$ będzie funkcją zdefiniowaną na przedziale $[a, b]$ o wartościach rzeczywistych tzn. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Rozważmy pewną całkę

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \tag{2.1}$$

Funkcję podcałkową zawsze możemy zastąpić inną funkcją taką, że w miarę możliwości poniższe przybliżenie będzie prawdziwe:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx \tag{2.2}$$

W praktyce często spotkać możemy się z przypadkiem takim, ze do wyznaczenia przybliżonych wartości $I(f)$ stosowane są wzory nazywane kwadraturami. Owe kwadratury opierają się jedynie na wartościach $f(x)$ w punktach węzłowych i mogą niezbyt dokładnie przybliżać wynik tzn:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \quad x_i \in [a, b], \tag{2.3}$$

przy czym współczynniki a_i są niezależne od $f(x)$ (nazywamy je współczynnikami kwadratury), zaś x_i nosi miano węzłów kwadratury.

Naszym celem jest jednak to, by jak najbardziej zminimalizować błąd pojawiający się podczas przybliżania wartości $I(f)$. W związku z tym możemy zastosować zabieg zastąpienia funkcji $f(x)$ w całce $I(f)$ wielomianem interpolującym ją. W tym celu wykorzystamy wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* (1.8). Po podstawieniu go do (2.3) otrzymamy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)dx, \tag{2.4}$$

gdzie

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x), \tag{2.5}$$

natomiast

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \tag{2.6}$$

W związku z powyższym całkę (2.1) możemy wyrazić w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx \tag{2.7}$$

Jeżeli w (2.7) rozpatrzymy tylko węzły takie, że $x_0 = a$, $x_n = b$, a każdy węzeł pośredni leżący pomiędzy x_0 a x_n jest postaci $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, to kwadraturę taką nazwiemy kwadraturą **Newtona-Cotesa**. Skupimy się na rozważeniu trzech różnych kwadratur tego typu, będą nimi: *wzór trapezów*, *wzór Simpsona* oraz *wzór prostokątów*.

2.1 Wzór trapezów

Do wyznaczenia wzoru trapezów będziemy wykorzystywać wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* rzędu $n = 1$ $(L_1(x))$ utworzony dla węzłów a i b. Zastosujmy w (2.6) następujące podstawienie: $x = a + hs$. Wartości a, h są pewnymi stałymi, natomiast s jest zmienną niezależną.

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{a + hs - (a + jh)}{(a + ih) - (a + jh)} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{s - j}{i - j}$$

Otrzymujemy zatem:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{s - j}{i - j} = \psi_i(s) \tag{2.8}$$

$\psi_i(s)$ to nasza nowa funkcja zmiennej s.

Całkę z równania (2.5) obliczymy metodą całkowania przez podstawienie. Skorzystamy z przedstawionego przed chwilą podstawienia $x = a + hs$ oraz równania (2.8)

$$a_i = \int_a^b l_i(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a + hs \\ dx = hds \\ b = a + hs \Rightarrow \frac{b-a}{h} = s \Rightarrow s = n \\ a = a + hs \Rightarrow 0 = hs \Rightarrow s = 0 \end{array} \right\} = h \int_0^n \psi_i(s)ds$$

Chcemy wyliczyć teraz wartości współczynników kwadratury a_0 i a_1. Pamiętamy o tym, że do obliczeń wykorzystujemy postać wielomianu *Lagrange'a* rzędu $n = 1$, zatem będziemy całkowali w granicach $[0, n] = [0, 1]$

$$a_0 = h\int_0^1 \phi_0(s)ds = h\int_0^1 \frac{s-1}{0-1}ds = \int_0^1 (1-s)ds = h\left[s - \frac{s^2}{2}\right]_0^1 = \frac{h}{2}$$

$$a_1 = h\int_0^1 \phi_1(s)ds = h\int_0^1 \frac{s-0}{1-0}ds = \int_0^1 (s)ds = h\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^1 = \frac{h}{2}$$

Po wstawieniu wyliczonych współczynników do (2.3) otrzymujemy

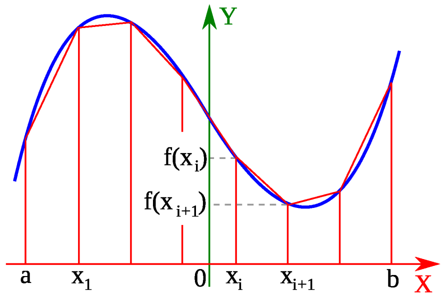
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=0}^{1} a_i f(x_i) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) = \\ &= \tfrac{h}{2} f(x_0) + \tfrac{h}{2} f(x_1) = \tfrac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Wzór ten nazywamy **wzorem trapezów**. Zauważmy, że suma współczynników α_0,α_1 jest równa $h \cdot n$. W późniejszych podrozdziałach również zetkniemy się z taką prawidłowością rozpatrując wyższy rząd wielomianów *Lagrange'a* dla $n > 1$.

Podczas wyznaczania (2.9) przyjęliśmy, że przedział całkowania nie został podzielony, a jedynymi węzłami były jego początek i koniec. W rzeczywistości rozpatrujemy przypadki z wielokrotnym podziałem przedziału. Jeżeli przedział całkowania $[a, b]$ podzielimy na ≥ 2 równe części takie, że $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, to wzór przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \\ &\approx \left(\tfrac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \cdots + \tfrac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n))\right) = \\ &= \tfrac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \\ &= \tfrac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})] \end{aligned} \tag{2.10}$$

W wyprowadzonym powyżej wzorze trapezów (jak sama nazwa sugeruje) przybliżamy wartość całki sumując pola trapezów o ustalonej wysokości h (odległość pomiędzy kolejnymi węzłami) i podstawach o długości $f(x_i)$ i $f(x_{i+1})$ dla $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Rysunek 2.1 z pewnością pomoże nam lepiej zrozumieć zagadnienie, na którym się skupiamy.



Rysunek 2.1: Graficzne przedstawienie idei zastosowania wzoru trapezów do całkowania

Przejdźmy do praktycznego zastosowania wzoru (2.10) w celu pokazania jego przydatności. Obliczenia dla zadanej funkcji przeprowadzimy ręcznie przy relatywnie małej liczbie podziału przedziałów, oraz wykorzystując procedurę stworzoną w języku *Maple* dla dużo większej liczby podziału.

Przykład 2. (Wyznaczanie przybliżonej wartości całki przy wykorzystaniu wzoru trapezów) *Wyznaczyć przybliżoną wartość całki* $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx$ *przyjmując, że przedział całkowania dzielimy na n=6 równych części(7 węzłów)*

Do rozwiązania zadania skorzystamy z ogólnego wzoru trapezów. Wyznaczamy wartości węzłów oraz odległoś $h = \frac{b-a}{n}$ pomiędzy kolejnymi węzłami:
$h = \frac{\frac{3}{2}-0}{6} = \frac{1}{4}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$, $x_5 = \frac{5}{4}$, $x_6 = \frac{6}{4}$.
Wyliczone wartości wstawiamy do (2.10):

$$\int\limits_0^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx = \frac{\frac{1}{4}}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)) =$$
$$= \frac{1}{8}(e^0 + 2e^{(\frac{1}{4})^2} + 2e^{(\frac{2}{4})^2} + 2e^{(\frac{3}{4})^2} + 2e^1 + 2e^{(\frac{5}{4})^2} + e^{(\frac{6}{4})^2}) \approx$$
$$\frac{1}{8}(1 + 2\cdot 1,06449 + 2\cdot 1,28402 + 2\cdot 1,75505 + 2\cdot 2,71828 + 2\cdot 4,77073 + 9,48773) \approx 4,20911$$

Wartość dokładna wynosi w zaokrągleniu $4,06311405862$. Jak widać różnica w wyniku jest dosyć znacząca przy ustalonych wartościach węzłów, ponieważ otrzymany przez nas wynik to $4,20911$.

Z reguły im więcej podziałów przedziału wykonamy, tym dokładniejsze powinniśmy otrzymamy przybliżenie. Można wnioskować w ten sposób również poddając się na analizie wzoru na błąd metody trapezów (im większy n tym mniejsza wartość δ_T):

Definicja 4. (Błąd przybliżenia wzorem trapezów)

Przyjmijmy, że BBT_n oznacza błąd bezwzględny przybliżenia(różnica pomiędzy wartością dokładną i przybliżoną całki). Ponadto niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^2 na $[a,b]$, oraz n wyznacza ilość podziałów tego przedziału, wtedy spełniona jest następująca nierówność:

$$|BBT_n| \leq \delta_T \tag{2.11}$$

Symbol δ_T oznacza błąd metody trapezów i wyraża ją następujący wzór:

$$\delta_T = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2, \tag{2.12}$$

gdzie

$$M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \tag{2.13}$$

Sprawdzimy jednak słuszność naszego twierdzenia wykorzystując do tego stworzoną na nasze potrzeby procedurę w języku Maple. Posłuży nam ona do zautomatyzowania procesu obliczania przybliżonych wartości całek oznaczonych metodą trapezów:

Procedura 1. (Wznaczanie wartości całek pojedynczych metodą trapezów)

```
> trapez:=proc(a,b,n)
local h,j,k,x,y,t,tp;
h:=(b-a)/n;
for j from 0 to n do x:= j -> a+j*h od;
for j from 0 to n do y:= j -> f(x(j)) od;
t:= h/2 * sum(y(k)+y(k+1), k=0..n-1);
tp:=evalf(t,12);
end;
```

Przed przejściem do prezentacji wyników jakie zwróci powyższa procedura, należy wyjaśnić nieco jej zasadę działania i znaczenie parametrów.

Pierwsza linia jest deklaracją procedury *trapez* z następującymi parametrami wejściowymi:

a, **b** - są odpowiednio dolnym i górnym krańcem przedziału całkowania

n - określa liczbę podprzedziałów na które podzielony zostanie nasz przedział $[a, b]$

Kolejno deklarujemy zmienne pomocnicze z których korzysta procedura (nie pobierane od użytkownika) oraz wyznaczamy wartość kroku h, czyli odległość pomiędzy dwoma kolejnymi węzłami. Następnie wyznaczamy wszystkie węzły na danym przedziale oraz wyliczamy wartości (deklarowanej przed wywoływaniem procedury) funkcji f w tychże węzłach. Przedostatni krok polega na zsumowaniu wyliczonych przed chwilą wartości w sposób zgodny ze wzorem (2.10). Algorytm kończymy poprzez przekształcenie sumy do "przyjaznej" postaci i prezentację wyniku z dokładnością do 12 miejsc po przecinku.

Poniższa tabela prezentuje wyniki procedury 1 (ozn. W_{trapez}) dla coraz to większej liczby podprzedziałów n. Uwzględniono w niej również wartości błędów wzoru trapezów (ozn. δ_T) wyliczone zgodnie ze wzorem (2.12) oraz moduł różnicy pomiędzy wartością dokładną całki a otrzymaną w ramach testów procedury (ozn. $|BBT_n|$, zgodnie z (2.11)). Do kalkulacji wykorzystamy funkcję z przykładu 2 oraz podaną w rozwiązaniu informację na temat przybliżonej do 11 miejsca po przecinku wartości dokładnej całki $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx \approx 4,06311405862$.

$\mathbf{n}$	$\mathbf{W_{trapez}}$	$\mathbf{\lvert BBT_n \rvert}$	$\mathbf{\delta_T}$
6	4,20911436529	0,146000306	0,815352298
30	4,06904019209	0,005926133	0,032614091
100	4,06364771371	0,000533655	0,002935268
200	4,06324747807	0,000133419	0,000733817
400	4,06314741384	0,000033355	0,000183454
800	4,06312239755	0,000008339	0,000045863
1200	4,06311776480	0,000003706	0,000020383
2000	4,06311539304	0,000001334	0,000007338
5000	4,06311427243	0,000000213	0,000001174
10000	4,06311411177	0,000000053	0,000000293
30000	4,06311406426	0,000000005	0,000000032
50000	4,06311406037	0,000000002	0,000000011
70000	4,06311406006	0.000000001	0,000000005

Tablica 2.1: Wyniki pomiaru dokładności przybliżania wartości całki wzorem trapezów

Na podstawie powyższych pomiarów możemy uznać iż nasze przewidywania odnośnie tego, że w miarę wzrostu wartości n wynik będzie coraz dokładniejszy okazują się być trafne. Procedura generuje prawidłowe wyniki, co można potwierdzić tym, ze dla $n = 6$ wartość obliczona "ręcznie" jest taka sama jak otrzymana w trakcie badań. Zauważmy, że już przy $n \geq 100$ wynik zaczyna być dosyć mocno zbliżony do dokładnego - różnice pojawiają się dopiero na 4 miejscu po przecinku. Uwagę należy skupić również na wartościach $|\mathbf{BBT_n}|$ i $\delta_\mathbf{T}$ z tablicy 2.1. Po ich dokładnej analizie jesteśmy w stanie zauważyć, że $|\mathbf{BBT_n}|$ jest zawsze większe od $\delta_\mathbf{T}$. Nie ma znaczenia to, jaki n przyjęliśmy. Nie jest to jednak przypadkowa zależność. Fakt ten w pełni wyjaśnia nam definicja 2.12. Wartość δ_T została wyznaczona przy wykorzystaniu następującego skryptu:

Procedura 2. (Wyznaczanie błędu przybliżenia dla metody trapezów)

```
> trapezBlad:= proc (a, b, n)
local d2ff, simd2ff, M2, deltaT;
d2ff:= diff(diff(f(x), x), x);
simd2ff:= simplify(d2ff);
M2:= (Optimization[Maximize])(abs(simd2ff), x = a .. b);
deltaT:= evalf(1/12*M2[1]*(b-a)^3/n^2)
end;
```

Procedura ta opiera się na wzorach (2.12) oraz (2.13). Wynikiem jej działania jest wartość błędu δ_T dla całki z f (funkcja musi zostać zdefiniowana przed wywołaniem trapezBlad) liczonej w granicach $[a, b]$, i dokonanych n podziałów tego przedziału. Parametry wejściowe są definiowane tak samo jak dla procedury 1. Dokładny opis algorytmu dla tego przypadku zostaje pominięty.

Często przeprowadzając obliczenia naukowe musimy zadbać o to, by wynik jaki otrzymamy był jak najdokładniejszy i obciążony co najwyżej pewnym błędem, nie większym niż dopuszczalny. Również wykorzystując wzór trapezów do całkowania numerycznego, możemy kontrolować wielkość błędu, jaki pojawia się podczas przybliżania wyniku. Sposobem na to jest odpowiedni dobór liczby podziałów przedziału całkowania. Poniższa procedura wskazuje nam, ile co najmniej owych podziałów powinniśmy dokonać, by wartość błędu nie przekraczała zdefiniowanej przez nas wartości.

Procedura 3. (Wyznaczanie najmniejszej liczby n podziałów przedziału całkowania tak, by wynik był obciążony błędem nie większym niż zadany)

```
> trapeznMin:= proc (a, b, blad)
local d2ff, simd2ff, M2, nMin, p;
d2ff:= diff(diff(f(x), x), x);
simd2ff:= simplify(d2ff);
M2:= (Optimization[Maximize])(abs(simd2ff), x = a .. b);
p:= solve*({1/12*(b-a)^3*M2[1]/n^2 < blad, 0 < n}, {n});
nMin := p[1]
end;
```

Powyższa procedura również korzysta ze wzorów (2.12) i (2.13). Jej parametry wejściowe a i b są tak jak poprzednio granicami całkowania pewnej funkcji f, natomiast $blad$ określa jaki błąd przybliżenia jest przez nas maksymalnie akceptowalny. Kod znajdujący się wewnątrz procedury kolejno oblicza $f''(x)$ i upraszcza postać wyliczonej pochodnej. Następnie szukana jest wartość $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Najważniejszym elementem składowym *trapeznMin* jest jednak wyliczanie wartości dla zmiennej p. By ją wyznaczyć rozwiązujemy nierówność $\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2 < blad$ ze względu na n. Zakładamy, że interesują nas tylko $n > 0$ (n jest liczbą podziałów i musi być wartością dodatnią). Ostatnia linia odpowiada za prezentację obliczonej wartości n. Wynik pojawia się w postaci $N > z$, gdzie z jest liczbą całkowitą - zatem jako wynik traktować będziemy najmniejszą liczbę naturalną większą od z.

2.2 Wzór Simpsona

2.3 Wzór prostokątów

3. Kwadratury Newtona-Cotesa dla całek podwójnych

3.1 Wzór trapezów

3.2 Wzór Simpsona

3.3 Wzór ’prostokątów’

4. Zastosowanie kwadratur do obliczania całek po obszarach normalnych

Podsumowanie

Celem przyświecającym pisaniu pracy było...

Bibliografia

[1] Olszowski B., *Wybrane metody numeryczne : podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007, s. 27-37

[2] Kosma Z., *Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich*, Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Radom 2007, s. 155-160

[3]

[4]

Spis procedur w języku Maple