Całkowanie numeryczne

Marcin Orchel

1 Wstęp

Całkowanie numeryczne – przybliżone wyliczanie wartości całek oznaczonych.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

Do wszystkich metod. Podział przedziału całkowania na podprzedziały. Przedział całkowania: $[a, b]$. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – punkty należące do przedziału całkowania, takie, że $x_i < x_{i+1}$, dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_1 = a$, $x_n = b$. Podprzedziały całkowania: (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$. Zdefiniujmy $h_i := x_{i+1} - x_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Oznaczenie: $y_i = f(x_i)$.

1.1 Podejście geometryczne

1.1.1 Metoda prostokątów

W każdym podprzedziale wybierany jest punkt środkowy m_i o odciętej

$$\frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Dla każdego podprzedziału pole pod wykresem funkcji przybliżane jest prostokątem o bokach długości $x_{i+1} - x_i$ oraz $f(m_i)$. Prostokąt i-ty to prostokąt z podprzedziału (x_i, x_{i+1}). Pole prostokąta i-tego wynosi

$$P_i = h_i f(m_i)$$

Szukana wartość całki oznaczonej wynosi:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n-1} P_i = \sum_{i=1}^{n-1} h_i f(m_i)$$

Dla jakiego przebiegu funkcji metoda ta daje dobre przybliżenie, a dla jakiego nie? Oszacowanie górnej granicy błędu:

$$R < m_i f(m_i)$$

Jeśli znana jest maksymalna pochodna w i-tym przedziale:

$$p_i = \max\left(f'(x)\right)$$

to oszacowanie można poprawić:

$$R \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}h_i\frac{1}{2}h_i p_i$$

$$R \leq \frac{1}{8}h_i^2 p_i$$

lub gdy odcinaną figurą będzie trapez: ...

Z innej perspektywy można powiedzieć, że metoda prostokątów polega na interpolacji funkcji f funkcją stałą:

$$y_i = f(m_i)$$

1.1.2 Metoda trapezów

W każdym przedziale konstruowany jest trapez przechodzący przez punkty:

$$(x_i, 0), (x_{i+1}, 0), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) \quad . \tag{2}$$

Pole tego trapezu wynosi:

$$P_i = \frac{(y_i + y_{i+1})\, h_i}{2}$$

Szukana wartość całki wynosi zatem:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n-1} P_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i + y_{i+1})\, h_i}{2}$$

Dla jakiego przebiegu funkcji metoda ta daje gorsze/lepsze przybliżenie od metody prostokątów?

Można również powiedzieć, że metoda trapezów polega na interpolacji funkcji f funkcją liniową przechodzącą przez punkty $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$.

1.1.3 Metoda parabol (Simpsona)

Metoda parabol polega na interpolacji funkcji f funkcją kwadratową w każdym przedziale. Dla każdego przedziału (x_i, x_{i+1}) konstruujemy funkcję kwadratową przechodzącą przez 3 punkty x_i, s_i, x_{i+1}, gdzie s_i jest punktem wewnętrznym przedziału (x_i, x_{i+1}). Funkcja kwadratowa będzie miała postać:

$$W(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

Współczynniki a_i, b_i oraz c_i można znaleźć rozwiązując następujący układ równań:

$$y_i = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$$

$$f\left(s_i\right) = a_i s_i^2 + b_i s_i + c_i$$

$$y_{i+1} = a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i \quad .$$

Po wyznaczeniu współczynników a_i, b_i oraz c_i należy obliczyć całkę:

$$I\left(f\right) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} a_i x^2 + b_i x + c_i dx$$

$$= \left[a_i \frac{x^3}{3} + b_i \frac{x^2}{2} + c_i x\right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{a_i}{3}\left(x_{i+1}^3 - x_i^3\right) + \frac{b_i}{2}\left(x_{i+1}^2 - x_i^2\right) + c_i\left(x_{i+1} - x_i\right)$$

$$= \frac{\left(x_{i+1} - x_i\right)}{6}\left(2a_i\left(x_{i+1}^2 + x_i x_{i+1} + x_i^2\right) + 3b_i\left(x_{i+1} + x_i\right) + c_i\right)$$

$$= \frac{\left(x_{i+1} - x_i\right)}{6}\left(a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i + a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i + a_i x_{i+1}^2 + 2a_i\left(x_i x_{i+1}\right) + a_i x_i^2 + 2b_i\left(x_{i+1} + x_i\right) + 4c_i\right)$$

$$= \frac{\left(x_{i+1} - x_i\right)}{6}\left(a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i + a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i + 4\left(a_i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2 + b_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + c_i\right)\right)$$

$$= \frac{\left(x_{i+1} - x_i\right)}{6}\left(y_{i+1} + y_i + 4f\left(m_i\right)\right)$$

Jak wynika z powyższego ostateczna postać jest przy założeniu, że punkt wewnętrzny jest punktem środkowym.

1.2 Podejście analityczne

Interesuje nas zastąpienie funkcji $f\left(x\right)$ funkcją $g\left(x\right)$ tak aby poniższe równanie było w miarę możliwości spełnione

$$\int\limits_a^b f\left(x\right) dx \approx \int\limits_a^b g\left(x\right) dx \quad . \tag{3}$$

Interesuje nas szczególny przypadek gdy

$$\int\limits_a^b f\left(x\right) dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f\left(x_i\right) \tag{4}$$

gdzie współczynniki a_i nie zależą od f. Wzór ten nazywany jest *kwadraturą*, punkty x_i nazywane są węzłami kwadratury, a liczby a_i współczynnikami kwadratury.

1.2.1 Metoda oparta na interpolacji Lagrange'a

Pomysł polega na zastąpieniu funkcji $f(x)$ wzorem interpolacyjnym Lagrange'a, czyli

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \tag{5}$$

gdzie L_k są wielomianami Lagrange'a. Po podstawieniu otrzymujemy przybliżenie

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \int\limits_a^b L_i(x)\,dx \ . \tag{6}$$

Widzimy, że ta postać jest szczególnym przypadkiem prawej strony (4) gdzie

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \ . \tag{7}$$

Kwadratury Newtona-Cotesa Zobaczmy, jak wygląda powyższa metoda dla węzłów równoodległych. Możemy podstawić do wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a $x = a + hs$, gdzie a i h to stałe, a s to nowa zmienna i otrzymujemy

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{a + hs - a - kh}{a + ih - a - kh} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{s-k}{i-k} \tag{8}$$

Ponieważ L_i są niezależne od a i od h, więc możemy zapisać w szczególności

$$L_i(x) = \varphi(s) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{s-k}{i-k} \tag{9}$$

Stosujemy całkowanie przez podstawienie zmieniając granice całkowania, i otrzymujemy wtedy gdy $s = 0$, a b, gdy $s = n$

$$a_i = h\int_0^n \varphi_i(s)\,ds \ . \tag{10}$$

możemy wprowadzić dodatkowo symbol

$$\alpha_i = \int_0^n \varphi_i(s)\,ds \ . \tag{11}$$

Współczynniki te nie zależą ani od granic całkowania, ani od funkcji f, tylko od n. Możemy wyprowadzić wzory na współczynniki dla $n = 1$

$$\alpha_0 = \int_0^1 \varphi_0(s)\,ds = \int_0^1 \frac{s-1}{0-1}dx = -\frac{1}{2}s^2 + s|_0^1 = \frac{1}{2} \tag{12}$$

$$\alpha_1 = \int_0^1 \varphi(s)\,ds = \frac{s^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{2} \tag{13}$$

A więc przybliżenie całki jest równe

$$S\left(f\right)=\frac{1}{2}h\left(y_0+y_1\right)\quad . \tag{14}$$

A więc otrzymujemy wzór trapezów. Dla $n=2$

$$a_0=\int_0^2\varphi_0\left(s\right)ds=\ldots=\frac{1}{3} \tag{15}$$

$$a_1=\int_0^2\varphi_1\left(s\right)ds=\ldots=\frac{4}{3} \tag{16}$$

$$a_2=\int_0^2\varphi_2\left(s\right)ds=\ldots=\frac{1}{3} \tag{17}$$

Zauważmy, że suma wszystkich współczynników jest równa n. Przybliżenie całki jest równe

$$S\left(f\right)=\frac{1}{3}h\left(y_0+4y_1+y_2\right)\quad . \tag{18}$$

Jest to wzór parabol (Simpsona).

Dla $n=3$ otrzymujemy wzór 3/8 Newtona (wzór trzech ósmych).

$$S\left(f\right)=\frac{3}{8}h\left(y_0+3y_1+3y_2+y_3\right)\quad . \tag{19}$$

Przykład: Obliczyć wartość całki dokładną i przybliżoną metodami trapezów, Simpsona i 3/8 Newtona

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x} \tag{20}$$

Metoda trapezów

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\frac{1}{2}1\left(1+\frac{1}{2}\right)=0.75\quad . \tag{21}$$

Metoda Simpsona

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=0.6944\quad . \tag{22}$$

Metoda 3/8 Newtona

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=0.6937\quad . \tag{23}$$

Wartość dokładna

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2\approx 0,6931\quad . \tag{24}$$

1.2.2 Metoda Gaussa

Po angielsku Gaussian quadrature, http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature. Dla węzłów nierównoodległych, możemy otrzymać lepsze przybliżenie. W poprzedniej metodzie, dla $n = 2$ otrzymywaliśmy dokładne przybliżenie całki dla wielomianów drugiego stopnia, w ogólności można otrzymać dokładne przybliżenie całki dla wielomianów n-tego stopnia. W metodzie Gaussa, możemy otrzymać dokładne przybliżenie całki dla wielomianów stopnia $2n$. A więc dla $n = 2$ otrzymamy dokładne przybliżenie całki dla wielomianów 4 stopnia.

Mamy dany przedział skończony $[a, b]$, $a < b$ oraz dla $x \in [a, b]$ dodatnia ciągła funkcja wagowa $\omega(x)$, $n \geq 1$ to liczba naturalna. Zadanie polega na aproksymacji całki

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x) \tag{25}$$

wartością

$$\tilde{I}(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{26}$$

a więc musimy wybrać odpowiednio $2n$ liczb w_i, x_i, $i = 1, \ldots, n$. Likwidujemy założenie aby węzły musiały być równoodległe. Zadanie polega na takim dobraniu w_i oraz x_i aby błąd aproksymacji

$$\tilde{I}(f) - I(f) \tag{27}$$

znikał dla wielomianów możliwie dużego stopnia. Czyli gdy podstawimy za f wielomian.

Okazuje się, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ istnieją jednoznacznie określone liczby w_i, x_i gdzie $i = 1, \ldots, n$ takie, że $\tilde{I}(f) = I(f)$ dla wszystkich wielomianów p stopnia $\leq 2n - 1$, oraz $w_i > 0$ i $x_i \in (a, b)$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Oznaczmy

$$\bar{\Pi}_j := \left\{ p | p(x) = x^j + a_1 x^{j-1} + \ldots + a_j \right\} \tag{28}$$

zbiór wszystkich wielomianów unormowanych, oraz

$$\Pi_j := \{ p | p \quad wielomian \quad stopnia \quad \leq j \} \tag{29}$$

Twierdzenie 1.1. *Istnieją jednoznacznie określone wielomiany $p_j \in \tilde{\Pi}_j$, $j = 0, 1, \ldots$ takie, że*

$$(p_i, p_k) = 0 \tag{30}$$

dla $i \neq k$. Wielomiany te spełniają związek rekurencyjny

$$p_0(x) = 1 \tag{31}$$

$$p_{i+1}(x) = (x - \delta_{i+1}) p_i(x) - \gamma_{i+1}^2 p_{i-1}(x) \tag{32}$$

dla $i \geq 0$, oraz

$$p_{-1}(x) \equiv 0 \tag{33}$$

$$\delta_{i+1} := (x p_i, p_i) / (p_i, p_i) \tag{34}$$

dla $i \geq 0$*, oraz*

$$\gamma_{i+1}^{2} := \begin{cases} 0 \ dla \ i \geq 0 \\ \left(p_i, p_i\right) / \left(p_{i-1}, p_{i-1}\right) \ dla \ i \geq 1 \end{cases} \tag{35}$$

Wielomiany p_i nazywamy wielomianami ortogonalnymi z funkcją wagową $\omega(x)$.

Dla wszystkich wielomianów $p \in \Pi_{n-1}$ zachodzi równość $(p, p_n) = 0$.

Twierdzenie 1.2. *Zera* x_i *dla* $i = 1, \ldots, n$ *wielomianu* p_n *są rzeczywiste, pojedyczne i leżą w przedziale* (a, b)*.*

Twierdzenie 1.3. *Dla dowolnych liczb* t_i *dla* $i = 1, \ldots, n$ *takich, że* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *macierz kwadratowa* $n \times n$

$$A := \begin{bmatrix} p_0\left(t_1\right) & \ldots & p_0\left(t_n\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n\left(t_1\right) & & p_{n-1}\left(t_n\right) \end{bmatrix} \tag{36}$$

jest nieosobliwa.

Twierdzenie 1.4. *Niech liczby* $w_1, \ldots, w_n$ *i zera* $x_1, \ldots, x_n$ *wielomianu* $p_n(x)$ *będą rozwiązaniem układu równań liniowych*

$$\sum_{i=1}^{n} p_k\left(x_i\right) w_i = \begin{cases} \left(p_0, p_0\right) \ jesli \ k = 0 \\ 0 \ jesli \ k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{37}$$

Wtedy $w_i > 0$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$ *jak również*

$$\int_a^b \omega\left(x\right) p\left(x\right) dx = \sum_{i=1}^{n} w_i p\left(x_i\right) \tag{38}$$

dla wszystkich wielomianów $p \in \Pi_{2n-1}$*.*

Jeśli na odwrót, dla pewnych liczb w_i*,* x_i *dla* $i = 1, \ldots, n$ *prawdziwa jest równość* (38) *dla wszystkich wielomianów* $p \in \Pi_{2n-1}$*, to wówczas* x_i *są zerami wielomianu* p_n*, a* w_i *spełniają układ równań* (37)*.*

Nie istnieją liczby x_i*,* w_i *dla* $i = 1, \ldots, n$ *takie, żeby zachodziło* (38) *dla wszystkich wielomianów* $p \in \Pi_{2n}$*.*

Jeśli zastosujemy interpolację wielomianami ortogonalnymi Legendre'a na przedziale $[-1, 1]$ otrzymujemy kwadraturę Gaussa-Legendre'a, gdzie

$$a_k = -\frac{2}{\left(n+2\right) P_{n+2}\left(x_k\right) P'_{n+1}\left(x_k\right)} \tag{39}$$

gdzie x_k są zerami wielomianu $P_{n+1}\left(x\right)$.

Konwersja przedziału $[a, b]$ do $[-1, 1]$ za pomocą całkowania przed podstawienie. Mamy po zróżniczkowaniu wzoru na x względem t

$$dx = \frac{b-a}{2} dt \tag{40}$$

Po podstawieniu powyższego wzoru i wzoru na x względem t, oraz zastąpieniu granicy całkowania (też po podstawieniu) otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt \tag{41}$$

Dla n = 1. Mamy $P_2(x) = 1/2(3x^2-1)$, $P_3(x) = 1/2(5x^3-3x)$. Węzły są pierwiastkami wielomianu $P_2(x)$, czyli $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Zaś oba współczynniki są równe 1, przykładowe wyprowadzenie

$$a_0 = \frac{-2}{3/2(5x_0^3 - 3x_0) * 3x_0} = \frac{2}{3/2(-5/\sqrt{3}^3 + 3/\sqrt{3}) * 3/\sqrt{3}} \tag{42}$$

$$= \frac{2}{3/2(-5/(3\sqrt{3}) + 3/\sqrt{3}) * 3/\sqrt{3}} = \frac{2}{3/2(4/(3\sqrt{3})) * 3/\sqrt{3}} = \frac{2}{6(1/(\sqrt{3})) * 1/\sqrt{3}} \tag{43}$$

$$= 2/2 = 1 \tag{44}$$

Przykład: Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \tag{45}$$

Na początku zamieniamy problem na przedział $[-1,1]$ i mamy całkę

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1/2t + 3/2} \approx 0.69315 \tag{46}$$

Obliczamy $t_0 = -1/\sqrt{3}$, podobnie $t_1 = 1/\sqrt{3}$ Przybliżenie całki jest równe

$$a_0 f(t_0) + a_1 f(t_1) = \frac{1}{-1/\left(2\sqrt{3}\right) + 3/2} + \frac{1}{1/\left(2\sqrt{3}\right) + 3/2} = 0.825542 + 0.559073 = 1.384615 \tag{47}$$

Po podzieleniu przez 2 otrzymujemy 0.6923075.

Przykład. Chcemy znaleźć wartość całki

$$\int_{-1}^{1} x^3 + 1dx = 2 \tag{48}$$

A zatem

$$f(x) \equiv x^3 + 1 \tag{49}$$

$$\omega(x) \equiv 1 \tag{50}$$

Jest to wielomian stopnia 3, a zatem $2n-1=3$, czyli $n=2$. A zatem szukamy

$$\int_{-1}^{1} 1\left(x^3+1\right)dx = \sum_{i=1}^{2} w_i\left(x_i^3+1\right) = w_1\left(x_1^3+1\right) + w_2\left(x_2^3+1\right) \tag{51}$$

Musimy podstawić odpowiednie wartości miejsc zerowych wielomianu Legrenge'a 2 stopnia, oraz współczynników w_i rozwiązując układ równań. Miejsca zerowe to $x_1 = -1/\sqrt{3}$, $x_2 = 1/\sqrt{3}$. A więc układ równań będzie miał postać:

$$p_0(x_1)\, w_1 + p_0(x_2)\, w_2 = (p_0, p_0) \tag{52}$$

$$p_1(x_1)\, w_1 + p_1(x_2)\, w_2 = 0 \tag{53}$$

Wiemy, że $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$. Po podstawieniu

$$1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2 \tag{54}$$

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 = 0 \tag{55}$$

Czyli

$$w_1 = 2 - w_2 \tag{56}$$

$$x_1 (2 - w_2) + x_2 w_2 = 0 \tag{57}$$

$$w_2 = \frac{-2x_1}{x_2 - x_1} = 1 \tag{58}$$

$$w_1 = 1 \tag{59}$$

A więc po podstawieniu otrzymujemy

$$\int_{-1}^{1} 1 \left(x^3 + 1\right) dx = \left(x_1^3 + 1\right) + \left(x_2^3 + 1\right) = 2 \tag{60}$$

Kwadratury Gaussa-Czebyszewa Po angielsku Chebyshev-Gauss quadrature, http://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev%E2%80%93Gauss_quadrature. Szczególny przypadek, gdy wartości współczynników a_i są stałymi. Kwadratury Gaussa-Czebyszewa dla przedziału $[-1, 1]$

$$a_k = \frac{\pi}{n+1} \tag{61}$$

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\,\pi}{2n+2} \tag{62}$$

Są to miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa $T_n(x)$, z funkcją wagową

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{63}$$

Przykładowe pierwiastki dla $n = 1$: $x_0 = 1/\sqrt{2}$, $x_1 = -1/\sqrt{2}$. Dla $n = 2$, $x_0 = \sqrt{3}/2$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}/2$.

Przykład: Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \tag{64}$$

Na początku zamieniamy problem na przedział $[-1,1]$ i mamy całkę

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1/2t+3/2} \tag{65}$$

Następnie musimy mieć funkcję wagową pod całką:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\sqrt{1-t^2}dt}{1/2t+3/2} \tag{66}$$

Obliczamy $t_0 = 1/\sqrt{2}$, podobnie $t_1 = -1/\sqrt{2}$. I otrzymujemy:

$$\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{1-t_0^2}}{1/2t_0+3/2}+\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{1-t_1^2}}{1/2t_1+3/2} = 0.7840 \tag{67}$$

Dla $n = 2$ mamy $t_0 = \sqrt{3}/2$, $t_1 = 0$, $t_2 = -\sqrt{3}/2$ i otrzymujemy

$$\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{1-t_0^2}}{1/2t_0+3/2}+\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{1-t_1^2}}{1/2t_1+3/2}+\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{1-t_2^2}}{1/2t_2+3/2} = 0.7299$$

Kwadratura Czebyszewa Po angielsku Chebyshev quadrature, `http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevQuadrature.html`. Wszystkie współczynniki a_i są stałymi i są sobie równe oraz funkcja wagowa równa 1. Rozpatrywany przedział $[-1,1]$.

Przyjmujemy, że

$$a = \frac{2}{n} \tag{68}$$

Węzły wyznaczamy za pomocą wzoru (4) tak aby był spełniony dla funkcji $x, x^2, \ldots, x^n$, czyli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

A więc otrzymujemy układ równań. Z układu równań możemy wyznaczyć węzły x_i. Dla $n = 3$, układ równań na węzły jest następujący, całka funkcji x jest równa 0, zatem

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \tag{69}$$

Całka funkcji x^2 jest równa $2/3$ zatem

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1 \tag{70}$$

Całka funkcji x^3 jest równa 0 zatem

$$t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = 0 \tag{71}$$

Rozwiązanie $t_1 = -1/\sqrt{2}$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1/\sqrt{2}$.

Przykład obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \tag{72}$$

dla $n = 3$. Najpierw przekształcamy całkę do przedziału $(-1, 1)$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1/2t + 3/2} \tag{73}$$

I otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1/2t + 3/2} = \frac{1}{3}\left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right)\right) = 0.6928 \tag{74}$$

1.3 Całkowanie adaptacyjne

Dla każdego przedziału sprawdzany jest błąd całkowania. Błąd całkowania jest sprawdzany w ten sposób, że każdy przedział dzielony jest na dwa przedziały. Sprawdzana jest różnica między przybliżoną wartością całki w danym przedziale i sumą przybliżonych wartości całek w dwóch przedziałach. Jeśli ta różnica jest duża oznacza, to że w danym przedziale przybliżona wartość całki nie jest dokładna, wtedy przedział ten dzielony jest na dwa przedziały. Sprawdzanie jest powtarzane dla każdego przedziału.

2 Zadania

2.1 Zadania na 3.0

- Wyprowadzić wartość dokładną i przybliżone kwadraturami Newtona-Cotesa dla $n = 1, 2, 3$, gdzie n to stopień wielomianu interpolacyjnego całki

$$\int_1^2 \left(x^2 + 3x\right) dx\ . \tag{75}$$

  Obliczyć błędy względne procentowe. Naszkicować wykres funkcji podcałkowej i jej przybliżeń wraz z punktami.

2.2 Zadania na 4.0

- Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{2\left(1+x\right)}{\sqrt{x\left(1-x\right)}}dx \tag{76}$$

  za pomocą kwadratury Gaussa-Czebyszewa dla n = 2. Obliczyć błędy względne procentowe. Naszkicować wykres funkcji podcałkowej wraz z punktami.

- Za pomocą kwadratury Czebyszewa obliczyć całkę

$$\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} \tag{77}$$

  Obliczyć błędy względne procentowe. Naszkicować wykres funkcji podcałkowej i jej przybliżeń wraz z punktami.

2.3 Zadania na 5.0

- Obliczyć całkę
$$\int_0^1 \frac{2\,(1+x)}{\sqrt{x\,(1-x)}}dx \tag{78}$$
kwadraturami Gaussa-Legendre'a dla $n = 1$.