

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

WYDZIAŁ INFORMATYKI

KATEDRA MATEMATYKI

PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

TEMAT: KONSTRUKCJA DWUWYMIAROWYCH
KWADRATUR NEWTONA-COTESA I ICH
ZASTOSOWANIE DO OBLICZANIA CAŁKI PODWÓJNEJ

WYKONAWCA: SZYMON DĄBROWSKI

.....
podpis

PROMOTOR: DR JAN POPIOŁEK

.....
podpis

BIAŁYSTOK 2017 r.

Karta dyplomowa

Politechnika Białostocka Wydział Informatyki Katedra Matematyki	Studia stacjonarne II stopnia magisterskie	Numer albumu studenta: 87901
		Rok akademicki 2016/2017
		Kierunek studiów: Informatyka Specjalność: Informatyka i finanse
<p style="text-align: center;">Szymon Dąbrowski</p> <p>Temat pracy dyplomowej: Konstrukcja dwuwymiarowych kwadratur</p> <p>Zakres pracy: Newtona-Cotesa i ich zastosowanie do obliczania całki podwójnej 1. Wieloimiarowy Lagrange a jednej i dwóch zmiennych. 2. Jednowymiarowe kwadratury Newtona-Cotesa. 3. Dwuwymiarowe kwadratury Newtona-Cotesa. 4. Zastosowanie kwadratur do obliczania całek.</p>		
..... Imię i nazwisko promotora - podpis	 Imię i nazwisko kierownika katedry - podpis
..... Data wydania tematu pracy dyplomowej - podpis promotora Regulaminowy termin złożenia pracy dyplomowej Data złożenia pracy dyplomowej - potwierdzenie dziekanatu
..... Ocena promotora	 Podpis promotora
..... Imię i nazwisko recenzenta Ocena recenzenta Podpis recenzenta

Thesis topic: Construction of twodimensional Newton-Cotes quadratures and their application to calculate of double integral.

SUMMARY

Key words: Newton-Cotes quadratures; Lagrange polynomials;

Plik OświadczenieOSamodzielności.pdf

Spis treści

Wstęp	6
1 Wielomiany interpolacyjne <i>Lagrange’a</i>	7
1.1 Wielomiany <i>Lagrange’a</i> dla funkcji jednej zmiennej	7
1.2 Wielomiany <i>Lagrange’a</i> dla funkcji dwóch zmiennych	11
2 Kwadratury Newtona-Cotesa dla całki pojedynczej	12
2.1 Wzór trapezów	13
2.2 Wzór Simpsona	16
2.3 Wzór ’prostokątów’	16
3 Kwadratury Newtona-Cotesa dla całek podwójnych	17
3.1 Wzór trapezów	17
3.2 Wzór Simpsona	17
3.3 Wzór ’prostokątów’	17
4 Zastosowanie kwadratur do obliczania całek po obszarach normalnych	18
Podsumowanie	19
Bibliografia	20
Spis procedur w języku Maple	21

Wstęp

Treść wstępu

1. Wielomiany interpolacyjne *Lagrange'a*

W dzisiejszych czasach zaspokojenie głodu czy pragnienia nie wystarcza, by sprostać ludzkim potrzebom. Nieustanna chęć rozwoju naszego gatunku sprawia, że konieczne jest sięganie do wiedzy matematycznej w celu lepszego poznania otaczającego nas świata. Niejednokrotnie posiadamy tylko dyskretne dane pozyskane w trakcie badań i chcąc dokonać analizy matematycznej pewnych zdarzeń czy procesów musimy stworzyć/wyprowadzić regularne funkcje interpolacyjne, które w sposób ciągły i wystarczająco dokładny opisywałyby interesujące nas zjawiska. Jak możemy się spodziewać, często jest to ciężkie do wykonania zadanie.

Funkcje interpolujące w znacznym stopniu upraszczają prowadzenie obliczeń podczas wyznaczania przybliżonych wartości funkcji, których postać analityczna jest bardzo skomplikowana, lub wyliczenie kolejnych jej wartości wymaga wykonania zawiłych obliczeń komputerowych. W tym rozdziale pracy skupimy się zatem na sposobie w jaki możemy wyznaczać tak zwane wielomiany interpolacyjne *Lagrange'a* dla funkcji jednej oraz dwóch zmiennych.

1.1 Wielomiany *Lagrange'a* dla funkcji jednej zmiennej

Jak wspomnieliśmy we wstępie, często w celu uproszczenia obliczeń skłaniamy się do wykorzystania interpolacji. Stosując ją musimy liczyć się z faktem, że pozyskane wyniki są wartościami przybliżonymi, więc z reguły będą różniły się od wyników dokładnych. Przed przejściem do dalszych rozważań należy zdefiniować pojęcie interpolacji.

Definicja 1. Interpolacja

Interpolacja jest metodą numeryczną przybliżania funkcji. Polega ona na konstruowaniu tak zwanych **funkcji interpolujących** (przybliżających) $W(x)$. Wykorzystujemy do tego znane nam wartości **funkcji interpolowanej** (przybliżanej) $f(x)$, dla wybranych argumentów należących do jej dziedziny.

Wielomian $W(x)$ tworzony jest w oparciu o dwa powiązane ze sobą zbiory liczbowe [1]:

$$X = \{x_i : i = 0, 1, \dots, n\}, F = \{f_i : i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Zbiory X i F są równoliczne. Elementy $x_i \in X$ definiują współrzędne punktów węzłowych w przestrzeni \mathbb{R}^n , natomiast elementy z F określają wartości funkcji $f(x)$ w węzłach x_i , tzn.

$$f_i = f(x_i), \quad (1.1)$$

przy czym $f_i \in \mathbb{R}$

Wyjaśnijmy również pojęcie węzła, którym przed chwilą operowaliśmy:

Definicja 2. Węzły (Punkty węzłowe)

Węzłami nazywamy punkty w przestrzeni \mathbb{R}^n , będące takimi argumentami funkcji $f(x)$, dla których jesteśmy w stanie wyznaczyć jej wartość.

W węzłach wartości funkcji interpolującej i interpolowanej są równe. Oznacza to, że:

$$W(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

Uwaga 1. W tym podrozdziale ograniczać będziemy się jedynie do funkcji jednej zmiennej niezależnej. Funkcje te badane będą na ograniczonym domkniętym przedziale $[a, b]$. W związku z tym, zbiór X zawierał będzie elementy $x_i \in \mathbb{R}$ takie, że $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Definicja zbioru F nie ulega zmianie.

Na rysunku 2.1 zobrazowano w sposób symboliczny na czym polega interpolacja, oraz czym są węzły (punkty x_i przecięcia wykresów $W(x)$ i $f(x)$, zachodzi dla nich równość (1.2)).



Rysunek 1.1: Funkcja interpolacyjna $W(x)$ oraz interpolowana $f(x)$

Mając już podstawy do tego, by wiedzieć czym jest interpolacja - przejdźmy o krok dalej. Rozważmy pewien liniowo niezależny układ funkcji, zdefiniowanych na domkniętym przedziale $[a, b]$:

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x) \quad (1.3)$$

oraz zbiór szukanych współczynników

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad (1.4)$$

takich, że ich kombinacja liniowa z (1.3) będzie spełniała poniższy układ równań:

$$\alpha_0 \phi_0(x_i) + \alpha_1 \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_i) = f_i \quad (1.5)$$

gdzie $f_i \in F$ oraz $x_i \in X$.

W *interpolacji Lagrange'a* w skład (1.3) wchodzi wielomiany określone w następujący sposób:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (1.6)$$

Są one nazywane funkcjami bazowymi stopnia n . Warto zauważyć, że zachodzi następująca równość:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdzie } i = j \\ 0, & \text{w.p.p.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Z powyższego wynika, że tylko w jednym przypadku $l_i(x)$ będzie miała wartość różną od 0 (gdy $x = x_i$), zatem $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$. Dodatkowo zauważmy, że macierzą charakterystyczną układu (1.5) jest macierz jednostkowa. Skutkuje to tym, iż [2]

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (1.8)$$

będzie wielomianem o stopniu nie większym niż n , oraz przyjmie wartości (1.1) w punktach węzłowych. Wielomian (1.8) nazywany jest **wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a**. Z jego pomocą w dosyć przystępny sposób możemy interpolować dowolną funkcję.

Przykład 1. (Wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia $n = 2$)

Zbuduj wielomian interpolacyjny $L_2(x)$ dla funkcji $f(x) = e^{x^2}$ rozpatrywanej na ograniczonym przedziale $[0, 1]$. Kolejno oblicz $L_2(0, 6)$ i wynik porównaj z wartością rzeczywistą wiedząc, że $f(0, 6) = e^{(0,6)^2} = 1,4(3)$.

W celu wyznaczenia wielomianu Lagrange'a stopnia $n = 2$, potrzebować będziemy $n + 1$ węzłów takich, że $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$. Przyjmijmy zatem następujące ich wartości: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Korzystając bezpośrednio z równania (1.8) dostajemy:

$$L_2(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Podstawiamy kolejno wartości węzłów do równania $L_2(x)$, otrzymując wielomian interpolujący naszą funkcję $f(x) = e^{x^2}$ na $[a, b] = [0, 1]$:

$$L_2(x) = e^0 \frac{(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} + e^{(\frac{1}{4})} \frac{(x - 0)(x - 1)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} + e^1 \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})} = 2,30046x^2 - 0,58218x + 1$$

Ostatecznie wyznaczamy wartość $L_2(0, 6)$:

$$L_2(0, 6) = 2,30046 \cdot (0, 6)^2 - 0,58218 \cdot (0, 6) + 1 = 1,4788576$$

Wartość interpolowana $L_2(0, 6)$ odbiega nieco od wartości dokładnej $f(0, 6)$.

Wyprowadzona w powyższym przykładzie dla funkcji $f(x)$ i zadanych węzłów postać wielomianu $L_2(x)$ jest jednoznaczna. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. (O istnieniu i jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego *Lagrange'a*)

Niech $R_n[x]$ będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia $\leq n$ o współczynnikach rzeczywistych tzn.: $R_n[x] = \{W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, (i = 0, 1, \dots, n)\}$. Dla dowolnej funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden wielomian $W(x) \in R_n[x]$ interpolujący f przy zadanych węzłach x_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

W powyższym przykładzie zauważyliśmy, że wynik jest obarczony pewnym błędem. Nosi on miano *błędu interpolacji*. Dla wielomianów *Lagrange'a* definiujemy go w następujący sposób:

Definicja 3. (Błąd interpolacji wielomianu *Lagrange'a*)

Weźmy

$$M_{n+1} = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$m_{n+1} = \sup_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|,$$

przy czym $\omega_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$, zaś $f(x)$ to funkcja interpolowana.

Błędem interpolacji wielomianu *Lagrange'a* (stopnia n) nazywamy wówczas takie

$$\delta_L = \frac{M_{n+1} \cdot m_{n+1}}{(n+1)!} \quad (1.9)$$

dla którego zachodzi:

$$|L_n(x) - f(x)| \leq \delta_L, \quad x \in [a, b]$$

1.2 Wielomiany *Lagrange'a* dla funkcji dwóch zmiennych

2. Kwadratury Newtona-Cotesa dla całki pojedynczej

Niech $f(x)$ będzie funkcją zdefiniowaną na przedziale $[a, b]$ o wartościach rzeczywistych tzn. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozważmy pewną całkę

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (2.1)$$

Funkcję podcałkową zawsze możemy zastąpić inną funkcją taką, że w miarę możliwości poniższe przybliżenie będzie prawdziwe:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b g(x) dx \quad (2.2)$$

W praktyce często spotkać możemy się z przypadkiem takim, że do wyznaczenia przybliżonych wartości $I(f)$ stosowane są wzory nazywane kwadraturami. Owe kwadratury opierają się jedynie na wartościach $f(x)$ w punktach węzłowych i mogą niezbyt dokładnie przybliżać wynik tzn:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i), \quad x_i \in [a, b], \quad (2.3)$$

przy czym współczynniki a_i są niezależne od $f(x)$ (nazywamy je współczynnikami kwadratury), zaś x_i nosi miano węzłów kwadratury.

Naszym celem jest jednak to, by jak najbardziej zminimalizować błąd pojawiający się podczas przybliżania wartości $I(f)$. W związku z tym możemy zastosować zabieg zastąpienia funkcji $f(x)$ w całce $I(f)$ wielomianem interpolującym ją. W tym celu wykorzystamy wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* (1.8). Po podstawieniu go do (2.3) otrzymamy:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) dx, \quad (2.4)$$

gdzie

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x) dx, \quad (2.5)$$

natomiast

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2.6)$$

W związku z powyższym całkę (2.1) możemy wyrazić w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \quad (2.7)$$

Jeżeli w (2.7) rozpatrzmy tylko węzły takie, że $x_0 = a$, $x_n = b$, a każdy węzeł pośredni leżący pomiędzy x_0 a x_n jest postaci $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, to kwadraturę taką nazwiemy kwadraturą **Newtona-Cotesa**. Skupimy się na rozważeniu trzech różnych kwadratur tego typu, będą nimi: *wzór trapezów*, *wzór Simpsona* oraz *wzór prostokątów*.

2.1 Wzór trapezów

Do wyznaczenia wzoru trapezów będziemy wykorzystywać wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* rzędu $n = 1$ ($L_1(x)$) utworzony dla węzłów a i b . Zastosujmy w (2.6) następujące podstawienie: $x = a + hs$. Wartości a, h są pewnymi stałymi, natomiast s jest zmienną niezależną.

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{a + hs - (a + jh)}{(a + ih) - (a + jh)} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{s - j}{i - j}$$

Otrzymujemy zatem:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{s - j}{i - j} = \psi_i(s) \quad (2.8)$$

$\psi_i(s)$ to nasza nowa funkcja zmiennej s .

Całkę z równania (2.5) obliczymy metodą całkowania przez podstawienie. Skorzystamy z przedstawionego przed chwilą podstawienia $x = a + hs$ oraz równania (2.8)

$$a_i = \int_a^b l_i(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a + hs \\ dx = hds \\ b = a + hs \Rightarrow \frac{b-a}{h} = s \Rightarrow s = n \\ a = a + hs \Rightarrow 0 = hs \Rightarrow s = 0 \end{array} \right\} = h \int_0^n \psi_i(s) ds$$

Chcemy wyliczyć teraz wartości współczynników kwadratury a_0 i a_1 . Pamiętamy o tym, że do obliczeń wykorzystujemy postać wielomianu *Lagrange'a* rzędu $n = 1$, zatem będziemy całkowali w granicach $[0, n] = [0, 1]$

$$a_0 = h \int_0^1 \phi_0(s) ds = h \int_0^1 \frac{s-1}{0-1} ds = \int_0^1 (1-s) ds = h \left[s - \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \frac{h}{2}$$

$$a_1 = h \int_0^1 \phi_1(s) ds = h \int_0^1 \frac{s-0}{1-0} ds = \int_0^1 (s) ds = h \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \frac{h}{2}$$

Po wstawieniu wyliczonych współczynników do (2.3) otrzymujemy

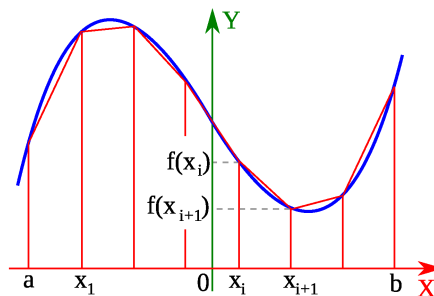
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=0}^1 a_i f(x_i) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) = \\ &= \frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wzór ten nazywamy **wzorem trapezów**. Zauważmy, że suma współczynników α_0, α_1 jest równa $h \cdot n$. W późniejszych podrozdziałach również zetkniemy się z taką prawidłowością rozpatrując wyższy rząd wielomianów *Lagrange'a* dla $n > 1$.

Podczas wyznaczania (2.9) przyjęliśmy, że przedział całkowania nie został podzielony, a jedynymi węzłami były jego początek i koniec. W rzeczywistości rozpatrujemy przypadki z wielokrotnym podziałem przedziału. Jeżeli przedział całkowania $[a, b]$ podzielimy na ≥ 2 równe części takie, że $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, to wzór przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \\ &\approx \left(\frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \dots + \frac{h}{2} (f(x_{n-1}) + f(x_n)) \right) = \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \end{aligned} \quad (2.10)$$

W wyprowadzonym powyżej wzorze trapezów (jak sama nazwa sugeruje) przybliżamy wartość całek sumując pola trapezów o ustalonej wysokości h (odległość pomiędzy kolejnymi węzłami) i podstawach o długości $f(x_i)$ i $f(x_{i+1})$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$. Rysunek 2.1 z pewnością pomoże nam lepiej zrozumieć zagadnienie, któremu poświęcony jest ten podrozdział.



Rysunek 2.1: Graficzne przedstawienie idei zastosowania wzoru trapezów do całkowania

—————OD TAD POPRAWIC,Dodać wstęp przed przykładem, rozszerzyć przykład do $n=6$, opisać wzór na błąd metody trapezów, dodać procedurę liczącą z wzoru trapezów, porównać wyniki otrzymane metodą trapezów dla $n=6$ liczone ręcznie i dla dużego n liczonego procedurą, pokazać że im większa liczba podziałów tym dokładniejszy wynik—————

Przykład 2. (Wyznaczanie przybliżonej wartości całki przy wykorzystaniu wzoru trapezów)
Wyznaczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^1 e^{x^2} dx$ przyjmując, że przedział dzielimy na $n=4$ równe części(5 węzłów)

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}, x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1.$$

Do rozwiązania zadania skorzystamy ze wzoru (2.10)

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)) = \\ &= \frac{1}{8} (e^0 + 2e^{\frac{1}{16}} + 2e^{\frac{1}{4}} + 2e^{\frac{9}{16}} + e) \approx 1.49068 \end{aligned}$$

Wartość dokładna wynosi 1.46265, zatem różnica w wyniku jest nieznaczna.

Im więcej podziałów przedziału wykonamy, tym dokładniejszy otrzymamy wynik. Wynika to bezpośrednio ze wzoru na błąd metody trapezów. Wygląda on następująco:

Definicja 4. (Błąd przybliżenia wzorem trapezów)

$$\delta_T = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2, \quad (2.11)$$

gdzie

$$M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad (2.12)$$

2.2 Wzór Simpsona

2.3 Wzór 'prostokątów'

3. Kwadratury Newtona-Cotesa dla całek podwójnych

3.1 Wzór trapezów

3.2 Wzór Simpsona

3.3 Wzór 'prostokątów'

4. Zastosowanie kwadratur do obliczania całek po obszarach normalnych

Podsumowanie

Celem przyświecającym pisaniu pracy było...

Bibliografia

- [1] Olszowski B., *Wybrane metody numeryczne : podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007, s. 27-37
- [2] Kosma Z., *Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich*, Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Radom 2007, s. 155-160
- [3]
- [4]

Spis procedur w języku Maple