

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

WYDZIAŁ INFORMATYKI

KATEDRA MATEMATYKI

PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

TEMAT: KONSTRUKCJA DWUWYMIAROWYCH
KWADRATUR NEWTONA-COTESA I ICH
ZASTOSOWANIE DO OBLICZANIA CAŁKI PODWÓJNEJ

WYKONAWCA: SZYMON DĄBROWSKI

.....
podpis

PROMOTOR: DR JAN POPIOŁEK

.....
podpis

BIAŁYSTOK 2018 r.

Karta dyplomowa

Politechnika Białostocka Wydział Informatyki Katedra Matematyki	Studia stacjonarne II stopnia magisterskie	Numer albumu studenta: 87901
		Rok akademicki 2016/2017
		Kierunek studiów: Informatyka Specjalność: Informatyka i finanse
<p style="text-align: center;">Szymon Dąbrowski</p> <p>Temat pracy dyplomowej: Konstrukcja dwuwymiarowych kwadratur</p> <p>Zakres pracy: Newtona-Cotesa i ich zastosowanie do obliczania całki podwójnej</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Wieloimiarowy Lagrange'a jednej i dwóch zmiennych. 2. Jednowymiarowe kwadratury Newtona-Cotesa. 3. Dwuwymiarowe kwadratury Newtona-Cotesa. 4. Zastosowanie kwadratur do obliczania całek. <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>.....</p> <p>Imię i nazwisko promotora - podpis</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>.....</p> <p>Imię i nazwisko kierownika katedry - podpis</p> </div> </div>		
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 30%;"> <p>.....</p> <p>Data wydania tematu pracy dyplomowej - podpis promotora</p> </div> <div style="width: 30%;"> <p>.....</p> <p>Regulaminowy termin złożenia pracy dyplomowej</p> </div> <div style="width: 30%;"> <p>.....</p> <p>Data złożenia pracy dyplomowej - potwierdzenie dziekanatu</p> </div> </div>		
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>.....</p> <p>Ocena promotora</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>.....</p> <p>Podpis promotora</p> </div> </div>		
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 30%;"> <p>.....</p> <p>Imię i nazwisko recenzenta</p> </div> <div style="width: 30%;"> <p>.....</p> <p>Ocena recenzenta</p> </div> <div style="width: 30%;"> <p>.....</p> <p>Podpis recenzenta</p> </div> </div>		

Thesis topic: Construction of twodimensional Newton-Cotes quadratures and their application to calculate of double integral.

SUMMARY

Key words: Newton-Cotes quadratures; Lagrange polynomials;

Plik OswiadczenieOSamodzielnosci.pdf

Spis treści

Wstęp	6
1 Wielomiany interpolacyjne <i>Lagrange’a</i>	7
1.1 Wielomiany <i>Lagrange’a</i> dla funkcji jednej zmiennej	7
1.2 Wielomiany <i>Lagrange’a</i> dla funkcji dwóch zmiennych	12
2 Kwadratury Newtona-Cotesa dla całki pojedynczej	17
2.1 Wzór trapezów	18
2.2 Wzór Simpsona	25
3 Kwadratury Newtona-Cotesa dla całek podwójnych w prostokącie	33
3.1 Wzór trapezów	34
3.2 Wzór Simpsona	42
4 Kwadratury Newtona-Cotesa dla całek podwójnych w obszarach normalnych	54
4.1 Wzór trapezów dla obszaru normalnego względem osi Ox	54
4.2 Wzór Simpsona dla obszaru normalnego względem osi Ox	62
4.3 Wzór trapezów dla obszaru normalnego względem osi Oy	71
4.4 Wzór Simpsona dla obszaru normalnego względem osi Oy	76
Podsumowanie	77
Bibliografia	79
Spis procedur w języku Maple	80

Wstęp

Treść wstępu

1. Wielomiany interpolacyjne *Lagrange'a*

W dzisiejszych czasach zaspokojenie głodu czy pragnienia nie wystarcza, by sprostać ludzkim potrzebom. Nieustanna chęć rozwoju naszego gatunku sprawia, że konieczne jest sięganie do wiedzy matematycznej w celu lepszego poznania otaczającego nas świata. Niejednokrotnie posiadamy tylko dyskretne dane pozyskane w trakcie badań i chcąc dokonać analizy matematycznej pewnych zdarzeń czy procesów musimy stworzyć/wyprowadzić regularne funkcje interpolacyjne, które w sposób ciągły i wystarczająco dokładny opisywałyby interesujące nas zjawiska. Jak możemy się spodziewać, często jest to ciężkie do wykonania zadanie.

Funkcje interpolujące w znacznym stopniu upraszczają prowadzenie obliczeń podczas wyznaczania przybliżonych wartości funkcji, których postać analityczna jest bardzo skomplikowana, lub wyliczenie kolejnych jej wartości wymaga wykonania zawiłych obliczeń komputerowych. W tym rozdziale pracy skupimy się zatem na sposobie w jaki możemy wyznaczać tak zwane wielomiany interpolacyjne *Lagrange'a* dla funkcji jednej oraz dwóch zmiennych.

1.1 Wielomiany *Lagrange'a* dla funkcji jednej zmiennej

Jak wspomnieliśmy we wstępie, często w celu uproszczenia obliczeń skłaniamy się do wykorzystania interpolacji. Stosując ją musimy liczyć się z faktem, że pozyskane wyniki są wartościami przybliżonymi, więc z reguły będą różniły się od wyników dokładnych. Przed przejściem do dalszych rozważań należy zdefiniować pojęcie interpolacji.

Definicja 1. Interpolacja

Interpolacja jest metodą numeryczną przybliżania funkcji. Polega ona na konstruowaniu tak zwanych **funkcji interpolujących** (przybliżających) $W(x)$. Wykorzystujemy do tego znane nam wartości **funkcji interpolowanej** (przybliżanej) $f(x)$, dla wybranych argumentów należących do jej dziedziny.

Wielomian $W(x)$ tworzony jest w oparciu o dwa powiązane ze sobą zbiory liczbowe [1]:

$$X = \{x_i : i = 0, 1, \dots, n\}, F = \{f_i : i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Zbiory X i F są równoliczne. Elementy $x_i \in X$ definiują współrzędne punktów węzłowych w przestrzeni \mathbb{R}^n , natomiast elementy z F określają wartości funkcji $f(x)$ w węzłach x_i , tzn.

$$f_i = f(x_i), \quad (1.1)$$

przy czym $f_i \in \mathbb{R}$

Wyjaśnijmy również pojęcie węzła, którym przed chwilą operowaliśmy:

Definicja 2. Węzły (Punkty węzłowe)

Węzłami nazywamy punkty w przestrzeni \mathbb{R}^n , będące takimi argumentami funkcji $f(x)$, dla których jesteśmy w stanie wyznaczyć jej wartość.

W węzłach wartości funkcji interpolującej i interpolowanej są równe. Oznacza to, że:

$$W(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

Uwaga 1. W tym podrozdziale ograniczać będziemy się jedynie do funkcji jednej zmiennej niezależnej. Funkcje te badane będą na ograniczonym domkniętym przedziale $[a, b]$. W związku z tym, zbiór X zawierał będzie elementy $x_i \in \mathbb{R}$ takie, że $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Definicja zbioru F nie ulega zmianie.

Na rysunku 1.1 zobrazowaliśmy w sposób symboliczny na czym polega interpolacja, oraz czym są węzły (punkty x_i przecięcia wykresów $W(x)$ i $f(x)$, zachodzi dla nich równość (1.2)).



Rysunek 1.1: [3] Funkcja interpolacyjna $W(x)$ oraz interpolowana $f(x)$

Mając już podstawy do tego, by wiedzieć czym jest interpolacja - przejdźmy o krok dalej. Rozważmy pewien liniowo niezależny układ funkcji, zdefiniowanych na domkniętym przedziale $[a, b]$:

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x) \quad (1.3)$$

oraz zbiór szukanych współczynników

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad (1.4)$$

takich, że ich kombinacja liniowa z (1.3) będzie spełniała poniższy układ równań:

$$\alpha_0 \phi_0(x_i) + \alpha_1 \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_i) = f_i \quad (1.5)$$

gdzie $f_i \in F$ oraz $x_i \in X$.

W *interpolacji Lagrange'a* w skład (1.3) wchodzi wielomiany określone w następujący sposób:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (1.6)$$

Są one nazywane funkcjami bazowymi (wielomianami bazowymi) stopnia n . Warto zauważyć, że zachodzi następująca równość [3]:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{wp.p.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Z powyższego wynika, że tylko w jednym przypadku $l_i(x)$ będzie miała wartość różną od 0 (gdy $x = x_i$), zatem $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$. Dodatkowo zauważmy, że macierzą charakterystyczną układu (1.5) jest macierz jednostkowa. Skutkuje to tym, iż [2]

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (1.8)$$

będzie wielomianem o stopniu nie większym niż n , oraz przyjmie wartości (1.1) w punktach węzłowych. Wielomian (1.8) nazywany jest **wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a**. Z jego pomocą w dosyć przystępny sposób możemy interpolować dowolną funkcję.

Przykład 1. (Wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia $n = 2$)

Zbudujemy wielomian interpolacyjny $L_2(x)$ dla funkcji $f(x) = e^{x^2}$ rozpatrywanej na ograniczonym przedziale $[0, 1]$.

W celu wyznaczenia wielomianu Lagrange'a stopnia $n = 2$, potrzebować będziemy $n + 1$ węzłów takich, że $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$. Przyjmijmy zatem następujące ich wartości: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Korzystając bezpośrednio z równania (1.8) dostajemy:

$$L_2(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Podstawiamy kolejno wartości węzłów do równania $L_2(x)$, otrzymując wielomian interpolujący naszą funkcję $f(x) = e^{x^2}$ na $[a, b] = [0, 1]$:

$$L_2(x) = e^0 \frac{(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} + e^{(\frac{1}{4})} \frac{(x - 0)(x - 1)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} + e^1 \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})} = 2,30046x^2 - 0,58218x + 1$$

Wyprowadzona w powyższym przykładzie dla funkcji $f(x)$ i zadanych węzłów postać wielomianu $L_2(x)$ jest jednoznaczna. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. (O istnieniu i jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a)

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie, które można wyrazić wzorem (1.8). Oznacza to, że dla dowolnej funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ oraz jej wartości $f(x_i)$ w $n + 1$ zadanych węzłach x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), istnieje dokładnie jeden wielomian $L_n(x)$ interpolujący $f(x)$, dla którego prawdziwa jest zależność $L_n(x_i) = f(x_i)$.

Dowód.

Dowodzenie rozpoczniemy od wykazania faktu, że rozwiązanie w ogóle istnieje. Skonstruujemy je przy użyciu wielomianów bazowych *Lagrange’a* $l_i(x)$ z (1.6), oraz równania (1.7). Należy zauważyć, że odpowiadająca dla każdego z węzłów x_i , gdzie $(i = 0, 1, \dots, n)$ funkcja $l_i(x)$ jest wielomianem n -tego stopnia. W związku z tym [5]

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x)$$

będzie wielomianem stopnia co najwyżej n . Ponadto odwołując się do (1.7) powyższy wzór możemy przekształcić do następującej postaci:

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \delta_{ij} = f(x_j).$$

Wynika stąd bezpośrednio fakt, że $L_n(x)$ jest wielomianem interpolacyjnym *Lagrange’a*. Interpoluje on funkcję $f(x)$ przy zadanych węzłach x_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Kolejno pokażmy, że wyznaczany wielomian interpolacyjny *Lagrange’a* $L_n(x)$ jest zawsze jednoznaczny. Jeżeli zapiszemy go w postaci potęgowej (naturalnej) w bazie jednomianów $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ tzn.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i,$$

to zauważamy, że rozwiązanie naszego problemu sprowadza się do wyznaczenia $n + 1$ współczynników a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) takich, że będą one spełniały następujący układ $n + 1$ równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Niech symbolicznym zapisem powyższego układu będzie $X \cdot A = F$. Macierz X jest tak zwaną macierzą *Vandermonde’a*. Zatem wiadomo, że jej wyznacznik jest $\neq 0$, przy założeniu,

że $x_0 \neq x_1 \neq \dots \neq x_{n-1} \neq x_n$. W związku z tym układ (1.9) posiada jednoznaczne rozwiązanie, co kończy dowód. \square

Jeżeli obliczylibyśmy wartość wielomianu interpolacyjnego *Lagrange'a* $L_2(x)$ (zbudowanego w przykładzie 1) dla pewnego x należącego do dziedziny $f(x)$ i porównali ją z wartością dokładną $f(x)$ dla tego samego argumentu, to zauważylibyśmy, że wynik jest obarczony pewnym błędem. Nosi on miano *błędu interpolacji*. Dla wielomianów *Lagrange'a* definiujemy go w następujący sposób:

Definicja 3. (Błąd interpolacji wielomianu *Lagrange'a*)

Weźmy

$$M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$m_n = \sup_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)|,$$

przy czym $\omega_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$, zaś $f(x)$ to funkcja interpolowana.

Błędem interpolacji wielomianem *Lagrange'a* $L_n(x)$ (stopnia n) nazywamy wówczas takie

$$\delta_L = \frac{M_{n+1} \cdot m_n}{(n+1)!}, \quad (1.10)$$

dla którego zachodzi:

$$|L_n(x) - f(x)| \leq \delta_L, \quad x \in [a, b].$$

1.2 Wielomiany *Lagrange'a* dla funkcji dwóch zmiennych

W poprzednim podrozdziale rozważyliśmy wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* funkcji jednej zmiennej niezależnej x . W rzeczywistości z pewnością często zetkniemy się z przypadkiem, gdzie jakieś analizowane przez nas zjawisko opisywane będzie przez więcej niż jedną zmienną. W związku z tym rozpatrzmy przypadek, gdzie wartość funkcji zależna jest od dwóch zmiennych niezależnych x oraz y .

Zdefiniujemy na początku trzy pomocnicze zbiory liczbowe:

$$X = \{x_i : i = 0, 1, \dots, n\} , Y = \{y_j : j = 0, 1, \dots, m\}$$

$$F = \{f_{i,j} = f(x_i, y_j) : x_i \in X , y_j \in Y\}$$

Elementy $x_i \in X$ definiują współrzędne x -owe, zaś $y_j \in Y$ współrzędne y -owe wszystkich węzłów postaci (x_i, y_j) na badanym, ograniczonym obszarze. Zbiór F zawiera natomiast wartości funkcji $f(x, y)$ we wszystkich punktach węzłowych (x_i, y_j) . Ponadto rozpatrujemy tylko takie przypadki, że $f(x, y) \in \mathbb{R}$. Zauważmy dodatkowo, że iloczyn kartezjański zbiorów $X \times Y$ jest równoliczny ze zbiorem F . W związku z tym dla każdego węzła postaci (x_i, y_j) istnieje dokładnie jedna wartość funkcji $f_{i,j} \in F$.

W naszych rozważaniach ograniczymy się do funkcji zdefiniowanych na ograniczonym obszarze prostokątnym $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Zatem zbiór X zawierał będzie elementy $x_i \in \mathbb{R}$ takie, że $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, intuicyjnie zbiór Y elementy $y_i \in \mathbb{R}$ takie, że $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$. Definicja zbioru F nie zmienia się. Weźmy

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

taką, że możemy określić wartości $f(x_i, y_j) \in F$. Warto wspomnieć, że tak jak w przypadku wielomianu interpolacyjnego *Lagrange'a* funkcji jednej zmiennej, wartości funkcji interpolującej i interpolowanej w węzłach również muszą być sobie równe, tzn.:

$$L_{n,m}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \quad (i = 0, 1, \dots, n ; j = 0, 1, \dots, m) \quad (1.11)$$

(Przez zastosowane oznaczenie $L_{n,m}(x, y)$ będziemy rozumieli wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* funkcji dwóch zmiennych, gdzie stopień x wynosi n , zaś stopień y jest równy m .) W skład wielomianu interpolacyjnego $L_{n,m}(x, y)$ wchodziły będą dwie funkcje bazowe (lub inaczej - wielomiany bazowe), po jednej dla każdej zmiennej niezależnej.

Dla x wielomian bazowy stopnia n ma postać [8] :

$$l_i(x) = \prod_{s=0, s \neq i}^n \frac{x - x_s}{x_i - x_s} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (1.12)$$

Natomiast dla zmiennej y wielomianem bazowym stopnia m jest :

$$l_j(y) = \prod_{r=0, r \neq j}^m \frac{y - y_r}{y_j - y_r} \quad (j = 0, 1, \dots, m). \quad (1.13)$$

Powyższe funkcje bazowe (1.12) i (1.13) charakteryzują następujące własności:

$$l_i(x_s) = \delta_{is} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = s \\ 0, & \text{wp.p.} \end{cases} \quad (1.14)$$

$$l_j(y_r) = \delta_{jr} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } j = r \\ 0, & \text{wp.p.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Wzoruując się na równaniu (1.8) oraz korzystając z (1.12) i (1.13) jesteśmy w stanie wyprowadzić wzór na wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* dla funkcji dwóch zmiennych. W związku z tym, jego postać jest następująca:

$$L_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) \cdot \left(\prod_{s=0, s \neq i}^n \frac{x - x_s}{x_i - x_s} \cdot \prod_{r=0, r \neq j}^m \frac{y - y_r}{y_j - y_r} \right) \quad (1.16)$$

Z faktu, że pewna znana nam funkcja $f(x, y)$ zostaje przez nas interpolowana przy użyciu innej funkcji, wynika to, że niemal zawsze wartości $f(x_i, y_j)$ i $L_{n,m}(x_i, y_j)$ będą w pewnym stopniu od siebie odbiegać (pomijając punkty węzłowe dla których zachodzi (1.11)). Różnica w tychże wartościach ma miejsce, gdyż jest to spowodowane wystąpieniem błędu interpolacji. Maksymalną wielkość takiego błędu możemy określić z góry - sposób jego wyznaczania precyzuje definicja poniżej.

Definicja 4. (Błąd interpolacji wielomianem *Lagrange'a* dla funkcji dwóch zmiennych)

Niech dane będą następujące równości [9]:

$$M = \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ y \in [c,d]}} \left| \frac{\partial^{n+m+2} f(x, y)}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \right|$$

$$m_1 = \sup_{x \in [a, b]} |\omega_n(x)|$$

$$m_2 = \sup_{y \in [c, d]} |\omega_m(y)|$$

Przy czym $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ oraz $\omega_m(y) = \prod_{j=0}^m (y - y_j)$, natomiast $f(x, y)$ to funkcja interpolowana. Błędem interpolacji wielomianem *Lagrange'a* $L_{n,m}(x, y)$ nazywamy takie

$$\delta_{L_{i,j}} = \frac{M \cdot m_1 \cdot m_2}{(n+1)! \cdot (m+1)!}, \quad (1.17)$$

dla którego prawdziwa jest następująca nierówność:

$$|L_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leq \delta_{L_{i,j}} \quad x \in [a, b], \quad y \in [c, d] \quad (1.18)$$

W celu prezentacji metody budowania wielomianu interpolacyjnego *Lagrange'a* dla funkcji dwóch zmiennych rozwiążmy pewien przykład, który przybliży nam to zagadnienie.

Przykład 2. (Wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego *Lagrange'a* $L_{1,2}(x, y)$)

Stworzymy wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* $L_{1,2}(x, y)$ dla funkcji $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ rozważanej na domkniętym obszarze prostokątnym postaci $\Omega = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$.

Chcąc wyznaczyć $L_{1,2}(x, y)$ niezbędne jest określenie $n+1 = 1+1 = 2$ wartości $x \in \Omega$ oraz $m+1 = 2+1 = 3$ wartości $y \in \Omega$. Ważne jest, by krańcowe x i y zawierały brzegi obszaru Ω . Zatem niech:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = 1.$$

Kolejno korzystając bezpośrednio z (1.16) dostajemy:

$$\begin{aligned} L_{1,2}(x, y) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 f(x_i, y_j) \cdot \left(\prod_{s=0, s \neq i}^1 \frac{x - x_s}{x_i - x_s} \cdot \prod_{r=0, r \neq j}^2 \frac{y - y_r}{y_j - y_r} \right) = \\ &= f(x_0, y_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} \cdot \frac{y - y_2}{y_0 - y_2} \right) + f(x_0, y_1) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \right) + \\ &+ f(x_0, y_2) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y - y_0}{y_2 - y_0} \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right) + f(x_1, y_0) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} \cdot \frac{y - y_2}{y_0 - y_2} \right) + \\ &+ f(x_1, y_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \right) + f(x_1, y_2) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y - y_0}{y_2 - y_0} \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right) \end{aligned}$$

$$f(x_1, y_1) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \cdot \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \right) + f(x_1, y_2) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{y-y_0}{y_2-y_0} \cdot \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \right)$$

Wstawiając do powyższego $L_{1,2}(x, y)$, określone na początku wartości x i y otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L_{1,2}(x, y) &= \cos(0^2 + 0^2) \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}} \cdot \frac{y-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}} \cdot \frac{y-1}{0-1} \right) + \cos(0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2) \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}} \cdot \frac{y-0}{\frac{1}{2}-0} \cdot \frac{y-1}{\frac{1}{2}-1} \right) + \\ &\quad \cos(0^2 + 1^2) \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}} \cdot \frac{y-0}{1-0} \cdot \frac{y-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \right) + \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2\right) \left(\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} \cdot \frac{y-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}} \cdot \frac{y-1}{0-1} \right) + \\ &\quad \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \left(\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} \cdot \frac{y-0}{\frac{1}{2}-0} \cdot \frac{y-1}{\frac{1}{2}-1} \right) + \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right) \left(\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} \cdot \frac{y-0}{1-0} \cdot \frac{y-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \right) = \dots \\ &= 1 - 0,0621752x + 0,335347y - 0,0941494xy - 0,795045y^2 - 0,29363xy^2 \end{aligned}$$

Jak widać na powyższym przykładzie - wszystkie obliczenia niezbędne do otrzymania ostatecznej formy wielomianu interpolacyjnego *Lagrange'a* dla funkcji dwóch zmiennych są niezwykle pracochłonne. Sprawdźmy jeszcze jak bardzo wartości $L_{1,2}(x, y)$ odbiegają od wartości dokładnych $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ w $z_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ oraz $z_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Więc:

- w punkcie z_0 :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) &= \cos\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 0,951567948 \\ L_{1,2}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) &= 1 - 0,0621752\left(\frac{1}{4}\right) + 0,335347\left(\frac{1}{2}\right) - 0,0941494\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\quad - 0,795045\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0,29363\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,9232479 \end{aligned}$$

- w punkcie z_1 :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) &= \cos\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 0,849607562 \\ L_{1,2}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) &= 1 - 0,0621752\left(\frac{1}{3}\right) + 0,335347\left(\frac{2}{3}\right) - 0,0941494\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \\ &\quad - 0,795045\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 0,29363\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0,785063437 \end{aligned}$$

Na podstawie zaprezentowanych rachunków można zauważyć, że nasze wyniki w pewnym, niezbyt znaczącym stopniu różnią się od siebie. Poprzez zwiększenie liczby węzłów, możliwe jest zmniejszenie błędu interpolacji jakim zostały one obarczone. Jednakże należy pamiętać, że każdy dodatkowy podział obszaru Ω znacząco wydłużyłoby obliczenia, dlatego też nasze rachunki zawężiliśmy tylko do sześciu punktów węzłowych.

2. Kwadratury Newtona-Cotesa dla całki pojedynczej

Niech $f(x)$ będzie funkcją zdefiniowaną na przedziale $[a, b]$ o wartościach rzeczywistych tzn. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozważmy pewną całkę [4]

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (2.1)$$

Funkcję podcałkową zawsze możemy zastąpić inną funkcją taką, że w miarę możliwości poniższe przybliżenie będzie prawdziwe:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b g(x) dx \quad (2.2)$$

W praktyce często spotkać możemy się z przypadkiem takim, że do wyznaczenia przybliżonych wartości $I(f)$ stosowane są wzory nazywane kwadraturami. Owe kwadratury opierają się na wartościach $f(x)$ w punktach węzłowych i mogą niezbyt dokładnie przybliżać wynik tzn:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) = S(f), \quad x_i \in [a, b], \quad (2.3)$$

przy czym współczynniki a_i są niezależne od $f(x)$ (nazywamy je współczynnikami wagowymi kwadratury i określają one wielkość udziału $f(x_i)$ w wartości całej sumy $S(f)$), zaś x_i nosi miano węzłów kwadratury.

Naszym celem jest jednak to, by jak najbardziej zminimalizować błąd pojawiający się podczas przybliżania wartości $I(f)$. W związku z tym możemy zastosować zabieg zastąpienia funkcji $f(x)$ w całce $I(f)$ wielomianem interpolującym ją. W tym celu wykorzystamy wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* (1.8). Po podstawieniu go do (2.3) otrzymamy [4][7]

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) = S(f), \quad (2.4)$$

gdzie

$$a_i = \int_a^b l_i(x), \quad (2.5)$$

natomiast

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2.6)$$

W związku z powyższym, całkę (2.1) możemy wyrazić w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \quad (2.7)$$

Jeżeli w (2.7) rozpatrzmy tylko węzły takie, że $x_0 = a$, $x_n = b$, a każdy węzeł pośredni leżący pomiędzy x_0 a x_n jest postaci $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, to kwadraturę taką nazwiemy kwadraturą **Newtona-Cotesa** [2]. Skupimy się na rozważeniu trzech różnych przypadków, dla których kolejne węzły są równo odległe - będą to: *wzór trapezów*, *wzór Simpsona* oraz dodatkowo *wzór prostokątów*.

2.1 Wzór trapezów

Do wyznaczenia wzoru trapezów będziemy wykorzystywać wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* rzędu $n = 1$ ($L_1(x)$) utworzony dla węzłów a i b . Zastosujemy w (2.6) następujące podstawienie: $x = a + hs$. Wartości a, h są pewnymi stałymi [7], natomiast s jest zmienną niezależną.

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{a + hs - (a + jh)}{(a + ih) - (a + jh)} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{s - j}{i - j}$$

Otrzymujemy zatem:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{s - j}{i - j} = \psi_i(s) \quad (2.8)$$

$\psi_i(s)$ to nasza nowa funkcja zmiennej s .

Całkę z równania (2.5) obliczymy metodą całkowania przez podstawienie. Skorzystamy z przedstawionego przed chwilą podstawienia $x = a + hs$ oraz równania (2.8)

$$a_i = \int_a^b l_i(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a + hs \\ dx = hds \\ b = a + hs \Rightarrow \frac{b-a}{h} = s \Rightarrow s = n \\ a = a + hs \Rightarrow 0 = hs \Rightarrow s = 0 \end{array} \right\} = h \int_0^n \psi_i(s) ds \quad (2.9)$$

Chcemy wyliczyć teraz wartości współczynników kwadratury a_0 i a_1 . Pamiętamy o tym, że do obliczeń wykorzystujemy postać wielomianu *Lagrange'a* rzędu $n = 1$, zatem będziemy całkowali [7] w granicach $[0, n] = [0, 1]$

$$\mathbf{a}_0 = h \int_0^1 \psi_0(s) ds = h \int_0^1 \frac{s-1}{0-1} ds = \int_0^1 (1-s) ds = h \left[s - \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \frac{h}{2}$$

$$\mathbf{a}_1 = h \int_0^1 \psi_1(s) ds = h \int_0^1 \frac{s-0}{1-0} ds = \int_0^1 (s) ds = h \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \frac{h}{2}$$

Po wstawieniu wyliczonych współczynników do (2.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=0}^1 a_i f(x_i) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) = \\ &= \frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wzór ten nazywamy **wzorem trapezów**. Zauważmy, że suma współczynników a_0, a_1 jest równa $h \cdot n$. W późniejszych podrozdziałach również zetkniemy się z taką prawidłowością rozpatrując wyższy rząd wielomianów *Lagrange'a* dla $n > 1$.

Podczas wyznaczania (2.10) przyjęliśmy, że przedział całkowania nie został podzielony, a jedynymi węzłami były jego początek i koniec. W rzeczywistości rozpatrujemy przypadki z wielokrotnym podziałem przedziału. Jeżeli przedział całkowania $[a, b]$ podzielimy na ≥ 2 równe części takie, że $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, to otrzymamy *uogólniony (złożony) wzór trapezów*:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \\ &\approx \left(\frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \dots + \frac{h}{2} (f(x_{n-1}) + f(x_n)) \right) = \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \end{aligned} \quad (2.11)$$

W wyprowadzonym wzorze trapezów (2.11) (mówiąc wzór trapezów będziemy mieli na myśli jego postać złożoną) przybliżamy wartość całki sumując pola trapezów o ustalonej wysokości h (odległość pomiędzy kolejnymi węzłami) i podstawach o długości $f(x_i)$ i $f(x_{i+1})$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$. Rysunek 2.1 z pewnością pomoże nam lepiej zrozumieć to zagadnienie.



Rysunek 2.1: Graficzne przedstawienie idei zastosowania wzoru trapezów do całkowania

Przejdźmy do praktycznego zastosowania (2.11) w celu pokazania jego przydatności. Obliczenia dla zadanej funkcji przeprowadzimy ręcznie - przy relatywnie małej liczbie podziału przedziałów, oraz wykorzystując procedurę stworzoną w języku *Maple* dla dużo większej liczby podziałów.

Przykład 3. (Wyznaczanie przybliżonej wartości całki przy wykorzystaniu wzoru trapezów)
Wyznamy przybliżoną wartość całki $\int_0^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx$ przyjmując, że przedział całkowania dzielimy na $n=6$ równych części (7 węzłów).

Do rozwiązania zadania skorzystamy z ogólnego wzoru trapezów. Wyznamy wartości węzłów oraz odległość $h = \frac{b-a}{n}$ pomiędzy kolejnymi węzłami:

$$h = \frac{\frac{3}{2}-0}{6} = \frac{1}{4}, x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{2}{4}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1, x_5 = \frac{5}{4}, x_6 = \frac{6}{4}.$$

Wyliczone wartości wstawiamy do (2.11):

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)) = \\ &= \frac{1}{8} (e^0 + 2e^{(\frac{1}{4})^2} + 2e^{(\frac{2}{4})^2} + 2e^{(\frac{3}{4})^2} + 2e^1 + 2e^{(\frac{5}{4})^2} + e^{(\frac{6}{4})^2}) \approx \\ &\frac{1}{8} (1 + 2 \cdot 1,06449 + 2 \cdot 1,28402 + 2 \cdot 1,75505 + 2 \cdot 2,71828 + 2 \cdot 4,77073 + 9,48773) \approx 4,20911 \end{aligned}$$

Wartość dokładna wynosi w zaokrągleniu 4,06311405862. Jak widać różnica w wyniku jest dosyć znacząca przy ustalonych wartościach węzłów, ponieważ otrzymany przez nas wynik to 4,20911.

Z reguły im więcej podziałów przedziału wykonamy, tym dokładniejsze powinniśmy otrzymamy przybliżenie. Można wnioskować w ten sposób również poddając się na analizie wzoru na błąd metody trapezów (im większy n tym mniejsza wartość δ_T):

Definicja 5. (Błąd przybliżenia wzorem trapezów)

Przyjmijmy, że BBT_n oznacza błąd bezwzględny przybliżenia (różnica pomiędzy wartością dokładną i przybliżoną całki). Ponadto niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy C^2 na $[a, b]$, oraz n wyznacza ilość podziałów tego przedziału, wtedy spełniona jest następująca nierówność [6]

$$|BBT_n| \leq \delta_T \quad (2.12)$$

Symbol δ_T oznacza błąd metody trapezów i wyraża go następujący wzór:

$$\delta_T = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2, \quad (2.13)$$

gdzie

$$M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)| \quad (2.14)$$

Sprawdzimy jednak słuszność naszego twierdzenia wykorzystując do tego stworzoną na nasze potrzeby procedurę w języku Maple. Posłuży nam ona do zautomatyzowania procesu obliczania przybliżonych wartości całek oznaczonych metodą trapezów:

Procedura 1. (Wyznaczanie przybliżonych wartości całek pojedynczych metodą trapezów)

```
> trapez:=proc(a,b,n)
local h,j,i,x,y,t,tp;
if (((ceil(n)>n) or (floor(n)<n)) or n<=0)
then ERROR('Ostatni parametr musi być liczba naturalna')else
h:=(b-a)/n;
for j from 0 to n do x:= j -> a+j*h od;
for j from 0 to n do y:= j -> f(x(j)) od;
t:= h/2 * sum(y(i)+y(i+1), i=0..n-1);
tp:=evalf(t,12);
fi;
end;
```

Przed przejściem do prezentacji wyników jakie zwróci powyższa procedura, należy wyjaśnić nieco jej zasadę działania i znaczenie parametrów.

Pierwsza linia jest deklaracją procedury *trapez* z następującymi parametrami wejściowymi:

a, b - są odpowiednio dolnym i górnym krańcem przedziału całkowania

n - określa liczbę podprzedziałów na które podzielony zostanie nasz przedział $[a, b]$

Kolejno deklarujemy zmienne pomocnicze z których korzysta procedura (nie pobierane od użytkownika). Jeżeli ostatni parametr $n \in \mathbb{N}$ to zwracany jest stosowny komunikat i procedura kończy swoje działanie, w p.p. wykonuje się główny algorytm tzn. obliczamy wartość kroku h , czyli odległość pomiędzy dwoma kolejnymi węzłami. Następnie wyznaczamy wszystkie węzły x_i na danym przedziale oraz wyliczamy wartości (deklarowanej przed wywołaniem procedury) funkcji f w tychże węzłach. Przedostatni krok polega na zsumowaniu wyliczonych przed chwilą wartości w sposób zgodny ze wzorem (2.11). Algorytm kończymy poprzez przekształcenie sumy do "przyjaznej" postaci i prezentację wyniku w formacie 12 znakowym.

Poniższa tabela prezentuje wyniki procedury 1 (ozn. W_{trapez}) dla coraz to większej liczby podprzedziałów (ozn. n). Uwzględniono w niej również wartości błędów wzoru trapezów (ozn. δ_T) wyliczone zgodnie ze wzorem (2.13) oraz moduł różnicy pomiędzy wartością dokładną całki a otrzymaną w ramach testów procedury (ozn. $|BBT_n|$, zgodnie z (2.12)). Do kalkulacji wykorzystamy funkcję z przykładu 3 oraz podaną w rozwiązaniu informację na temat przybliżonej do 11 miejsc po przecinku wartości dokładnej całki $\int_0^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx \approx 4,06311405862$.

n	W_{trapez}	BBT_n	δ_T
6	4,20911436529	0,146000306	0,815352298
30	4,06904019209	0,005926133	0,032614091
100	4,06364771371	0,000533655	0,002935268
200	4,06324747807	0,000133419	0,000733817
400	4,06314741384	0,000033355	0,000183454
800	4,06312239755	0,000008339	0,000045863
2000	4,06311539304	0,000001334	0,000007338
5000	4,06311427243	0,000000213	0,000001174
7310	4,06311415812	0,000000099	0,000000549
10000	4,06311411177	0,000000053	0,000000293
30000	4,06311406426	0,000000005	0,000000032
50000	4,06311406037	0,000000002	0,000000011
70000	4,06311406006	0,000000001	0,000000005

Tablica 2.1: Wyniki pomiaru dokładności przybliżania wartości całki wzorem trapezów

Na podstawie powyższych pomiarów możemy uznać iż nasze przewidywania odnośnie tego, że w miarę wzrostu wartości n wynik będzie coraz dokładniejszy okazują się być trafne. Procedura generuje prawidłowe wyniki, co można potwierdzić tym, że dla $n = 6$ wartość obliczona "ręcznie" jest taka sama jak otrzymana w trakcie badań. Zauważmy, że już przy $n \geq 100$ wynik zaczyna być dosyć mocno zbliżony do dokładnego - różnice pojawiają się dopiero na 4 miejscu po przecinku. Uwagę należy skupić również na wartościach $|\text{BBT}_n|$ i δ_T z tablicy 2.1. Po ich dokładnej analizie jesteśmy w stanie zauważyć, że $|\text{BBT}_n|$ jest zawsze większe od δ_T . Nie ma znaczenia to, jaki n przyjęliśmy. Nie jest to jednak przypadkowa zależność. Fakt ten w pełni wyjaśnia nam definicja 2.13. Wartość δ_T została wyznaczona przy wykorzystaniu następującego skryptu:

Procedura 2. (Wyznaczanie błędu przybliżenia dla metody trapezów)

```
> trapezBlad:= proc (a, b, n)
local d2ff, simd2ff, M2, deltaT;
if (((ceil(n)>n) or (floor(n)<n)) or n<=0)
then ERROR('Ostatni parametr musi byc liczba naturalna')
else
d2ff:= diff(diff(f(x), x), x);
simd2ff:= simplify(d2ff);
M2:= (Optimization[Maximize])(abs(simd2ff), x = a .. b);
deltaT:= evalf(1/12*M2[1]*(b-a)^3/n^2)
fi;
end;
```

Procedura ta opiera się na wzorach (2.13) oraz (2.14). Wynikiem jej działania jest wartość błędu δ_T dla całki z f (funkcja musi zostać zdefiniowana przed wywołaniem *trapezBlad*) liczonej w granicach $[a, b]$, i dokonanych n podziałów tego przedziału. Parametry wejściowe są definiowane tak samo jak dla procedury 1. Dokładny opis algorytmu dla tego przypadku zostaje pominięty.

Często przeprowadzając obliczenia naukowe musimy zadbać o to, by wynik jaki otrzymamy był jak najdokładniejszy i obciążony co najwyżej pewnym błędem, nie większym

niż dopuszczalny. Również wykorzystując wzór trapezów do całkowania numerycznego, możemy kontrolować wielkość błędu, jaki pojawia się podczas przybliżania wyniku. Sposobem na to jest odpowiedni dobór liczby podziałów przedziału całkowania. Poniższa procedura wskazuje nam, ile co najmniej owych podziałów powinniśmy dokonać, by wielkość błędu nie przekraczała zdefiniowanej przez nas wartości.

Procedura 3. (Wyznaczanie najmniejszej liczby n podziałów przedziału całkowania tak, by wynik był obciążony błędem nie większym niż zadany)

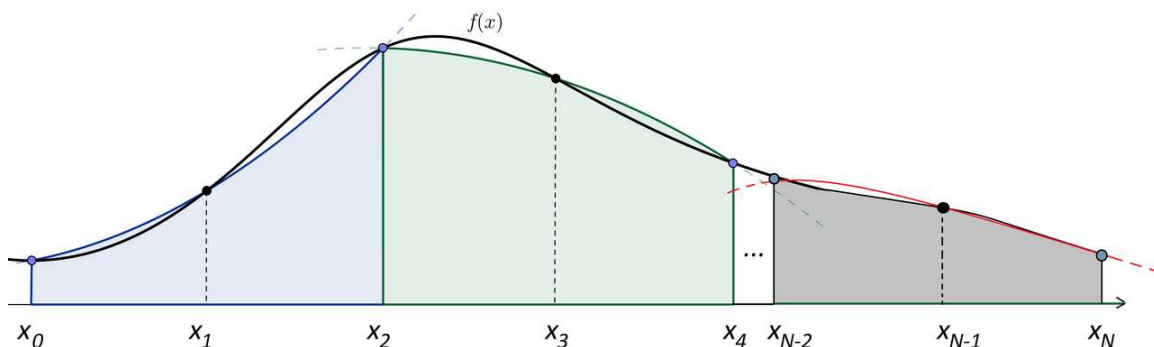
```
> trapeznMin:= proc (a, b, blad)
local d2ff, simd2ff, M2, nMin, p;
d2ff:= diff(diff(f(x), x), x);
simd2ff:= simplify(d2ff);
M2:= (Optimization[Maximize])(abs(simd2ff), x = a .. b);
p:= solve*({1/12*(b-a)^3*M2[1]/n^2 < blad, 0 < n}, {n});
nMin := p[1]
end;
```

Powyższa procedura również korzysta ze wzorów (2.13) i (2.14). Jej parametry wejściowe a i b są tak jak poprzednio granicami całkowania pewnej funkcji f , natomiast $blad$ określa jaki błąd przybliżenia jest przez nas maksymalnie akceptowalny. Kod znajdujący się wewnątrz procedury kolejno oblicza $f''(x)$ i upraszcza postać wyliczonej pochodnej. Następnie szukana jest wartość $M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$. Najważniejszym elementem składowym *trapeznMin* jest jednak wyliczanie wartości dla zmiennej p . By ją wyznaczyć rozwiązujemy nierówność $\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2 < blad$ ze względu na n . Zakładamy, że interesują nas tylko $n > 0$ (n jest liczbą podziałów i musi być wartością całkowitą dodatnią). Ostatnia linia odpowiada za prezentację obliczonej wartości n . Wynik pojawia się w postaci $N > z$, gdzie z jest liczbą całkowitą - zatem jako wynik traktować będziemy najmniejszą liczbę naturalną większą od z .

2.2 Wzór Simpsona

Często wykorzystywaną przy całkowaniu numerycznym metodą jest *metoda Simpsona*. Zamiennie nazywana jest również *metodą parabol*. Jej nazwa wywodzi się od tego, że funkcję podcałkową przybliżamy na każdym z podprzedziałów utworzonych przez **3** węzły za pomocą paraboli. W związku z tym, że każde 3 kolejne węzły tworzą **2** podprzedziały wnioskujemy, że całkowita liczba podprzedziałów przedziału całkowania jest postaci $N = 2m$ dla $m \in \mathbb{N}$ (we wzorze trapezów nie było wymagane, by liczba podprzedziałów była parzysta).

Przybliżonym wynikiem całki obliczanej metodą *Simpsona* jest suma pól tzw. trapezów "parabolicznych" (jedno z ramion trapezu jest parabola). Każdy z nich jest ograniczany przez węzły x_{2i} i x_{2i+2} ($i = 0, 1, \dots, m-1$) na osi OX , natomiast na osi OY ogranicza je prosta $y = 0$ oraz parabola przechodząca przez x_{2i} , x_{2i+1} , x_{2i+2} ($i = 0, 1, \dots, m-1$). Należy zauważyć, że istnieje dokładnie jedna parabola zawierająca zadane trzy węzły, więc jej równanie zawsze będzie wyznaczone w sposób jednoznaczny. Metoda całkowania przy wykorzystaniu wzoru *Simpsona* została przedstawiona na rysunku 2.2.



Rysunek 2.2: Graficzne przedstawienie idei zastosowania wzoru parabol do całkowania

Rozpatrzmy początkowo szczególny przypadek, w którym przedział całkowania zostanie podzielony na dokładnie 2 podprzedziały, wydzielone przez 3 równo odległe węzły $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$, dla których zachodzi $\frac{x_0 + x_2}{2} = x_1$. W celu wyprowadzenia wzoru *Simpsona* wykorzystamy wielomian interpolacyjny *Lagrange'a* $L_2(x)$ (wielomian rzędu $n = 2$) zbudowany zgodnie z (1.8) dla węzłów $a = x_0, x_1, x_2 = b$. By stworzyć $L_2(x)$, który nas

interesuje, potrzebna nam jest wiedza na temat tego, jak wyglądają współczynniki a_0, a_1, a_2 . Ich wartość wyliczymy wykorzystując wzory (2.8) oraz (2.9). Wynika z nich, że każdy ze współczynników a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) jest postaci:

$$a_i = h \int_0^n \psi_i(s) ds = h \int_0^n \left(\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{s-j}{i-j} \right) ds. \quad (2.15)$$

W tym przypadku za n przyjmujemy rząd wielomianu interpolacyjnego $L_2(x)$, zatem całkowanie odbędzie się w granicach $[0, n] = [0, 2]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= h \int_0^2 \psi_0(s) ds = h \int_0^2 \left(\prod_{j=0, j \neq 0}^2 \frac{s-j}{0-j} \right) ds = h \int_0^2 \left(\frac{(s-1)}{(0-1)} \cdot \frac{(s-2)}{(0-2)} \right) ds = h \int_0^2 \frac{(s^2 - 2s - s + 2)}{2} ds = \\ &= \frac{h}{2} \int_0^2 (s^2 - 3s + 2) ds = \frac{h}{2} \left[\frac{s^3}{3} - \frac{3s^2}{2} + 2s \right]_0^2 = \frac{h}{2} \left(\left[\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right] - 0 \right) = \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= h \int_0^2 \psi_1(s) ds = h \int_0^2 \left(\prod_{j=0, j \neq 1}^2 \frac{s-j}{1-j} \right) ds = h \int_0^2 \left(\frac{(s-0)}{(1-0)} \cdot \frac{(s-2)}{(1-2)} \right) ds = h \int_0^2 \frac{(s^2 - 2s)}{-1} ds = \\ &= h \int_0^2 (2s - s^2) ds = h \left[2\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right]_0^2 = h \left(\left[4 - \frac{8}{3} \right] - 0 \right) = h \cdot \frac{4}{3} = \frac{\mathbf{4h}}{\mathbf{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= h \int_0^2 \psi_2(s) ds = h \int_0^2 \left(\prod_{j=0, j \neq 2}^2 \frac{s-j}{2-j} \right) ds = h \int_0^2 \left(\frac{(s-0)}{(2-0)} \cdot \frac{(s-1)}{(2-1)} \right) ds = h \int_0^2 \frac{s(s-1)}{2} ds = \\ &= \frac{h}{2} \int_0^2 (s^2 - s) ds = \frac{h}{2} \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} \right]_0^2 = \frac{h}{2} \left(\left[\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right] - 0 \right) = \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{3}} \end{aligned}$$

Podstawiając obliczone powyżej wartości a_0, a_1, a_2 do (2.3) otrzymujemy szukany przez nas **wzór Simpsona**:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=0}^2 a_i f(x_i) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) = \\ &= \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{h}{3} f(x_2) = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zauważmy, że dla tego przypadku zachodzi również prawidłowość związana z wartością sumy współczynników, adekwatna do tej ze wzoru trapezów: $a_0 + a_1 + a_2 = \frac{h}{2} + \frac{4h}{3} + \frac{h}{3} = n \cdot h = 2 \cdot h$. Możemy zatem wnioskować, że powyższe obliczenia zostały przeprowadzone prawidłowo.

Równanie (2.16) opisuje przypadek, w którym całka $\int_a^b f(x)dx$ jest przybliżana polem znajdującym się tylko pod jedną parabolą na przedziale $[a, b]$ (podzielono go na dwa równe podprzedziały $[a = x_0, x_1]$ i $[x_1, x_2 = b]$). Wykres omawianej paraboli przechodzi przez punkty $(a = x_0, f(x_0))$, $(\frac{b+a}{2} = x_1, f(x_1))$, $(b = x_2, f(x_2))$.

Dla przypadku ogólnego, w którym przedział całkowania $[a, b]$ zostanie podzielony na $N = 2m$ ($m = 1, 2, \dots$) podprzedziałów równej długości $h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2m}$, przy czym każdy węzeł jest postaci $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N = 2m$), wzór (2.16) przyjmuje następującą formę:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \\ &\approx \left(\frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \frac{h}{3} (f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})) \right) = \\ &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2m-1}))) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2m-2})) + f(x_{2m})) = \\ &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Równanie (2.17) nosi miano *uogólnionego wzoru Simpsona* (mówiąc wzór *Simpsona* będziemy mieli na myśli tę postać uogólnioną). Nie trudno się domyśleć, że w związku z tym, iż wzór ten jedynie przybliży dokładną wartość całki, to wiąże się z tym fakt obciążenia wyniku pewnym błędem. Oszacowanie owego błędu przybliżenia wzorem *Simpsona* wyjaśnia poniższa definicja:

Definicja 6. (Błąd przybliżenia wzorem *Simpsona*)

Przyjmijmy, że BBS_N oznacza błąd bezwzględny przybliżenia (tzn. różnica pomiędzy wartością dokładną i przybliżoną całki). Ponadto niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie klasy C^4 na $[a, b]$, oraz $N = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) wyznacza ilość podziałów przedziału $[a, b]$, wtedy spełniona jest następująca nierówność [6]:

$$|BBS_N| \leq \delta_S \quad (2.18)$$

Przez δ_S rozumiemy błąd metody *Simpsona*, który jest opisany następującym wzorem:

$$\delta_S = \frac{(b-a)^5}{180 \cdot N^4} \cdot M_4 \stackrel{N=2m}{=} \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot M_4, \quad (2.19)$$

przy czym

$$M_4 = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (2.20)$$

Zbadajmy dokładność, z jaką wzór (2.17) przybliża wartości całek oznaczonych. W tym celu przedstawmy kompletne wyliczenia dla przypadku, gdzie liczba podziałów przedziału całkowania będzie względnie mała, natomiast sama całka określona tak jak w przykładzie 3.

Przykład 4. (Wyznaczanie przybliżonej wartości całki metodą *Simpsona*)

Obliczmy przybliżoną wartość całki $\int_0^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx$ dzieląc przedział całkowania na $N = 2m = 6$ podprzedziałów równej długości (7 węzłów).

Do wykonania rachunków niezbędna jest nam długość podprzedziału $h = \frac{b-a}{N}$ ($[a, b] = [0, \frac{3}{2}]$) oraz wartości węzłów $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, 6$).

Zatem: $h = \frac{\frac{3}{2}-0}{6} = \frac{1}{4}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$, $x_5 = \frac{5}{4}$, $x_6 = \frac{6}{4}$.

Kolejno wstawiamy powyższe dane do (2.17):

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx &= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) = \\ &= \frac{1}{12} ((f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + (f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6))) = \\ &= \frac{1}{12} \left((e^{0^2} + 4e^{(\frac{1}{4})^2} + e^{(\frac{2}{4})^2}) + (e^{(\frac{2}{4})^2} + 4e^{(\frac{3}{4})^2} + e^{1^2}) + (e^{1^2} + 4e^{(\frac{5}{4})^2} + e^{(\frac{6}{4})^2}) \right) = \\ &= \frac{1}{12} \left(e^0 + 4 \left(e^{(\frac{1}{16})} + e^{(\frac{9}{16})} + e^{(\frac{25}{16})} \right) + 2 \left(e^{(\frac{4}{16})} + e \right) + e^{(\frac{36}{16})} \right) = \\ &= \frac{1}{12} (1 + 4(1,06449 + 1,75505 + 4,77073) + 2(1,28402 + 2,71828) + 9,48773) = 4,071123 \end{aligned}$$

Wynik, który otrzymaliśmy w przeprowadzonych obliczeniach jest bardzo zbliżony do wartości dokładnej $\int_0^{\frac{3}{2}} e^{x^2} dx = 4,06311405862\dots$. Chcemy jednak sprawdzić, przy jak dużej liczbie podziałów przedziału całkowania przybliżenie zacznie się stabilizować tak, byśmy mogli uznać je za wystarczająco rzetelne (przyjmijmy, że błąd bezwzględny przybliżenia ma być nie większy niż 0,0000001). Podobnie jak dla wzoru trapezów, wykorzystajmy stworzone na nasze potrzeby procedury automatyzujące przeprowadzanie obliczeń.

Procedura 4. (Wznaczenie przybliżonych wartości całek pojedynczych metodą *Simpsona*)

```
>simpson :=proc(a,b,N)
local h,i,j,m,x,y,s,sp;
if (((ceil(N)>N) or (floor(N)<N)) or (mod(N,2)=1 and N>0) or N<=0)
then ERROR('Ostatni parametr musi być liczba naturalna postaci \2m')
else
m:=N/2;
h:=(b-a)/(2*m);
for j from 0 to 2*m do x:= j -> a+j*h od;
for j from 0 to 2*m do y:= j -> f(x(j)) od;
s:= h/3 * sum(y(2*i)+4*y(2*i+1)+y(2*i+2), i=0..m-1);
sp:=evalf(s,12);
fi;
end;
```

Powyższy skrypt tworzy procedurę w języku *Maple*, realizującą algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki pojedynczej metodą *Simpsona*. Jej parametrami wejściowymi są:

a - wartość dolnej granicy całkowania

b - wartość górnej granicy całkowania

N - opisuje ilość podziałów przedziału całkowania funkcji $f(x)$ (konieczne jest zdefiniowanie $f(x)$ przed wywołaniem każdej prezentowanej w tym podrozdziale procedury). Wartość parametru N musi być liczbą naturalną i podzielną przez 2, gdyż zastosowanie metody parabol wymaga co najmniej 2 podprzedziałów wydzielonych przez 3 równo odległe węzły.

Kod znajdujący się po nagłówku procedury to definicja zmiennych lokalnych, wykorzystywanych wewnątrz owej procedury. Kolejno sprawdzana jest poprawność wprowadzonego parametru N . Jeżeli N posiada niezerową część dziesiętną, bądź jest liczbą naturalną nieparzystą lub całkowitą ≤ 0 wtedy algorytm kończy swoje działanie zwracając błąd o treści 'Ostatni parametr musi być liczba naturalna postaci $2m$ '. W przeciwnym wypadku następuje przejście do głównego algorytmu, który rozpoczyna się od obliczenia ilości par podprzedziałów oraz odległości h pomiędzy kolejnymi punktami węzłowymi. Następnie wyznaczane są wszystkie węzły x_i na danym przedziale $[a, b]$ oraz obliczane wartości funkcji $f(x)$ w tych węzłach.

Przedostatni krok polega na zsumowaniu wyliczonych przed chwilą wartości $f(x_i)$ w sposób zgodny ze wzorem (2.17). Ostatecznie procedura upraszcza postać sumy i zwraca ją w formie 12 znakowego wyniku (nie wliczając w to przecinka).

Zanim zaprezentujemy wyniki zwracane przez procedurę 4, to zechcemy pochylić się jeszcze przez moment nad kodem dodatkowej procedury umożliwiającej oszacowanie błędu δ_S z równania (2.19). Informacja na temat jego wielkości będzie nam pomocna podczas kontroli, czy obliczenia są przeprowadzane poprawnie, tzn. musi zachodzić $|BBS_N| \leq \delta_S$ (2.18) dla coraz to większych ilości podziałów przedziału całkowania.

Procedura 5. (Wyznaczanie błędu przybliżenia dla metody *Simpsona*)

```
> simpsonBlad:= proc(a, b, N)
local d4ff, simd4ff, M4, deltaS;
if (((ceil(N)>N) or (floor(N)<N)) or (mod(N,2)=1 and N>0) or N<=0)
then ERROR('Ostatni parametr musi byc liczba naturalna postaci \2m')
else
d4ff:= diff(diff(diff(diff(f(x),x),x),x),x);
simd4ff:= simplify(d4ff);
M4:= (Optimization[Maximize])(abs(simd4ff), x = a .. b);
deltaS:= evalf(1/180*M4[1]*(b-a)^5/N^4);
fi;
end;
```

Powyższa procedura ma za zadanie wyznaczyć wartość δ_S , tak by prawdziwe było oszacowanie (2.18). Parametry a , b i N definiowane są w sposób identyczny, jak w procedurze 4. Aby wykonał się algorytm główny (znajdujący się wewnątrz procedury w bloku *else*), ponownie musi zostać spełniony warunek mówiący o tym, że N jest liczą naturalną i parzystą. Jeżeli taka prawidłowość zachodzi, to obliczamy wartość $f^{(4)}(x)$ oraz upraszczamy jej postać. Zgodnie z (2.20) wyliczamy maksimum $f^{(4)}(x)$ na przedziale $[a, b]$ (jest to najbardziej znaczący krok) i podstawiamy wszystkie znane już nam argumenty do (2.19). W ten sposób dochodzimy do pożądanej przez nas formy δ_S .

Posiadając już odpowiednie narzędzia (procedura 4 i 5) oraz wiedzę z zakresu metodyki ich działania, wykonajmy pomiary, które zobrazują nam w sposób praktyczny dokładność metody *Simpsona*. Niech N stanowi liczbę podziałów przedziały całkowania, W_{simpson} opisuje wartości zwracane przez procedurę 4. Ponadto przez $|BBS_N|$ oznaczmy błąd bezwzględny przybliżenia wartości całki metodą *Simpsona*, natomiast przez symbol δ_S rozumieć będziemy wynik wywołania procedury 5. Do obliczeń ponownie wykorzystajmy całkę z przykładu 4 (zastosujemy również jej wartość dokładną, która jest podana w jego rozwiązaniu):

N	W_{simpson}	$ BBS_N $	δ_S
4	4,09788104673	0,03476698811	0,31426966780
6	4,07112329317	0,00800923455	0,06207795906
10	4,06425014407	0,00113608545	0,00804530349
20	4,06318804961	0,00007399099	0,00050283147
40	4,06311873247	0,00000467386	0,00003142697
60	4,06311498371	0,00000092509	0,00000620779
80	4,06311435154	0,00000029292	0,00000196419
100	4,06311417861	0,00000011999	0,00000080453
104	4,06311416121	0,00000010259	0,00000068771
106	4,06311415370	0,00000009508	0,00000063726
150	4,06311408231	0,00000002369	0,00000015892
200	4,06311406613	0,00000000751	0,00000005028
400	4,06311405910	0,00000000048	0,00000000314
1000	4,06311405847	0,00000000015	0,00000000008

Tablica 2.2: Wyniki pomiaru dokładności przybliżania wartości całki pojedynczej wzorem *Simpsona*

Analizując wyniki z powyższej tabeli można zauważyć, że metoda *parabol* jest bardziej optymalna niż metoda *trapezów*, dla której to podobne zestawienie sporządzono w tablicy 2.1. Błąd bezwzględny przybliżenia spadł poniżej 0,0000001 już dla przypadku, w którym dokonaliśmy $N = 106$ podziałów przedziału całkowania, dla porównania w metodzie trapezów podziałów tych musieliśmy wykonać aż $n = 7310$. Wynik zwracany przez procedurę *simpson* zaczyna być bardzo mocno zbliżony do dokładnego (4,06311405862) dla zaledwie $N \geq 20$ podziałów (różnica zauważalna jest dopiero na 5 miejscu po przecinku). Ponadto mamy podstawy do tego, by uznać algorytm za poprawny, ponieważ wartość zwracana przez procedurę

simpson dla $N = 6$ jest taka sama, jak ta otrzymana w przykładzie 4. Co więcej dla każdego z prezentowanych w tabeli przypadków spełniona jest nierówność (2.18) z definicji 6.

W poprzednim podrozdziale wspominaliśmy, że niejednokrotnie interesuje nas minimalizacja błędu dla otrzymanego wyniku, tak by jego wielkość nie przekraczała pewnej akceptowalnej wartości granicznej. Wykonując drobne zmiany w procedurze 5 jesteśmy w stanie otrzymać nową procedurę, wyznaczającą ilość podziałów N przedziału całkowania $[a, b]$, tak by błąd przybliżenia nie przekraczał określonej przez nas wartości:

Procedura 6. (Wyznaczanie najmniejszej liczby N podziałów przedziału całkowania tak, by wynik był obciążony błędem nie większym niż zadany)

```
> simpsonMinN:= proc (a, b, blad)
local d4ff, simd4ff, M4, Nmin, p;
d4ff:= diff(diff(diff(diff(f(x), x), x), x), x);
simd4ff:= simplify(d4ff);
M4:= (Optimization[Maximize])(abs(simd4ff), x = a .. b);
p:= solve*({1/180*(b-a)^5*M4[1]/N^4 < blad, N>0}, {N});
Nmin := p[1]
end;
```

Zmiana polega na tym, że ostatnim parametrem wejściowym jest teraz nie ilość podziałów przedziału, lecz akceptowalna maksymalna wielkość błędu. Również zamiast obliczać δ_S , przekształcamy równanie (2.19) do postaci następującej nierówności:

$$\frac{(b-a)^5}{180 \cdot N^4} \cdot M_4 < blad.$$

W linii trzeciej od końca jest ona rozwiązywana ze względu na zmienną N , przy założeniu, że interesują nas tylko takie wartości, gdzie $N > 0$. Finalnie procedura wypisuje wynik w postaci $N > z$, przy czym $z \in \mathbb{Z}_+$. Nam jednak najbardziej zależy na najbliższej, większej od z liczbie naturalnej, podzielnej przez 2. Właśnie ta liczba jest szukanym przez nas N , dla którego błąd przybliżenia będzie mniejszy niż ten podany jako trzeci parametr wywołania *simpsonMinN*.

3. Kwadratury Newtona-Cotesa dla całek podwójnych w prostokącie

W całym poprzednim rozdziale skupialiśmy się na metodach całkowania numerycznego. Odnosiły się one jednak tylko do funkcji jednej zmiennej - zatem całkowanie odbywało się na pewnym przedziale domkniętym. Teraz chcemy poszerzyć naszą wiedzę i przejść o jeden krok dalej. Nasze rozważania zostaną skierowane ponownie na te same, co poprzednio metody całkowania numerycznego. Znacząca różnica polegała będzie na tym, że zajmiemy się całkowaniem funkcji dwóch zmiennych. Wszystkie nasze działania mają na celu wyłonienie najdokładniejszej metody wyznaczania wartości całek podwójnych przy pomocy prezentowanych algorytmów. W badaniach wyróżnimy dwa typy obszarów całkowania, będą to:

- a) Obszar normalny ze względu na zmienną x i y
- b) Obszar normalny tylko ze względu na zmienną x

W celu kontynuacji rozważań musimy przypomnieć niezbędną dla nas definicję normalności obszaru:

Definicja 7. (Obszar normalny)

O obszarze normalnym w przestrzeni kartezjańskiej \mathbb{R}^2

- a) względem osi OX (tj. względem x) mówimy, gdy podzbiór płaszczyzny kartezjańskiej ograniczony jest przez wykresy pewnych dwóch funkcji ciągłych $u(x)$ i $v(x)$ oraz dwie proste równoległe do osi OY .
- b) względem osi OY (tj. względem y) mówimy, gdy podzbiór płaszczyzny kartezjańskiej jest wyznaczany poprzez wykresy dwóch różnych funkcji ciągłych $l(y)$ i $k(y)$ oraz dwie proste, które są równoległe do osi OX .
- c) ze względu na zmienne x i y mówimy, gdy podzbiór płaszczyzny kartezjańskiej jest ograniczony przez dwie proste równoległe do osi OX oraz dwie proste równoległe do OY

3.1 Wzór trapezów

W podrozdziale 2.1 wyprowadziliśmy już wzór trapezów (2.10) i uogólniony wzór trapezów (2.11). Najbardziej interesuje nas drugi ze wspomnianych. Istnieje możliwość rozszerzenia go na przypadek ogólny dotyczący funkcji dwóch zmiennych. Zbadajmy wariant, dla którego obszar całkowania jest normalny ze względu na dwie zmienne.

Niech całkowanie odbywa się na obszarze $\Omega = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$. Przedział $[a, b]$ zostanie podzielony na n podprzedziałów postaci $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Podobnie będzie dla $[c, d]$, podzielimy go na m podprzedziałów $[y_j, y_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$). W związku z tym zajdzie następująca prawidłowość:

$$\begin{aligned} a &= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b \\ c &= y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m = d \end{aligned} \quad (3.1)$$

Postać punktów x_i, y_j należących do tych przedziałów, jak również kroków h_x i h_y pomiędzy kolejnymi wartościami węzłów to:

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih_x, \quad h_x = \frac{b-a}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \\ y_j &= y_0 + jh_y, \quad h_y = \frac{d-c}{m} \quad (j = 0, 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Zapiszmy wzór (2.11) w nieco innej postaci, która będzie dla nas bardziej poręczna, tzn.:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \quad (3.3)$$

Kolejno weźmy pewną oznaczoną całkę podwójną postaci [11]:

$$I_{T2} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b g(x) dx, \quad (3.4)$$

przy czym (rozbudowując (3.3) o dodatkową zmienną)

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy \approx \frac{h_y}{2} \left[f(x, y_0) + f(x, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x, y_j) \right]. \quad (3.5)$$

Podstawmy opisaną przez równanie (3.5) postać $g(x)$ do (3.4). Zaskutkuje to tym, że:

$$I_{T2} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \approx \int_a^b \frac{h_y}{2} \left[f(x, y_0) + f(x, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x, y_j) \right] dx. \quad (3.6)$$

W celu wyeliminowania potrzeby całkowania w (3.6) ponownie zostaje zastosowana metoda trapezów z równania (3.3) (rozszerzona w podobny sposób jak w (3.5)). Tym razem traktujemy x jako zmienną, natomiast całe wyrażenie podcałkowe jako jedną funkcję. Sprowadza to nasz problem do następującego przypadku [11]

$$I_{T2} \approx \frac{h_x}{2} \left\{ \frac{h_y}{2} \left[f(x_0, y_0) + f(x_0, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0, y_j) \right] + \frac{h_y}{2} \left[f(x_n, y_0) + f(x_n, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_n, y_j) \right] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_y}{2} \left[f(x_i, y_0) + f(x_i, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_i, y_j) \right] \right\} \quad (3.7)$$

Po uproszczeniu ostateczną formą (3.7) jest:

$$I_{T2} \approx \frac{h_x h_y}{4} \left\{ f(x_0, y_0) + f(x_0, y_m) + f(x_n, y_0) + f(x_n, y_m) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} f(x_i, y_j) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} [f(x_0, y_j) + f(x_n, y_j)] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i, y_0) + f(x_i, y_m)] \right\} \quad (3.8)$$

Interesującym faktem jest to, że współczynniki wagowe kwadratury opisanej powyższym wzorem rozkładają się według pewnego schematu. Co oznacza, że jeżeli rozpisalibyśmy (3.8) tak, by uwzględnić w nim wszystkie punkty węzłowe postaci (x_i, y_j) ($i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$) należące do pewnego obszaru prostokątnego i spełniające (3.2), to odpowiednio wartości przy kolejnych $f(x_i, y_j)$ ($i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$) rozkładałyby się następująco [12]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 & 4 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Powyższa macierz znacząco upraszcza i przyspiesza rozpisywanie **uogólnionego wzoru trapezów dla całek podwójnych po obszarach normalnych**. Dla przypadku uogólnionego wzoru trapezów dla całki pojedynczej schemat ten ograniczał się jedynie do pierwszego wiersza (numeracja i - od lewej do prawej, j - od góry do dołu).

Obliczanie wartości całki podwójnej metodą trapezów możemy sprowadzić również do sumowania objętości pewnych brył trapezoidalnych. Innymi słowy - rozważmy podział obszaru całkowania $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ na $n \cdot m$ podobszarów, co prezentuje rysunek 3.1 zamieszczony poniżej:



Rysunek 3.1: [10] Metoda trapezów dla całek podwójnych - podział obszaru całkowania na podobszary

Jak widać, każdy z podobszarów jest wyznaczany przez cztery wierzchołki (x_i, y_j) (definicja x_i, y_j taka jak w (3.2)). Do obliczenia objętości każdej z takich brył trapezoidalnych potrzebne są nam pola podstawy (już je znamy - są one takie same dla każdego podobszaru i wynoszą $h_x h_y$), oraz odpowiadające dla nich wysokości. Te ostatnie określimy jako średnia arytmetyczna wartości funkcji $f(x, y)$ w czterech wierzchołkach definiujących każdy z podobszarów całkowania. Ostatecznie objętość każdej bryły definiował będzie następujący wzór [10]:

$$T2V_{i,j} = h_x h_y \left[\frac{f(x_i, y_j) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_{j+1})}{4} \right], \quad (3.10)$$

przy czym h_x, h_y opisane są w (3.2).

Rozszerzając równanie (3.10), charakteryzujące pojedynczą objętość bryły na cały obszar całkowania dobrnęlibyśmy do równości postaci (3.8). Analizując powyższe zapiski wnioskujemy iż zachodzi następująca prawidłowość:

$$I_{T2V} = I_{T2} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} h_x h_y \left[\frac{f(x_i, y_j) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_{j+1})}{4} \right] \quad (3.11)$$

Porównując macierz (3.9) z rysunkiem 3.1 zauważymy, że elementy macierzy odzwierciedlają ilość podobszarów, na styku których umiejscowiony został dany węzeł. Można to też traktować jako informację ilu krotnie dany punkt węzłowy zostaje uwzględniony podczas sumowania w (3.11).

Wzór (3.8) podobnie jak dla przypadku całki pojedynczej można również otrzymać wykorzystując wielomiany *Lagrange'a* $L_{1,1}(x, y)$. Podamy jedynie zarys przekształceń, które doprowadziłyby nas do wyniku:

$$\begin{aligned} I_{T2L} &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \approx \int_a^b \int_c^d L_{1,1}(x, y) dy dx = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} L_{1,1}(x, y) dy dx = \\ &= \frac{h_x h_y}{4} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} [f(x_i, y_j) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_{j+1})] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ostatnie przejście mogło zostać wykonane, ponieważ wynik dla każdej całki $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} L_{1,1}(x, y) dy dx$ jest takiej samej postaci, zmienia się jedynie numer węzła branego pod uwagę. Dla przykładu:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} L_{1,1}(x, y) dy dx &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \left(f(x_0, y_0) \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} \right) + f(x_0, y_1) \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + f(x_1, y_0) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} \right) + f(x_1, y_1) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \right) \right) dy dx = \dots = \\ &= \frac{h_x h_y}{4} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_1, y_1)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Jak widać istnieje wiele sposobów na to, by wyprowadzić pożądaną przez nas dwuwymiarowy wzór trapezów. Najłatwiejsza do zrozumienia i późniejszego zaimplementowania okazuje się na pierwszy rzut oka jego postać z równości (3.11).

Zechcemy teraz wykorzystać zdobytą wiedzę w praktyce rozwiązując pewien przykład.

Przykład 5. (Wyznaczanie wartości całki podwójnej wzorem trapezów)

Wyznamy wartość przybliżoną $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx$ przy użyciu uogólnionego wzoru trapezów dla całek podwójnych po obszarach normalnych. Przyjmijmy, że przedziały całkowania dla obydwu zmiennych dzielimy na $n = m = 2$ równe podprzedziały.

Zgodnie z przyjętymi założeniami podział wygląda następująco:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{3}{4}, y_2 = 1.$$

Wartościami kroków pomiędzy kolejnymi węzłami są: $h_x = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{1}{4}$, $h_y = \frac{y_2 - y_0}{2} = \frac{1}{4}$.

Przejdźmy teraz do głównych rachunków prowadzących do wyniku, mianowicie:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx &\approx \frac{h_x h_y}{4} (f(x_0, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_0) + f(x_2, y_2) + \\ &+ 4f(x_1, y_1) + 2f(x_0, y_1) + 2f(x_2, y_1) + 2f(x_1, y_0) + 2f(x_1, y_2)) = \\ &= \frac{\frac{1}{16}}{4} \left(f(0, \frac{1}{2}) + f(0, 1) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 1) + \right. \\ &+ 4f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) + 2f(0, \frac{3}{4}) + 2f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + 2f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + 2f(\frac{1}{4}, 1) \Big) = \\ &= \frac{1}{64} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{1} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} + 4 \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{16}} + 2 \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} + 2 \frac{\frac{5}{13}}{\frac{1}{16}} + 2 \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{16}} + 2 \frac{\frac{5}{17}}{\frac{1}{16}} \right) = \\ &= \frac{1}{64} \left(2 + 1 + 2 + \frac{12}{10} + \frac{64}{10} + \frac{48}{18} + \frac{80}{26} + \frac{48}{10} + \frac{80}{34} \right) = 0,398383295625 \end{aligned}$$

Wynik dokładny otrzymany przy wykorzystaniu zaawansowanego narzędzia matematycznego wynosi 0,399181467986. Bardzo szybko możemy zauważyć, że błąd względny (oznaczymy go jako **BW**) nie jest znaczący i wynosi zaledwie 0,2% :

$$BW = \frac{|0,399181467986 - 0,398383295625|}{0,399181467986} * 100\% \approx 0,19995\% \approx 0,2\%$$

Możemy zatem bezwzględnie stwierdzić, że otrzymany wynik jest bardzo dokładny.

Widać wprost, że przeprowadzenie pełnych obliczeń może stać się bardzo kłopotliwe w przypadku, gdy funkcja podcałkowa ma skomplikowaną postać, lub liczba węzłów liczona jest w dziesiątkach bądź setkach. W takim przypadku bardzo pomocna okaże się specjalna procedura napisana w języku *Maple*, automatyzująca cały proces prowadzenia rachunków. Skrypt z implementacją oraz jego pełen opis znajdziemy poniżej.

Procedura 7. (Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych po obszarach normalnych przy użyciu uogólnionego wzoru trapezów)

```
> Trapez2 := proc (a, b, c, d, n, m)
local h, k, i, j, p, q, x, y, z, T2, WynikT2;
h := (b-a)/n;
k := (d-c)/m;

for i from 0 to n
do x := i -> a+i*h od;

for j from 0 to m
do y := j -> c+j*k od;

for i from 0 to n
do for j from 0 to m
do z := (i, j) -> f(x(i), y(j)) od
od;

T2 := (h*k)/4*(sum(sum(z(p, q)+z(p+1, q)+z(p, q+1)+z(p+1, q+1)
, p = 0 .. n-1), q = 0 .. m-1));

WynikT2 := evalf(T2)
end;
```

Przed wykorzystaniem zamieszczonej procedury nr 7 do wykonania głównych obliczeń, opiszmy zasadę jej działania. Tak więc pierwsza linia jest nagłówkiem procedury i odpowiada za definicję jej nazwy oraz parametrów wejściowych. Ich znaczenie jest następujące:

a, b - granice całkowania po zmiennej x

c, d - granice całkowania po zmiennej y

n - ilość podprzedziałów przedziału $[a, b]$, które są wyznaczone przez $n + 1$ węzłów x_i

m - ilość podprzedziałów przedziału $[c, d]$, które są wyznaczone przez $m + 1$ węzłów y_j

(Zrozumienie całego powyższego opisu ma kluczowe znaczenie w tym, by potrafić prawidłowo wywołać procedurę *Trapez2*.) Kolejno zadeklarowane zostały pomocnicze zmienne lokalne wykorzystane wewnątrz algorytmu. Następne dwa kroki odpowiadają za określenie odległości pomiędzy kolejnymi węzłami - zgodnie z tym co mówi równanie (3.2). Dalsza część procedury składająca się kolejno z dwóch pętli *for* powoduje wyliczenie wartości współrzędnych x_i oraz y_j , będących połączeniem (3.1) oraz (3.2). Trzecia z pętli użyta w procedurze służy do obliczania i zapamiętywania wartości funkcji $f(x, y)$ w wyznaczonych przed chwilą punktach węzłowych. Najważniejszy fragment odpowiadający bezpośrednio za wyznaczenie wyniku całkowania to ostatni blok złożony z dwóch zagnieżdżonych pętli (przypisanie wartości do zmiennej $T2$). Wykonywane w tym miejscu obliczenia są w pełni zgodne ze wzorem (3.11) - to właśnie on został użyty w implementacji. Ostatecznie wynik sumowania zostaje przekształcony do klarownej postaci oraz zwrócony jako wartość *WynikT2*.

Posiadając już kompletne informacje dotyczące kwestii sposobu działania procedury, użyjmy jej do obliczenia wartości dwóch całek:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx$$

$$\text{b) } \int_0^1 \int_1^2 e^{\frac{x^2}{y^3}} dy dx$$

Otrzymane wyniki zaprezentujemy poniżej w formie tabel. Przyjmijmy, że n oznaczałoby będzie ilość podziałów przedziału całkowania dla zmiennej x , m dla zmiennej y , zaś $W_{trapez2}$ to wynik *Trapez2* dla coraz większych wartości n i m . Ponadto niech $BBT_{2,n,m}$ opisuje błąd bezwzględny przybliżenia wartości całki podwójnej procedurą *Trapez2*, przy jej wywołaniu dla pewnych parametrów n i m . Dodatkowo $BWT_{2,n,m}$ to wielkość błędu względnego jakim jest obciążony ten sam wynik wykonania *Trapez2*, co w przypadku wyliczania $BBT_{2,n,m}$.

Definicja 8. (Błąd względny)

Błąd względny informuje nas o ile procent wartość zmierzona odbiega od wartości dokładnej. Wyliczamy go ze wzoru:

$$BW = \frac{BB}{x} * 100\% = \frac{|x - \hat{x}|}{x} * 100\%,$$

gdzie x - wartość dokładna, \hat{x} - wartość oszacowana, BB - błąd bezwzględny pomiaru.

Wartość dokładna całki z przykładu a) jest równa 0,399181467986 , więc:.

n	m	W_{trapez2}	$BBT_{2_{n,m}}$	$BWT_{2_{n,m}}$
2	4	0.393439318989	0.005742148997	1.43848085583 %
4	4	0.399131958147	0.000049509839	0.01240284005 %
8	4	0.400532451617	0.001350983631	0.33843846454 %
16	20	0.399140325036	0.000041142950	0.01030682867 %
30	20	0.399221938576	0.000040470590	0.01013839400 %
60	20	0.399246265075	0.000064797089	0.00006479709 %
90	50	0.399189533066	0.000008065080	0.00202040441 %
120	50	0.399191108640	0.000009640654	0.00241510560 %
150	50	0.399191837902	0.000010369916	0.00259779495 %
180	100	0.399183484399	0.000002016413	0.00050513692 %
200	100	0.399183655444	0.000002187458	0.00054798585 %
230	100	0.399183833262	0.000002365276	0.00059253151 %
260	200	0.399181765688	0.000000297702	0.00007457811 %
300	200	0.399181873075	0.000000405089	0.00010147991 %
400	200	0.399182014858	0.000000546872	0.00013699834 %

Tablica 3.1: Wyniki pomiaru dokładności przybliżania wartości całki a) wzorem trapezów

Całka z punktu b) wynosi dokładnie 1.14782135872 , zatem:.

n	m	W_{trapez2}	$BBT_{2_{n,m}}$	$BWT_{2_{n,m}}$
2	4	1.18640582739	0.03858446867	0.0434283084 %
4	4	1.16438017521	0.01655881649	1.4426301065 %
8	4	1.15874680449	0.01092544578	0.9518420002 %
16	20	1.14862392499	0.00080256627	0.0699208342 %
30	20	1.14831983812	0.00049847940	0.0434283084 %
60	20	1.14822915032	0.00040779164	0.0355274483 %
90	50	1.14789525293	0.00007389417	0.0064377762 %
120	50	1.14788939950	0.00006804078	0.0059278196 %
150	50	1.14788669031	0.00006533159	0.0056917907 %
180	100	1.14783983476	0.00001847604	0.0016096616 %
200	100	1.14783919935	0.00001784063	0.0015543037 %
230	100	1.14783853899	0.00001718027	0.0014967721 %
260	200	1.14782674438	0.00000538566	0.0004692072 %
300	200	1.14782634606	0.00000498734	0.0004345049 %
400	200	1.14782581891	0.00000446019	0.0003885788 %

Tablica 3.2: Wyniki pomiaru dokładności przybliżania wartości całki b) wzorem trapezów

Analizując zgromadzone już wyniki wykonania procedury, oraz wyznaczone na ich podstawie wartości $\text{BBT2}_{n,m}$ i $\text{BWT2}_{n,m}$ zauważamy pewną prawidłowość. W miarę wzrostu liczby podziałów (n i m) przedziałów całkowania wartości błędów odznaczają się tendencją spadkową. Szczególnie widoczna jest ona na przykładzie b). W przykładzie a) można dostrzec jednak, że błędy z kolejnego pomiaru są często większe niż te z poprzedniego, pomimo to jednak również zauważalny jest ich stopniowy spadek. Sytuacja zaobserwowana dla pomiarów w tablicy 3.1 jest w dużej mierze spowodowana postacią równania funkcji podcałkowej oraz sposobem działania algorytmu. W miarę tego, im więcej jest deformacji powierzchni wykresu owej funkcji, tym częściej pojawiają się wahania wielkości błędu dla coraz to większej liczby węzłów. Jak widać sytuacja nie jest już tak oczywista, jak była w przypadku użycia wzoru trapezów dla całek pojedynczych - tam wzrost ilości punktów węzłowych zapewniał stały wzrost dokładności wyniku.

3.2 Wzór Simpsona

Podobnie jak w rozdziale 3.1 możemy również rozszerzyć wzór *Simpsona* na przypadek, gdzie mamy do czynienia z wyznaczaniem wartości całek podwójnych w obszarach normalny ze względu na dwie zmienne. W tym celu możemy wykorzystać na przykład *uogólniony wzór Simpsona* (2.17) lub wielomian *Lagrange'a* $L_{2,2}(x, y)$ zbudowany w oparciu o wzór (1.16).

Rozważmy pewien obszar całkowania $\Delta = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$. Przedział $[a, b]$ zostanie podzielony na $N = 2n$, ($n = 1, 2, \dots$) podprzedziałów postaci $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ ($i = 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2}$). Podobnie będzie dla $[c, d]$, podzielimy go na $M = 2m$, ($m = 1, 2, \dots$) podprzedziałów $[y_{2j}, y_{2j+1}]$ ($j = 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{2m-1}{2}$). Z tego faktu wynikała będzie następująca prawidłowość:

$$\begin{aligned} a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \dots \leq x_{2n} = b \\ c = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \dots \leq y_{2m} = d \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dodatkowo zauważmy, że postać punktów x_i, y_j należących do tych przedziałów, jak również kroków h_x i h_y pomiędzy kolejnymi wartościami węzłów to:

$$\begin{aligned} x_i = x_0 + ih_x, \quad h_x = \frac{b-a}{N} \quad (i = 0, 1, \dots, N = 2n) \\ y_j = y_0 + jh_y, \quad h_y = \frac{d-c}{M} \quad (j = 0, 1, \dots, M = 2m) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tak samo jak zrobiliśmy to dla przypadku wzoru trapezów, wykonajmy również przekształcenie uogólnionego wzoru *Simpsona* (2.17) do postaci takiej, że będzie dla nas znacznie poręczniejsza w dalszych rozważaniach. W tym momencie należy powiedzieć, że zmianie ulegają indeksy pod znakiem sumowania. Ujednolicając oznaczenia tak, by wyglądały jak dla wzoru trapezów w (2.17) zastępujemy m przez n . Pozostałe - dotyczące punktów węzłowych i wielkości kroków pomiędzy nimi zostały na nowo zdefiniowane na początku tego podrozdziału. W związku z tym przekształcone równanie (2.17) ze zmienionymi indeksami wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \\ &\frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) = \\ &\frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=0}^{n-2} f(x_{2i+2}) + f(x_{2n}) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Weźmy teraz pewną podwójną całkę oznaczoną postaci [11] :

$$I_{S2} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b g(x) dx, \quad (3.17)$$

gdzie (rozszerzając równanie (3.16) na dwie zmienne)

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_c^d f(x, y) dy \approx \\ &\frac{h_y}{3} \left(f(x, y_0) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x, y_{2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x, y_{2j+2}) + f(x, y_{2m}) \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Po podstawieniu (3.18) do (3.17) otrzymamy:

$$\begin{aligned} I_{S2} &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \approx \\ &\int_a^b \frac{h_y}{3} \left(f(x, y_0) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x, y_{2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x, y_{2j+2}) + f(x, y_{2m}) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

W celu wyeliminowania z równania (3.19) konieczności całkowania, możemy ponownie zastosować uogólniony wzór *Simpsona* - tak jak zrobiliśmy to dla przypadku (3.18).

Realizacja zaproponowanego przepisu doprowadza (3.19) do poniższej formy:

$$\begin{aligned}
 I_{S2} \approx & \frac{h_x}{3} \left\{ \frac{h_y}{3} \left(f(x_0, y_0) + f(x_0, y_{2m}) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_0, y_{2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x_0, y_{2j+2}) \right) \right. \\
 & + \frac{h_y}{3} \left(f(x_{2n}, y_0) + f(x_{2n}, y_{2m}) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2n}, y_{2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x_{2n}, y_{2j+2}) \right) \\
 & + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_y}{3} \left(f(x_{2i+1}, y_0) + f(x_{2i+1}, y_{2m}) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2i+1}, y_{2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x_{2i+1}, y_{2j+2}) \right) \\
 & \left. + 2 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{h_y}{3} \left(f(x_{2i+2}, y_0) + f(x_{2i+2}, y_{2m}) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2i+2}, y_{2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x_{2i+2}, y_{2j+2}) \right) \right\} \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Po dokonaniu możliwie najlepszego przekształcenia - ostateczną postacią wyprowadzonego, *uogólnionego wzoru Simpsona* dla całek podwójnych po obszarach normalnych względem dwóch zmiennych jest:

$$\begin{aligned}
 I_{S2} \approx & \frac{h_x h_y}{9} \{ f(x_0, y_0) + f(x_0, y_{2m}) + f(x_{2n}, y_0) + f(x_{2n}, y_{2m}) \\
 & + 2 \left(\sum_{j=0}^{m-2} [f(x_0, y_{2j+2}) + f(x_{2n}, y_{2j+2})] + \sum_{i=0}^{n-2} [f(x_{2i+2}, y_0) + f(x_{2i+2}, y_{2m})] \right) \\
 & + 4 \left(\sum_{j=0}^{m-1} [f(x_0, y_{2j+1}) + f(x_{2n}, y_{2j+1})] + \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{2i+1}, y_0) + f(x_{2i+1}, y_{2m})] \right) \\
 & + 8 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-2} f(x_{2i+1}, y_{2j+2}) + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2i+2}, y_{2j+1}) \right) \\
 & + 4 \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{m-2} f(x_{2i+2}, y_{2j+2}) + 16 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2i+1}, y_{2j+1}) \} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Tak jak zauważyliśmy wcześniej dla uogólnionego wzoru trapezów (3.8), rozpisanie (3.21) w sposób taki, by uwzględniono w nim wszystkie możliwe punkty węzłowe postaci (x_{2i}, y_{2j}) ($i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$) należące do pewnego obszaru prostokątnego oraz spełniające równanie (3.15), skutkowałoby tym, że wartości przy kolejnych $f(x_{2i}, y_{2j})$ ($i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$) rozkładałyby się według pewnego schematu powstałego w wyniku mnożenia dwóch następujących wektorów:

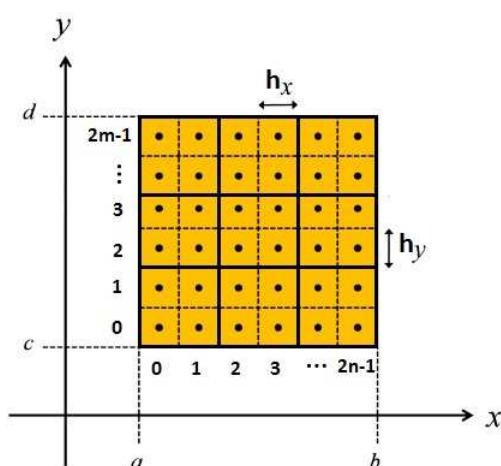
$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & \dots & 4 & 1 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & \dots & 4 & 1 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

W związku z tym rezultat operacji $A \times B$ jest następujący [12]:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & \cdots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \cdots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & \cdots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 8 & 4 & 8 & \cdots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & \cdots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & \cdots & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Zaprezentowana macierz diametralnie upraszcza zapis **uogólnionego wzoru Simpsona dla całek podwójnych po obszarach normalnych**. Pewien jej fragment, a dokładniej pierwszy wiersz, pojawił się już dla przypadku uogólnionego wzoru Simpsona (2.17) dla całki pojedynczej.

Przybliżanie wartości całki podwójnej obliczanej metodą Simpsona można również sprowadzić do sumowania objętości pewnych brył parabolicznych. Weźmy podział obszaru całkowania $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ na $2n \cdot 2m$ podobszarów, co dokładniej prezentuje rysunek 3.2:



Rysunek 3.2: Metoda Simpsona dla całek podwójnych po obszarze normalnym względem dwóch zmiennych - podział obszaru całkowania na podobszary

Każdy z podobszarów obszaru Ω jest ograniczonych pogrubioną krawędzią i składa się zawsze z dokładnie czterech mniejszych podobszarów wyznaczanych przez dziewięć węzłów (x_{2i}, y_{2j}) ($i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$). Objętość dowolnego z tych większych wyraża wzór:

$$S2V_{i,j} = \frac{h_x h_y}{9} [f(x_{2i}, y_{2j}) + 4f(x_{2i+1}, y_{2j}) + f(x_{2i+2}, y_{2j}) + 4f(x_{2i}, y_{2j+1}) + 16f(x_{2i+1}, y_{2j+1}) + 4f(x_{2i+2}, y_{2j+1}) + f(x_{2i}, y_{2j+2}) + 4f(x_{2i+1}, y_{2j+2}) + f(x_{2i+2}, y_{2j+2})] \quad (3.23)$$

Współczynniki, które pojawiły się w powyższym zapisie przy wartościach funkcji $f(x, y)$ nie są przypadkowe i tak intuicyjne jak dla wzoru Trapezów. Powstały one po przemnożeniu 'okrojonej' wersji wektorów A i B , których to używaliśmy do wyprowadzenia macierzy (3.22).

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

W związku z tym ich iloczyn to:

$$a \times b = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Rozszerzając zakres sumowania z jednego podobszaru na całą Ω nasz wzór przyjmie ostatecznie bardziej czytelną formę:

$$I_{S2V} = I_{S2} \approx \frac{h_x h_y}{9} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} [f(x_{2i}, y_{2j}) + 4f(x_{2i+1}, y_{2j}) + f(x_{2i+2}, y_{2j}) + 4f(x_{2i}, y_{2j+1}) + 16f(x_{2i+1}, y_{2j+1}) + 4f(x_{2i+2}, y_{2j+1}) + f(x_{2i}, y_{2j+2}) + 4f(x_{2i+1}, y_{2j+2}) + f(x_{2i+2}, y_{2j+2})] \quad (3.25)$$

Zauważmy, że (3.25) oraz (3.21) są równoważne. Można się o tym przekonać rozpisując (3.25) już dla kilku pierwszych wartości i oraz j .

Zaprezentowane dotychczas sposoby wyprowadzania *uogólnionego wzoru Simpsona* nie są jedynymi nam znanymi. Pokażmy, że (zgodnie ze stwierdzeniem z początku rozdziału) to samo równanie możemy otrzymać poprzez całkowanie wielomianu *Lagrange'a* $L_{2,2}(x, y)$. Całka taka jest postaci:

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} L_{2,2}(x, y) dy dx = \int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 f(x_i, y_j) \left(\prod_{s=0, s \neq i}^2 \frac{x - x_s}{x_i - x_s} \prod_{r=0, r \neq j}^2 \frac{y - y_r}{y_j - y_r} \right) dy dx \quad (3.26)$$

Przyjmując następujące wartości $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, $y_0 = 0$, $y_1 = k$ oraz $y_2 = 2k$ możemy w (3.26) wyszczególnić dziewięć całek. Wyznaczenie ich spowoduje otrzymanie współczynników występujących przy wartościach funkcji $f(x_i, y_j)$ w kolejnych węzłach zgodnych z (3.24), tzn.:

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)(y - y_1)(y - y_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)} dy dx = \int_0^{2h} \int_0^{2k} \frac{(x - h)(x - 2h)(y - k)(y - 2k)}{(0 - h)(0 - 2h)(0 - k)(0 - 2k)} dy dx = \frac{hk}{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)(y - y_0)(y - y_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)} dy dx = \int_0^{2h} \int_0^{2k} \frac{(x - h)(x - 2h)(y - 0)(y - 2k)}{(0 - h)(0 - 2h)(k - 0)(k - 2k)} dy dx = \frac{4hk}{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)(y - y_0)(y - y_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)} dy dx = \int_0^{2h} \int_0^{2k} \frac{(x - h)(x - 2h)(y - 0)(y - k)}{(0 - h)(0 - 2h)(2k - 0)(2k - k)} dy dx = \frac{hk}{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)(y - y_1)(y - y_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)} dy dx = \int_0^{2h} \int_0^{2k} \frac{(x - 0)(x - 2h)(y - k)(y - 2k)}{(h - 0)(h - 2h)(0 - k)(0 - 2k)} dy dx = \frac{4hk}{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)(y - y_0)(y - y_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)} dy dx = \int_0^{2h} \int_0^{2k} \frac{(x - 0)(x - 2h)(y - 0)(y - 2k)}{(h - 0)(h - 2h)(k - 0)(k - 2k)} dy dx = \frac{16hk}{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)(y - y_0)(y - y_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)} dy dx = \int_0^{2h} \int_0^{2k} \frac{(x - 0)(x - 2h)(y - 0)(y - k)}{(h - 0)(h - 2h)(2k - 0)(2k - k)} dy dx = \frac{4hk}{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(y-y_1)(y-y_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(y_0-y_1)(y_0-y_2)} dy dx = \int_0^{2h} \int_0^{2k} \frac{(x-0)(x-h)(y-k)(y-2k)}{(2h-0)(2h-h)(0-k)(0-2k)} dy dx = \frac{hk}{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(y-y_0)(y-y_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(y_1-y_0)(y_1-y_2)} dy dx = \int_0^{2h} \int_0^{2k} \frac{(x-0)(x-h)(y-0)(y-2k)}{(2h-0)(2h-h)(k-0)(k-2k)} dy dx = \frac{4hk}{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(y-y_0)(y-y_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(y_2-y_0)(y_2-y_1)} dy dx = \int_0^{2h} \int_0^{2k} \frac{(x-0)(x-h)(y-0)(y-k)}{(2h-0)(2h-h)(2k-0)(2k-k)} dy dx = \frac{hk}{9}$$

Tak jak wspomnieliśmy tuż przed przeprowadzeniem obliczeń, powyżej wyznaczone współczynniki tworzą macierz (3.24). Wyjaśniając - każde kolejne trzy wartości począwszy od pierwszej, czwartej i siódmej tworzą jeden osobny jej wiersz. Obliczenia te są bardzo pracochłonne, zostały więc zaprezentowane tylko w celach poglądowych.

Wykorzystując (3.21) lub samą macierz (3.22) wyznaczmy przybliżoną wartość pewnej całki, mianowicie:

Przykład 6. (Wyznaczanie wartości całki podwójnej wzorem Simpsona)

Obliczymy $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx$ wykorzystując uogólniony wzór Simpsona dla całek podwójnych po obszarach normalnych. Dla rozpatrywanego przypadku przyjmijmy, że przedział całkowania zarówno dla zmiennej x jak i y zostanie podzielony na dwa podwójne podprzedziały wyznaczone przez równo odległe węzły.

Z powyższego opisu wynika, że będziemy potrzebować $n = 5$ współrzędnych x oraz $m = 5$ współrzędnych y . Podział przedziałów całkowania przyjmując, że $h_x = \frac{\frac{4}{8}-0}{4} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ oraz $h_y = \frac{1-\frac{4}{8}}{4} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ prezentuje się następująco:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{2}{8}, x_3 = \frac{3}{8}, x_4 = \frac{4}{8}$$

$$y_0 = \frac{4}{8}, y_1 = \frac{5}{8}, y_2 = \frac{6}{8}, y_3 = \frac{7}{8}, y_4 = 1.$$

Do obliczeń wykorzystamy wzór rozpisany na podstawie (3.22):

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \approx \frac{h_x h_y}{9} (f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + 2f(x_2, y_0) + 4f(x_3, y_0) + f(x_4, y_0) + \\
& 4f(x_0, y_1) + 16f(x_1, y_1) + 8f(x_2, y_1) + 16f(x_3, y_1) + 4f(x_4, y_1) + \\
& 2f(x_0, y_2) + 8f(x_1, y_2) + 4f(x_2, y_2) + 8f(x_3, y_2) + 2f(x_4, y_2) + \\
& 4f(x_0, y_3) + 16f(x_1, y_3) + 8f(x_2, y_3) + 16f(x_3, y_3) + 4f(x_4, y_3) + \\
& f(x_0, y_4) + 4f(x_1, y_4) + 2f(x_2, y_4) + 4f(x_3, y_4) + f(x_4, y_4)) = \\
& = \frac{\frac{1}{8} \frac{1}{8}}{9} \left(\frac{\frac{4}{8}}{(\frac{4}{8})^2} + 4 \cdot \frac{\frac{5}{8}}{(\frac{1}{8})^2 + (\frac{4}{8})^2} + 2 \cdot \frac{\frac{6}{8}}{(\frac{2}{8})^2 + (\frac{4}{8})^2} + 4 \cdot \frac{\frac{7}{8}}{(\frac{3}{8})^2 + (\frac{4}{8})^2} + \frac{1}{(\frac{4}{8})^2 + (\frac{4}{8})^2} + \right. \\
& 4 \cdot \frac{\frac{5}{8}}{(\frac{5}{8})^2} + 16 \cdot \frac{\frac{6}{8}}{(\frac{1}{8})^2 + (\frac{5}{8})^2} + 8 \cdot \frac{\frac{7}{8}}{(\frac{2}{8})^2 + (\frac{5}{8})^2} + 16 \cdot \frac{1}{(\frac{3}{8})^2 + (\frac{5}{8})^2} + 4 \cdot \frac{\frac{9}{8}}{(\frac{4}{8})^2 + (\frac{5}{8})^2} + \\
& 2 \cdot \frac{\frac{6}{8}}{(\frac{6}{8})^2} + 8 \cdot \frac{\frac{7}{8}}{(\frac{1}{8})^2 + (\frac{6}{8})^2} + 4 \cdot \frac{1}{(\frac{2}{8})^2 + (\frac{6}{8})^2} + 8 \cdot \frac{\frac{9}{8}}{(\frac{3}{8})^2 + (\frac{6}{8})^2} + 2 \cdot \frac{\frac{10}{8}}{(\frac{4}{8})^2 + (\frac{6}{8})^2} + \\
& 4 \cdot \frac{\frac{7}{8}}{(\frac{7}{8})^2} + 16 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{8})^2 + (\frac{7}{8})^2} + 8 \cdot \frac{\frac{9}{8}}{(\frac{2}{8})^2 + (\frac{7}{8})^2} + 16 \cdot \frac{\frac{10}{8}}{(\frac{3}{8})^2 + (\frac{7}{8})^2} + 4 \cdot \frac{\frac{11}{8}}{(\frac{4}{8})^2 + (\frac{7}{8})^2} + \\
& \left. 1 + 4 \cdot \frac{\frac{9}{8}}{(\frac{1}{8})^2 + (1)^2} + 2 \cdot \frac{\frac{10}{8}}{(\frac{2}{8})^2 + (1)^2} + 4 \cdot \frac{\frac{11}{8}}{(\frac{3}{8})^2 + (1)^2} + \frac{\frac{12}{8}}{(\frac{4}{8})^2 + (1)^2} \right) \approx \\
& \approx \frac{1}{576} \cdot (27,17176470588235 + 88,52877470325647 + 37,05169785169785 + \\
& + 63,40370323235645 + 13,80562821545899) \approx 0,399238834563632
\end{aligned}$$

W zaokrągleniu wartość dokładna rozwiązywanej całki, otrzymana przy wykorzystaniu kalkulatora to: $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \approx 0.399181467986060$

Analizując wielkość błędu względnego (**BW**), którym jest obciążony wynik, zauważamy że nie jest znaczący i wynosi jedynie 0,014%. Wynika to z poniższych rachunków:

$$BW = \frac{|0,399181467986 - 0,399238834563632|}{0,399181467986} * 100\% \approx 0,01437\% \approx 0,014\%$$

Dla wzoru trapezów wielkość BW (dla takiej samej całki) przy wykonanych dwóch podziałach przedziału całkowania oscylowała w granicach 0,2%, więc była ona niemal 15 krotnie większa!

Algorytm *Simpsona* (3.25) pomimo tego, że na pierwszy rzut oka wydaje się być skuteczniejszy niż wspomniany wzór *Trapezów* (3.11), to jest również dużo bardziej skomplikowany jeżeli chodzi o złożoność rachunków jakie należy wykonać. Każde zwiększenie liczby węzłów powoduje bardzo szybki rozrost ilości wartości funkcji do wyznaczenia. W związku z tym, by kontynuować rozważania zaprezentujemy stworzoną procedurę automatyzującą obliczanie wartości całek podwójnych po obszarach normalnych uogólnionym wzorem *Simpsona*.

Procedura 8. (Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych po obszarach normalnych przy użyciu uogólnionego wzoru Simpsona)

```
> Simpson2 := proc(a, b, c, d, N, M)
local h, k, i, j, n, m, p, q, x, y, z, S2, WynikS2;
if (((ceil(N)>N) or (floor(N)<N)) or (mod(N,2) = 1 and N>0) or N <= 0)
or (((ceil(M)>M) or (floor(M)<M)) or (mod(M,2) = 1 and M>0) or M <= 0))
then
ERROR('Ostatnie dwa parametry musza byc liczba naturalna postaci \2k')

else
n := (1/2)*N;
m := (1/2)*M;
h := (b-a)/N;
k := (d-c)/M;

for i from 0 to N
do x := i -> a+i*h od;

for j from 0 to M
do y := j -> c+j*k od;

for i from 0 to N
do for j from 0 to M
```

```

do z := (i, j) -> f(x(i), y(j)) od
od;

S2 := (1/9) * h * k * (sum(sum(z(2*p, 2*q) + 4*z(2*p+1, 2*q) + z(2*p+2, 2*q)
+ 4*z(2*p, 2*q+1) + 16*z(2*p+1, 2*q+1) + 4*z(2*p+2, 2*q+1)
+ z(2*p, 2*q+2) + 4*z(2*p+1, 2*q+2) + z(2*p+2, 2*q+2)
, p = 0 .. n-1), q = 0 .. m-1));

WynikS2 := evalf(S2) fi;
end;

```

Pierwsza linia powyższego kodu jest deklaracją nazwy procedury oraz jej parametrów wejściowych, przy czym:

a, b - dolna i górna granica całkowania względem zmiennej x ,

c, d - dolna i górna granica całkowania względem zmiennej y ,

N - liczba podprzedziałów na jakie zostanie podzielony cały przedział całkowania $[a, b]$,

M - liczba podprzedziałów na jakie zostanie podzielony cały przedział całkowania $[c, d]$.

Kolejno wymienione są wszystkie zmienne lokalne, jakie będą wykorzystane w obliczeniach wykonywanych wewnątrz algorytmu. Pojawiająca się następnie instrukcja warunkowa *if-else* decyduje o tym, czy parametry wywołania zostały podane prawidłowo. Jeżeli N lub M nie jest liczbą naturalną parzystą to zwracany jest stosowny komunikat o błędzie. W przeciwnym przypadku rozpoczyna się wykonanie właściwej części algorytmu, w skład którego wchodzi określenie ilości podprzedziałów n, m (każdy podprzedział złożony jest z dwóch podprzedziałów) na które podzielono przedziały całkowania po zmiennej x i y . Dalej na podstawie (3.15) wyznaczane są wielkości kroków h (dla x) i k (dla y) pomiędzy kolejnymi węzłami definiującymi krańce owych podprzedziałów. Pozyskane dane zostają natychmiast wykorzystywane przez pętle *for* do obliczenia współrzędnych węzłów x_i oraz y_j . Blok z dwoma zagnieżdżonymi pętlami *for* służy wyliczaniu wartości funkcji $z(i, j) = f(x_i, y_j)$ w określonych (w poprzednich dwóch krokach) punktach węzłowych. Przedostatni krok jest implementacją wzoru (3.25), co czyni go kluczowym dla całego algorytmu. Ostatecznie wynik procedury jest zwracany w uproszczonej i czytelnej postaci jako wartość *WynikS2*.

Wiedząc już na jakiej zasadzie działa procedura *Simpson2* - użyjmy jej do przeprowadzenia badań nad dokładnością pozyskanych dzięki niej przybliżonych wyników całkowania. Rezultaty porównamy z tymi, otrzymanymi przez procedurę 7 (*Trapez2*). Przeliczmy zatem następujące całki:

$$a) \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx$$

$$b) \int_0^1 \int_1^2 e^{\frac{x^2}{y^3}} dy dx$$

Tak jak w podrozdziale poprzednim wyniki przedstawimy w formie tabel. Niech N oznacza liczbę podprzedziałów na które podzielono przedział całkowania po zmiennej x , M po zmiennej y , $W_{Simpson2}$ to wynik *Simpson2* dla rosnących wartości N i M . Niech $BBS2_{N,M}$ będzie błędem bezwzględnym przybliżenia wartości całki podwójnej procedurą *Simpson2* dla pewnych parametrów N i M . Dodatkowo $BWS2_{N,M}$ to wielkość błędu względnego jakim jest obciążony ten sam wynik wykonania *Simpson2*, co w przypadku wyliczania $BBS2_{N,M}$.

Wartość całki z przykładu a) jest w zaokrągleniu równa 0,399181467986, więc:

N	M	$W_{Simpson2}$	$BBS2_{N,M}$	$BWS2_{N,M}$
2	4	0.399628737181	0.000447269195	0.112046583038 %
4	4	0.399238834564	0.000057366578	0.014371052416 %
8	4	0.399209961856	0.000028493870	0.007138074356 %
16	20	0.399181624022	0.000000156036	0.000039088989 %
30	20	0.399181522060	0.000000054074	0.000013546220 %
60	20	0.399181513672	0.000000045686	0.000011444920 %
90	50	0.399181469254	0.000000001268	0.000000317650 %
120	50	0.399181469179	0.000000001193	0.000000298862 %
150	50	0.399181469158	0.000000000117	0.000000293600 %
180	100	0.399181468065	0.000000000079	0.000000019790 %
200	100	0.399181468063	0.000000000077	0.000000019289 %
230	100	0.399181468061	0.000000000075	0.000000018788 %
260	200	0.399181467992	0.000000000006	0.000000001503 %
300	200	0.399181467991	0.000000000005	0.000000001253 %
400	200	0.399181467991	0.000000000005	0.000000001253 %

Tablica 3.3: Pomiary dokładności przybliżania wartości całki a) uogólnionym wzorem Simpsona

Całka z podpunktu b) wynosi dokładnie 1.14782135872 , zatem:.

N	M	W_{Simpson2}	$BBS2_{N,M}$	$BWS2_{N,M}$
2	4	1.15087844676	0.00305708804	0.266338312733 %
4	4	1.14909546116	0.00127410244	0.111001806189 %
8	4	1.14895802395	0.00113666523	0.099028060539 %
16	20	1.14782496457	0.00000360585	0.000314147317 %
30	20	1.14782444884	0.00000309012	0.000269216109 %
60	20	1.14782440610	0.00000304738	0.000265492533 %
90	50	1.14782144016	0.00000008144	0.000007095181 %
120	50	1.14782143971	0.00000008099	0.000007055976 %
150	50	1.14782143962	0.00000008090	0.000007048135 %
180	100	1.14782136425	0.00000000554	0.000000481782 %
200	100	1.14782136416	0.00000000544	0.000000473941 %
230	100	1.14782136423	0.00000000551	0.000000480039 %
260	200	1.14782135945	0.00000000126	0.000000063598 %
300	200	1.14782135952	0.00000000081	0.000000070568 %
400	200	1.14782135935	0.00000000063	0.000000054886 %

Tablica 3.4: Pomiary dokładności przybliżania wartości całki b) *uogólnionym wzorem Simpsona*

Dokonując przeglądu i analizy wyników z Tablicy 3.3 i Tablicy 3.4 pierwsze co powinno rzucić się nam w oczy to wyjątkowa dokładność otrzymanych wartości. Wielkość błędu bezwzględnego już dla pierwszego wywołania procedury w obydwu przykładach nie przekroczyła 0.0031, jest to bardzo dobry rezultat. Dodatkowo po każdym zwiększeniu parametrów N lub M widoczna jest stanowiąca tendencja spadkowa $BBS2_{N,M}$ jak i $BWS2_{N,M}$. Dla końcowych pomiarów można powiedzieć, że wynik jest niemal nie obciążony błędem przybliżenia, ponieważ jego wielkość jest bliska 0 dla obydwu przykładów. Interesujące jest to, że pomiędzy błędami, którymi obciążone są wyniki otrzymane *uogólnionym wzorem trapezów* a *uogólnionym wzorem Simpsona* jest średnio dwa rzędy wielkości różnicy (na korzyść wzoru *Simpsona*). Fakt ten sprawia, że może on zostać uznany za dokładniejszy i zarazem bardziej efektywny.

4. Kwadratury Newtona-Cotesa dla całek podwójnych w obszarach normalnych

Poprzedni rozdział pracy związany był z wyznaczaniem wzorów na dwu wymiarowe kwadratury *Newtona-Cotesa* w obszarach prostokątnych. Jest to jednak dosyć szczególny przypadek, gdzie wartości całek liczone są w stałych granicach. W rzeczywistości częściej spotkamy się z przypadkami, gdzie granice całkowania będą uzależnione od pewnych zmiennych. Na tym właśnie skupimy się w kolejnych rozważaniach, które rozpoczniemy od wyznaczenia wzorów na kwadratury w obszarach normalnych względem osi OX (zmienna y jest zależna od x), jak również w obszarach normalnych względem osi OY (tutaj z kolei x jest uzależnione od y).

4.1 Wzór trapezów dla obszaru normalnego względem osi Ox

Weźmy pewien obszar postaci $D = \{a \leq x \leq b; c(x) \leq y \leq d(x)\}$, normalny względem osi Ox (definicja pojęcia na str. 33) oraz funkcję $f(x, y)$ określoną na tym obszarze. Naszym aktualnym celem jest wyprowadzenie wzoru trapezów dla całki

$$I_{VT2} = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx. \quad (4.1)$$

Niech przedział $[a, b]$ zostanie podzielony na n podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) takich, że:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

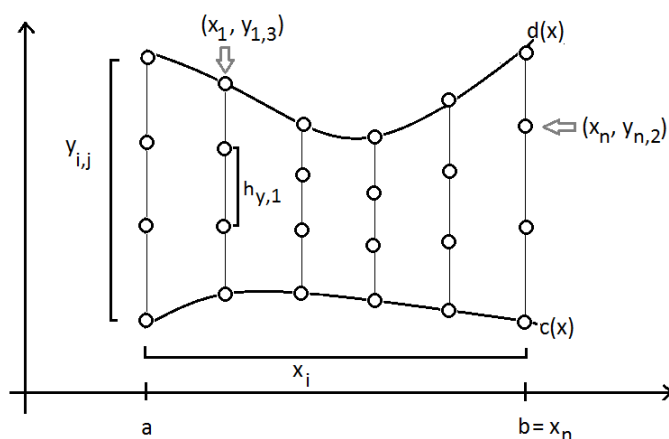
Każdy węzeł x_i jest postaci $x_i = a + ih_x$ ($i = 0, 1, \dots, n$), gdzie h_x określamy jako równowartość $h_x = \frac{b-a}{n}$.

Kolejno dla każdego $x_i \in [a, b]$ wyróżnimy przedziały (z reguły) różnej długości $[c(x_i), d(x_i)]$, uzależnione od postaci funkcji $c(x)$ i $d(x)$ oraz argumentu $x = x_i$. Wszystkie one podzielone zostaną na m równych podprzedziałów $[y_{i,j}, y_{i,j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, m-1; i = 0, 1, \dots, n$)

spełniających zależność:

$$c(x_i) = y_{i,0} \leq y_{i,1} \leq y_{i,2} \leq \dots \leq y_{i,m} = d(x_i).$$

Przez oznaczenie $y_{i,j}$ rozumiemy $y_{i,j} = c(x_i) + jh_{y,i}$ ($j = 0, 1, \dots, m$; $i = 0, 1, \dots, n$), natomiast $h_{y,i} = \frac{d(x_i) - c(x_i)}{m}$. Innymi słowy wielkość kroku $h_{y,i}$ jest zależna od tego dla jakiego x_i jest wyliczana. W przeciwieństwie do przypadku całkowania w prostokącie, możemy spotkać się z taką sytuacją, gdzie na całym obszarze D dla różnych x_i nie znajdziemy dwóch wielkości $h_{y,i}$, które będą sobie równe. Poniższy obraz wyjaśnia opisywaną logikę podziału obszaru całkowania:



Rysunek 4.1: Podział obszaru całkowania dla metody Trapezów - obszar normalny względem Ox

Całkę z równania (4.1) przedstawimy w innej formie, tak by umożliwić jej zapis w postaci sumy. Zrobimy to analogicznie jak dla wzoru Trapezów i wzoru Simpsona po prostokącie. Niech

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy,$$

wtedy

$$I_{VT2} = \int_a^b F(x) dx.$$

Po zastosowaniu złożonego wzoru Trapezów (2.11) dla I_{VyT2} zyskamy wstępną formę przybliżenia wartości całki I_{VyT2} , tzn.:

$$I_{VyT2} \approx \frac{h_x}{2} (F(x_0) + 2F(x_1) + 2F(x_2) + \dots + 2F(x_{n-1}) + F(x_n)). \quad (4.2)$$

Każdy ze składników $F(x_i)$, ($i = 0, 1, \dots, n$) jest rozumiany jako [13]:

$$F(x_i) = \int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(x_i, y) dy \approx \frac{h_{y,i}}{2} (f(x_i, y_{i,0}) + 2f(x_i, y_{i,1}) + 2f(x_i, y_{i,2}) + \dots + 2f(x_i, y_{i,m-1}) + f(x_i, y_{i,m})) \quad (4.3)$$

Po połączeniu (4.2) i (4.3) dostajemy uogólniony wzór trapezów dla całki podwójnej po obszarze normalnym względem osi Ox [11]:

$$I_{VyT2} \approx \frac{h_x}{2} \left\{ \frac{h_{y,0}}{2} \left(f(x_0, y_{0,0}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0, y_{0,j}) + f(x_0, y_{0,m}) \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_{y,i}}{2} \left(f(x_i, y_{i,0}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_i, y_{i,j}) + f(x_i, y_{i,m}) \right) + \frac{h_{y,n}}{2} \left(f(x_n, y_{n,0}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_n, y_{n,j}) + f(x_n, y_{n,m}) \right) \right\} \quad (4.4)$$

Jak można by się spodziewać, przeprowadzenie ręcznych wyliczenia dla np. $n = m = 10$ podziałów przedziałów całkowania byłoby nie lada wyzwaniem. Wykonajmy jednak pewne rachunki wykorzystując (4.4) i ograniczając się do zdecydowanie mniejszej liczby podziałów.

Przykład 7. (Wyznaczanie wartości całki podwójnej w obszarze normalnym względem X przy użyciu uogólnionego wzoru trapezów)

Wyznamy przybliżoną wartość całki $\int_0^1 \int_{x-1}^{x+1} xy \, dy \, dx$ wykorzystując uogólniony wzór trapezów dla całek podwójnych w obszarze normalnym względem osi Ox . Przedział całkowania po zmiennej x podzielmy na $n = 4$ równe podprzedziały, natomiast po zmiennej y na $m = 3$ podprzedziały równej długości.

Odległość pomiędzy kolejnymi węzłami x_i wynosiła będzie $h_x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$. Zatem:

$$x_0 = a = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{4}, \quad x_4 = b = 1.$$

Wielkości $h_{y,i}$ należy osobno wyznaczyć dla każdego z przed chwilą wyliczonych x_i , tzn.:

$$\begin{aligned} h_{y,0} &= \frac{d(x_0)-c(x_0)}{m} = \frac{(0+1)-(0-1)}{3} = \frac{2}{3} \\ h_{y,1} &= \frac{d(x_1)-c(x_1)}{m} = \frac{(\frac{1}{4}+1)-(\frac{1}{4}-1)}{3} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}{3} = \frac{2}{3} \\ h_{y,2} &= \frac{d(x_2)-c(x_2)}{m} = \frac{(\frac{2}{4}+1)-(\frac{2}{4}-1)}{3} = \frac{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}}{3} = \frac{2}{3} \\ h_{y,3} &= \frac{d(x_3)-c(x_3)}{m} = \frac{(\frac{3}{4}+1)-(\frac{3}{4}-1)}{3} = \frac{\frac{7}{4}+\frac{1}{4}}{3} = \frac{2}{3} \\ h_{y,4} &= \frac{d(x_4)-c(x_4)}{m} = \frac{(1+1)-(1-1)}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Przy użyciu powyższych wyników $h_{y,i}$ oraz x_i wyznaczmy wartości 20 węzłów $y_{i,j}$, których potrzebujemy:

$$\begin{aligned} y_{0,0} &= c(x_0) + 0 \cdot h_{y,0} = (0-1) + 0 \cdot \frac{2}{3} = -1 \\ y_{0,1} &= c(x_0) + 1 \cdot h_{y,0} = (0-1) + 1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \\ y_{0,2} &= c(x_0) + 2 \cdot h_{y,0} = (0-1) + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y_{0,3} &= c(x_0) + 3 \cdot h_{y,0} = (0-1) + 3 \cdot \frac{2}{3} = 1 \\ y_{1,0} &= c(x_1) + 0 \cdot h_{y,1} = (\frac{1}{4}-1) + 0 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{3}{4} \\ y_{1,1} &= c(x_1) + 1 \cdot h_{y,1} = (\frac{1}{4}-1) + 1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = -\frac{9}{12} + \frac{8}{12} = -\frac{1}{12} \\ y_{1,2} &= c(x_1) + 2 \cdot h_{y,1} = (\frac{1}{4}-1) + 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = -\frac{9}{12} + \frac{16}{12} = \frac{7}{12} \\ y_{1,3} &= c(x_1) + 3 \cdot h_{y,1} = (\frac{1}{4}-1) + 3 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4} \\ y_{2,0} &= c(x_2) + 0 \cdot h_{y,2} = (\frac{2}{4}-1) + 0 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{4} \\ y_{2,1} &= c(x_2) + 1 \cdot h_{y,2} = (\frac{2}{4}-1) + 1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{4} + \frac{2}{3} = -\frac{6}{12} + \frac{8}{12} = \frac{2}{12} \\ y_{2,2} &= c(x_2) + 2 \cdot h_{y,2} = (\frac{2}{4}-1) + 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{4} + \frac{4}{3} = -\frac{6}{12} + \frac{16}{12} = \frac{10}{12} \\ y_{2,3} &= c(x_2) + 3 \cdot h_{y,2} = (\frac{2}{4}-1) + 3 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{4} + 2 = \frac{6}{4} \\ y_{3,0} &= c(x_3) + 0 \cdot h_{y,3} = (\frac{3}{4}-1) + 0 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{4} \\ y_{3,1} &= c(x_3) + 1 \cdot h_{y,3} = (\frac{3}{4}-1) + 1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{5}{12} \\ y_{3,2} &= c(x_3) + 2 \cdot h_{y,3} = (\frac{3}{4}-1) + 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{4} + \frac{4}{3} = -\frac{3}{12} + \frac{16}{12} = \frac{13}{12} \\ y_{3,3} &= c(x_3) + 3 \cdot h_{y,3} = (\frac{3}{4}-1) + 3 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4} \\ y_{4,0} &= c(x_4) + 0 \cdot h_{y,4} = (1-1) + 0 \cdot \frac{2}{3} = 0 \\ y_{4,1} &= c(x_4) + 1 \cdot h_{y,4} = (1-1) + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \\ y_{4,2} &= c(x_4) + 2 \cdot h_{y,4} = (1-1) + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ y_{4,3} &= c(x_4) + 3 \cdot h_{y,4} = (1-1) + 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \end{aligned}$$

Możemy przystąpić do podstawiania konkretnych wartości do wzoru (4.4):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x-1}^{x+1} xy \, dy \, dx &\approx \frac{h_x}{2} \left\{ \frac{h_y}{2} (f(x_0, y_{0,0}) + 2f(x_0, y_{0,1}) + 2f(x_0, y_{0,2}) + f(x_0, y_{0,3})) \right. \\
&\quad + h_{y,1}(f(x_1, y_{1,0}) + 2f(x_1, y_{1,1}) + 2f(x_1, y_{1,2}) + f(x_1, y_{1,3})) \\
&\quad + h_{y,2}(f(x_2, y_{2,0}) + 2f(x_2, y_{2,1}) + 2f(x_2, y_{2,2}) + f(x_2, y_{2,3})) \\
&\quad + h_{y,3}(f(x_3, y_{3,0}) + 2f(x_3, y_{3,1}) + 2f(x_3, y_{3,2}) + f(x_3, y_{3,3})) \\
&\quad \left. + \frac{h_{y,4}}{2}(f(x_4, y_{4,0}) + 2f(x_4, y_{4,1}) + 2f(x_4, y_{4,2}) + f(x_4, y_{4,3})) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{2} (0 + (2 \cdot 0) + (2 \cdot 0) + 0) + \frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{12} \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{12} \right) + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{4} \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{12} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{12} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \left(\left(\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \right) + 2 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12} \right) + 2 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{13}{12} \right) + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} \right) \right) + \frac{2}{2} \left((1 \cdot 0) + 2 \left(1 \cdot \frac{2}{3} \right) + 2 \left(1 \cdot \frac{4}{3} \right) + (1 \cdot 2) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{8} \left\{ 0 + \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{16} - \frac{2}{48} + \frac{14}{48} + \frac{5}{16} \right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{8} + \frac{4}{24} + \frac{20}{24} + \frac{6}{8} \right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{16} + \frac{30}{48} + \frac{78}{48} + \frac{21}{16} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 2 \right) \right\} \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{6}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{16} + \frac{12}{48} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{4}{8} + 1 \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{18}{16} + \frac{108}{48} \right) \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{6}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{18}{48} + \frac{72}{48} + \frac{162}{48} \right) \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{6}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{252}{48} \right) \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{6}{3} + \frac{7}{2} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{12+21}{6} \right) = \frac{33}{48} = 0,6875
\end{aligned}$$

Wartość dokładna rozpatrywanej całki wyliczona przy pomocy kalkulatora wynosi:

$$\int_0^1 \int_{x-1}^{x+1} xy \, dy \, dx = \frac{2}{3} \approx 0,666667. \text{ Zatem błąd względny przybliżonego wyniku to:}$$

$$BW = \frac{\left| \frac{2}{3} - \frac{33}{48} \right|}{\frac{2}{3}} * 100\% = 0,03125 * 100\% = 3,125\%$$

Jak można zauważyć wielkość błędu względnego jest dosyć znacząca. Niewielka dokładność wyniku spowodowana jest doбором zbyt małych n i m . Nie podlega dyskusji fakt, że mimo tego, iż liczba dokonanych podziałów przedziałów całkowania była pozornie niewielka, to ilość obliczeń jaką należało wykonać okazała się zatrażająco duża. W związku z tym dalsze badania wykonamy w oparciu o napisaną w tym celu procedurę *Maple* implementującą wzór (4.4).

Procedura 9. (Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych w obszarach normalnych względem osi Ox przy użyciu uogólnionego wzoru trapezów)

```

Trapez2_VarY := proc(a, b, n, m)
local hx, hy, PoczKoniecP, PozostaleP, i, j, s1, s2,
ix, yi, Ps, WynCzesciowy, WynikT2vY, T2vY;

```

```

if n < ceil(n) or floor(n) < n or n <= 0 or
  m < ceil(m) or floor(m) < m or m <= 0
then ERROR('Ostatnie dwa parametry musza byc liczba naturalna postaci \2k')
else
  hx := (b-a)/n;
  PoczKoniecP := 0;
  PozostaleP := 0;

for i from 0 to n
do ix := a+i*hx;
  s1 := f(ix, c(ix))+f(ix, d(ix)); # suma pierwszy + ostatni wyraz
  s2 := 0; # suma wyrazow dla parzystego i
  hy := (d(ix)-c(ix))/m; # wielk. kroku pomiedzy y-ami dla i-tego pkt. x
  for j from 1 to m-1
do yi := c(ix)+j*hy; # wartosc kolejnych yi dla zadanego i-tego x
  Ps := f(ix, yi); # wartosc calkowanej funkcji w f(ix,yi)
  s2 := s2+Ps
od;

WynCzesciowy := (1/2)*hy*(s1+2*s2);
  if i = 0 or i = n
  then PoczKoniecP := PoczKoniecP+WynCzesciowy
  elif 0 < i and i < n
  then PozostaleP := PozostaleP+WynCzesciowy
  fi;
od;

T2vY := (1/2)*hx*(PoczKoniecP+2*PozostaleP);
WynikT2vY := evalf(T2vY)
fi;
end;

```

Na początku należy zaznaczyć, że granice całkowania po zmiennej y są opisane za pomocą funkcji $c(x)$ i $d(x)$. Muszą one zostać zadeklarowane już przed wywołaniem *Trapez2_VarY*, tak by algorytm mógł swobodnie z nich korzystać w wewnętrznych wyliczeniach.

Przedstawiona powyżej procedura rozpoczyna się od deklaracji zmiennych lokalnych wykorzystywanych w kodzie. Następnie sprawdzana zostaje poprawność zadanych parametrów n i m , opisujących ilość podziałów przedziałów całkowania na podprzedziały. Obydwie wielkości muszą być liczbami naturalnymi. W związku z tym, że procedura służy do obliczania całek po obszarach normalnych względem osi Ox , to tylko całkowanie po zmiennej x będzie wykonywane w stałych granicach, tzn. $[a, b] = [x_0, x_n]$. Na początku instrukcji warunkowej *else* obliczany jest rozmiar kroku h_x , dodatkowo zerowane są zmienne pomocnicze, które będą przechowywały wielkości używane do wyznaczenia ostatecznego wyniku. Główna część algorytmu to zagnieżdżone w sobie dwie pętle *for*. W tym właśnie miejscu wyliczane zostają kolejne wartości $F(x_i)$ zgodnie ze wzorem (4.3) oraz x_i i $h_{y,i}$, których to definicję znajdziemy w naszych wcześniejszych rozważaniach na początku rozdziału. $T2vY$ obliczono wykorzystując przybliżenie opisywane przez (4.4). Finalnym rezultatem procedury jest natomiast *WynikT2vY*, będący uproszczoną postacią $T2vY$.

Procedurę *Trapez2_VarY* wykorzystajmy teraz do obliczenia dwóch przykładów całek w obszarach normalnych względem Ox , rozpatrując coraz to większe wartości parametrów n i m . Niech będą to:

$$\text{a) } \int_0^1 \int_{(x-1)^2}^{4-(x-1)^2} x^{3y} dy dx$$

$$\text{b) } \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy^2 dy dx$$

Analogicznie do wcześniejszych podrozdziałów wyniki pomiarów zostaną pokazane w formie tabelki. Podobnie więc niech n oznacza ilość podziałów przedziału całkowania dla zmiennej x , m dla zmiennej y , oraz W_{T2V_y} będzie wynikiem *Trapez2_VarY* dla coraz większych wartości n i m . Co więcej niech $BBT2V_{y_{n,m}}$ opisuje błąd bezwzględny przybliżenia wartości całki podwójnej procedurą *Trapez2_VarY*, dla pewnych parametrów n i m . Dodatkowo $BWT2V_{y_{n,m}}$ to wielkość błędu względnego jakim jest obarczony ten sam wynik wykonania *Trapez2_VarY*.

Dokładna wartość całki z przykładu a) jest równa 0.722928 , więc:.

n	m	W_{T2V_y}	$BBT2V_{y_{n,m}}$	$BWT2V_{y_{n,m}}$
2	4	1.18027324965570	0.45734524965570	28.932988815294 %
4	4	0.87973755605211	0.15680955605211	3.4013396727281 %
8	4	0.79191547780437	0.06898747780437	0.6583327930041 %
16	20	0.73230741854138	0.00937941854138	0.0121690530972 %
30	20	0.72673912697612	0.00381112697612	0.0020091473602 %
60	20	0.72507427753583	0.00214627753583	0.0006372013895 %
90	50	0.72342957309980	0.00050157309980	0.0000347995339 %
120	50	0.72332156473382	0.00039356473382	0.0000214258128 %
150	50	0.72327156919528	0.00034356919528	0.0000163280150 %
180	100	0.72305318231451	0.00012518231451	0.0000021676587 %
200	100	0.72304145443267	0.00011345443267	0.0000017805242 %
230	100	0.72302926203467	0.00010126203467	0.0000014183985 %
260	200	0.72297322021213	0.00004522021213	0.0000002828591 %
300	200	0.72296585678509	0.00003785678509	0.0000001982405 %
600	500	0.72293579953250	0.00000779953250	0.0000000084148 %

Tablica 4.1: Rezultaty pomiarów dokładności przybliżania całki a) *uogólnionym wzorem trapezów* w obszarze normalnym względem osi Ox

Zaokrąglona wartość całki z podpunktu b) to 0.2666666666666667 , zatem:.

n	m	W_{T2V_y}	$BBT2V_{y_{n,m}}$	$BWT2V_{y_{n,m}}$
2	4	0.38671875000000	0.12005208333333	5.4046885172523 %
4	4	0.30346679687500	0.03680013020833	0.5078435937562 %
8	4	0.28215026855469	0.01548360188802	0.0899032227850 %
16	20	0.26873760223389	0.00207093556722	0.0016082902963 %
30	20	0.26749438950617	0.00082772283950	0.0002569219121 %
60	20	0.26712360767747	0.00045694101080	0.0000782981578 %
90	50	0.26677487998090	0.00010821331423	0.0000043912955 %
120	50	0.26675087015599	0.00008420348932	0.0000026588354 %
150	50	0.26673975694923	0.00007309028256	0.0000020033210 %
180	100	0.26669371806466	0.00002705139799	0.0000002744168 %
200	100	0.26669111163889	0.00002444497222	0.0000002240838 %
230	100	0.26668840200050	0.00002173533383	0.0000001771593 %
260	200	0.26667657469442	0.00000990802775	0.0000000368134 %
300	200	0.26667493832785	0.00000827166118	0.0000000256576 %
600	500	0.26666843457003	0.00000176790336	0.0000000011721 %

Tablica 4.2: Rezultaty pomiarów dokładności przybliżania całki b) *uogólnionym wzorem trapezów* w obszarze normalnym względem osi Ox

Analizując otrzymane powyżej wyniki zauważamy, że dla obydwu przypadków pierwsze trzy pomiary zwracały wyniki dosyć mocno odbiegające od rzeczywistych (przykł. a)) lub zaokrąglonych (przykł. b)). Ich błędy względne wynosiły od 0.09% do 28.93%. Jednakże każde z następnych wywołań procedury sprawiało, że otrzymany rezultat można było już uznać za akceptowalne przybliżenie. Zwróćmy dodatkowo uwagę na to, że ostatecznie dla przykładu a) pomimo przyjęcia dużych wartości $n = 600$ i $m = 500$ podziałów przedziałów całkowania - wynik w pewnym stopniu stale odbiegał od dokładnego. Należałoby wykonać kolejne iteracje, by nie zauważyć różnicy na 5 i 6 miejscu po przecinku. Wartość całki z przykładu b) możemy jedynie zaokrąglić, zatem ostateczna forma tego zaokrąglenia jest kwestią indywidualnego wyboru. Zauważymy jedynie, że każde kolejne wykonanie *Trapez2_VarY* zbliża nas do poszukiwanej wielkości 2.6(6).

4.2 Wzór Simpsona dla obszaru normalnego względem osi Ox

Podobnie jak miało to miejsce w poprzednich rozdziałach, zaprezentujemy również i teraz intuicyjny do wzoru (4.4) *wzór Simpsona* dla obszaru normalnego względem Ox .

Początkowo zdefiniujmy pewien obszar $G = \{a \leq x \leq b; c(x) \leq y \leq d(x)\}$, normalny względem osi Ox (patrz str. 33). Dodatkowo niech $f(x, y)$ będzie funkcją określoną na owym obszarze. W podrozdziale tym przedstawimy *wzór Simpsona* dla całek podwójnych następującej postaci:

$$I_{V_{yS2}} = \iint_G f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx. \quad (4.5)$$

Przedział całkowania $[a, b]$ podzielmy na $N = 2n$ ($n = 1, 2, \dots$) podprzedziałów $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ ($i = 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2}$), gdzie:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n-1} \leq x_{2n} = b.$$

Każdy węzeł x_i jest postaci $x_i = a + ih_x$ ($i = 0, 1, \dots, 2n = N$), zaś h_x określamy jako $h_x = \frac{b-a}{2n}$.

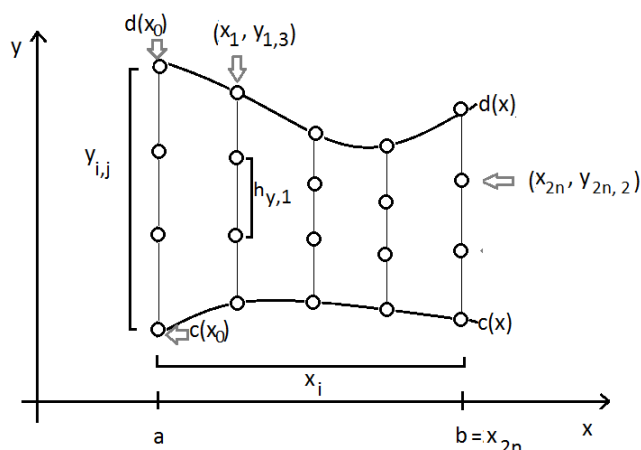
Kolejno dla każdego $x_i \in [a, b]$ wyróżnimy przedziały głównie różnej długości $[c(x_i), d(x_i)]$, zależne od funkcji $c(x)$ i $d(x)$ oraz argumentu $x = x_i$. Wszystkie

one podzielone zostaną na $M = 2m$ podprzedziałów równej długości $[y_{2i,2j}, y_{2i,2j+1}]$ ($j = 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{2m-1}{2}; i = 0, 1, \dots, n$) spełniających poniższą zależność:

$$c(x_i) = y_{i,0} \leq y_{i,1} \leq y_{i,2} \leq \dots \leq y_{i,2m} = d(x_i).$$

Oznaczenie $y_{i,j}$ rozumiemy będziemy jako $y_{i,j} = c(x_i) + jh_{y,i}$ ($j = 0, 1, \dots, 2m; i = 0, 1, \dots, 2n$), natomiast $h_{y,i} = \frac{d(x_i) - c(x_i)}{2m}$. Zatem tak jak i w przypadku wzoru Trapezów wielkość kroku $h_{y,i}$ jest zależna od tego dla jakiego argumentu x_i jest ona wyliczana.

Znaczenie opisanych wyżej zmiennych oraz logikę podziału obszaru całkowania na potrzeby wykorzystania wzoru Simpsona prezentuje poniższa grafika:



Rysunek 4.2: Podział obszaru całkowania dla metody Simpsona - obszar normalny względem Ox

Idąc takim samym tokiem rozumowania jak w przypadku wzoru Trapezów w obszarze normalnym względem Ox (patrz str. 56) - zapiszmy całkę z równania (4.5) w nieco innej formie tak, by można było ją wygodnie przedstawić w postaci pewnej sumy. Zatem niech

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy, \quad (4.6)$$

co powoduje, że

$$I_{V_{yS2}} = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b F(x) dx. \quad (4.7)$$

Stosując teraz *uogólniony wzór Simpsona* (2.17) dla powyższej całki I_{VyS2} , uzyskujemy wyrażenie będące przepisem na przybliżenie jej wartości, tzn.:

$$I_{VyS2} \approx \frac{h_x}{3} (F(x_0) + 4F(x_1) + 2F(x_2) + 4F(x_3) + 2F(x_4) + \dots + 4F(x_{2n-1}) + F(x_{2n})). \quad (4.8)$$

Każdy ze składników $F(x_i)$, ($i = 0, 1, \dots, 2n$) jest rozumiany jako [13]:

$$F(x_i) = \int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(x_i, y) dy \approx \frac{h_{y,i}}{3} (f(x_i, y_{i,0}) + 4f(x_i, y_{i,1}) + 2f(x_i, y_{i,2}) + 4f(x_i, y_{i,3}) + \dots + 2f(x_i, y_{i,2m-2}) + 4f(x_i, y_{i,2m-1}) + f(x_i, y_{i,2m})) \quad (4.9)$$

Po połączeniu (4.8) i (4.9) dostajemy *uogólniony wzór Simpsona* dla całki podwójnej po obszarze normalnym względem osi Ox :

$$I_{VyS2} \approx \frac{h_x}{3} \left\{ \frac{h_{y,0}}{3} \left(f(x_0, y_{0,0}) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_0, y_{0,2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x_0, y_{0,2j+2}) + f(x_0, y_{0,2m}) \right) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_{y,2i+1}}{3} \left(f(x_{2i+1}, y_{2i+1,0}) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2i+1}, y_{2i+1,2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x_{2i+1}, y_{2i+1,2j+2}) + f(x_{2i+1}, y_{2i+1,2m}) \right) + 2 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{h_{y,2i+2}}{3} \left(f(x_{2i+2}, y_{2i+2,0}) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2i+2}, y_{2i+2,2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x_{2i+2}, y_{2i+2,2j+2}) + f(x_{2i+2}, y_{2i+2,2m}) \right) + \frac{h_{y,2n}}{3} \left(f(x_{2n}, y_{2n,0}) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2n}, y_{2n,2j+1}) + 2 \sum_{j=0}^{m-2} f(x_{2n}, y_{2n,2j+2}) + f(x_{2n}, y_{2n,2m}) \right) \right\} \quad (4.10)$$

Bazując na doświadczeniach z poprzedniego podrozdziału wiemy, że ręczne wyliczenie przybliżonej wartości przykładowej całki w oparciu o wzór (4.10) byłoby bardzo pracochłonne. Podejźmy zatem do naszego problemu w nieco inny sposób [15]. Wykorzystamy *uogólniony wzór Simpsona* (2.17) oraz przedstawione przekształcenia całki podwójnej (4.5), które opisują równania (4.6) i (4.7). To wszystko zobrazuje nam poniższy przykład:

Przykład 8. (Obliczanie całki podwójnej w obszarze normalnym względem osi Ox przy wykorzystaniu *uogólnionego wzoru Simpsona*)

Wykorzystując *uogólniony wzór Simpsona* obliczmy przybliżoną wartość całki podwójnej

$$P = \int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx,$$

dla przypadku, gdzie przedział całkowania po zmiennej x będzie podzielony na $N = 2$, natomiast po zmiennej y na $M = 4$ podprzedziały.

Niech całka wyjściowa przyjmie postać $P = \int_0^1 F(x) dx$, przy czym $F(x) = \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy$. Do obliczeń potrzebowali będziemy początkowo rozwinięcia (2.17) dla trzech pierwszych punktów węzłowych x_0, x_1, x_2 tzn.:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h_x}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) , \quad h = h_x = \frac{b-a}{N}, \quad x_i = x_0 + N \cdot h_x.$$

Podstawiając $a = 0$, $b = 1$, $N = 2$, wielkość kroku pomiędzy węzłami $h = h_x = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ oraz wartości węzłów $x_0 = a = 0$, $x_1 = x_0 + h_x = \frac{1}{2}$, $x_2 = x_0 + 2 \cdot h_x = b = 1$ otrzymamy:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right).$$

Używamy teraz powyższego wyrażenia do oszacowania wielkości całki P , gdy całkowanie odbywa się po zmiennej x :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx = \int_0^1 F(x) dx \approx \frac{1}{6} \left(F(0) + 4F\left(\frac{1}{2}\right) + F(1) \right) \\ &\approx \frac{1}{6} \left(\int_0^0 (0^2 + y^3) dy + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^3 \right) dy + \int_1^2 (1^2 + y^3) dy \right) \\ &\approx \frac{1}{6} \left(4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{4} + y^3 \right) dy + \int_1^2 (1 + y^3) dy \right). \end{aligned}$$

Jak widać, nasze przybliżenie jest nadal w postaci funkcji. W związku z tym wykorzystajmy ponownie *uogólniony wzór Simpsona* (2.17), jednak teraz do całkowania po zmiennej y . Potrzebne będzie nam jego rozwinięcie dla pięciu pierwszych węzłów (chcemy uzyskać $M = 4$ podprzedziały). Jako, że granice całkowania po y są funkcjami $c(x) = x$ i $d(x) = 2x$, to wielkości kroków zostaną uzależnione od wartości tych funkcji w punktach węzłowych x_i . Dla naszego przypadku będą to $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$. Zatem niech $h_{y,i} = \frac{d(x_i) - c(x_i)}{M} = \frac{x_i - 2x_i}{4} = \frac{x_i}{4}$, wtedy $h_{y,1} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$ będzie rozmiarem kroku między węzłami dla $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{4} + y^3 \right) dy$ zaś $h_{y,2} = \frac{1}{4}$ dla $\int_1^2 (1 + y^3) dy$.

Ogólna postać przybliżenia całki P , gdy całkujemy po zmiennej y to:

$$\int_a^b f(y)dy = \int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(y)dy \approx \frac{h_{y,i}}{3} (f(y_{i,0}) + 4f(y_{i,1}) + 2f(y_{i,2}) + 4f(y_{i,3}) + f(y_{i,4})), \quad (4.11)$$

gdzie $y_{i,0}$ oznacza węzeł y z indeksem 0 wyznaczony w zależności od wielkości x_i . Zaznaczmy też, że $y_{i,0}$ jest odpowiednikiem x_0 z wzoru (2.17), $y_{i,1}$ odpowiada x_1 itd.. Wielkości węzłów $y_{i,j}$ wyznaczymy korzystając z równości $y_{i,j} = c(x_i) + jh_{y,i}$ gdzie $(i \in \{1, 2\}, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\})$.

Zatem:

$$\begin{aligned} y_{1,0} &= \frac{1}{2}, y_{1,1} = \frac{5}{8}, y_{1,2} = \frac{6}{8}, y_{1,3} = \frac{7}{8}, y_{1,4} = 1, \\ y_{2,0} &= 1, y_{2,1} = \frac{5}{4}, y_{2,2} = \frac{6}{4}, y_{2,3} = \frac{7}{4}, y_{2,4} = 2. \end{aligned}$$

Wykorzystując (4.11) oraz powyższe punkty $y_{i,j}$ do przybliżenia P po y otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P &\approx \frac{1}{6} \left(4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{4} + y^3 \right) dy + \int_1^2 (1 + y^3) dy \right) \\ &\approx \frac{1}{6} \left\{ 4 \cdot \frac{h_{y,1}}{3} [f(y_{1,0}) + 4f(y_{1,1}) + 2f(y_{1,2}) + 4f(y_{1,3}) + f(y_{1,4})] + \right. \\ &\quad \left. \frac{h_{y,2}}{3} [f(y_{2,0}) + 4f(y_{2,1}) + 2f(y_{2,2}) + 4f(y_{2,3}) + f(y_{2,4})] \right\} \\ &\approx \frac{1}{6} \left\{ 4 \cdot \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right) + 4 \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{8} \right)^3 \right) + 2 \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{6}{8} \right)^3 \right) + 4 \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{7}{8} \right)^3 \right) + \left(\frac{1}{4} + 1^3 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left[(1 + 1^3) + 4 \left(1 + \left(\frac{5}{4} \right)^3 \right) + 2 \left(1 + \left(\frac{6}{4} \right)^3 \right) + 4 \left(1 + \left(\frac{7}{4} \right)^3 \right) + (1 + 2^3) \right] \right\} \\ &\approx \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{69}{8} \right) + \frac{1}{12} \cdot 57 \right) \approx \frac{1}{6} (1.4375 + 4.75) \approx 1.03125 \end{aligned}$$

Wartość dokładna liczonej całki P wynosi $P = \int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx = 1$. Zatem błąd względny jest równy:

$$BW = \frac{|1 - 1.03125|}{1} * 100\% = 0.03125 * 100\% = 3.125\%$$

Jest on dosyć znaczący i z pewnością nieco lepszy wynik otrzymalibyśmy, gdybyśmy przedziały całkowania podzielili na większą liczbę podprzedziałów.

Dokładność wzoru (4.10) sprawdzimy dzięki poniższej implementacji algorytmu wykonanej w języku *Maple*.

Procedura 10. (Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych w obszarach normalnych względem osi Ox przy użyciu *uogólnionego wzoru Simpsona*)

```
Simpson2_VarY := proc (a, b, N, M)
  local hx, hy, PoczKoniecP, NieParzP, ParzP, i, j, s1, s2, s3,
    ix, yi, Ps, WynCzesciowy, S2vY, WynikS2vY, m, n;
  if (N < ceil(N) or floor(N) < N or (mod(N, 2) = 1 and 0 < N) or N <= 0) or
    (M < ceil(M) or floor(M) < M or (mod(M, 2) = 1 and 0 < M) or M <= 0)
  then ERROR('Ostatnie dwa parametry musza byc liczba natur. postaci \2k')
  else
    n := (1/2)*N;
    m := (1/2)*M;
    hx := (1/2)*(b-a)/n;
    PoczKoniecP := 0;
    ParzP := 0;
    NieParzP := 0;
    for i from 0 to 2*n
      do
        ix := a+i*hx;
        s1 := f(ix, c(ix))+f(ix, d(ix)); #suma pierwszy+ ostatni wyraz
        s2 := 0; #suma wyrazow dla parzystego i
        s3 := 0; #suma wyrazow dla nieparzystego i
        hy := (1/2)*(d(ix)-c(ix))/m; #wielk. kroku miedzy y dla pkt. ix
        for j from 1 to 2*m-1
          do
            yi := c(ix)+j*hy; #wartosc kolejnych yi dla i-tego x
            Ps := f(ix, yi); #wartosc calkowanej f-kcji w f(ix,yi)
            if mod(j, 2) = 0 #podzial wartosci funkcji pomiedzy
              #parzyste i nieparz. wspolczynniki j
            then s2 := s2+Ps;
            else s3 := s3+Ps;
            end if;
          end do;
        end for;
      end do;
    end for;
  end if;
end proc;
```

```

WynCzesciowy := (1/3)*hy*(s1+2*s2+4*s3);
  if i = 0 or i = 2*n
    then PoczKoniecP := PoczKoniecP+WynCzesciowy;
  elif mod(i, 2) = 0 and 0 < i and i < 2*n
    then ParzP := ParzP+WynCzesciowy;
  elif mod(i, 2) = 1 and 0 < i and i < 2*n
    then NieParzP := NieParzP+WynCzesciowy;
  end if;
end do;

S2vY := (1/3)*hx*(PoczKoniecP+2*ParzP+4*NieParzP);
WynikS2vY := evalf(S2vY);
end if;
end proc;

```

Przedstawiona powyżej implementacja jest bardzo zbliżona do *Procedury 9*. Tak samo całkowanie po y odbywa się w zmiennych granicach opisanych za pomocą funkcji $c(x)$ i $d(x)$, zatem obydwie one muszą być zadeklarowane przed wywołaniem *Simpson2_VarY*.

Algorytm rozpoczyna się standardowo od nagłówka i podania parametrów wejściowych, gdzie a, b to kolejno dolna i górna granica całkowania po zmiennej x . N, M to odpowiednio ilość podprzedziałów na które podzielone zostaną przedziały całkowania po zmiennej x i y . Następną jest deklaracja zmiennych pomocniczych, oraz sprawdzenie poprawności parametrów N i M - zgodnie z założeniem *uogólnionego wzoru Simpsona* muszą być one liczbami naturalnymi i parzystymi. Jeżeli walidacja N i M przebiegnie prawidłowo to algorytm rozpocznie wykonywanie głównej części kodu rozpoczynając od ustawienia wartości zmiennych n, m - liczby opisujące ilości sąsiadujących ze sobą dwóch nie powtarzających się podprzedziałów na które podzielono kolejno obszar całkowania po zmiennej x i y . h_x jest odległością pomiędzy następującymi po sobie węzłami x_i . *PoczKoniecP*, *ParzP* i *NieParzP* będą przechowywały wyliczone algorytmem wartości *uogólnionego wzoru Simpsona* dla początkowego i końcowego przedziału oraz parzystych i ostatecznie nieparzystych przedziałów. Zewnętrzna pętla *for* rozpoczyna obliczenia związane bezpośrednio z implementacją wzoru (4.8), której to opis

pominiemy z powodu pozostawionych w kodzie komentarzy. Po wykonaniu obydwu pętli na podstawie *PoczKoniecP*, *ParzP* i *NieParzP* wyznaczany jest ostateczny wynik procedury.

Działanie **Procedury 10** sprawdzimy poprzez wykonanie obliczeń dla poniższych całek:

$$a) \int_0^1 \int_{(x-1)^2}^{4-(x-1)^2} x^3 y dy dx$$

$$b) \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy^2 dy dx$$

Otrzymane wyniki zaprezentujemy w formie tabelarycznej. Tak więc niech N oznacza ilość podziałów przedziału całkowania po zmiennej x , oraz M po zmiennej y . Dodatkowo W_{S2Vy} będzie wynikiem *Simpson2_VarY* dla rosnących wartości parametrów N i M . Niech $BBS2Vy_{N,M}$ opisuje błąd bezwzględny przybliżenia całki podwójnej w obszarze normalnym względem Ox procedurą *Simpson2_VarY*, dla pewnych wartości N i M . Przez $BWS2Vy_{N,M}$ rozumiemy błąd względny obciążającego ten sam wynik wykonania *Simpson2_VarY*.

Dokładna wartość całki $\int_0^1 \int_{(x-1)^2}^{4-(x-1)^2} x^3 y dy dx$ jest równa 0.722928, więc:.

N	M	W_{S2Vy}	$BBS2Vy_{N,M}$	$BWS2Vy_{N,M}$
2	4	0.86537885882744	0.14245085882744	19.704709020461 %
4	4	0.74622075889675	0.02329275889675	3.2220025917865 %
8	4	0.72929964393082	0.00637164393082	0.8813663229007 %
16	20	0.72303422870369	0.00010622870369	0.0146942300879 %
30	20	0.72294728180731	0.00001928180731	0.0026671822518 %
60	20	0.72294005232173	0.00001205232173	0.0016671538147 %
90	50	0.72292809870004	0.0000009870004	0.0000136528174 %
120	50	0.72292803345484	0.00000003345484	0.0000046276863 %
150	50	0.72292801562160	0.00000001562160	0.0000021608791 %
180	100	0.72292771871527	0.00000028128473	0.0000389090933 %
200	100	0.72292771666335	0.00000028333665	0.0000391929280 %
230	100	0.72292771498616	0.00000028501384	0.0000394249275 %
260	200	0.72292769590819	0.00000030409181	0.0000420639137 %
300	200	0.72292769531153	0.00000030468847	0.0000421464475 %
600	500	0.72292769339702	0.00000030660298	0.0000424112747 %

Tablica 4.3: Rezultaty pomiarów dokładności przybliżania całki a) uogólnionym wzorem Simpsona w obszarze normalnym względem osi Ox

Zaokrąglona wartość całki $\int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} xy^2 dy dx$ to 0.2666666666666667, zatem:.

N	M	W _{S2V_y}	BBS2V _{y_{N,M}}	BWS2V _{y_{N,M}}
2	4	0.277777777777778	0.011111111111111	4.16666666666662 %
4	4	0.267361111111111	0.000694444444444	0.2604166666650 %
8	4	0.266710069444444	0.000043402777777	0.0162760416638 %
16	20	0.26666937934028	0.00000271267361	0.0010172526038 %
30	20	0.26666688614540	0.00000021947873	0.0000823045238 %
60	20	0.26666668038409	0.00000001371742	0.0000051440325 %
90	50	0.26666666937628	0.00000000270961	0.0000010161038 %
120	50	0.26675087015599	0.00000000085734	0.0000003215025 %
150	50	0.26666666752401	0.00000000035116	0.0000001316850 %
180	100	0.26666666683602	0.00000000016935	0.0000000635063 %
200	100	0.26666666677778	0.00000000011111	0.0000000416663 %
230	100	0.26666666673019	0.00000000006352	0.0000000238200 %
260	200	0.26666666670557	0.00000000003890	0.0000000145875 %
300	200	0.26666666668861	0.00000000002194	0.0000000082275 %
600	500	0.26666666666804	0.00000000000137	0.0000000000514 %

Tablica 4.4: Rezultaty pomiarów dokładności przybliżania całki b) *uogólnionym wzorem Simpsona* w obszarze normalnym względem osi Ox

Analizując powyższe pomiary, można zaobserwować pewną własność. Zarówno w pierwszym jak i w drugim przypadku odpowiednio dokładny wynik uzyskaliśmy już dla $N = 150$ i $M = 50$. Jednakże co najdziwniejsze dla przykładu a) przyjęcie wielkości parametru $M > 50$ skutkowało stałym zwiększaniem się błędu względnego i bezwzględnego. Nie miało to jednak zbyt wielkiego wpływu na wielkość wyniku. Sytuacja taka zaistniała jak można domniemać z powodu postaci wykładniczej funkcji podcałkowej oraz tak zwanej kumulacji błędu pomiaru.

Zestawiając ze sobą wyniki dla tych samych całek zawarte w *Tablicy 4.1* i *Tablicy 4.3* oraz wartości z *Tablicy 4.2* i *Tablicy 4.4* zauważyć można, że *procedura 10* zwraca wyniki z błędami o nawet sześć rzędów wielkości mniejszymi niż *procedura 9* ! Oznacza to, że *uogólniony wzór Simpsona* dla całek podwójnych w obszarze normalnym względem osi Ox pozwala uzyskać znacznie dokładniejsze przybliżenie niż *uogólniony wzór trapezów*, przy zachowaniu takiej samej liczby wywołań obydwu procedur.

4.3 Wzór trapezów dla obszaru normalnego względem osi Oy

Rozważmy obszar $T = \{a \leq y \leq b; c(y) \leq x \leq d(y)\}$, normalny względem osi Oy (definicja na str. 33) i funkcję $f(x, y)$ określoną na T . Podajmy wzór trapezów dla całek postaci

$$I_{VxT2} = \iint_T f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{c(y)}^{d(y)} f(x, y) dx dy. \quad (4.12)$$

Przedział $[a, b]$ podzielmy na n podprzedziałów $[y_i, y_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), gdzie dla dowolnego y_i zachodzi:

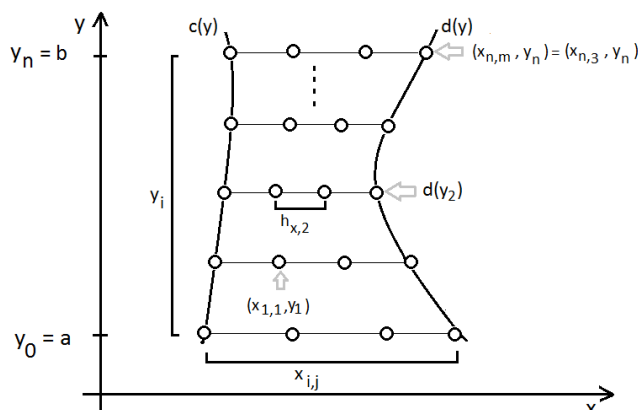
$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n-1} \leq y_n = b.$$

Wszystkie węzły y_i można przedstawić jako $y_i = a + ih_y$ ($i = 0, 1, \dots, n$), gdzie $h_y = \frac{b-a}{n}$.

Dodatkowo dla każdego $y_i \in [a, b]$ wyróżnijmy przedziały $[c(y_i), d(y_i)]$, zazwyczaj różnej długości, uzależnione od postaci funkcji $c(y)$, $d(y)$ i argumentu $y = y_i$. Każdy z nich podzielony zostanie na dokładnie m równych podprzedziałów $[x_{i,j}, x_{i,j+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m-1$), gdzie $x_{i,j}$ spełniają zależność:

$$c(y_i) = x_{i,0} \leq x_{i,1} \leq x_{i,2} \leq \dots \leq x_{i,m} = d(y_i).$$

Ponadto, przez $x_{i,j}$ rozumiemy $x_{i,j} = c(y_i) + jh_{x,i}$ ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$), przy czym $h_{x,i} = \frac{d(y_i) - c(y_i)}{m}$. Analogicznie jak miało to miejsce dla obszarów normalnych względem O*x* wielkość kroku $h_{x,i}$ jest uzależniona od y_i - co widać na zamieszczonym rysunku 4.3.



Rysunek 4.3: Podział obszaru całkowania dla metody Trapezów - obszar normalny względem Oy

Podobnie jak zrobiliśmy to dla całki podwójnej po obszarze normalnym względem Ox liczonej przy pomocy wzoru Trapezów i wzoru Simpsona, tak i teraz całkę z równania (4.12) przekształćmy do nieco innej formy. Niech

$$F(y) = \int_{c(y)}^{d(y)} f(x, y) dx,$$

wtedy

$$I_{VxT2} = \int_a^b F(y) dy.$$

Po zastosowaniu złożonego wzoru Trapezów (2.11) dla I_{VxT2} otrzymamy wstępną postać przybliżenia wartości całki I_{VxT2} , tzn.:

$$I_{VxT2} \approx \frac{h_y}{2} (F(y_0) + 2F(y_1) + 2F(y_2) + \dots + 2F(y_{n-1}) + F(y_n)). \quad (4.13)$$

Dowolny ze składników $F(y_i)$, ($i = 0, 1, \dots, n$) jest rozumiany jako:

$$F(y_i) = \int_{c(y_i)}^{d(y_i)} f(x, y_i) dx \approx \frac{h_{x,i}}{2} (f(x_{i,0}, y_i) + 2f(x_{i,1}, y_i) + 2f(x_{i,2}, y_i) + \dots + 2f(x_{i,m-1}, y_i) + f(x_{i,m}, y_i)) \quad (4.14)$$

Łącząc wzory (4.13) i (4.14) dostajemy *uogólniony wzór trapezów* dla całki podwójnej po obszarze normalnym względem osi Oy :

$$I_{VxT2} \approx \frac{h_y}{2} \left\{ \frac{h_{x,0}}{2} \left(f(x_{0,0}, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{0,j}, y_0) + f(x_{0,m}, y_0) \right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_{x,i}}{2} \left(f(x_{i,0}, y_i) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{i,j}, y_i) + f(x_{i,m}, y_i) \right) + \frac{h_{x,n}}{2} \left(f(x_{n,0}, y_n) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{n,j}, y_n) + f(x_{n,m}, y_n) \right) \right\} \quad (4.15)$$

Jak już się przekonaliśmy podczas rozwiązywania Przykładu 7, wykonanie ręcznych obliczeń z zastosowaniem wzoru (4.15) byłoby tak samo skomplikowane i pracochłonne. W związku z tym, by ułatwić sobie zadanie wykorzystajmy napisaną w tym celu procedurę w języku *Maple*, będącą implementacją przybliżenia (4.15).

Procedura 11. (Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych w obszarach normalnych względem osi Oy przy użyciu uogólnionego wzoru trapezów)

```

Trapez2_VarX := proc (a, b, n, m)
  local hx, hy, PoczKoniecP, PozostaleP, i, j, s1, s2,
        ix, yi, Ps, WynCzesciowy, WynikT2vX, T2vX;
  if n < ceil(n) or floor(n) < n or n <= 0 or
    m < ceil(m) or floor(m) < m or m <= 0
  then ERROR('Ostatnie dwa parametry musza byc liczba natur. postaci \2k');
  else
    hy := (b-a)/n;
    PoczKoniecP := 0;
    PozostaleP := 0;

    for i from 0 to n
      do
        yi := a+i*hy;
        s1 := f(c(yi), yi)+f(d(yi), yi); #suma pierwszy+ostatni wyraz
        s2 := 0;                        #suma wyrazow dla parzystego i
        hx := (d(yi)-c(yi))/m; #wielk. kroku pomiedzy x-ami dla i-tego pkt y
        for j from 0 to m-1
          do
            ix := c(yi)+j*hx; #wartosc kolejnych ix dla zadanego i-tego y
            Ps := f(ix, yi);  #wartosc calkowanej f-kcji f w (ix,yi)
            s2 := s2+Ps
          end do;
        WynCzesciowy := (1/2)*hx*(s1+2*s2);
        if i = 0 or i = n
          then PoczKoniecP := PoczKoniecP+WynCzesciowy;
        elif 0 < i and i < n
          then PozostaleP := PozostaleP+WynCzesciowy;
        end if;
      end do;
    end do;
  end do;
end do;

```

```

T2vX := (1/2)*hy*(PoczKoniecP+2*PozostaleP);
WynikT2vX := evalf(T2vX);
end if;
end proc;

```

Powyższy algorytm powstał po przekształceniu znanego nam już kodu procedury 9. Główną różnicą jest to, że tym razem obsługujemy obszary normalne względem osi Oy , zaś sama procedura jest oparta głównie o wzór (4.15) oraz podane definicje y_i , $x_{i,j}$ (ix w kodzie), h_y oraz $h_{x,i}$ (zmienna hx). Parametry wejściowe to a, b - czyli początek i koniec przedziału całkowania po zmiennej y . Kolejno n i m to ilości podziałów przedziałów całkowania po zmiennej y i x . Bardziej szczegółowy opis implementacji uznajemy tym razem za zbędny.

Wykorzystując procedurę 11 wyznaczmy przybliżone wartości całek:

$$a) \int_1^2 \int_y^{2y} \frac{x+y}{\sqrt{y}} dx dy$$

$$b) \int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^y xy^3 dx dy$$

zmieniając w każdej z kolejnych iteracji wielkości parametrów n i m .

Wykonane za chwilę pomiary zgromadzimy w tabelkach. Niech kolumna z nazwą n zawiera (zgodnie z powyżej zamieszczonym opisem) ilość podziałów przedziału całkowania po zmiennej y , z nagłówkiem m po zmiennej x . Ponadto W_{T2Vx} będzie wynikiem *Trapez2_VarX* dla coraz to większych n i m . W $BBT2Vx_{n,m}$ zostaną zawarte błędy bezwzględne przybliżenia całki podwójnej w obszarze normalnym względem Oy dla określonych n i m . W końcu $BWT2Vx_{n,m}$ będzie wielkością błędu względnego obciążającego wynik wykonania *Trapez2_VarX*.

Przybliżona wartość całki z punktu a) to 4.6568542494923802, zatem:

n	m	W_{T2Vx}	$BBT2V_{x_{n,m}}$	$BWT2V_{x_{n,m}}$
2	4	4.68916358682561	0.03230933733323	0.0224162755153 %
4	4	4.66494109536211	0.00808684586973	0.0014043187228 %
8	4	4.65887657155422	0.00202232206184	0.0000878229445 %
16	20	4.65735986844494	0.00050561895256	0.0000054897687 %
30	20	4.65699807260695	0.00014382311457	0.0000004441859 %
60	20	4.65689020546581	0.00003595597343	0.0000000277619 %
90	50	4.65687022994106	0.00001598044868	0.0000000054838 %
120	50	4.65686323849792	0.00000898900554	0.0000000017351 %
150	50	4.65686000245691	0.00000575296453	0.0000000007107 %
180	100	4.65685824460696	0.00000399511458	0.0000000003427 %
200	100	4.65685748553527	0.00000323604289	0.0000000002249 %
230	100	4.65685669640587	0.00000244691349	0.0000000001286 %
260	200	4.65685616431083	0.00000191481845	0.0000000000787 %
300	200	4.65685568773384	0.00000143824146	0.0000000000444 %
600	500	4.65685460905281	0.00000035956043	0.0000000000028 %

Tablica 4.5: Pomiary dokładności przybliżenia całki a) *uogólnionym wzorem trapezów* w obszarze normalnym względem osi Oy

Wartość całki z punktu b) to 2.15, tak więc:

n	m	W_{T2Vx}	$BBT2V_{x_{n,m}}$	$BWT2V_{x_{n,m}}$
2	4	2.632812499999998	0.482812499999998	10.8422283793596 %
4	4	2.27197265624999	0.12197265624999	0.6919687847757 %
8	4	2.18057250976562	0.03057250976562	0.0434734117846 %
16	20	2.15764808654785	0.00764808654785	0.0027206152485 %
30	20	2.15217579218106	0.00217579218106	0.0002201893775 %
60	20	2.15054397312245	0.00054397312245	0.0000137631050 %
90	50	2.15024176789614	0.00024176789614	0.0000027186844 %
120	50	2.15013599484792	0.00013599484792	0.0000008602139 %
150	50	2.15008703682300	0.00008703682300	0.0000003523446 %
180	100	2.15006044228362	0.00006044228362	0.0000001699195 %
200	100	2.15004895826563	0.00004895826563	0.0000001114843 %
230	100	2.15003701949499	0.00003701949499	0.0000000637415 %
260	200	2.15002896940429	0.00002896940429	0.0000000390338 %
300	200	2.15002175924596	0.00002175924596	0.0000000220216 %
600	500	2.15000543981395	0.00000543981395	0.0000000013764 %

Tablica 4.6: Pomiary dokładności przybliżenia całki b) *uogólnionym wzorem trapezów* w obszarze normalnym względem osi Oy

4.4 Wzór Simpsona dla obszaru normalnego względem osi Oy

Podsumowanie

Celem przyświecającym pisaniu pracy było...

Bibliografia

- [1] Olszowski B., *Wybrane metody numeryczne : podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007, s. 27-37
- [2] Kosma Z., *Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich*, Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Radom 2007, s. 155-160, 262-283
- [3] Cichoń Cz., Politechnika Świętokrzyska, Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego, <http://www.tu.kielce.pl/~sk/epi/epi-metody-obliczeniowe.pdf>, stan z 09.03.2017r.
- [4] Małecka A., Wydział Matematyki i Informatyki UAM, Zakład Teorii Funkcji Rzeczywistych, <http://www.staff.amu.edu.pl/~awoj/OLAT/kwadraturyNC.pdf>, stan z 19.03.2017r.
- [5] Moszyński K., Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, <https://www.mimuw.edu.pl/~kmoszyns/cc.pdf>, stan z 27.03.2017r.
- [6] Ferenstein E., Osłowski B., Winnicki A., Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych, kurs *Analiza Matematyczna*, <http://edu.pjwstk.edu.pl/wyklady/am/scb/main79.html>, stan z 15.03.2017r.
- [7] Orchel M., Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie, <http://home.agh.edu.pl/~morchel/files/mownit/zajecia4/zajecia4-mownit.pdf>, stan z 11.03.2017r.
- [8] Bozorgmanesh A. R., *Int. J. Industrial Mathematics* Vol. 1, No. 2 (2009) str. 175-181, http://ijim.srbiau.ac.ir/article_2021_227340ff28516b33b11f8a4436633fc2.pdf, stan z 17.06.2017r.

- [9] Tănase D., BULETINUL Universității Petrol – Gaze din Ploiești, Vol. LIX No. 1/2007, Seria Matematică - Informatică - Fizică, str. 7-12 , http://bulletin-mif.unde.ro/docs/20071/Buletin_UPG_MIF_Nr1_2007-02.pdf, stan z 17.06.2017r.
- [10] Nagel J.R., Introduction to Numerical Integration, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Utah <http://www.ece.utah.edu/~ece6340/LECTURES/Jan30/Numerical%20Integration.pdf>, stan z 02.07.2017r.
- [11] Keffer D., Advanced Mathematics for Engineers, Department of Chemical Engineering, University of Tennessee at Knoxville http://utkstair.org/clausius/docs/che505/pdf/IE_eval_N-Dints.pdf, stan z 02.07.2017r.
- [12] Mathews J.H., California State Univ. Fullerton, <http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/n2003/SimpsonsRule2DMod.html>, stan z 02.07.2017r.
- [13] Runborg O., Kungliga Tekniska Högskolan, Matematisk och numerisk analys II, <https://www.kth.se/social/files/56a4f0e2f27654626ce0020f/Ant-Integration.pdf>, stan z 16.09.2017r.
- [14] Mahaffy J., Computational Sciences Research Center, Department of Mathematics, Numerical Analysis and Computing (Lecture Notes 09), <http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/s10/math541/>, stan z 16.09.2017r.
- [15] Lambers J. V., The University of Southern Mississippi, Department of Mathematics, Numerical Analysis I, <http://www.math.usm.edu/lambers/mat460/fall09/lecture32.pdf>, stan z 16.04.2018r.

Spis procedur w języku Maple

- [1] Wyznaczanie przybliżonych wartości całek pojedynczych metodą trapezów (str. 21)
- [2] Wyznaczanie błędu przybliżenia dla metody trapezów (całka pojedyncza, str. 23)
- [3] Wyznaczanie najmniejszej liczby n podziałów przedziału całkowania tak, by wynik był obciążony błędem nie większym niż zadany (Metoda trapezów, całka pojedyncza, str. 24)
- [4] Wyznaczanie przybliżonych wartości całek pojedynczych metodą *Simpsona* (str. 29)
- [5] Wyznaczanie błędu przybliżenia dla metody *Simpsona* (całka pojedyncza, str. 30)
- [6] Wyznaczanie najmniejszej liczby N podziałów przedziału całkowania tak, by wynik był obciążony błędem nie większym niż zadany (Metoda *Simpsona*, całka pojedyncza, str. 32)
- [7] Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych po obszarach normalnych przy użyciu uogólnionego wzoru trapezów (str. 39)
- [8] Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych po obszarach normalnych przy użyciu uogólnionego wzoru *Simpsona* (str. 50)
- [9] Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych w obszarach normalnych względem osi Ox przy użyciu uogólnionego wzoru trapezów (str. 58)
- [10] Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych w obszarach normalnych względem osi Ox przy użyciu uogólnionego wzoru *Simpsona* (str. 67)
- [11] Wyznaczanie przybliżonych wartości całek podwójnych w obszarach normalnych względem osi Oy przy użyciu uogólnionego wzoru trapezów (str. 73)