LINEARNA ALGEBRA

študijsko gradivo: tedenski izročki za predavanja

Polona Oblak

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 2023

Linearna algebra	**1. in 2. teden**
Vektorji v $\mathbb{R}^3$, 1. del	

1. Novo definirani pojmi

- *Vektorji*. *Krajevni vektor*. *Ničelni vektor*.
- *Množenje vektorja s skalarjem*. *Nasprotni vektor*. *Kolinearnost*.
- *Seštevanje* vektorjev, *linearne kombinacije* vektorjev (geometrijski in algebraični pomen).
- *Enačba premice*.
- Posnetek predavanj 2020/21, ki predstavi zgoraj omenjene pojme.
- *Skalarni produkt*
  - Definicija skalarnega produkta, video.
  - Lastnosti skalarnega produkta, video.
  - *Dolžina vektorja*, *enotski* vektor, primer, video.
  - Igrajte se sami z demonstracijo Wolfram demonstrations.
  - *Kot* med vektorjema, *pravokotnost* vektorjev, video.
  - Primer: Dane so točke $A(1,2,3)$, $B(2,2,1)$, $C(3,1,c)$ v $\mathbb{R}^3$.
    (1) Določite koordinato c točke C tako, da bo $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik s pravim kotom pri oglišču A.
    (2) Določite kot β pri oglišču B.
    (Rešitev).
  - ↯ Naloga 1: Naj vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ dolžin $||\vec{a}|| = 2$ in $||\vec{b}|| = 3$ oklepata kot $\frac{\pi}{4}$. Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a}+\vec{b}$ ter $\vec{a}-\vec{b}$.
  - *Pravokotna projekcija*, video.
  - ↯ Naloga 2: V trikotniku z oglišči $A(1,2,3)$, $B(2,2,1)$ in $C(3,1,4)$ določite koordinate nožišča višine na strancino BC.
- *Vektorski produkt*
  - Definicija vektorskega produkta, primer in dve lastnosti, video.
  - Geometrijske lastnosti vektorskega produkta.
    - $\vec{a}\times\vec{b}$ je pravokoten na $\vec{a}$ in na $\vec{b}$, video.
    - Dolžina vektorskega produkta $\vec{a}\times\vec{b}$ je enaka ploščini paralelograma, napetega na $\vec{a}$ in $\vec{b}$, video.
    - Smer vektorja $\vec{a}\times\vec{b}$ je določena s pravilom desnosučnega vijaka, oziroma pravilom desne roke: postavite iztegnjeno dlan v smeri prvega vektorja ($\vec{a}$), tako, da lahko pokrčite vse prste razen palce proti drugemu vektorju ($\vec{b}$). Če vam to uspe, potem palec kaže v smeri vektorskega produkta $\vec{a}\times\vec{b}$, video.
  - Igrajte se sami z demonstracijo Wolfram demonstrations.

- ϟ Naloga 3: Uporabite definicijo vektorskega produkta, da za poljubne vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ter $\alpha \in \mathbb{R}$ pokažete distributivnost

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

  ter homogenost

$$\vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\, \vec{a} \times \vec{b} = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$$

  vektorskega produkta. (Dokaz je malce tehničen in ga je mogoče narediti tako, da zapišemo vsako od strani po komponentah.)

- *Enačba ravnine*
  - Izpeljava enačbe, video.
  - Primer: Napišite enačbo ravnine, ki poteka skozi točke $A(-1, 2, -1)$, $B(2, -1, 2)$, $C(0, 0, -1)$. (Rešitev.)
  - Igrajte se sami z demonstracijo Wolfram demonstrations.
  - ϟ Naloga 4: Naj bo Σ ravnina z normalo $\vec{n}$ in naj točka T_0 leži na ravnini Σ. Naj točka A **ne** leži na ravnini Σ.
    (1) Narišite skico.
    (2) Dopolnite poved: Razdalja točke A do ravnine Σ je enaka dolžini projekcije vektorja _________ na vektor _________.
    (3) Kako bi s pomočjo točk A, T_0 ter normale $\vec{n}$ izračunali kot med vektorjem $\overrightarrow{T_0A}$ in ravnino Σ?
    (4) Izračunajte razdaljo točke A do ravnine Σ.
    (5) Kaj vam pove predznak skalarnega produkta $\overrightarrow{T_0A} \cdot \vec{n}$ o legi točke A?
- *Mešani produkt*
  - Definicija mešanega produkta video.
  - ϟ Naloga 5: S pomočjo lastnosti skalarnega in vektorskega produkta pokažite, da velja

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

    (Pri tem se izognite računanju produktov po komponentah.)
  - Absolutna vrednost mešanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, video.
  - ϟ Naloga 6: Enotska vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\frac{\pi}{4}$. Izračunajte prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b}$ ter $\vec{a} \times \vec{b}$.

2. Kje si še lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 1.
(2) Polona Oblak: Matematika, Poglavje 5.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 1.
(4) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Chapter 12.
(5) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Chapter 1.
(6) 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Vectors, what even are they?

(7) 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Cross product

3. Ali razumem snov?

↯(1) Naj bo premica p v $\mathbb{R}^3$ podana z

$$p: \ \frac{x+1}{6} = \frac{y-4}{3} = \frac{1-z}{2}$$

Katere od naslednjih trditev so resnične?

(a) Vektor $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ je vzporeden s premico p.

(b) Vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ je vzporeden s premico p.

(c) Vektor $\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ je vzporeden s premico p.

(d) Točka $(6, 3, -2)$ leži na premici p.

(e) Točka $(-1, 4, 1)$ leži na premici p.

↯(2) Ali se premici p in q v $\mathbb{R}^3$ podani z

$$p: \ \frac{x+1}{6} = \frac{y-4}{3} = \frac{1-z}{2} \quad \text{in} \quad q: \ x+1 = \frac{z-1}{2}, \ y = 4$$

sekata ali sta mimobežni?

↯(3) Drži ali ne drži?

(a) Ali obstajata enotska vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$, za katera je $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$?

(b) Skalarni produkt poljubnih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v $\mathbb{R}^3$, ki oklepata kot $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, je negativno število.

(c) Če je $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}||$, potem sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.

(d) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w})$ za poljubne vektorje $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

(e) Če sta premica p in ravnina Σ v $\mathbb{R}^3$ pravokotni, potem je vsak vektor na premici p vzporeden z normalo na ravnino Σ.

(f) Če sta $u, v \in \mathbb{R}^3$ neničelna vektorja, ki oklepata kot $\frac{\pi}{3}$, potem sta vektorja $\mathrm{proj}_u v$ in $\mathrm{proj}_v u$ nekolinearna.

(g) Ploščina paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{a} - \vec{b}$ je dvakratnik ploščine, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ ter $\vec{b}$.

↯(4) Če sta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ neničelna vektorja, kateri od naslednjih vektorjev so vedno pravokotni na vektor $\vec{a}$?

(a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$

(b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$

(c) $\mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$

(d) $\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$

(e) $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$

(f) $\vec{b} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$

(g) $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$

(h) $\vec{b} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$

ϟ(5) Naj bosta $A(a,b,c)$ in $B(c,a,b)$ poljubni neničelni točki na ravnini $x+y+z=0$. Izračunajte kot med krajevnima vektorjema točk A in B.

ϟ(6) Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna enotska vektorja. Izračunajte prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$ ter $\vec{a}\times\vec{b}$.

$\star$ (7) Uporabite lastnosti skalarnega produkta, da za poljubna vektorja $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ pokažete trikotniško neenakost

$$||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||.$$

$\star$ (8) Naj bodo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ poljubni vektorji v $\mathbb{R}^3$.

(a) Geometrijsko utemeljite, zakaj vektorski produkt ni asociativna operacija.

(b) Geometrijsko razmislite, zakaj je vektor $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(c) Računsko pokažite, da velja formula o dvojnem vektorskem produktu

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

(d) Iz formule o dvojnem vektorskem produktu lahko izpeljete tudi enakost $||\vec{a}\times\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2\,||\vec{b}||^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$.

ϟ(9) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 1.

Linearna algebra	3. teden

Matrike, 1. del. Sistemi linearnih enačb.

4. Novo definirani pojmi

- *Matrike*
  - Definicija, video.
  - Enakost matrik, video.
  - *Množenje matrike s skalarjem* video,
  - *Vsota matrik* in *linearne kombinacije matrik*, video.
    - Primer: Ali lahko zapišemo matriko $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ kot linearno kombinacijo matrik $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$? (Rešitev.)
    - Lastnosti vsote matrik in množenja matrik s skalarji, video.
  - *Množenje matrik*
    - Uvod, video.
    - Definicija, video.
    - Primer: Naj bosta $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ in $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Izračunajte tiste izmed rezultatov, ki jih lahko: AB, BA, $A+B$, $A-2B$.(Delna rešitev.)
    - O lastnostih množenja matrik se bomo več naučili prihodnjič.
  - Igrajte se sami z demonstracijo Wolfram demonstrations.
  - ϟ Naloga 1: Zapišite primere
    (1) neničelnih matrik A in B za katere je $AB = 0$ (s tem ste pokazali, da se lahko neničelni matriki zmnožita v ničelno),
    (2) neničelnih matrik C in D za katere je $CD \neq DC$ (s tem ste pokazali, da množenje matrik ni komutativno),
    (3) neničelnih matrik E, F in G za katere je $EG = FG$, a $E \neq F$ (s tem ste pokazali, da v matričnih enakostih ne morete krajšati skupnega faktorja),
- Sistemi linearnih enačb.
  - Množenje matrik in sistemi linearnih enačb, video.
  - *Sistem linearnih enačb*, *matrika sistema*, *razširjena matrika sistema*, video.
  - Gaussova eliminacija, video.
  - Primer Gaussove eliminacije (linearni sistem, ki ima rešitev), video.

- Primer Gaussove eliminacije (linearni sistem, ki nima rešitve), video.
- *Vrstično stopničasta oblika* matrike, *pivoti*, *rang* matrike, video.

ϟ Naloga 2: Zapišite primer neničelne matrike

(1) A, katere rang je enak številu njenih neničelnih vrstic.
(2) B, katere rang je enak številu njenih neničelnih stolpcev.
(3) C, katere rang je enak številu stolpcev, a manjši od števila vrstic.
(4) D, katere rang je enak številu vrstic, a manjši od števila stolpcev.
(5) E, katere rang je enak številu vrstic in številu stolpcev.

- *Reducirano vrstično stopničasta oblika* matrike, *glavne* in *proste* neznanke, video.
- Če rešujete sistem linearnih enačb s tremi neznankami, vsaka od enačb določa ravnino v $\mathbb{R}^3$. Poglejte si, kako se ravnine spreminjajo v skladu z elementarnimi Gaussovimi operacijami: Wolfram demonstrations. Poskusite sistem prevesti na reducirano stopničasto obliko in poglejte pripadajoče ravnine.
- Primer Gaussove eliminacije (linearni sistem, ki ima neskončno rešitev), video.
- Homogeni sistem linearnih enačb, video.

5. Kje si še lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 1.
(2) Polona Oblak: Matematika, Poglavje 5.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 1.
(4) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Chapter 12.
(5) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Chapter 1.

6. Ali razumem snov?

ϟ(1) Drži ali ne drži?

(a) Obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ brez ničelnih vrstic in obstaja vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$, za katera ima linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.
(b) Obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ brez ničelnih vrstic in obstaja vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$, za katera ima linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko dve rešitvi.
(c) Rang matrike je enak številu njenih neničelnih vrstic.
(d) Vsaka kvadratna $n \times n$ matrika ima rang enak n.
(e) Za $m \times n$ matriko A velja $\mathrm{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.
(f) Če za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $\mathrm{rank}(A) = n$, potem ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.

(g) Če za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $\operatorname{rank}(A) = n-1$, potem sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev.

↯(2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times 8}$ matrika ranga 5. Katere od naslednjih trditev so resnične?

(a) Matrika A ima vseh pet vrstic neničelnih.
(b) Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ neskončno rešitev.
(c) Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.
(d) Obstaja vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$, za katerega sistem $A\vec{x} = b$ nima rešitev.

↯(3) Naj za matriko $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ velja $\operatorname{rank}(A) = 4$ in naj bosta $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ in $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ takšna vektorja, da je $A\vec{v} = A\vec{w}$. Pokažite, da tedaj velja $\vec{v} = \vec{w}$.

↯(4) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 2.

Matrike in lastnosti matričnih operacij. Inverzna matrika.

7. Novo definirani pojmi

- Lastnosti vsote matrik in množenja matrik s skalarji, video. Za poljubne matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in skalarje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ veljajo naslednje lastnosti.
  - $A + B = B + A$ (komutativnost)
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativnost)
  - *Ničelna matrika*
  $$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$
  velikosti $m \times n$ je matrika, za katero velja $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$. Indeks $m \times n$ bomo opuščali, če bo iz konteksta jasno, kako velika je ničelna matrika O.
  - *Nasprotna matrika* $-A = (-1)A$ je matrika, za katero velja $A+(-A) = (-A) + A = O$
  - $\beta(\alpha A) = (\beta\alpha)A$
  - $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = O$
  - $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ in $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributivnost matričnega množenja s skalarjem čez seštevanje matrik in čez seštevanje skalarjev)
  - ↯ Naloga 1: Ali za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in neničelni skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ velja
    - $\operatorname{rank}(\alpha A) = \alpha \operatorname{rank}(A)$?
    - $\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$?

    Če trditev velja, jo dokažite. Če ne, poiščite protiprimer.
- Lastnosti matričnega množenja.
  - ↯ Naloga 2: Ali za poljubni matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ velja
    - $O_{m\times n} \cdot B = A \cdot O_{n\times p} = O_{m\times p}$?
    - $AB = BA$?
    - $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A) \operatorname{rank}(B)$?

    Če trditev velja, jo dokažite. Če ne, poiščite protiprimer.
  - Matrično množenje je asociativno:
  $$A(BC) = (AB)C$$
  za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$.

- Definicija *potence* matrike. Za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiramo

$$A^0 = I_n$$
$$A^k = A \cdot A^{k-1}$$

- Matrično množenje je distributivno:

$$A(B+C) = AB + AC \text{ in } (A+D)C = AD + DC$$

za $A, D \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$.
- *Identična matrika*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

velikosti $n \times n$ je matrika, za katero velja $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ za vsako $m \times n$ matriko A.

• *Inverz* matrike.
  - Definicija, video.
  - Računanje inverza, video. V njem boste med drugim spoznali algoritem za računanje inverza kvadratne matrike: Inverz obrnljive matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s pomočjo Gaussovih elementarnih operacij izračunamo na naslednji način:
    (1) Zapišemo zelo razširjeno matriko

$$[A \,|\, I_n] \in \mathbb{R}^{n\times 2n},$$

    (2) nato na njej izvajamo Gaussove elementarne operacije.
      (a) V kolikor $\operatorname{rank}(A) < n$, matrika A ni obrnljiva in njen inverz ne obstaja.
      (b) Če je $\operatorname{rank}(A) = n$, potem izvajamo Gaussove elementarne operacije toliko časa, da na prvih n stolpcih pridobimo identično matriko I_n

$$[A \,|\, I_n] \sim \ldots \sim [I_n \,|\, B].$$

      Inverz matrike A je enak $A^{-1} = B$.
  - Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem so naslednje trditve ekvivalentne:
    (1) A je obrnljiva.
    (2) $\operatorname{rank}(A) = n$.
    (3) Homogeni sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ ima le trivialno rešitev $\vec{x} = \vec{0}$.
    (4) Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.

↯ Naloga 3: Izračunajte inverz 3×3 spodnje trikotne matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Diagonalna matrika* je kvadratna matrika, ki ima vse izvendiagonalne elemente enake 0. *Zgornje trikotna matrika* ima vse elemente pod diagonalo enake 0. *Spodnje trikotna matrika* ima vse elemente nad diagonalo enake 0.
- ϟ Naloga 4: Pokažite, da je
  (1) inverz obrnljive diagonalne matrike diagonalna matrike,
  (2) inverz obrnljive zgornje trikotne matrike zgornje trikotna matrika in
  (3) inverz obrnljive spodnje trikotne matrike spodnje trikotna matrika.
- Za obrnljivi matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja
  * $(A^{-1})^{-1} = A$,
  * $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- ϟ Naloga 5: Če sta kvadratni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi in velja $(AB)^2 = A^2B^2$, potem pokažite, da matriki A in B komutirata ($AB = BA$).

• *Transponirana matrika* ali *transponiranka*. video.
- $(A^\top)^\top = A$,
- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$,
- $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$.
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$,
- Inverz transponirane matrike (in transponiranka produkta matrik), video:
  * $(AB)^\top = B^\top A^\top$,
  * $(A^{-1})^\top = \left(A^\top\right)^{-1}$.
- Primer: Naj bosta $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ in $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Izračunajte tiste izmed produktov AB, BA, $A^\top B$, $AB^\top$, ki jih lahko. (Rešitev.)
- Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *simetrična*, če velja $A^\top = A$.
- ϟ Naloga 6: Pokažite, de je
  * vsota simetričnih matrik simetrična matrika,
  * produkt simetričnih matrik simetrična matrika natanko tedaj, ko matriki komutirata,
  * inverz obrnljive simetrične matrike simetrična matrika.

8. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 2.3.
(2) Polona Oblak: Matematika, Razdelek 6.3.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 2.5.
(4) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Sections 3.1, 3.2., 3.3..

9. Ali razumem snov?

ϟ(1) Kdaj je 2×2 matrika
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
obrnljiva? V primeru, ko je obrnljiva, kaj je njen inverz A^{-1}?

ϟ(2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika. Pokažite, da je tudi matrika A^3 obrnljiva.

ϟ(3) Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi matriki. Koliko rešitev $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima enačba $B^{-1}(I_n + AX)B = B + I_n$?

ϟ(4) Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor.
(a) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^\top$ simetrična matrika.
(b) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^\top$ matrika ranga 1.

ϟ(5) Če sta A in B obrnljivi $n \times n$ matriki, katere od naslednjih trditev so resnične?

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$
(b) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$
(c) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
(d) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$
(e) AB je obrnljiva
(f) $A + B$ je obrnljiva

ϟ(6) Drži ali ne drži?
(a) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi matriki. Za vsako $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima enačba $AXB^{-1} = C$ natanko eno rešitev.
(b) Za vsako 4×4 matriko, ki ima zadnjo vrstico enako prvi, velja, da ni obrnljiva.
(c) Vsaka zgornje trikotna matrika je obrnljiva.
(d) Če je matrika A obrnljiva, ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ neskončno rešitev.
(e) Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva. Ali obstaja <u>obrnljiva</u> matrika $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katero velja $AXA + A = 0$?

ϟ(7) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 31-35, 40-42.

Linearna algebra **5. teden**

Vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$

10. Novo definirani pojmi

- *Vektorski podprostor*
  - Definicija vektorskega podprostora v $\mathbb{R}^n$, video.
    - Primer: Ali je množica $\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} x & y & -y & -x\end{pmatrix}^\top;\ x, y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$? (Rešitev.)
  - Ekvivalentna definicija vektorskega podprostora, video.
    - Za dano matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je množica

      $$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\vec{x} = \vec{0}\}$$

      vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Ta prostor imenujemo *ničelni prostor* matrike A (in je zelo pomemben prostor, ki ga bomo srečevali skozi cel semester).
    - Primer: Izračunajte ničelni prostor matrike $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. (Rešitev.)
    - ϟ Naloga 1: Utemeljite, zakaj množica $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} a & a^2 & b\end{pmatrix}^\top;\ a, b \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ni vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$ (čeprav vsebuje $\vec{0}$).
    - ϟ Naloga 2: Kaj mora veljati za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, da bo ravnina Σ v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $ax + by + cz = d$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$?
  - *Linearna ogrinjača*, definicija in primeri, video.
  - *Linearna neodvisnost*
    - Definicija, video.
    - ϟ Naloga 3: Naj bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni. Pokažite, da so linearno neodvisni tudi vektorji $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ in $\vec{a} + \vec{c}$.
- *Baza vektorskega prostora*
  - Definicija, video.
  - Primer, video1 + video2.
  - Lastnosti baze:
    - Vsak vektorski prostor ima neskončno baz.
    - Vse baze vektorskega prostora imajo enako število elementov.

  Število elementov v (katerikoli) bazi vektorskega prostora V imenujemo *dimenzija* vektorskega prostora V, video.
  Dimenzija vektorskega prostora V je torej:

    - ∗ največje število linearno neodvisnih vektorjev, ki jih lahko najdemo v V,
    - ∗ najmanjše število vektorjev, ki jih potrebujemo da bo V njihova linearna ogrinjača.

  video.
- – V vektorskem prostoru V z izbrano bazo $\mathcal{B}$ lahko vsak vektor izrazimo na en sam način kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$, video.
- – Primer: Napišite, kaj so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$ dimenzije 1, 2 ali 3. (Rešitev)
- – *Standardne baze* v $\mathbb{R}^n$, video.
- ↯ Naloga 4: Naj bo U linearna ogrinjača vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Kdaj vektorji $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ tvorijo bazo prostora U?

11. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Polona Oblak: Vektorski prostor in podprostor, Poglavje 1.
(2) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelki 3.1.-3.4.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 3.
⋆ (4) (Za zahtevnejše bralce) Vektorski prostor lahko definirate tudi bolj algebraično. Pokukajte v učbenik Tomaža Koširja: Linearna algebra, za definicijo in lastnosti vektorskih prostorov poglejte v poglavje VI. Večino pojmov, ki so vam tuji, boste našli v poglavju V.

12. Ali razumem snov?

↯(1) Drži ali ne drži?
  (a) Ravnina v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $x+2y+3z = 4$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
  (b) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.
  (c) Vsaka linearno neodvisna množica vektorjev v $\mathbb{R}^9$ vsebuje vsaj 9 elementov.
  (d) Če sta prvi in drugi stolpec matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ linearno odvisna vektorja, potem matrika A ni obrnljiva.
  (e) Ali obstajata neničelna $\vec{u}$ in $\vec{v}$, za katera sta vektorja $\vec{u} \times \vec{v}$ in $3\vec{v}$ linearno odvisna?

↯(2) Katere od naslednjih množic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^n$?
  (a) Vsi vektorji dolžine 1.
  (b) Vsi vektorji, ki so pravokotni na vektor $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
  (c) Vsi vektorji, ki niso kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
  (d) Vsi vektorji, ki so kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.

(e) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je neničelna.

(f) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je ničelna.

↯(3) Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Ali je množica

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon A\vec{x} + \vec{x} = B\vec{x}\}$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$?

↯(4) Zapišite primer enotskega vektorja v vektorskem podprostoru $U = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\top\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

↯(5) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{61\times 17}$ rang enak 11. Največ koliko linearno neodvisnih vektorjev $\vec{x}$ zadošča enačbi $A\vec{x} = \vec{0}$?

⋆ (6) Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^n$. Pokažite, da je tudi $U \cap V$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$.

↯(7) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 55 (a,b), 59(a), 68 (a).

Linearna algebra **6. teden**

Baze vektorskih podprostorov. Ničelni in stolpčni prostor matrike.

13. Novo definirani pojmi

- Kot uvod v teden si poglejte 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Linear combinations, span, and basis vectors. Nekatere reči že znate, preostale se boste naučili danes.
- *Baza vektorskega prostora*
  - Definicija, video.
  - Primer, video1 + video2.
  - Lastnosti baze:
    - ∗ Vsak vektorski prostor ima neskončno baz.
    - ∗ Vse baze vektorskega prostora imajo enako število elementov.
  - Število elementov v (katerikoli) bazi vektorskega prostora V imenujemo *dimenzija* vektorskega prostora V, video.
  - Dimenzija vektorskega prostora V je torej:
    - ∗ največje število linearno neodvisnih vektorjev, ki jih lahko najdemo v V,
    - ∗ najmanjše število vektorjev, ki jih potrebujemo da bo V njihova linearna ogrinjača.

    video.
  - V vektorskem prostoru V z izbrano bazo $\mathcal{B}$ lahko vsak vektor izrazimo na en sam način kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$, video.
  - Primer: Napišite, kaj so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$ dimenzije 1, 2 ali 3. (Rešitev)
  - *Standardna baza* $\mathbb{R}^n$, video.
  - ↯ Naloga 1: Naj bo U linearna ogrinjača vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Kdaj vektorji $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ tvorijo bazo prostora U?
- *Stolpčni prostor*, definicija in primer, video.
- Rang matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je enak:
  - številu neničelnih vrstic v vrstično stopničasti obliki matrike A,
  - številu pivotov v vrstično stopničasti obliki matrike A,
  - številu linearno neodvisnih vrstic matrike A,
  - številu linearno neodvisnih stolpcev matrike A,
  - dimenziji stolpčnega prostora $C(A)$ matrike A,
  - $\operatorname{rank} A = n - \dim N(A)$.

  Argumente najdete v videu.

- Iz prejšnje točke sledi

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^\top.$$

↯ Naloga 2: Naj bo A neničelna matrika velikosti 3×8 in $d = \dim N(A)$. Zapišite vse možne vrednosti števila d.

- Iz vsega, kar ste se naučili v zadnjih štirih tednih tako sledi, da so naslednje trditve o matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ekvivalentne:
  (1) A je obrnljiva.
  (2) Homogeni sistem enačb $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev $x = 0$.
  (3) Sistem enačb $Ax = b$ ima enolično rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.
  (4) Reducirana vrstična stopničasta oblika matrike A je I.
  (5) Rang matrike A je n.
  (6) Stolpci matrike A so linearno neodvisni.
  (7) Vrstice matrike A so linearno neodvisne.
  (8) Stolpci matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
  (9) Vrstice matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
  (10) Stolpci matrike A so baza $\mathbb{R}^n$.
  (11) Vrstice matrike A so baza $\mathbb{R}^n$.
  (12) $\dim N(A) = 0$.
  (13) $\dim C(A) = n$.

14. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Polona Oblak: Vektorski prostor in podprostor.
(2) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 3.4. poglavje VI.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 3.
(4) Gilbert Strang, Video Lectures:
  (a) Lecture 6: Column space and nullspace.
  (b) Lecture 9: Independence, basis, and dimension.
⋆ (5) (Za zahtevnejše bralce) Tomaž Košir: Linearna algebra.

15. Ali razumem snov?

↯(1) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{7\times 4}$ štiri linearno neodvisne vrstice. Koliko rešitev ima lahko linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$?
↯(2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrika, katere stolpci so linearno neodvisni. Izračunajte $\dim N(A)$.
↯(3) Če je $A \in \mathbb{R}^{7\times 11}$ matrika ranga 5, izračunajte $\dim N(A)$.
↯(4) Pokažite, da če za matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja $\dim N(A) \leq \dim N(B)$, potem je $\dim C(A) \geq \dim C(B)$.
↯(5) Pokažite, da za kvadratno matriko A velja $\dim N(A) = \dim N(A^\top)$.

ϟ(6) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 55, 57 (a) in (b), 60-64.

Linearna algebra **7. teden**

Linearne preslikave

16. Novo definirani pojmi

- Kot napovednik, kaj nas čaka v tem tednu, vam ne bi mogla dati boljše predstavitve, kot je 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Linear transformations and matrices.
- Naša motivacija in uvod v linearne preslikave, video.
- Na Wolframovi strani Wolfram Demonstrations, Reindeer Linear Transformation si oglejte demonstracijo linearne preslikave. Izberite elemente željene 2×2 matrike. Potem poglejte, kam se točke ravnine preslikajo z linearno preslikavo, ki ustreza množenju z vašo izbrano matriko.
- Definicija *linearne preslikave*, video.
  - ↯ Naloga 1: Za linearno preslikavo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ naj velja $\tau(\vec{a}) = \vec{b}$, $\tau(\vec{b}) = \vec{c}$ ter $\tau(\vec{c}) = \vec{b} + \vec{c}$ za neke vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Določite $\tau(\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c})$.
  - Najpomembnejši primer linearne preslikave, množenje vektorja z matriko, video.
    Iz tega primera sledi, da če za preslikavo $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, da je
    $$\tau(\vec{v}) = A\vec{v}$$
    za vsak $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, potem je τ linearna preslikava. Po domače: za smo preslikavo τ našli matriko A, tako da se vsak vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ preslika v produkt matrike A z vektorjem $\vec{v}$, torej v $A\vec{v} \in \mathbb{R}^m$, potem je τ linearna.
  - Primer linearne preslikave: projekcija v $\mathbb{R}^2$, video.
  - Primer linearne preslikave, zrcaljenje v $\mathbb{R}^2$, video.
  - Seveda pa niso vse preslikave linearne. Oglejte si primer nelinearne preslikave, video.
- Lastnosti linearne preslikave, video.
- Ne le, da je množenje vektorja (z leve) z matriko linearna preslikava. Velja tudi obratno, da lahko vsaki linearni preslikavi določimo *matriko, ki ji pripada*, video. Pri tem pazite na to, da je matrika odvisna od baz, ki jih izberemo.
  - Primer matrike linearne preslikave $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, video.
  - ↯ Naloga 2: Naj bo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki slika vektor $\vec{i}$ v $\vec{j}$, vektor $\vec{j}$ v $\vec{0}$, vektor $\vec{k}$ pa v $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Zapišite matriko, ki pripada T v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

- *Jedro* in *slika* linearne preslikave.
  - Definicija, video.
  - Zveza med dimenzijama jedra in slike, video.
- S tem smo se danes naučili geometrijskega pogleda na matrike. Matrika ne bo več zgolj suhoparna tabela števil, ki jih lahko abstraktno obračamo in operiramo. Na matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je namreč vredno pogledati malo globlje, kot na pripadajočo linearno preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, za katero velja $\mathcal{A}(\vec{v}) = A\vec{v}$, video.
- Kompozitum linearnih preslikav, video.
- Oglejte si še naslednje vizualizacije, 3Blue1Brown, Essence of linear algebra,
  (1) Linear transformations and matrices.
  (2) Three-dimensional linear transformations.
  (3) Nonsquare matrices as transformations between dimensions.
  (4) Matrix multiplication as composition.

17. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Polona Oblak: Linearne preslikave. (Snovi linearnih preslikav ni v učbeniku Bojana Orla, zato sem vam spisala osnovne definicije z veliko primeri v ta dokument.)
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 7.
(3) Polona Oblak: Matematika, razdelek 6.5.
⋆ (4) (Za zahtevnejše bralce) Tomaž Košir: Linearna algebra, linearne preslikave, študijsko gradivo, 2007.

18. Ali razumem snov?

ϟ(1) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslikava, podana s predpisom

$$\tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pokažite, da je linearna in zapišite matriko, ki pripada τ v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

ϟ(2) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki slika vektor $\vec{i}$ v $\vec{j}$, vektor $\vec{j}$ v $\vec{i} + \vec{j}$, vektor $2\vec{k}$ pa v $4\vec{i}$. Zapišite matriko, ki pripada τ v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

ϟ(3) Pokažite, da vsaka linearna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slika linearno odvisne vektorje v linearno odvisne.

ϟ(4) Drži ali ne drži?
  (a) Če je preslikava $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearna, potem je linearna tudi preslikava $\varphi^2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(b) Vsaka neničelna linearna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slika linearno neodvisna vektorja v linearno neodvisna.

↯(5) Za vsako od naslednjih lastnosti poiščite primer linearne preslikave $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki ima to lastnost.

(a) θ^2 je identična preslikava.

(b) $\theta^2 = \theta$.

(c) Jedro preslikave θ je trivialno.

(d) Obstaja vektor $v \in \mathbb{R}^3$, za katerega velja $\theta(v) = -v$.

↯(6) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava.

(a) Pokažite, da je τ injektivna natanko tedaj, ko je $\ker \tau = \{0\}$.

(b) Pokažite, da je τ surjektivna natanko tedaj, ko je $\operatorname{im} \tau = \mathbb{R}^m$.

↯(7) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 5.

Linearna algebra	**8. in 9. teden**

Ortogonalnost

19. Novo definirani pojmi

- Napovednik 4. poglavja: Ortogonalnost.
- Uvod
  - Ponovite skalarni produkt z ogledom 3Blue1Brown, scalar product.
  - Za definicijo pravokotnosti/ortogonalnosti potrebujemo skalarni produkt. Primeri skalarnih produktov, ki jih boste kdaj potrebovali: video.
- Definicije *pravokotnih/ortogonalnih* vektorjev, *ortogonalne množice* vektorjev, *ortonormirane množice* vektorjev, video.
  - Vsaka ortogonalna množica vektorjev je linearno neodvisna. video.
  - ↯ Naloga 1: Ali je množica vektorjev
$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$
    ortonormirana množica v $\mathbb{R}^4$?
- *Ortonormirana baza*
  - Definicija in lastnosti, video
  - Primer:
    (a.) Ali je množica vektorjev $\mathcal{M}$ iz naloge 1 ortonormirana baza $\mathbb{R}^4$?
    (b.) Ali lahko poiščete množico $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^4$, ki bo tvorila ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$ in bo sestavljena iz večkratnikov vektorjev množice $\mathcal{M}$?
    (c.) Zapišite vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{N}$.

    (Ko rešite, lahko preverite rešitev tu.)
  - ↯ Naloga 2: Naj bo $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_5}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^5$ in $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v_1} + \ldots + \alpha_5 \vec{v_5}$. Pokažite, da je $||\vec{x}||^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_5^2$.
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ imenujemo *ortogonalna matrika*, če je $Q^\top Q = I_n$.
  - ↯ Naloga 3: Če je $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ortogonalna matrika, potem pokažite, da je
$$||Q\vec{x}|| = ||\vec{x}||$$
    za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- *Gram-Schmidtov postopek* za ortogonalizacijo vektorjev:

- Ideja
- Postopek
- Gram-Schmidtov postopek je odvisen od vrstnega reda vektorjev. Oglejte si primer in še enkrat isti primer z menjavo vrstnega reda vhodnih vektorjev.
- ϟ Naloga 4: Naj bo

$$V = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

  Poiščite kakšno ortonormirano bazo prostora V. (Najprej z metodo ostrega pogleda ugotovite, v kakšnem vrstnem redu boste izvajali Gram-Schmidtov postopek.)
- Igrajte se z Wolframovo demonstracijo.

• *QR razcep* matrike
  - Razcep, video.
  - Primer: Poiščite QR razcep matrike $A = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. (Rešitev.)
  - Nadaljnje variante QR razcepa, video.

• *Ortogonalni komplement*
  - Definicija
  - ϟ Naloga 5: Pokažite, da je ortogonalni komplement $U^\perp$ vektorskega podprosta $U \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$.
  - Lastnosti
  - Ortogonalna zveza med ničelnim in stolpčnim prostorom matrike
  - ϟ Naloga 6: Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times(n+k)}$ matrika ranga r, $r \leq n$, $k \geq 0$. Določite dimenzije prostorov $C(A)$, $C(A^\top)$, $C(A)^\perp$, $N(A)$, $N(A^\top)$ in $N(A)^\perp$.

• Matrika projekcije, video.
  - Primer: Dana je ravnina $\Sigma : x + y + 2z = 0$ v $\mathbb{R}^3$. Zapišite matriko P, ki pripada pravokotni projekciji na Σ v standardni bazi. Lahko sledite naslednjim korakom:
    (1) Izberite ortonormirano bazo $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ ravnine Σ. (Če ne znate uganiti, izberite poljubna linearno neodvisna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ na ravnini Σ in na njima uporabite Gram-Schmidtov postopek.)
    (2) Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ matrika s stolpcema $\vec{w}_1$ in $\vec{w}_2$.
    (3) Matrika projekcije na Σ je $P = QQ^\top$.

    (Če se vam v kakšnem koraku zatakne, lahko pogledate pomoč. Pri tem ne sledite slepo moji izbiri vektorjev. Ne glede na to, kako boste izbrali začetna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, bi morali na koncu priti do iste matrike P. Poskusite.)

• *Predoločeni sistemi*
  - Kaj so sploh predoločeni sistemi? video.

– Najboljši približek rešitve predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov, video.
– Poglejte si lepšo in gibljivo sliko, kaj je najboljši približek predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov. Wolfram Demonstrations Project.
– Primer: Določite premico v $\mathbb{R}^2$, ki se najbolj prilega točkam $A(1,1)$, $B(0,0)$, $C(2,0)$ in $D(-1,2)$. (Rešitev.)
– Kaj pa v primeru, ko je predoločeni sistem podan z matriko polnega ranga? video.

20. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 4
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 4.
(3) Gilbert Strang, Video Lectures:
  (a) Lecture 14: Orthogonal vectors and subspaces.
  (b) Lecture 15: Projections onto subspaces.
  (c) Lecture 16: Projection matrices and least squares.
  (d) Lecture 17: Orthogonal matrices and Gram-Schmidt

21. Ali razumem snov?

ϟ (1) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takšna matrika, da velja $\dim N(A) = \dim N(A^\top)$. Pokažite, da velja $m = n$.
ϟ (2) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.
  (a) Ali obstajata različna enotska linearno odvisna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ v ortogonalnem komplementu ravnine $x - 2y + 3z = 0$?
  (b) Ali obstajata različna neničelna linearno neodvisna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ v ortogonalnem komplementu premice $x = y = z$?
  (c) Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ baza prostora V.
  (d) Za simetrično matriko A velja $N(A) = C(A)^\perp$.
  (e) Če ima za neka $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ rešitev, potem je vektor $\vec{b}$ pravokoten na vsak vektor $\vec{y} \in N(A^\top)$.
  (f) Vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ je ortogonalni komplement vektorskega prostora $W \subseteq \mathbb{R}^n$, če je vsak vektor iz V pravokoten na vsak vektor iz W.
  (g) Če je P matrika, katere stolpci so paroma ortogonalni, velja $P^{-1} = P^\top$.

(h) Če je neničelni vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ na vektorski podprostor $U \subset \mathbb{R}^n$, potem sta vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pravokotna.
(i) Če so stolpci matrike $U \in \mathbb{R}^{n\times r}$ normirani vektorji in tvorijo ortogonalno množico, potem je $UU^\top$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{x}$ na $C(U)$.
(j) Če je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, kjer $m > n$, potem linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev.
(k) Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ranga n in $m \geq n$, potem je najboljša rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ po metodi najmanjših kvadratov enaka $\vec{x} = (A^\top A)^{-1}A^\top\vec{b}$.

(3) Dani sta matriki

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \text{ in } Z_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

ϟ (a) Pokažite, da sta matriki A in B ortogonalni za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$.
ϟ (b) Kaj predstavljata linearni preslikavi $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}, \mathcal{Z}_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, podani z

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{x}) = R_{\frac{\pi}{2}}\vec{x} \text{ in } \mathcal{Z}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{x}) = Z_{\frac{\pi}{2}}\vec{x}\,?$$

⋆ (c) Kaj predstavljata linearni preslikavi $\mathcal{R}_\varphi, \mathcal{Z}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, podani z

$$\mathcal{R}_\varphi(\vec{x}) = R_\varphi\vec{x} \text{ in } \mathcal{Z}_\varphi(\vec{x}) = Z_\varphi\vec{x}\,?$$

ϟ (4) Zapišite primer matrike, ki ima paroma ortogonalne stolpce, vendar ni ortogonalna matrika.

⋆ (5) Na vektorskem prostoru $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ zveznih funkcij na intervalu $[-\pi,\pi]$ definirajmo predpis

(1) $$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

ki funkcijama f in g vrne število $\langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$.
(a) Pokažite, da je
  (i) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$,
  (ii) $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$,
  (iii) $\langle f, f\rangle \geq 0$ ter
  (iv) da je $\langle f, f\rangle = 0$ natanko tedaj, ko je f ničelna funkcija.
S tem ste pokazali, da je predpis (1) skalarni produkt na prostoru zveznih funkcij na intervalu $[-\pi,\pi]$.
(b) Dolžino funkcije f definiramo kot

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx}$$

norma (ali dolžina) funkcije f. Označimo funkcije

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ f_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(ix) \\ g_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(ix) \end{aligned}$$

za $i = 1, 2, \ldots$.

(c) Pokažite, da je
   (i) $\langle f_i, f_i\rangle = 1$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$,
   (ii) $\langle g_i, g_i\rangle = 1$ za $i = 1, 2, \ldots$,
   (iii) $\langle f_0, f_i\rangle = 0$ za $i = 1, 2, \ldots$ in
   (iv) $\langle f_i, g_j\rangle = 0$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$ ter $j = 1, 2, \ldots$.

S tem ste pokazali, da so funkcije $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots\}$ ortonormirana množica v $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$. Ta igra pomembno vlogo pri Fourirjevih vrstah in transformacijah.

ϟ (6) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, 6. poglavje.

Linearna algebra	**10. teden**

Determinante

22. Novo definirani pojmi

- *Determinanta*.
  - Uvod:
    - Zakaj potrebujemo determinante in kaj nam bodo predstavljale? video.
    - Še boljša ilustracija: 3Blue1Brown, The determinant.
  - (Opomba: V 2020/21 smo determinanto definirali drugače in veliko dokazov je drugačnih kot na spodnjih posnetkih.)
  - Definicija *determinante*.
  - Lastnosti determinant,video.
  - Med drugim smo spoznali nov način računanja determinant podoben Gaussovi eliminaciji: Determinanto poljubne kvadratne matrike izračunamo tako, da s pomočjo pravil (1)-(3) preoblikujemo matriko v zgornje ali spodnje trikotno matriko, katere determinanto že znamo izračunati. Dovoljenje operacije so:

    (pravilo 1) Če zamenjamo dve vrstici, se spremeni predznak determinante.

    (pravilo 2) Vrednost determinante se ne spremeni, če neki vrstici prištejemo poljuben večkratnik katerekoli druge vrstice.

    (pravilo 3) Če vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim številom α, se vrednost determinante pomnoži z α.

    Za računanje rešitev linearnega sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ smo želeli z elementarnimi operacijami Gaussove eliminacije preoblikovati matriko A v vrstično stopničasti obliko, saj smo lahko iz nje preprosteje razbrali rešitve. Tudi pri determinantah je cilj isti: s pomočjo pravil (1)-(3) želimo preoblikovati matriko v vrstično stopničasto obliko, torej zgornje trikotno matriko. Pri tem pa bodite š posebej pazljivi: te operacije so na prvi pogled zelo podobne elementarnim operacijam Gaussove eliminacije, pa vendar se oba algoritma ujemata le v pravilu (2).
  - Primer računanja determinante z rekurzivno formulo, determinanta zgornje trikotne matrike, video.
  - Spoznajte še več lastnosti determinant, video.
    - ↯ Naloga 1: Zapišite primera matrik A, B, za kateri je $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

∗ Naloga 2: Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, za kateri velja $\det(A) = 2$ in $\det(B) = 3$. Izračunajte determinante matrik $2A$, $-A$, A^2, A^{-1} in $ABAB^{-1}$.

– Za determinanto velja

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

video.

– S pomočjo determinant lahko računamo tudi inverze obrnljivih matrik, video.
  - ∗ Primer video.
  - ↯ Naloga 3: Kdaj je 2×2 matrika

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

obrnljiva? V tem primeru tudi izračunajte njen inverz A^{-1}.

23. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 5.
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 5.
(3) Gilbert Strang, Video Lectures:
  (a) Lecture 18: Properties of determinants.
  (b) Lecture 19: Determinant formulas and cofactors.
(4) Polona Oblak: Matematika, razdelek 6.3 (brez dokazov, le recepti in primeri).
⋆ (5) Determinante so uporabne tudi za reševanje sistemov linearnih enačb. Oglejte si:
  (a) predavanje Gilberta Stranga, Video Lectures: Lecture 20: Cramer's rule, inverse matrix, and volume
  (b) vizualizacijo 3Blue1Brown: Cramer's rule, explained geometrically.

24. Ali razumem snov?

↯(1) Če je $\det A = 5$ in $\det B = 3$, izračunajte $\det(A^\top BAB^{-1})$.
↯(2) Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takšna matrika, da velja $Q^\top Q = I$. Izračunajte vse možne vrednosti determinante matrike Q.
↯(3) Naj bo $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika, za katero velja $P^2 = P$. Izračunajte vse možne vrednosti determinante matrike P.
↯(4) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.
  (a) Če je $\det(A) = 3$, potem je $\det(I + A) = 4$.
  (b) Če je A matrika reda $n \times n$, potem je $\det(nA) = n\det(A)$.

(c) Če sta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem je $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A^2) - \det(B^2)$

(d) Če sta A in B obrnljivi matriki, potem je $\det(AB) = 0$.

(e) Množica vseh matrik $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katere velja $\det(A) = 0$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$\lightning$(5) Ali za matriko $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ obstajata takšni realni števili α in β, da velja

$$\det(2AA^\top A) = \alpha(\det A)^\beta?$$

Če da, ju določite. Če ne, utemeljite, zakaj ne.

$\lightning$(6) Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad \text{ter} \quad B = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Če je $\det A = 3$, izračunajte $\det(A - B)$ in $\det(A^{-1}B)$.

$\lightning$(7) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 4.

Linearna algebra **11. teden**

Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik, 1. del

25. Novo definirani pojmi

- Preden začnete oglede predavanj, rešite naslednjo nalogo
  - ↯ Naloga 1: Definirajmo štiri linearne preslikave $\varphi, \zeta, \eta, \vartheta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
    - (a) φ je projekcija na x-os.
    - (b) ζ je zrcaljenje čez premico $y = x$.
    - (c) η je rotacija okoli koordinatnega izhodišča.
    - (d) Matrika preslikave ϑ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$ je enaka $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

    Za vsako od preslikav $\varphi, \zeta, \eta, \vartheta$ ugotovite, ali obstaja kakšen neničeln vektor, ki se slika v svoj večkratnik. Poiščite tudi ustrezne večkratnike. (Če ne gre, poglejte namig[1].)
  - Če ste našli takšne vektorje linearnih preslikav $\varphi, \zeta, \vartheta$, ki se slikajo v svoj večkratnik, ste pravkar našli *lastne vektorje* linearnih preslikav. Pripadajoče večkratnike pa imenujemo *lastne vrednosti* preslikav. O takšnih vektorjih in takšnih večkratnikih bo tekla beseda danes.
- Uvod, video.
- Definicije novih pojmov:
  - *Lastne vrednosti* in *lastni vektorji*, video.
  - ↯ Naloga 2: Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor. Pokažite, da je vektor $\vec{a}$ lastni vektor $n \times n$ matrike $A = \vec{a}\vec{a}^\top$.
  - Primer: Naj bo

    $$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

    (Pripadajoča linearna preslikava $\mathcal{Z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki je podana s predpisom $\mathcal{Z}(\vec{x}) = Z\vec{x}$ je natanko preslikava zrcaljenja čez ravnino $x = 0$.) Ali lahko uganete lastne vektorje in lastne vrednosti matrike Z? (Če ne gre, si oglejte rešitev.)
  - *Lastni podprostor*, video.
  - Lastni podprostor matrike A pri lastni vrednosti 0 je enak ničelnemu prostoru matrike A, video.

[1] V enem od primerov takšen vektor v $\mathbb{R}^2$ ne obstaja, saj se noben vektor ne slika v svoj večkratnik. V ostalih treh primerih lahko najdete po dva linearno neodvisna vektorja, ki se slikata v svoj večkratnik. Večkratniki, ki pripadajo vektorjem, so (ne nujno v pravem vrstnem redu) v enem od primerov 0,1, drugem 1,-1, tretjem 2,3. Bo šlo sedaj?

- Računanje lastnih vrednosti:
  - Kako poračunamo lastne vektorje pri znani lastni vrednosti, video?
  - Kako poračunamo lastne vrednosti? Definicija *karakterističnega polinoma*. video.
  - Primer: Za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

    poiščite njene lastne vrednosti in lastne vektorje. Recept je sledeči:
    (1) Najprej izračunajte karakteristični polinom matrike A.
    (2) Nato izračunajte lastne vrednosti matrike A kot ničle karakterističnega polinoma.
    (3) Za vsako od lastnih vrednosti določite njen lastni podprostor. Baza vsakega lastnega podprostora vam bo dala lastne vektorje, ki pripadajo tej lastni vrednosti.

    (Ko boste rešili, si oglejte še mojo rešitev. Pri tem morajo biti vaše lastne vrednosti enake mojim. Vendar pa lahko seveda najdete druge lastne vektorje v izračunanih lastnih podprostorih.)
  - Povzetek, video.
- Lastnosti:
  - Lastni vektorji pri različnih lastnih vrednostih so linearno neodvisni, video.
    - ↯ **Naloga 3:** Za 4×4 matriko A naj velja $\mathrm{rank}(A-5I) = 2$, $\mathrm{rank}(A-4I) = \mathrm{rank}(A-3I) = 3$ ter $\mathrm{rank}(A-2I) = \mathrm{rank}(A-I) = 4$. Določite njen karakteristični polinom.
  - Lastne vrednosti trikotnih matrik ležijo na njeni diagonali, video.
  - Lastne vrednosti matrike in njene transponiranke so enake, video.
  - Produkt vseh lastnih vrednosti matrike je enak njeni determinanti, video.
    - ↯ **Naloga 4:** Naj ima 4×4 matrika A dvojno lastno vrednost 2, enojno lastno vrednost 1 ter determinanto enako 12. Določite njen karakteristični polinom.
  - Vsota vseh lastnih vrednosti matrike je enaka njeni sledi. Primer računanja lastnih vrednosti 2×2 matrike, video.
  - Lastne vrednosti potenc in inverzov matrik, video.
    - ↯ **Naloga 5:** Naj bo A matrika velikosti 3×3, ki ima pri lastni vrednosti 1 lastni vektor $\vec{x} = [1,\ 2,\ 3]^\top$ in pri lastni vrednosti -1 lastni vektor $\vec{y} = [3,\ 2,\ 1]^\top$. Izračunajte $A^{2019}(\vec{x} + \vec{y})$.
- Oglejte si še video 3Blue1Brown, Eigenvectors and eigenvalues, Essence of linear algebra, chapter 14.

26. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

- ϟ (1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelka 6.1 in 6.2.
- ϟ (2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 6.1.
- ϟ (3) Gilbert Strang, Lecture 21: Eigenvalues and eigenvectors.
- ⋆ (4) (Za zahtevnejše bralce) Tomaž Košir: Linearna algebra, Lastne vrednosti in lastni vektorji, študijsko gradivo, 2007.
- ⋆ (5) Preberite si kaj več o uporabi lastnih vrednosti in lastnih vektorjev:
  - (a) Metoda glavnih smeri (PCA)
  - (b) Lastni vektorji spletnih iskalnikov
  - (c) Pixarjeve lastne vrednosti in vektorji

27. Ali razumem snov?

- ϟ (1) Matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - x^2$. Izračunajte $\operatorname{rank}(A + I)$.
- ϟ (2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{6\times6}$ simetrična matrika z enojnima lastnima vrednostima -1 in 1, njen rang pa je enak $\operatorname{rank}(A) = 3$. Izračunajte njeno determinanto $\det(A)$.
- ϟ (3) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$ matrika z lastnimi vrednostmi $-1, 1, \frac{1}{2}, 2$ in 3, za matriko $B \in \mathbb{R}^{5\times5}$ pa velja $\det(B) = 2$. Izračunajte determinanto $\det(AB^\top)$.
- ϟ (4) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika, za katero velja $A^2 = A$. Pokažite, da je vsak vektor $\vec{y} = A\vec{x} \in C(A)$ lastni vektor matrike A. Določite tudi pripadajočo lastno vrednost.
- ϟ (5) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika, za katero velja $A^2 = A$. Pokažite, da je za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\vec{x} - A\vec{x}$ lastni vektor matrike A. Določite tudi pripadajočo lastno vrednost.
- ϟ (6) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.
  - (a) Če je 0 lastna vrednost matrike A, potem je A obrnljiva.
  - (b) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Če ima linearni sistem enačb $Ax = 0$ netrivialno rešitev, potem je 0 lastna vrednost matrike A.
  - (c) Če ima matrika A lastno vrednost λ, potem ima matrika $A + \alpha I$ lastno vrednost $\lambda + \alpha$.
- ϟ (7) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 86(a), 88 (a)-(b), 93.

Linearna algebra **12. teden**

Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik, 2. del

28. Novo definirani pojmi

- Lastne vrednosti matrike se ne ohranjajo z Gaussovo eliminacijo,video.
- *Podobnost matrik.*
  - Definicija. Matriki A in B sta *podobni*, če velja $A = PBP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P, video.
  - Podobnost je ekvivalenčna relacija.
  - ϟ Naloga 1: Pokažite, da če je matrika A podobna matriki B, potem je matrika A^3 podobna matriki B^3.
  - Podobni matriki imata enak karakteristični polinom, video.
  - Obrat ne velja: obstajajo matrike z enakim karakterističnim polinomom, ki pa niso podobne, video.
  - Če sta si matriki A in B podobni, potem
    * imata enake lastne vrednosti,
    * $\det(A) = \det(B)$,
    * $\mathrm{sled}(A) = \mathrm{sled}(B)$ in
    * $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.
    * video.
- *Diagonalizacija matrik*.
  - Definicija. Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *diagonalizabilna*, če je podobna kakšni diagonalni matriki. T.j., če obstajata takšna diagonalna matrika $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in takšna obrnljiva matrika $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da velja $A = PDP^{-1}$, video.
  - Primer nediagonalizabilne matrike, video
  - Če je matrika A diagonalizabilna in $A = PDP^{-1}$, potem so
    * diagonalni elementi matrike D natanko lastne vrednosti matrike A,
    * stolpci matrike P natanko lastni vektorji matrike A (zapisani v pripadajočem vrstnem redu lastnih vrednosti v matriki D).
    * video.
  - Matriko A je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko lahko najdemo bazo prostora $\mathbb{R}^n$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A. (Torej natanko tedaj, ko je večkratnost vsake lastne vrednosti λ kot ničle karakterističnega polinoma matrike A enaka dimenziji pripadajočega lastnega podprostora $\dim N(A - \lambda I)$.) video.
  - ϟ Naloga 2: Naj bo matrika A diagonalizabilna. Pokažite, da je rang matrike A enak številu njenih neničelnih lastnih vrednosti.

  - Še en primer nediagonalizabilne matrike, video.
  - Ali je matrika $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalizabilna? (Rešitev.)
  - Računanje potenc diagonalizabilnih matrik, video.
- *Lastne vrednosti in lastni vektorji simetričnih matrik*
  - Lastne vrednosti simetričnih matrik so realne.
  - Lastni vektorji simetričnih matrik tvorijo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^n$, video.
  - ϟ Naloga 3: Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - x^3$.
    (A) Določite vse lastne vrednosti matrike A.
    (B) Izračunajte $\dim N(A)$.
    (C) Naj bo $\vec{v} = [1, 0, 0, 1]^\mathsf{T}$ lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti 1. Zapišite vsaj en lastni vektor $\vec{w}$ pri lastni vrednosti 0.
  - Spektralni razcep simetričnih matrik, video.

29. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelka 6.3 (brez 6.3.2) in 6.4 (brez 6.4.2).
⋆ (2) (Za zahtevnejše bralce) Tomaž Košir: Linearna algebra, Lastne vrednosti in lastni vektorji, in Sebiadjungirane, ortogonalne in normalne preslikave, študijsko gradivo, 2007.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Sections 6.2, 6.4 in 6.6.
(4) Gilbert Strang, Video Lectures:
  - Lecture 22: Diagonalization and powers of A,
  - Lecture 25: Symmetric matrices and positive definiteness (prvih 29 minut),
  - Lecture 28: Similar matrices and jordan form (prvih 31 minut).

30. Ali razumem snov?

ϟ (1) Denimo, da sta si matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobni. Pokažite, da sta si tedaj tudi $A + I_n$ in $B + I_n$ podobni.
ϟ (2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokažite, da so vse lastne vrednosti matrike $AA^\top$ realne in nenegativne. (Namig: Če je $AA^\top\vec{x} = \lambda\vec{x}$, potem enakost z leve pomnožite z vrstico $\vec{x}^\top$. Poglejte, kako lahko s pomočjo dolžin zapišete levo in kako desno stran.)

↯ (3) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simetrična matrika z lastnimi vrednostmi 1, 2 in 3. Lastni vektor pri lastni vrednosti 1 je enak $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, lastni vektor pri lastni vrednosti 2 pa $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Zapišite lastni vektor pri lastni vrednosti 3.

↯ (4) Naj bosta matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizabilni in imata enake lastne vrednosti (vključno z njihovimi večkratnostmi). Pokažite, da je sta si A in B podobni.

↯ (5) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simetrična matrika z dvojno lastno vrednostjo -1 in njej pripadajočima lastnima vektorjema $\vec{v} = \begin{pmatrix}0, & 1, & 1\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ ter $\vec{u} = \begin{pmatrix}1, & 1, & 0\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.

(a) (5 točk) Izračunajte $A^{2021}\,\vec{v}$.

(b) (5 točk) Ali lahko kaj poveste o lastni vrednosti $\lambda_3 \neq -1$ matrike A? Ali lahko kaj poveste o lastnem vektorju, ki pripada λ_3?

↯ (6) Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Izračunajte $\operatorname{rank}(A + I)$.

↯ (7) Denimo, da je matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična ter $A = B^2$. Pokažite, da so vse lastne vrednosti matrike A nenegativne.

↯ (8) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.

(a) Če je matrika A diagonalizabilna, potem je tudi obrnljiva.

(b) Vsaka simetrična $n \times n$ matrika ima n različnih lastnih vrednosti.

(c) Vsaka simetrična $n \times n$ matrika ima n realnih lastnih vrednosti.

(d) Vsaka simetrična matrika je diagonalizabilna.

(e) Vsaka simetrična matrika je obrnljiva.

(f) Lastni vektorji $n \times n$ simetrične matrike z večkratnimi lastnimi vrednostmi ne tvorijo baze $\mathbb{R}^n$.

(g) Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizabilna, potem je vsak vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lastni vektor matrike A.

(h) Matrika $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ima edini lastni vrednosti enaki 1 in -1. Če je $\operatorname{rank}(A + I) = 1$, potem je A diagonalizabilna.

(i) Matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ je diagonalizabilna.

↯ (9) Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor.

(a) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^{\top}$ simetrična matrika.

(b) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^{\top}$ matrika ranga 1.

(c) Pokažite, da je vektor $\vec{a}$ lastni vektor matrike $\vec{a}\vec{a}^{\top}$. Določite pripadajočo lastno vrednost.

(d) Zapišite vse lastne vrednosti matrike $\vec{a}\vec{a}^{\top}$.

(e) Naj bo $\vec{a}$ lastni vektor simetrične matrike A. Pokažite, da matriki A in $\vec{a}\vec{a}^{\top}$ komutirata.

⋆ (10) S pomočjo matematične indukcije na velikost matrike n pokažite, da velja naslednji izrek: Naj bo A poljubna $n \times n$ realna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Potem obstaja takšna ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je

$$Q^\top A Q = T,$$

kjer je T zgornje trikotna matrika z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

(a) Najprej pokažite, da trditev velja za $n = 1$ ☺.

(b) Predpostavite, da trditev velja za nek n. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$. Izberite lastno vrednost λ_1 in pripadajoči lastni vektor $\vec{v}$ dolžine 1. Naj bo U poljubna ortogonalna matrika, ki ima prvi stolpec enak $\vec{v}$.

(i) Pokažite, da je $\vec{v}^\top A \vec{v} = \lambda_1$.

(ii) Pokažite, da je $U^{-1} A U = \left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & u^\top \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right]$.

(iii) Uporabite indukcijsko predpostavko na $n \times n$ matriki B: $R^\top B R = T_n$.

(iv) Definirajte $S = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & R \end{array}\right]$ ter $Q = US$ in pokažite, da je Q ortogonalna matrika, za katero je $Q^\top A Q = T$, kjer je T zgornje trikotna matrika z diagonalnimi elementi enakimi lastnim vrednostim matrike A.

↯(11) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 85-86, 88-89,92-95, 97, 99, 101.

Linearna algebra **13. teden**

Razcep singularnih vrednosti

31. Novo definirani pojmi

- *Razcep singularnih vrednosti (SVD)*
  - Uvod, video.
  - Kaj sploh je razcep singularnih vrednosti in kako ga uporabiti, video.
  - Primer računanja približkov matrik s pomočjo SVD, video.
  - Motivacija: poglejte si, kako in zakaj boste kdaj v prihodnosti želeli zmanjšati velikost (dimenzije) podatkov, predavanje Jure Leskovec: Lecture 46 - Dimensionality Reduction - Introduction.
  - Tehnična izvedba:
    - $A^\top A$ je simetrična matrika z nenegativnimi lastnimi vrednostmi, video.
    - Diagonalni elementi diagonalne matrike Σ so koreni lastnih vrednosti matrike $A^\top A$, video.
    - Stolpci matrik U in V so lastni vektorji matrik $AA^\top$ in $A^\top A$, video.
      - Matriki AB in BA se ujemata v neničelnih lastnih vrednostih, video.
    - Singularne vrednosti, video.
  - Tri oblike razcepa singularnih vrednosti (SVD), video.
  - Primer razcepa simetrične matrike, video.
  - Geometrija SVD in PCA, video.
  - Igrajte se sami z demonstracijo SVD, Mathematica Demonstration.
  - Jure Leskovec: Lecture 47 - Singular Value Decomposition.
  - Jure Leskovec: Lecture 48 - Dimensionality Reduction with SVD.

32. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 6.5.
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 6.7.
(3) Gilbert Strang, Lecture 29: Singular value decomposition,
(4) Gilbert Strang: Singular Value Decomposition (the SVD),

33. Ali razumem snov?

ϟ (1) Izračunajte singularne vrednosti matrike $A = \left[A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, katere stolpci $A^{(i)}$ so paroma pravokotni z dolžinami $||A^{(i)}|| = \alpha_i$.

ϟ (2) Naj bo $A = U\Sigma V^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika.
   (a) Pokažite, da so vse singularne vrednosti matrike A neničelne.
   (b) Pokažite, da je Σ obrnljiva matrika.
   (c) Zapišite razcep singularnih vrednosti matrike A^{-1}.

ϟ (3) Simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ima dvodimenzionalen ničelni prostor in naj velja

$$\operatorname{rank}(A+I) = 3,\ \operatorname{rank}(A+2I) = 4 \ \text{ ter } \ \operatorname{rank}(A+3I) = 5.$$

   (a) Določite lastne vrednosti matrike A in njihove večkratnosti.
   (b) Določite singularne vrednosti matrike A in njihove večkratnosti.

ϟ (4) Drži ali ne drži?
   (a) Če je $A = U\Sigma V^\top \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, kjer $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ter $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalni matriki, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pa pravokotna diagonalna matrika z diagonalnimi elementi $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, potem so $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ lastne vrednosti matrike $AA^\top$.
   (b) Če je A simetrična matrika s samimi pozitivnimi lastnimi vrednostmi, potem so singularne vrednosti matrike A enake lastnim vrednostim matrike A.
   (c) Če je $A = QR \in \mathbb{R}^{n\times n}$ QR razcep matrike A, potem se singularne vrednosti matrik A in R ujemata.