Polona Oblak

Matematika 1,

1. del: Uporabna linearna algebra

Fakulteta za računalništvo in informatiko, Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 2024

Predgovor

Pred vami so prvi osnutke skripte, ki nastaja kot pomoč pri prvih sedmih tednih predmeta Matematika 1 na magistrskem študiju Fakultete za računalništvo in informatiko. V prvi del predmeta smo zbrali več različneh tem linearne algebre, ki so pomembne v računalništvu, predvsem v podatkovnih vedah in strojnem učenju. Posledično zanj ni na voljo enotne literature, sploh pa ne v slovenskem jeziku. Zato upam, da bo nastajajoča skripta v pomoč marsikateremu študentu. Na koncu vsakega poglavja je zbranih tudi nekaj nalog, ki vam bodo pomagale, da preverite svoje znanje.

Preden začnete z branjem, preverite svoje predznanje. Predpostavljali bomo, da ste bralci dobro seznanjeni z naslednjimi pojmi (ki so zbrani iz kataloga znanj za vpis na magistrski študij):

- **Geometrija v $\mathbb{R}^3$**: vektorji in osnovne računske operacije, skalarni produkt, vektorski produkt, enačba premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$, ortogonalnost, ortogonalne projekcije, Gram-Schmidtov algoritem.
- Reševanje **sistemov linearnih enačb**, Gaussova eliminacija.
- **Matrike**: osnovne operacije, rang, obrnljivost matrik, stolpčni in ničelni prostor matrike, determinante, lastne vrednosti in lastni vektorji, razcep singularnih vrednosti (SVD).

V knjižnici in na spletu je ogromno literature, ki pokriva zgoraj naštete pojme. Materiale v slovenskem jeziku boste našli med gradivi za predmete na programih prve stopnje Fakultete za računalništvo in informatiko, kot denimo:

[1] Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015.

[2] Polona Oblak: Matematika, Založba FRI, 2015, poglavji 5 in 6.

[3] Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019.

Tuje literature je neprimerljivo več. Nekaj (po mojem mnenju) dobrih virov:

[4] Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, Wellesley-Cambridge Press, 2016, Poglavja 1-6.

[5] David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald: Linear Algebra and its Applications, Pearson, 2016, Poglavja 1-6.

[6] David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, Poglavja 1-3, 6-8, 11-13.

[7] Gilbert Strang, Video Lectures, MIT, 1999.

[8] Youtube kanal 3Blue1Brown: The Essence of Linear Algebra.

Ker se v začetne verzije knjig nemalokrat prikradejo napake, boste po vsej verjetnosti tudi na naslednjih straneh našli kakšno. Če najdete matematične, slovnične ali tipkarske napake, ali če imate predloge za izboljšave, bom zelo vesela vaših komentarjev in predlogov.

Polona Oblak

Kazalo

1
Ponovitev in nadgradnja osnovnih pojmov matričnega računa

1.1 Sled matrike

Sledi matrike se običajno zgodi krivica in se ji pri prvem poslušanju linearne algebre ne nameni dovolj pozornosti. Izračunati jo je sila preprosto, saj le seštejemo diagonalne elemente matrike.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Definicija. Sled *kvadratne matrike* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je vsota vseh njenih diagonalnih elementov. Označili jo bomo s simbolom* $\operatorname{tr}(A)$

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Ker sta operaciji seštevanja matrik in množenja matrike s skalarjem definirani po komponentah, se je rutinsko prepričati, da velja

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B) \tag{1.1}$$

za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ter realni števili $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tej lastnosti pravimo linearnost in več o tej lastnosti si lahko preberete v poglavju 2.3. Prav tako je očitno, da za vsako kvadratno matriko A velja

$$\operatorname{tr}(A^\top) = \operatorname{tr}(A),$$

saj se po transponiranju ohrani celotna diagonala kvadratne matrike.

Kljub temu, da množenje matrik ni komutativno, pa velja naslednja trditev.

Trditev 1.1. *Za matriki* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *in* $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *velja*

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Dokaz. Enakost lahko dokažemo tako, da izračunamo diagonalne elemente matrik AB in BA. Po definiciji množenja matrik $A = [a_{i,j}] \in$

$\mathbb{R}^{m\times n}$ in $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ velja

$$(AB)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i}$$

pin zato je

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{m} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{j,j} = \operatorname{tr}(BA)\end{aligned}$$ □

Primer 1.2. *Izračunajmo sled matrike*

$$A = 3\mathbf{x}\mathbf{x}^\top - 4\mathbf{y}\mathbf{y}^\top,$$

kjer sta $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ enotska vektorja.

Najprej uporabimo lastnost (1.1) *in zapišimo*

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(3\mathbf{x}\mathbf{x}^\top - 4\mathbf{y}\mathbf{y}^\top) = 3\operatorname{tr}(\mathbf{x}\mathbf{x}^\top) - 4\operatorname{tr}(\mathbf{y}\mathbf{y}^\top).$$

Iz trditve 1.1 lahko v vsaki od sledi menjamo vrstni red množenja matrik $\mathbf{x}$ in $\mathbf{x}^\top$ ter $\mathbf{y}$ in $\mathbf{y}^\top$. Zatorej je

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) &= 3\operatorname{tr}(\mathbf{x}\mathbf{x}^\top) - 4\operatorname{tr}(\mathbf{y}\mathbf{y}^\top) = \\ &= 3\operatorname{tr}(\mathbf{x}^\top\mathbf{x}) - 4\operatorname{tr}(\mathbf{y}^\top\mathbf{y}) = \\ &= 3\mathbf{x}^\top\mathbf{x} - 4\mathbf{y}^\top\mathbf{y},\end{aligned}$$

pri čemer smo v zadnji enakosti uporabili dejstvo, da sta $\mathbf{x}^\top\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}^\top\mathbf{y}$ matriki velikosti 1×1 in zato je njuna sled enaka njunima (edinima) vrednostima. Ker sta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ enotska vektorja, sledi $\mathbf{x}^\top\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 = 1$ ter $\mathbf{y}^\top\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2 = 1$. Zato je sled matrike A enaka

$$\operatorname{tr}(A) = 3\cdot 1 - 4\cdot 1 = -1.$$

1.2 Podobnost matrik

Najprej ponovimo definicijo podobnosti matrik in si oglejmo posebne vrste podobnost, ortogonalno podobnost.

Definicija. *Matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sta podobni, če velja $A = PBP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P. Matriki A in B sta si ortogonalno podobni, če obstaja takšna ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da velja*

$$A = QBQ^\top.$$

Če sta si matriki ortogonalno podobni, sta si torej tudi podobni. Ni pa nujno obratno. Na primer, simetrična matrika je lahko podobna tudi nesimetrični matriki, medtem ko je vsaka njej ortogonalno podobna matrika tudi simetrična. Za primer izberimo matriki

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matrika B je simetrična, P pa obrnljiva, saj je $\det(P) \neq 0$. Za tako izbrani matriki matrika

$$PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

očitno ni simetrična. Po drugi strani pa za vsako simetrično matriko $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in vsako ortogonalno matriko $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

$$(QBQ^\top)^\top = (Q^\top)^\top B^\top Q^\top = QBQ^\top,$$

torej je $QBQ^\top$ simetrična matrika.

Morda so vam že znane naslednje lastnosti podobnosti matrik. V tem primeru preskočite na razdelek 1.3 za uporabo ortogonalne podobnosti.

Izrek 1.3. *Podobni matriki imata enak karakteristični polinom.*

Dokaz. Če je $A = PBP^{-1}$, velja

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(PBP^{-1} - P(\lambda I)P^{-1}\right) = \det\left(P(B - \lambda I)P^{-1}\right) =$$
$$= \det(P)\det(B - \lambda I)\det\left(P^{-1}\right) = \det(B - \lambda I),$$

iz česar sledi, da sta karakteristična polinoma matrik A in B enaka. □

Posledica 1.4. *Če sta si matriki A in B podobni, potem*

1. *imata enake lastne vrednosti (šteto z večkratnostjo),*
2. $\det(A) = \det(B)$,
3. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$,
4. $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.

Dokaz. Po izreku 1.3 imata matriki A in B enaka karakteristična polinoma, zato so enake tudi ničle karakterističnih polinomov. Sledi, da imata podobni matriki enake lastne vrednosti. Ker je prosti člen karakterističnega polinoma enak $\det(A)$ velja tudi $\det(A) = \det(B)$. (Zadnje bi se lahko prepričali tudi z uporabo multiplikativnosti determinante: $\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) = \det(B)$.)

Za podobni matriki A in B obstaja takšna obrnljiva matrika P, da velja $A = PBP^{-1}$. Po trditvi 1.1 sledi

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1}PB) = \mathrm{tr}(B),$$

zato imata podobni matriki tudi enaki sledi.

Ker je P obrnljiva, množenje z njo ohranja rang, in zato $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$. □

Definicija. *Matrika* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je* diagonalizabilna, *če je podobna kakšni diagonalni matriki, t.j., če obstajata takšna diagonalna matrika* D *in takšna obrnljiva matrika* P*, da velja*

$$A = PDP^{-1}.$$

Izrek 1.5. *Če je matrika* A *diagonalizabilna in* $A = PDP^{-1}$*, potem*

- *so diagonalne vrednosti matrike* D *natanko lastne vrednosti matrike* A*,*
- *stolpci matrike* P *pa so natanko lastni vektorji matrike* A *(zapisani v pripadajočem vrstnem redu lastnih vrednosti v matriki* D*).*

Posledica 1.6. *Matriko* A *je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko lahko najdemo bazo prostora* $\mathbb{R}^n$*, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike* A*. (Torej natanko tedaj, ko je večkratnost vsake lastne vrednosti* λ *kot ničle karakterističnega polinoma matrike* A *enaka* $\dim N(A - \lambda I)$*.)*

Sledi se bomo zopet posvetili v razdelku 1.4, kjer jo bomo uporabili za definicijo (Frobeniusovega) skalarnega produkta in norme matrike.

1.3 Schurov izrek in njegove posledice

Vemo, da ni vsaka matrika diagonalizabilna, torej podobna diagonalni matriki. V izreku 1.7 pa bomo pokazali, da je vsaka kvadratna matrika z realnimi lastnimi vrednostmi podobna zgornje trikotni matriki. Še več, obrnljivo matriko, s katero konjugiramo, lahko izberemo tako, da bo ortogonalna.

Izrek 1.7 (Schur)**.** [1] *Naj ima matrika* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *realne lastne vrednosti* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*. Tedaj obstaja takšna ortogonalna matrika* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, da je*

$$Q^\top AQ$$

zgornjetrikotna $n \times n$ *matrika z diagonalnimi elementi* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*.*

Z drugimi besedami, matrika A *je ortogonalno podobna zgornjetrikotni matriki* Z*, katere diagonalni elementi so enaki* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*, torej velja* $A = QZQ^\top$*.*

[1] Issai Schur (1897-1941) je bil ruski matematik, študent F. G. Frobeniusa, ki je večino svojega življenja živel v Nemčiji. Deloval je na področjih algebre, kombinatorike in teoretične fizike.

Dokaz. Dokaz bomo naredili induktivno glede na velikost matrike A.

Za $n = 1$ opazimo, da je vsaka 1×1 matrika zgornjetrikotna, zato izrek velja, če izberemo $Q = [1]$.

Denimo sedaj, da izrek velja za vsako matriko velikosti največ $(n-1)\times(n-1)$. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z realnimi lastnimi vrednostmi λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in naj bo $\mathbf{v}_1$ lastni vektor dolžine 1, ki pripada lastni vrednosti λ_1. Izberimo ortonormirano bazo $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ prostora $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1\}^\perp$ in označimo z $V^{n\times(n-1)}$ matriko, katere stolpci so enaki $\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$. Matrika $U := \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & V\end{bmatrix}$ je ortogonalna matrika in izračunajmo

$$U^\top AU = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1{}^\top \\ V^\top\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & V\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1{}^\top A\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1{}^\top AV \\ V^\top A\mathbf{v}_1 & V^\top AV\end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Ker je $\mathbf{v}_1$ lastni vektor pri lastni vrednosti λ_1, je

$$\mathbf{v}_1{}^\top A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1{}^\top(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1\|v_1\|^2 = \lambda_1. \tag{1.3}$$

Poleg tega je vektor $\mathbf{v}_i$ pravokoten na $\mathbf{v}_1$ za vsak $i = 2,\ldots,n$ in zatorej

$$V^\top A\mathbf{v}_1 = V^\top(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \begin{bmatrix}\mathbf{v}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^\top\end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \begin{bmatrix}\mathbf{v}_2^\top\mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^\top\mathbf{v}_1\end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{1.4}$$

Z upoštevanjem levega zgornjega elementa (1.3) in levega spodnjega bloka (1.4) v matriki (1.2), dobimo, da je

$$U^\top AU = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{v}_1{}^\top AV \\ \mathbf{0} & V^\top AV\end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Ker je matrika $U^\top AU$ podobna matriki A, ima desni spodnji $(n-1)\times(n-1)$ blok $V^\top AV$ matrike $U^\top AU$ lastne vrednosti $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Po indukcijski hipotezi obstaja takšna zgornjetrikotna matrika T_1 z diagonalnimi elementi $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ in takšna $(n-1)\times(n-1)$ ortogonalna matrika Q_1, da velja

$$Q_1^\top(V^\top AV)Q_1 = T_1.$$

Matrika $R := \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & Q_1\end{bmatrix}$ je ortogonalna $n\times n$ matrika, zato so si matrike A, $U^\top AU$ in $R^\top U^\top AUR$ podobne. Definirajmo $Q := UR$, ki je produkt ortogonalnih matrik, in zato ortogonalna matrika. To se lahko prepričamo tudi tako, da zmnožimo

$$Q^\top Q = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^\top\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^\top VQ_1 \\ Q_1^\top V^\top\mathbf{v}_1 & Q_1^\top V^\top VQ_1\end{bmatrix} = I_n.$$

Pri tem smo zopet upoštevali, da je vektor $\mathbf{v}_1$ dolžine 1 in pravokoten na vsak stolpec matrike V. Oglejmo si sedaj, kakšna je matrika $Q^\top AQ = (UR)^\top A(UR) = R^\top(U^\top AU)R$. Po (1.5) je

$$\begin{aligned}
Q^\top AQ = R^\top(U^\top AU)R &= \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & Q_1^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{v}_1{}^\top AV \\ \mathbf{0} & V^\top AV\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & Q_1\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{v}_1{}^\top AVQ_1 \\ \mathbf{0}^\top & Q_1^\top V^\top AVQ_1\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \mathbf{v}_1{}^\top AVQ_1 \\ \mathbf{0}^\top & T_1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ker je T_1 zgornjetrikotna matrika z diagonalnimi elementi enakimi $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, je $Q^\top AQ$ zgornjetrikotna matrika z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in posledično je matrika A ortogonalno podobna zgornjetrikotni matriki z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. □

Iz dokaza lahko opazimo, da je konstrukcija matrike Q in zgornjetrikotne matrike T odvisna od izbire lastne vrednosti λ_1. Zatorej niti matrika Q niti Z v izreku 1.7 nista enolično določeni z matriko A. [2]

[2] To se lahko prepričate tudi z reševanjem naloge 4 v razdelku 1.7.

Opomba 1.8. *Izrek 1.7 velja v razširjeni različici tudi v primeru, ko matrika A nima realnih lastnih vrednosti. V tem primeru bi na diagonali matrike T dobili (morda kompleksne) lastne vrednosti matrike A, matrika Q pa bi bila kompleksna matrika, za katero velja $\overline{Q}^\top Q = I_n$. Takšni kompleksni matriki, katere inverz je enak njeni konjugirani transponiranki, pravimo unitarna matrika. V tem primeru rečemo, da je matrika A unitarno podobna zgornje trikotni matriki.*

⚠Opomba 1.8 nam torej pove, da je vsaka realna matrika A podobna matriki

$$Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

ki ima na diagonali lastne vrednosti matrike A. Če so lastne vrednosti matrike A realne, je Z realna matrika, podobnost pa ortogonalna, kar smo pokazali v izreku 1.7. V posledici 1.9 pa vidimo, da lahko zgornje trikotnost zamenjamo tudi za spodnje trikotnost.

Posledica 1.9. *Vsaka matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z realnimi lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ je ortogonalno podobna spodnjetrikotni matriki S, katere diagonalni elementi so enaki $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, torej velja $A = Q' S Q'^\top$.*

Dokaz. Naj bo $Z = [Z_{i,j}]_{i,j=1,2,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zgornjetrikotna matrika iz izreka 1.7 in naj bo $Z = Q^\top AQ$ za neko ortogonalno matriko Q. Naj bo

$$P = [P_{i,j}]_{i,j=1,2,\ldots,n} = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Izračunajmo elemente matrike $P^\top ZP = PZP$. Ker je

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i+j = n+1, \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$$

so vsi členi v vsoti

$$(P^\top ZP)_{i,j} = (PZP)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} P_{i,\ell} Z_{\ell,k} P_{k,j}$$

enaki 0, razen ko je $\ell = n+1-i$ in $k = n+1-j$. Zato velja

$$(P^\top ZP)_{i,j} = P_{i,n+1-i} Z_{n+1-i,n+1-j} P_{n+1-j,j} = Z_{n+1-i,n+1-j}. \tag{1.6}$$

Ker je Z zgornjetrikotna matrika, je $z_{i,j} = 0$ kadar $i > j$, kar pa je po (1.6) ekvivalentno pogoju, da je $P^\top ZP$ spodnjetrikotna matrika. Torej sledi, da je $Q^\top AQ$ zgornjetrikotna matrika natanko tedaj, ko je $P^\top Q^\top AQP$ spodnje trikotna. Če označimo $Q' := QP$, trditev sledi. □

Posledica 1.10. *Vsaka simetrična matrika je ortogonalno podobna diagonalni matriki (oz. diagonalizabilna v ortonormirani bazi.)*

⚠ Posledica 1.10 dejansko skriva veliko. Najprej lahko za vsako $n \times n$ simetrično matriko najdemo n paroma ortogonalnih lastnih vektorjev. Stolpci matrike Q so ti normirani lastni vektorji. Poleg tega je diagonalna matrika sestavljena iz realnih lastnih vrednosti, ki so zapisani v pripadajočem vrstnem redu kot lastni vektorji v matriki Q.

Dokaz. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika. Ker ima vsaka simetrična matrika A realne lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, je po Izreku 1.7 matrika A oblike $A = QZQ^\top$, kjer je Q ortogonalna matrika, Z pa zgornjetrikotna matrika z diagonalnimi elementi enakimi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Ker je A simetrična, velja

$$QZQ^\top = A = A^\top = (QZQ^\top)^\top = QZ^\top Q^\top.$$

Če enakost $QZQ^\top = QZ^\top Q^\top$ pomnožimo z leve strani z matriko $Q^\top$ in z desne z matriko Q, in upoštevamo, da je $QQ^\top = Q^\top Q = I_n$, sledi $Z^\top = Z$. Zatorej je Z zgornjetrikotna matrika, ki je enaka svoji transponirani matriki, ki pa je spodnjetrikotna, torej mora biti Z diagonalna matrika. □

Posledica 1.11. *Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti*[3] $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *potem velja*

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

in

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

[3] Čeprav smo dokazali, da velja izrek 1.7 le za matrike z realnimi lastnimi vrednostmi, lahko po opombi 1.8 to predpostavko v posledici 1.11 izpustimo.

Dokaz. Po izreku 1.7 velja $A = QZQ^\top$, kjer je Q ortogonalna matrika, Z pa zgornjetrikotna matrika z diagonalnimi elementi enakimi lastnim vrednostim λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ matrike A. Po posledici 1.4 sledi

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(QZQ^\top) = \mathrm{tr}(Z) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Podobni matriki imata po posledici 1.4 tudi enako determinanto, zatorej je

$$\det(A) = \det(QZQ^\top) = \det(Z) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \quad \square$$

1.4 Frobeniusova norma matrike

Ena od najpogosteje uporabljenih norm matrik v strojnem učenju je Frobeniusova norma. Ta posplošuje evklidsko normo[4] v $\mathbb{R}^n$. Da bi jo lahko definirali preko skalarnega produkta, najprej definirajmo t.i. Frobeniusov skalarni produkt matrik.

[4] Evklidska norma ali 2-norma vektorja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$$

je definirana kot

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Definicija. *Za matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo*

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(A^T B).$$

Izrek 1.12. *Za produkt $\langle A, B\rangle : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ velja*

1. $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$,

2. $\langle \alpha A + \beta B, C\rangle = \alpha\langle A, C\rangle + \beta\langle B, C\rangle$, *za vse* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

3. $\langle A, A\rangle \geq 0$,

4. $\langle A, A\rangle = 0$ *natanko tedaj, ko je* $A = 0$,

za vse matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *in realni števili* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Zato* $\langle A, B\rangle$ *imenujemo (Frobeniusov) skalarni produkt matrik* A *in* B.

Definicija. Frobeniusova[5] norma *matrike* $A = [a_{i,}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *je definirana kot*

$$\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}.$$

[5] Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) je bil nemški matematik, ki je med drugim prvi pokazal Cayley-Hamiltonov izrek, naloga 24 v razdelku 1.7.

To ni edina matrična norma. Več o raznih matričnih normah si lahko preberete v knjigi *Roger A. Horn and Charles R. Johnson,* Matrix Analysis, *Cambridge, 2006*, razdelek 5.6.

Če razpišemo Frobeniusovo normo matrike A po komponentah, opazimo, da velja

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2.$$

Zato je za vsako bločno matriko kvadrat njene Frobeniusove norme enak vsoti kvadratov posameznih blokov:

$$\left\| \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 + \|C\|_F^2 + \|D\|_F^2. \tag{1.7}$$

Torej Frobeniusova norma posplošuje evklidsko normo vektorjev. To se lahko prepričamo tudi z uporabo vektorizacije. Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ označimo njene stolpce z $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$. Vektor

$$\operatorname{vec}(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn},$$

ki je sestavljen in stolpcev matrike A, imenujemo *vektorizacija matrike* A. Sedaj lahko za matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ njun skalarni produkt in Frobeniusovo normo poračunamo tudi s pomočjo običajnega skalarnega produkta vektorjev in evklidske norme kot

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{vec}(A)^\top \operatorname{vec}(B)$$

in

$$\|A\|_F = \|\operatorname{vec}(A)\|.$$

Lema 1.13. *Označimo s* $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ *singularne vrednosti matrike* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Potem velja*

$$\|A\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=1}^{\operatorname{rang} A} \sigma_i^2.$$

Dokaz. Po definiciji velja $\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(A^\top A)$, kar je po posledici 1.11 enako vsoti vseh n lastnih vrednosti matrike $A^\top A$. Lastne vrednosti matrike $A^\top A$ pa so enake kvadratom singularnih vrednosti matrike A. Ker je rang matrike A enak številu neničelnih singularnih vrednosti matrike A, lema sledi. □

Izrek 1.14 (Eckart, Young)**.** *Naj bo $A = U\Sigma V^\top$ razcep singularnih vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, kjer sta matriki*

$$U = [U^{(1)}\, U^{(2)} \dots U^{(m)}] \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ in } V = [V^{(1)}\, V^{(2)} \dots V^{(n)}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ortogonalni, singularne vrednosti matrike A, ki so označene s $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$, pa so zapisane v "diagonalni"matriki Σ kot

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je matrika $A_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ranga k, $k \leq \operatorname{rang}(A)$, ki je med vsemi matrikami ranga k v Frobeniusovi normi najbližje matriki A, enaka

$$A_k = [U^{(1)}\, U^{(2)} \dots U^{(k)}] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_k \end{bmatrix} [V^{(1)}\, V^{(2)} \dots V^{(k)}]^\top =$$
$$= \sigma_1 U^{(1)}(V^{(1)})^\top + \sigma_2 U^{(2)}(V^{(2)})^\top + \dots + \sigma_k U^{(k)}(V^{(k)})^\top. \qquad (1.8)$$

Matrika A_k iz (1.8) ima torej lastnost, da je

$$\|A - A_k\|_F \leq \|A - X\|_F$$

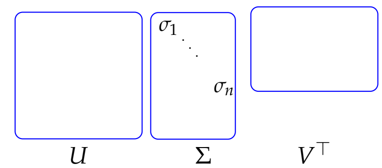
za vse matrike $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, za katere velja $\operatorname{rang}(X) = k$.

Pri tem je napaka pri aproksimaciji matrike A z matriko A_k enaka

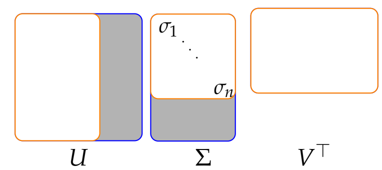
$$\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_n^2}.$$

Dokaz. Originalni dokaz izreka je zapleten, tu povzemamo dokaz iz knjige Gilbert Strang, *Linear algebra and Learning from Data*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 2019. Predpostavimo, da je matrika $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takšna matrika ranga k, ki je v Frobeniusovi normi najbližje matriki A. Želimo torej pokazati, da je matrika B enaka matriki A_k iz (1.8).

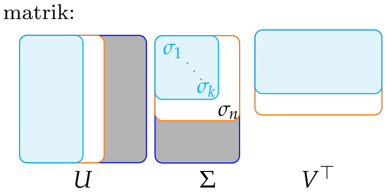
⚠ Razcep singularnih vrednosti matrike A lahko shematično narišemo kot:



Pri tem je pomembnih le prvih n stolpcev matrike U, saj se stolpci $U^{(n+1)}, \dots, U^{(m)}$ množijo z ničelnimi vrsticami matrike Σ.



Izrek Eckarta in Younga nam pove, da lahko najboljši približek matrike A ranga k preprosto izračunamo iz razcepa singularnih vrednosti tako, da še bolj porežemo matrike U, Σ in V, in sicer obdržimo le prvih k stolpcev/vrstic matrik:



Naj bo $B = U_B \Sigma_B V_B^\top$ razcep singularnih vrednosti matrike B. Ker je matrika B ranga k, je tudi matrika Σ_B ranga k in zato jo lahko zapišemo kot

$$\Sigma_B = \begin{bmatrix} D_B & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(n-k)} \end{bmatrix},$$

kjer je D_B diagonalna $k \times k$ matrika z neničelnimi diagonalnimi lastnimi vrednostmi.

Velja torej $U_B^\top B V_B = \Sigma_B$, mi pa sedaj množimo z leve z matriko $U_B^\top$ in z desne z matriko V_B začetno matriko A. Skladno z omenjeno bločno particijo označimo dobljeno matriko kot

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} := U_B^\top B V_B,$$

kjer je $X \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $Y \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$, $Z \in \mathbb{R}^{(m-k)\times k}$ in $W \in \mathbb{R}^{(m-k)\times(n-k)}$. Za matriko A torej velja

$$A = U_B \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} V_B^\top.$$

Če označimo diagonalne elemente matrike X z $x_{11}, \ldots, x_{kk}$, naj bo matrika

$$D_X := \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

sestavljena iz diagonalnih elementov matrike X. Sedaj definirajmo matriko

$$C := U_B \begin{bmatrix} X - D_X + D_B & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_B^\top,$$

katere zgornji levi blok se v izvendiagonalnih elementih ujema z matriko X, njeno diagonalo pa smo zamenjali z neničelnimi singularnimi vrednostmi matrike B. Opazimo, da je matrika C ranga k, saj je dobljena kot produkt matrike ranga k z obrnljivima matrikama U_B in $V_B^\top$. Torej je C nek (morda slab) približek matrike A ranga k. Da bi videli, kako dobra je, izračunajmo

$$\begin{aligned} \|A - C\|_F^2 &= \left\| U_B \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} V_B^\top - U_B \begin{bmatrix} X - D_X + D_B & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_B^\top \right\|_F^2 = \\ &= \left\| U_B \left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X - D_X + D_B & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) V_B^\top \right\|_F^2. \end{aligned}$$

V nalogi 5 v razdelku 1.7 boste pokazali, da se Frobeniusova norma matrike ne spremeni, če jo množimo z ortogonalno matriko s katerekoli strani. Zato velja

$$\begin{aligned}\|A-C\|_F^2 &= \left\| U_B \left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X - D_X + D_B & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) V_B^\top \right\|_F^2 = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} D_X - D_B & 0 \\ Z & W \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \\ &= \|D_X - D_B\|_F^2 + \|Z\|_F^2 + \|W\|_F^2,\end{aligned}$$

kjer smo za zadnjo enakost uporabili (1.7). Ker je po predpostavki B najboljši približek matrike A ranga k, je (po podobnem razmisleku kot zgoraj)

$$\begin{aligned}\|D_X - D_B\|_F^2 + \|Z\|_F^2 + \|W\|_F^2 &= \|A-C\|_F^2 \geq \\ &\geq \|A-B\|_F^2 = \\ &= \left\| U_B \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} V_B^\top - U_B \begin{bmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_B^\top \right\|_F^2 = \\ &= \left\| U_B \left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) V_B^\top \right\|_F^2 = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} X - D_B & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \\ &= \|X - D_B\|_F^2 + \|Y\|_F^2 + \|Z\|_F^2 + \|W\|_F^2.\end{aligned}$$

Sledi

$$\|D_X - D_B\|_F^2 \geq \|X - D_B\|_F^2 + \|Y\|_F^2 \geq \|D_X - D_B\|_F^2 + \|Y\|_F^2 \geq \|D_X - D_B\|_F^2.$$

Srednjo neenakost smo dobili, iz opazke, da se matriki $X - D_B$ in $D_X - D_B$ ujemata v diagonalnih elementih, a ima druga izmed njiju vse izvendiagonalne elemente enake 0. Iz tako dobljene verige neenakosti, kjer sta prvi in zadnji izraz enaka, dobimo

$$\|Y\|_F = 0 \text{ in } \|D_X - D_B\|_F = \|X - D_B\|_F.$$

Iz prve lastnosti sledi $Y = 0$, iz druge pa (ker se matriki $X - D_B$ in $D_X - D_B$ ujemata v diagonalnih elementih), da ima matrika X ničelne izvendiagonalne elemente, torej velja $X = D_X$. (Ali ubesedeno: C smo konstruirali tako, da je bil dejansko zelo dober približek matrike A ranga k. Ker pa je B še boljši približek matrike A ranga k, mora imeti matrika $U_B^\top A V_B$ cel izvendiagonalni blok ničel.) Simetrično lahko s pomočjo konstrukcije matrike

$$C' := U_B \begin{bmatrix} X - D_X + D_B & 0 \\ Z & 0 \end{bmatrix} V_B^\top$$

pokažemo, da mora biti $Z = 0$. (Poskusite dokazati sami s pomočjo simetričnega dokaza dokazu zgoraj.)

Če povzamemo, sta matriki A in B oblike

$$A = U_B \begin{bmatrix} D_X & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} V_B^\top \text{ in } B = U_B \begin{bmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_B^\top, \tag{1.9}$$

kar pomeni da so v D_X na diagonali zapisane nekatere singularne vrednosti matrike A, ostale pa so skrite v singularnem razcepu matrike W. Tako so po lemi 1.13 neničelne singularne vrednosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$ matrike A razdeljene na dva dela,

$$D_X = \begin{bmatrix} \sigma_{i_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_{i_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_{i_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k} \text{ in } \|W\|_F^2 = \sigma_{i_{k+1}}^2 + \ldots + \sigma_{i_n}^2. \tag{1.10}$$

Kot prej izračunamo, da velja

$$\|A - B\|_F^2 = \|D_X - D_B\|_F^2 + \|W\|_F^2.$$

Da bo navedena Frobeniusova norma najmanjša možna, mora torej veljati $D_B = D_X$ in tudi $\|W\|_F$ mora biti najmanjša možna. Iz (1.10) sledi, da je v matriki D_X zapisanih k največjih singularnih vrednosti matrike A (torej $\sigma_{i_j} = \sigma_j$ za $j = 1, \ldots, k$), v W pa se skrivajo najmanjše singularne vrednosti matrike A. Torej je

$$D_B = D_X = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_k \end{bmatrix}$$

in zato je po (1.9) matrika B enaka matriki A_k iz (1.8) in

$$\|A - A_k\|_F^2 = \|W\|_F^2 = \sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2. \quad \square$$

1.5 Kroneckerjev produkt matrik

V tem razdelku se bomo dotaknili multilinearne algebre preko oblike tenzorskega produkta matrik, Kroneckerjevega produkta.

Definicija. Kroneckerjev produkt *(tudi* tenzorski produkt*) matrik* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *in* $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ *je* $(mp) \times (nq)$ *matrika*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(mp) \times (nq)}.$$

Opazimo, da je Kroneckerjev produkt $A \otimes B$ velika matrika (v primerjavi z matrikama A in B), ki je bločno sestavljena iz mn kopij večkratnikov matrike B. Označimo

$$[A \otimes B]_{i,j} := a_{ij} B$$

kot tistega od blokov Kroneckerjevega produkta $A \otimes B$, ki se nahaja v vrsticah $(i-1)p+1, \ldots, ip$ in stolpcih $(j-1)q+1, \ldots, jq$, in mu rečemo *(i,j)-ti blok Kroneckerjevega produkta $A \otimes B$.*

V posebnem primeru, ko sta matriki A in B kar vektorja, lahko označimo $A = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \ldots a_m \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^m$ in $B = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$. Potem je

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \mathbf{b} \\ a_2 \mathbf{b} \\ \vdots \\ a_m \mathbf{b} \end{bmatrix} = \operatorname{vec}\left(\begin{bmatrix} a_1 \mathbf{b} & a_2 \mathbf{b} & \cdots a_m \mathbf{b} \end{bmatrix} \right) = \operatorname{vec}(\mathbf{b}\mathbf{a}^\top). \qquad (1.11)$$

Torej je Kroneckerjev produkt vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ kar vektorizacija matrike $\mathbf{b}\mathbf{a}^\top$ ranga 1.

Najprej lahko opazimo, da Kroneckerjev produkt ni komutativna operacija. Za matriki $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, za kateri je $mp \neq nq$, sta matriki $A \otimes B$ in $B \otimes A$ celo različnih velikosti. A četudi je $mp = nq$, vrstnega reda matrik v produktu ne smemo menjati. Denimo, za matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

velja

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izkaže se, da je $\otimes$ asociativna operacija.

Izrek 1.15. *Za poljubne matrike A, B in C (poljubnih velikosti) velja*

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

Dokaz. Dokaz je tehničen, dolg, a nezahteven, zato ga v trenutni verziji skripte še ni. □

Zelo lahko je preveriti, da je Kroneckerjev produkt linearen v vsakem faktorju.

Izrek 1.16. *Za poljubne matrike $A, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $B, D \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ter realno število $\alpha \in \mathbb{R}$ velja*

$$(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha (A \otimes B)$$

in

$$(A+C)\otimes B = A\otimes B + C\otimes B \text{ ter } A\otimes(B+D) = A\otimes B + A\otimes D.$$

Dokaz. Naj bo $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ in $C=[c_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Enakosti bomo pokazali tako, da bomo pokazali, da so (i,j)-ti bloki enaki. Ker velja

$$[(\alpha A)\otimes B]_{i,j} = (\alpha a_{ij})B = a_{ij}(\alpha B) = [A\otimes(\alpha B)]_{i,j}$$

in

$$[(\alpha A)\otimes B]_{i,j} = (\alpha a_{ij})B = \alpha(a_{ij}B) = \alpha[A\otimes B]_{i,j},$$

sledi prva enakost. Podobno se lotimo druge: ker je

$$\begin{aligned}[(A+C)\otimes B]_{i,j} &= (A+C)_{ij}B = (a_{ij}+c_{ij})B = \\ &= a_{ij}B + c_{ij}B = [A\otimes B]_{i,j} + [C\otimes B]_{i,j}.\end{aligned}$$

in

$$[A\otimes(B+D)]_{i,j} = a_{ij}(B+D) = a_{ij}B + a_{ij}D = [A\otimes B]_{i,j} + [A\otimes D]_{i,j},$$

izrek sledi. □

Na podoben način je mogoče rutinsko pokazati, da velja tudi enakost

$$(A\otimes B)^\top = A^\top\otimes B^\top. \tag{1.12}$$

Rešite nalogo 12 v razdelku 1.7 in enakost (1.12) dokažite sami.

Naslednji izrek nam pove, kako se povezujeta običajni matrični in Kroneckerjev produkt.

Izrek 1.17. *Za poljubne matrike $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{p\times q}$, $C\in\mathbb{R}^{n\times r}$ in $D\in\mathbb{R}^{q\times s}$ velja*

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD).$$

Dokaz. Zopet pokažimo enakost tako, da bomo primerjali (i,j)-ti blok leve in desne strani. Začnimo z levo stranjo, katere (i,j)-ti blok $[(A\otimes B)(C\otimes D)]_{i,j}$ je dobljen kot običajni produkt i-tega bloka vrstic matrike $(A\otimes B)$ in j-tega bloka stolpcev matrike $(C\otimes D)$. Po definiciji matričnega množenja je torej

$$[(A\otimes B)(C\otimes D)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}B)(c_{kj}D) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}BD.$$

Vsoto $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$ na desni strani prepoznamo kot (i,j)-ti element matrike AC, torej je enaka $(AC)_{ij}$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}[(A\otimes B)(C\otimes D)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj})BD = \\ &= (AC)_{ij}(BD) = [(AC)\otimes(BD)]_{i,j}.\end{aligned}$$

□

Trditev 1.18. *Če sta matriki Q in S ortogonalni, je ortogonalen tudi njun Kroneckerjev produkt $Q \otimes S$.*

Dokaz. Ker sta matriki $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni, velja $Q^\top Q = I_m$ in $S^\top S = I_n$. Tako po enakosti (1.12) in izreku 1.17 velja

$$\begin{aligned}(Q \otimes S)^\top (Q \otimes S) &= (Q^\top \otimes S^\top)(Q \otimes S) = (Q^\top Q) \otimes (S^\top S) = \\ &= I_m \otimes I_n = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot I_n & 0 \cdot I_n & \dots & 0 \cdot I_n \\ 0 \cdot I_n & 1 \cdot I_n & \dots & 0 \cdot I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdot I_n & 0 \cdot I_n & \dots & 1 \cdot I_n \end{bmatrix} = I_{mn}\end{aligned}$$

Ker je $Q \otimes S$ kvadratna matrika, ki se s svoje leve pomnoži s svojo transponiranko v identično matriko, sledi, da je tudi ortogonalna. □

V primeru, ko sta matriki A in B kvadratni, lahko o lastnih vrednostih njunega Kroneckerjevega produkta sklepamo iz lastnih vrednosti posameznih matrik.

Izrek 1.19. *Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ in ima matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lastne vrednosti $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, potem je množica lastnih vrednosti matrike $A \otimes B$ enaka*

$$\{\lambda_i \mu_j;\ \lambda_i \text{ lastna vrednost } A, \mu_j \text{ lastna vrednost } B\}.$$

Dokaz. Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, potem po izreku 1.7 obstajata takšna ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in takšna zgornje trikotna matrika Z z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, da velja $Q^\top A Q = Z$. Podobno obstajata takšna ortogonalna matrika $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in takšna zgornje trikotna matrika W z diagonalnimi elementi $\mu_1, \dots, \mu_n$, da velja $S^\top B S = W$. Sedaj uporabimo ortogonalni matriki Q in S za ortogonalno podobnost Kroneckerjevaga produkta $A \otimes B$, po trditvi 1.18 je namreč tudi $Q \otimes S$ ortogonalna matrika. Sedaj po enakosti (1.12) izreku 1.17 velja

$$\begin{aligned}(Q \otimes S)^\top (A \otimes B)(Q \otimes S) &= (Q^\top \otimes S^\top)(A \otimes B)(Q \otimes S) = \\ &= (Q^\top A Q) \otimes (S^\top B S) = Z \otimes W.\end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da sta si matriki $A \otimes B$ in $Z \otimes W$ (ortogonalno) podobni in imata zato po posledici 1.4 enake lastne vrednosti. Opazimo, da je Kroneckerjev produkt zgornje trikotnih matrik Z in W zopet zgornje trikotna matrika, katere diagonalni bloki so enaki $\lambda_1 W$, $\lambda_2 W$,$\dots$, $\lambda_m W$. Vsi omenjeni diagonalni bloki so zgornje trikotne matrike, saj so večkratniki zgornje trikotne matrike W, in zato so lastne vrednosti $Z \otimes W$ enake

$$\begin{aligned}\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_1, \dots, \lambda_m\mu_1, &\lambda_1\mu_2, \lambda_2\mu_2, \dots, \lambda_m\mu_2, \dots, \\ &\lambda_1\mu_n, \lambda_2\mu_n, \dots, \lambda_m\mu_n.\end{aligned}$$ □

S pomočjo tako izračunanih lastnih vrednosti Kroneckerjevega produkta rešite nalogo 11 v razdelku 1.7.

Izrek 1.20. *Za matrike* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *in* $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$ *velja*

$$\operatorname{vec}(ABC) = (C^\top \otimes A)\operatorname{vec}(B).$$

Izrek nam lahko pride prav, ko želimo spremeniti reševanje matričnih enačb v sisteme linearnih enačb. Denimo, da imamo (ne nujno kvadratni, torej tudi ne nujno neobrnljivi matriki) A in M in želimo iz enačbe

$$AXM = S$$

izraziti matriko X.

Dokaz. V dokazu bomo naredili manjši trik in na levi strani enakosti matriko B z desne množili z identično matriko

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^\top \\ \mathbf{e}_2^\top \\ \mathbf{e}_3^\top \\ \vdots \\ \mathbf{e}_p^\top \end{bmatrix},$$

kjer smo z $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ označili standardno bazo $\mathbb{R}^n$.

Kot že prej, označimo stolpce matrike B z $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, …,$B^{(p)}$ ter stolpce matrike C z $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, …,$C^{(p)}$ ter . Sedaj zapišemo levo stran enakosti kot

$$\begin{aligned}\operatorname{vec}(ABC) = \operatorname{vec}(A(BI_p)C) &= \\ &= \operatorname{vec}\left(A\left(\sum_{i=1}^{p} B^{(i)}\mathbf{e}_i^\top\right)C\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{p}\operatorname{vec}(A(B^{(i)}\mathbf{e}_i^\top)C) = \sum_{i=1}^{p}\operatorname{vec}((AB^{(i)})(C^\top\mathbf{e}_i)^\top)\end{aligned}$$

V zadnji vsoti sta $AB^{(i)} \in \mathbb{R}^m$ in $C^\top\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^r$ vektorja, zato po (1.11) velja $\operatorname{vec}((AB^{(i)})(C^\top\mathbf{e}_i)^\top) = (C^\top\mathbf{e}_i)^\top \otimes (AB^{(i)})$. Sledi

$$\begin{aligned}\operatorname{vec}(ABC) &= \sum_{i=1}^{p}\operatorname{vec}((AB^{(i)})(C^\top\mathbf{e}_i)^\top) = \\ &= \sum_{i=1}^{p}(C^\top\mathbf{e}_i) \otimes (AB^{(i)})\end{aligned}$$

Po izreku 1.17 lahko tenzorski produkt običajnih produktov zapišemo kot produkt tenzorskih produktov in po tem, ko dvakrat uporabimo omenjeno enakost, dobimo

$$\begin{aligned}
\operatorname{vec}(ABC) &= \sum_{i=1}^{p} (C^\top \mathbf{e}_i) \otimes (AB^{(i)}) = \\
&= \sum_{i=1}^{p} (C^\top \otimes A)(\mathbf{e}_i \otimes B^{(i)}) = \\
&= (C^\top \otimes A) \sum_{i=1}^{p} (\mathbf{e}_i \otimes B^{(i)}) = \\
&= (C^\top \otimes A) \sum_{i=1}^{p} \operatorname{vec}(B^{(i)} \mathbf{e}_i^\top) = \\
&= (C^\top \otimes A) \operatorname{vec}\left(\sum_{i=1}^{p} B^{(i)} \mathbf{e}_i^\top \right) = \\
&= (C^\top \otimes A) \operatorname{vec}\left(\sum_{i=1}^{p} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & B^{(i)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \\
&= (C^\top \otimes A) \operatorname{vec}(B),
\end{aligned}$$

kar smo želeli pokazati. □

1.6 Pozitivna (semi)definitnost matrik

Definicija. *Simetrični matriki $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pravimo*

A. pozitivno semidefinitna, *če je $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \geq 0$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

B. pozitivno definitna, *če je $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$ za vse neničelne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

C. negativno semidefinitna, *če je $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \leq 0$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

D. negativno definitna, *če je $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} < 0$ za vse neničelne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

E. nedefinitna, *če je $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$ za nekatere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{y}^\top A \mathbf{y} < 0$ za nekatere $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.*

Definicija. *Izrazu*

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j,$$

kjer je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^\top$ vektor spremenljivk, pravimo kvadratna forma *matrike $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$.*

Po posledici 1.10 lahko matriko A zapišemo kot $A = QDQ^\top$, kjer je D diagonalna matrika lastnih vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ matrike A in $Q = [\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n]$ ortogonalna matrika pripadajočih lastnih vektorjev. Potem je kvadratna forma matrike A enaka

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top Q D Q^\top \mathbf{x} = (Q^\top \mathbf{x})^\top D (Q^\top \mathbf{x}) = \mathbf{u}^\top D \mathbf{u},$$

Kvadratna forma matrike $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ je enaka

$$5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 2x_2^2 = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

Z malo iznajdljivosti bi lahko preverili, da je

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

Pri tem je kvadratna forma matrike A enaka 0 natanko tedaj, ko je $x_1 = x_2 = 0$. Zatorej je po definiciji matrika A pozitivno definitna.

kjer označimo z $\mathbf{u} = Q^\top \mathbf{x}$ vektor novih spremenljivk v kvadratni formi. Omenjena substitucija je linearna (t.j. vsaka nova spremenljivka je linearna kombinacija starih) ter bijektivna ($Q^\top$ je obrnljiva matrika) in v novih spremenljivkah $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}^\top$ je kvadratna forma matrike A enaka

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{u}^\top D\mathbf{u} = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2. \tag{1.13}$$

Takšna kvadratna forma v novih spremenljivkah nima več mešanih členov.

Primer 1.21. *Po Posledici 1.11 je lahko izračunati lastni vrednosti λ in μ matrike $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Za njiju velja $\lambda + \mu = 7$ in $\lambda\mu = 6$, torej sta lastni vrednosti matrike A enaki 6 in 1. Kvadratna forma matrike A je torej v novih spremenljivkah u_1 in u_2, kjer ne bo imela mešanih členov, enaka*

$$6u_1^2 + 1u_2^2.$$

Za vajo poračunajte, da je enotski lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 6 enak $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^\top$ in enotski lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1 enak $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^\top$. Tako je $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Novi spremenljivki u_1 in u_2 se izražata s starima x_1 in x_2 kot

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Q^\top \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

in zato velja[6]

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + 1x_2), \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1x_1 - 2x_2). \end{aligned}$$

[6] Vidite sedaj, kaj smo mislili z linearno spremembo spremenljivk?

Če se še malo poigramo in to spremembo spremenljivk vstavimo v kvadratno formo $6u_1^2 + u_2^2$, je lahko preveriti, da velja

$$6u_1^2 + u_2^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}(2x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2,$$

torej da sta kvadratni formi v spremenljivkah x_1, x_2 in v spremenljivkah u_1, u_2 enaki.

Izrek 1.22. *Simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je*

A. *pozitivno semidefinitna natanko tedaj, ko ima vse lastne vrednosti nenegativne,*

B. *pozitivno definitna natanko tedaj, ko ima vse lastne vrednosti pozitivne,*[7]

C. *negativno semidefinitna natanko tedaj, ko ima vse lastne vrednosti nepozitivne,*

D. *negativno definitna natanko tedaj, ko ima vse lastne vrednosti negativne,*

E. *nedefinitna natanko tedaj, ko ima tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti.*

[7] Ker ima matrika A iz primera 1.21 lastni vrednosti enaki 6 in 1, je pozitivno definitna. Kar smo sicer z malo iznadljivosti znali preverili že po definiciji na strani 23.

Dokaz. Pokažimo le A. del trditve, ostali deli se pokažejo na podoben način.

Najprej zapišimo kvadratno formo matrike A brez mešanih členov kot v (1.13). Opazimo sledeče:

($\Longleftarrow$) Če ima matrika A vse lastne vrednosti nenegativne, potem je tudi izraz (1.13) nenegativno število in tako po definiciji matrika A pozitivno semidefinitna.

($\Longrightarrow$) Če je matrika A pozitivno semidefinitna, potem je $\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2 \geq 0$ za vse vrednosti spremenljivk $u_1, \ldots, u_n$. Izberimo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in naj bo $u_j = 1$ ter $u_i = 0$ za vse $i \neq j$. Potem je

$$0 \leq \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \lambda_1 0^2 + \ldots + \lambda_{j-1} 0^2 + \lambda_j 1^2 + \lambda_{j+1} 0^2 + \ldots + \lambda_n 0^2 = \lambda_j,$$

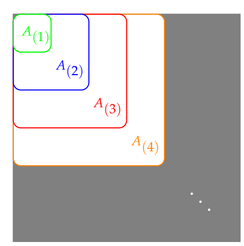
iz česar sledi, da je poljubna lastna vrednost matrike A nenegativna. $\square$

Iz A. in B. dela izreka 1.22 sledi naslednja ugotovitev.

Posledica 1.23. *Simetrična matrika A je pozitivno definitna natanko tedaj, ko je pozitivno semidefinitna in obrnljiva.*

Za matriko $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ označimo z $A_{(k)}$ njeno vodilno glavno podmatriko, ali po domače njen levi zgornji $k \times k$ vogal. Torej, $A_{(k)} = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ in za $k = 1, 2, 3$ v posebnem velja

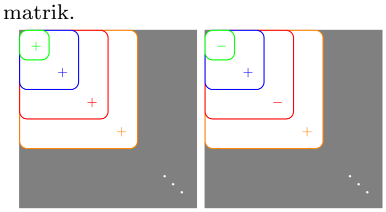
$$A_{(1)} = [a_{1,1}],\ A_{(2)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix},\ A_{(3)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$A =$ 

Izrek 1.24 (Sylvester)**.** *Simetrična matrika A je pozitivno definitna natanko tedaj, ko so determinante vseh vodilnih glavnih podmatrik matrike A pozitivne, t.j.* $\det A_{(k)} > 0$ *za vse k, $1 \leq k \leq n$.*

Simetrična matrika A je negativno definitna natanko tedaj, ko je determinanta vsake $k \times k$ vodilne glavne podmatrike pozitivna, če je k sodo število, ter negativna, če je k liho število, t.j. $(-1)^k \det A_{(k)} > 0$ *za vse k, $1 \leq k \leq n$.*

⚠ Sylvestrov kriterij nam omogoča, da lahko za karakterizacijo definitnosti matrike poračunamo le predznake determinat njenih vodilnih glavnih podmatrik.



pozitivno definitna | negativno definitna

Dokaz. Naj bo A simetrična $n \times n$ matrika in si oglejmo kvadratno formo $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$. Če je A pozitivno definitna, je $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0$ za vse vektorje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Izberimo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in izberimo poljuben vektor oblike $\mathbf{x}^\top = [\mathbf{y}_k^\top \mathbf{0}^\top]$, kjer je $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^k$. Potem je

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = [\mathbf{y}_k^\top \mathbf{0}^\top] \begin{bmatrix} A_{(k)} & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{y}_k^\top A_{(k)} \mathbf{y}_k$$

Kar pomeni, da so za pozitivno definitno matriko A tudi vse podmatrike $A_{(k)}$ pozitivno definitne, $k = 1, 2, \ldots, n$. Po izreku 1.22 velja, da ima podmatrika $A_{(k)}$ vse lastne vrednosti pozitivne in zatorej je po posledici 1.11 $\det(A_{(k)}) > 0$.

Podobno velja, da so za negativno definitno matriko A tudi njene podmatrike $A_{(k)}$ negativno definitne, $k = 1, 2, \ldots, n$. Po izreku 1.22 velja, da ima v tem primeru podmatrika $A_{(k)}$ vse lastne vrednosti negativne in zatorej je po posledici 1.11 $\det(A_{(k)})$ produkt k negativnih števil. V primeru, ko je k sodo število, je $\det(A_{(k)}) > 0$, in v primeru, ko je k liho, je $\det(A_{(k)}) < 0$.

Dokaz obrata Sylvestrovega izreka ni trivialen in ga bomo tu opustilit. Je pa zanimiv članek Giorgio Giorgi: *Various Proofs of the Sylvester Criterion for Quadratic Forms*, Journal of Mathematics Research; Vol 9, No 6, 2017, kjer imate predstavljenih šest različnih dokazov izreka. Poskusite razumeti vsaj enega. $\square$

Izrek 1.25. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z rangom $\operatorname{rang}(A) = r$.*

A. *A je simetrična pozitivno semidefinitna natanko tedaj, ko obstaja takšna matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\operatorname{rang}(B) = r$, da je $A = BB^\top$.*

B. *A je simetrična pozitivno definitna natanko tedaj, ko je $r = n$ in obstaja takšna obrnljiva matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $A = BB^\top$.*

Dokaz. Če je matrika A oblike $A = BB^\top$, potem velja

$$A^\top = (BB^\top)^\top = (B^\top)^\top B^\top = BB^\top = A,$$

iz česar sledi, da je simetrična. Poleg tega je

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top BB^\top\mathbf{x} = (B^\top\mathbf{x})^\top(B^\top\mathbf{x}) = \|B^\top\mathbf{x}\|^2 \geq 0,$$

torej je A celo pozitivno semidefinitna. Če velja poleg tega, da je matrika B tudi obrnljiva, je obrnljiva tudi matrika A in zatorej po posledici 1.23 pozitivno definitna.

Pokažimo sedaj, da lahko vsako simetrično pozitivno semidefinitno matriko A ranga r razcepimo kot $A = BB^\top$. Ker je A simetrična, je po posledici 1.10 ortogonalno podobna diagonalni matriki D, torej je $A = QDQ^\top$, kjer je Q ortogonalna matrika, D pa diagonalna. Ker je matrika A ranga r, je tudi diagonalna matrika D, v kateri so po diagonali zapisane lastne vrednosti matrike A, ranga r, in zato je le r od njih neničelnih. Če označimo neničelne lastne vrednosti matrike A z $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, potem je

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Poleg tega je po predpostavki matrika A pozitivno semidefinitna in so zatorej vse lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ pozitivne, posledično pa njihovi koreni pozitivna realna števila. Označimo z

$$E = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

matriko, za katero velja $E^2 = D$. Označimo z

$$E' = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r}$$

"vitko" različico matrike E. Namreč, produkt neke matrike z desne z matriko E ima zadnjih $n - r$ stolpcev ničelnih, ki pa se jih znebimo, če namesto z E množimo z matriko E'. Poleg tega velja tudi $E'E'^\top = EE = D$.

Označimo sedaj $B = QE' \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Za tako definirano matriko B velja $\mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(E') = r$ in

$$BB^\top = QE'E'^\top Q^\top = QDQ^\top = A.$$

Poleg tega, če je $r = n$, je $E' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljiva in posledično je tudi matrika $B = QE' = BE \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljiva. $\square$

V dokazu smo si za konstrukcijo matrike B izbrali enega od možnih razcepov matrike A. Zato matrika B iz izreka 1.25 seveda ni nujno enolična. V naslednjem izreku bomo pokazali, da lahko matriko B izberemo celo tako, da je spodnje trikotna. Takšna faktorizacija matrike je zelo koristna v računalništvu, denimo v metodi Monte Carlo.

Izrek 1.26 (Razcep Choleskega)**.** *Obrnljiva matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima razcep Choleskega*

$$A = LL^\top,$$

kjer je $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spodnje trikotna matrika, natanko tedaj, ko je A simetrična in pozitivno definitna.

Dokaz. Denimo najprej, da je $A = LL^\top$. Po izreku 1.25 je matrika A simetrična in pozitivno definitna.

Da dokažemo obrat, predpostavimo, da je matrika A simetrična in pozitivno definitna. Potem po izreku 1.25 obstaja obrnljiva $n \times n$ matrika B, da velja $A = BB^\top$. Sedaj zapišimo QR-razcep matrike $B^\top$, torej je $B^\top = QR$ in $B = R^\top Q^\top$. Pri tem razcepu je matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalna, matrika $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pa zgornje trikotna. Posledično je

$$A = BB^\top = R^\top Q^\top QR = R^\top R.$$

Če označimo $L = R^\top$, je torej $A = LL^\top$, kjer je L spodnje trikotna matrika. □

1.7 Naloge

(↯) Naloga 1.

Za vsako od naslednjih trditev pokažite, ali drži ali ne drži.

A. Če je matrika A obrnljiva, potem je $\mathrm{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}$.

B. $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(C^\top B^\top A^\top)$.

C. Obstaja nesimetrična matrika, ki ni ortogonalno podobna diagonalni matriki.

D. Če je $A = \mathbf{u}\mathbf{u}^\top$, kjer je $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, potem je $\|A\|_F = 5$.

E. Če je $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ obrnljiva matrika s singularnima vrednostima σ in τ, potem je $\|A^{-1}\|_F = \sqrt{\sigma^{-2} + \tau^{-2}}$.

F. Za simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ za lastnimi vrednostmi 1,2,3,4, je $\|A\|_F = \sqrt{10}$.

G. Podobni matriki imata enako Frobeniusovo normo.

(↯) Naloga 2.

Dokažite, da je podobnost matrik ekvivalenčna relacija na množici vseh kvadratnih $n \times n$ matrik. Pokažite, da je tudi ortogonalna podobnost matrik ekvivalenčna relacija. Pokažite, da so ekvivalenčni ortogonalne podobnosti vsebovani v ekvivalenčnih razredih podobnosti.

(↯) Naloga 3.

Naj bosta $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ poljubna vektorja in definirajmo $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^\top$.

Poskusite nalogo rešiti sami preden si ogledate rešitev na strani 63.

A. Pokažite, da je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika s sledjo $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$.

B. Pokažite, da ima A lastni vrednosti 0 (z večkratnostjo $n-1$) in $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ (z večkratnostjo 1).

(↯) Naloga 4.

Naj ima matrika A realne lastne vrednosti in naj bosta Q in Z kot v izreku 1.7. Torej je $Q^\top A Q$ enaka zgornjetrikotni matriki Z.

A. Poiščite neidentično ortogonalno matriko U, za katero bo tudi matrika $U^\top Z U = Z'$ zgornjetrikotna.

B. Pokažite, da je produkt ortogonalnih matrik ortogonalna matrika, torej v posebnem je $Q' = QU$ tudi ortogonalna matrika.

C. Prepričajte se, da sedaj tako Q in Z kot Q' in Z' ustrezata sklepu Schurovega izreka.

(↯) Naloga 5.

Za poljubno matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ter ortogonalni matriki $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dokažite, da velja

Rešitev najdete na strani 63.

$$\|UAV\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}.$$

(↯) Naloga 6.

Kaj mora veljati za realni števili a in b, da bo matrika $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ imela $\|A\|_F = 2$ in $\det(A) = 0$?

(↯) Naloga 7.

Pokažite, da za simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ velja

$$\|A\|_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2},$$

kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A. Pokažite na primeru, da enakost ne velja za nesimetrične matrike.

(ϟ) Naloga 8.

Naj bo $A = PDP^{-1}$ simetrična matrika. Pokažite, da je najboljša aproksimacija ranga ena matrike A v Frobeniusovi normi enaka $\lambda \mathbf{v}\mathbf{v}^\top$, kjer je λ po absolutni vrednosti največja lastna vrednost matrike A, $\mathbf{v}$ pa normirani lastni vektor, ki pripada λ.

(ϟ) Naloga 9.

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična ($A^\top = A$), $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pa antisimetrična ($B^\top = -B$) matrika.

A. Utemeljite, da velja $\langle A, B\rangle_F = -\langle A, B\rangle_F$.

B. Sklepajte, da sta poljubna simetrična in poljubna antisimetrična matrika ortogonalni glede na Frobeniusov skalarni produkt.

(ϟ) Naloga 10.

Če sta matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ obrnljivi, potem pokažite, da je obrnljiva tudi matrika $A \otimes B$ in da velja $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

(ϟ) Naloga 11.

Pokažite, da za poljubni matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ (z realnimi lastnimi vrednostmi) velja

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

in

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n.$$

(ϟ) Naloga 12.

Pokažite, da za poljubni matriki A in B velja

A. $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$ in

B. $\|A \otimes B\|_F = \|A\|_F \|B\|_F$.

(ϟ) Naloga 13.

Zapišite primer matrik $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, za kateri velja $\|A \otimes B\|_F = 10$.

(ϟ) Naloga 14.

Naj bosta $A = U_A \Sigma_A V_A^\top$ in $B = U_B \Sigma_B V_B^\top$ singularna razcepa matrik $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$.

A. Zapišite singularni razcep matrike $A \otimes B$.

B. Zapišite singularne vrednosti matrike $A \otimes B$.

C. Pokažite, da velja $\operatorname{rang}(A \otimes B) = \operatorname{rang}(A)\operatorname{rang}(B)$.

(↯) Naloga 15.

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljiva matrika. Pokažite, da ima matrika $A \otimes A^{-1}$ lastno vrednost 1.

(↯) Naloga 16.

Poiščite linearno spremembo spremenljivk $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$ and $w = h(x, y, z)$, v kateri je matrika, ki pripada formi

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - 4xz - 2yz$$

diagonalna.

(↯) Naloga 17.

Če je simetrična matrika A pozitivno semidefinitna, pokažite, da je tudi A^k pozitivno semidefinitna za vsak $k \in \mathbb{N}$.

(↯) Naloga 18.

Naj bo $A = B^\top B$ takšna pozitivno semidefinitna matrika velikosti $n \times n$, da za nek vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ velja $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = 0$. Pokažite, da je $B\mathbf{x} = 0$ in nato sklepajte, da velja tudi $A\mathbf{x} = 0$.

(↯) Naloga 19.

Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ter $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ simetrični matriki in $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Pokažite, da je bločna matrika $\begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix}$ pozitivno semidefinitna natanko tedaj, ko je matrika $\begin{bmatrix} A & -B \\ -B^\top & C \end{bmatrix}$ pozitivno semidefinitna.

Rešitev naloge najdete na strani 64.

(↯) Naloga 20.

Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pozitivno semidefinitni matriki. Pokažite, da je tedaj tudi $A \otimes B$ pozitivno semidefinitna.

Rešitev naloge najdete na strani 64.

(↯) Naloga 21.

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična pozitivno semidefinitna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

A. Dokažite, da velja $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \leq \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2$ za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

B. Dokažite, da velja $\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} = \lambda_1$.

C. Dokažite, da je tudi matrika $A - \lambda_n I_n$ pozitivno semidefinitna.

(⋆) Naloga 22.

Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrični pozitivno semidefinitni matriki.

A. Pokažite, da obstaja natanko pozitivno semidefinitna matrika K, da velja $K^2 = A$.

B. Pokažite, da obstaja natanko ena pozitivno semidefinitna matrika K, da velja $K^2 = A$. Pravimo tudi, da je $K = \sqrt{A}$ koren matrike A.

C. Pokažite, da je $\langle A, B \rangle = \|\sqrt{A}\sqrt{B}\|_F^2$.

(⋆) Naloga 23.

Uporabite Schurov izrek, da dokažete, da je rang kvadratne matrike A enak velikosti največje obrnljive (kvadratne) podmatrike matrike A.

Rešitev naloge najdete na strani 65.

(⋆) Naloga 24.

Dokažite Cayley-Hamiltonov izrek: Če je $\Delta_A(x) = \det(A - xI_n)$ karakteristični polinom matrike A (z realnimi lastnimi vrednostmi), potem velja $\Delta_A(A) = 0$.

1.8 Nadaljnje branje

1. Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 2006, razdelki 2.3, 2.4., 7.0, 7.1, 7.2.

2. Gilbert Strang, *Linear algebra and Learning from Data*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 2019, razdelka I.7., I.9.

3. David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, razdelka 4.4 in 4.5, poglavji 6, 14.

2

Vektorski prostori in linearne preslikave

2.1 Vektorski prostor

Dobro poznamo, kako računati z vektorji v $\mathbb{R}^3$. [1] S tem dobi množica vektorjev v $\mathbb{R}^3$ z operacijama seštevanja in množenja z realnim številom posebno strukturo, ki jo imenujemo *vektorski prostor*. V splošnem definiramo realni vektorski prostor na naslednji način.

[1] Če ne, potem osvežite znanje. Recimo v razdelku 1.1. knjige Bojan Orel: *L*inearna algebra, Založba FRI, 2015, ali pa v Razdelku 5.1 knjige Polona Oblak: Matematika, Založba FRI, 2015.

2.1.1 *Definicija*

Definicija. Abstraktni realni vektorski prostor V *je množica* vektorjev $v \in V$ *, za katere imamo definirani dve notranji operaciji*

- *seštevanje vektorjev* $(u, v \in V \Longrightarrow u+v \in V)$ *in*
- *množenje vektorjev z realnimi števili* $(v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha v = \alpha \cdot v \in V)$,

z lastnostmi

(VP1) $u + v = v + u$ *in* $(u + v) + w = u + (v + w)$,

(VP2) obstaja ničelni vektor $\mathbf{0}_V \in V$ *in velja* $v + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + v = v$,

(VP3) za vsak $v \in V$ *obstaja* nasprotni vektor $-v$, *za katerega velja* $v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}_V$,

(VP4) $1 \cdot v = v$,

(VP5) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$,

(VP6) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$,

(VP7) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

za poljubne $u, v, w \in V$ *in* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Morda ste opazili, da vektorje v $\mathbb{R}^n$ pišemo s krepkimi simboli, denimo $\mathbf{v}$ ali $\mathbf{x}$, na tablo pa s puščicami, kot $\vec{v}$ ali $\vec{x}$. Elementi vektorskih prostorov so lahko vektorji v $\mathbb{R}^n$, lahko so polinomi $p(x)$, matrike ali pa kaj četrtega. Zato jih bomo pisali z navadnimi malimi črkami.

Pri tem bomo, kot običajno v matematiki, simbol $\cdot$ pri produktu vektorja s številom večinoma izpuščali. Torej bomo pisali tudi $\alpha v = \alpha \cdot v$.

V splošnih vektorskih prostorih lahko števila izbiramo tudi iz drugih množic, ne le iz množice realnih števil (denimo kompleksna števila, končni obsegi, kvaternioni,...). V tem učbeniku se bomo omejili zgolj na realne vektorske prostore (torej množenje vektorjev z realnimi števili) in jih bomo zatorej odslej krajše imenovali kar *vektorski prostori*.

oznaka	elementi (vektorji)	seštevanje vektorjev	množenje vektorja s skalarjem $\alpha \in \mathbb{R}$	ničelni element
$\mathbb{R}$	realna števila	seštevanje realnih števil	množenje realnih števil	0
$\mathbb{R}^n$	vektorji z n komponentami	$(\mathbf{u}+\mathbf{v})_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i$	$(\alpha\mathbf{u})_i = \alpha\mathbf{u}_i$	ničelni vektor
$\mathbb{R}^{m\times n}$	matrike velikosti $m \times n$	$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$	$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$	ničelna matrika
$\mathbb{R}_n[x]$	polinomi stopnje največ n	$(p+q)(x) = p(x) + q(x)$	$(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$	ničelni polinom

Tabela 2.1: Nekaj že znanih vektorskih prostorov, njihovi elementi in operaciji.

Primer 2.1. *Hitro se lahko sprehodimo skozi vseh sedem navedenih lastnosti in preverimo, da veljajo za poljubne vektorje $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ in realni števili $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ni pa množica vektorjev v $\mathbb{R}^3$ edini vektorski prostor, ki ga poznamo.*

Navedimo nekaj že poznanih primerov vektorskih prostorov. V tabeli 2.1 je navedenih nekaj vektorskih prostorov, ki jih bomo v nadaljevanju srečevali. Še več, kadarkoli bomo v nadaljevanju omenili vektorski prostor V, bomo imeli v mislih, da je V bodisi $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$ ali $\mathbb{R}_n[x]$. Opazimo, da v omenjenih vektorskih prostorih velja, da če poljubni element pomnožimo s številom 0, dobimo ničelni element vektorskega prostora, torej

$$0 \cdot v = \mathbf{0}_V.$$

Prav tako za vsak element v iz $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$ ali $\mathbb{R}_n[x]$ dobimo njemu nasprotni vektor tako, da ga pomnožimo z -1:

$$-v = (-1) \cdot v.$$

Torej, nasprotni vektor vektorja $\mathbf{x}$ je enak vektorju, katerega komponente so nasprotno predznačene, nasprotna matrika matrike $A = [a_{ij}]$ je matrika $-A = [-a_{ij}]$ in nasprotni polinom polinoma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ je polinom $(-p)(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0$.

V splošnih vektorskih prostorih lahko v lastnosti (VP6) izberemo $\alpha = \beta = 0$ in dobimo enakost

$$0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \tag{2.1}$$

za vse $v \in V$. Ker ima po (VP3) vsak vektor nasprotni vektor, na obeh straneh enakosti (2.1) prištejemo vektor $-0 \cdot v$, iz česar sledi $0 \cdot v = \mathbf{0}_V$ za vsak vektor $v \in V$. Pri tem poudarimo, da je 0 na levi strani enakosti realno število, $\mathbf{0}_V$ na desni strani pa ničelni vektor vektorskega prostora V, pa čeprav ju pišemo s skoraj istim simbolom. S tem smo pokazali naslednjo trditev.

Trditev 2.2. *Za vsak vektor $v \in V$ velja*

$$0 \cdot v = \mathbf{0}_V.$$

Prav tako lahko pokažemo naslednjo trditev

Trditev 2.3. *Za vsak vektor $v \in V$ je njegov nasprotni vektor enak*

$$-v = (-1) \cdot v.$$

Dokaz. V lastnosti (VP6) si sedaj izberimo $\alpha = 1$ in $\beta = -1$. Skupaj z upoštevanjem trditve 2.2 in lastnosti (VP4) dobimo enakost

$$\mathbf{0}_V = 0 \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = v + (-1) \cdot v.$$

Na obeh straneh prištejmo nasprotni vektor vektorja v, torej vektor $-v$. Po lastnostih (VP1) lahko vse tri sumande na desni strani poljubno premešamo:

$$\mathbf{0}_V + (-v) = (v + (-v)) + (-1) \cdot v$$

in posledično z upoštevanjem (VP2) na levi strani in (VP3) na desni strani dobimo

$$-v = \mathbf{0}_V + (-v) = (v + (-v)) + (-1) \cdot v = (-1) \cdot v. \quad \square$$

Definicija. *Za vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ in skalarje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ imenujemo vektor*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Denimo, ničelni vektor $\mathbf{0}_V = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$ je linearna kombinacija poljubnih vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Linearno kombinacijo z izključno ničelnimi koeficienti imenujemo *trivialna* linearna kombinacija.

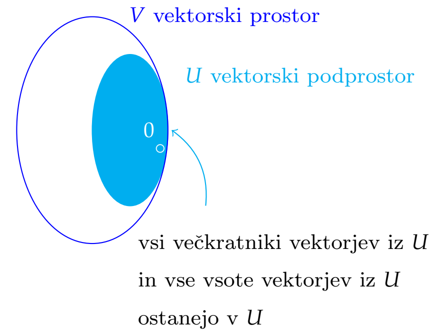
2.1.2 Vektorski podprostor

Definicija. *Če je v podmnožici U vektorskega prostora V*

(VPP1) seštevanje notranja operacija ($u, v \in U \Longrightarrow u + v \in U$) in

(VPP2) množenje vektorjev z realnimi števili notranja operacija ($v \in U$, $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha v \in U$),

potem jo imenujemo vektorski podprostor *prostora V.*



Ker lastnosti (VP1), (VP4)-(VP7) veljajo za poljubne elemente vektorskega prostora V, veljajo tudi za vse elemente vektorskega podprostora U v V. Poleg tega je vektorski podprostor po definiciji zaprt za seštevanje in množenje s števili, kar pomeni, da sta seštevanje in množenje s skalarji notranji operaciji. Zatorej sta po lastnosti (VPP2) tudi ničelni vektor $\mathbf{0}_V = 0 \cdot u$ in nasprotni vektor $-v = (-1) \cdot v$ vsebovana v U, in zato sta (VP2) in (VP3) izpolnjena za vsak vektorski podprostor v V. S tem smo pokazali naslednjo trditev:

Trditev 2.4. *Vsak vektorski podprostor vektorskega prostora je vektorski prostor.*

V posebnem, vsak vektorski podprostor po (VPP2) vsebuje tudi vektor $0 \cdot v = \mathbf{0}_V$. Zatorej podmnožica vektorskega prostora, ki ne vsebuje ničelnega vektorja, ne more biti vektorski prostor.

Izrek 2.5. *Podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je poljubna linearna kombinacija $\alpha u + \beta v$ vektorjev $u, v \in U$ tudi vsebovana v U.*

Dokaz. Če je U vektorski prostor in $u, v \in U$, potem sta po (VPP2) v U tudi poljubna večkratnika αu in βv. Po (VPP1) pa velja $\alpha u + \beta v \in U$.

Da bi pokazali še obrat, predpostavimo, da je U takšna podmnožica vektorskega prostora V, da je za vektorja $u, v \in U$ tudi poljubna linearna kombinacija $\alpha u + \beta v$ vsebovana v U. V posebnem torej U za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ vsebuje tudi vektor $\alpha u + 0 \cdot v = \alpha u$ (torej velja (VPP2)) in vektor $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v$ (torej velja (VPP1)), iz česar sledi, da je U vektorski podprostor v V. $\square$

Definicija. Linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

Na primer, $\mathcal{L}\{x^{10}, x^8, \ldots, x^4, x^2, 1\}$ je množica vseh polinomov stopnje največ 10 brez členov lihih stopenj.

Ker je vsaka linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev v_1, $v_2, \ldots, v_n \in V$ zopet linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, je po izreku 2.5 linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearni podprostor v V. Pravimo, da vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *napenjajo* prostor $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Izrek 2.6. *Linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorskega prostora V je najmanjši vektorski podprostor v V, ki vsebuje vektorje v_1, $v_2, \ldots, v_n$.*

Dokaz. Naj bo U najmanjši vektorski podprostor vektorskega prostora V, ki vsebuje vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ker je U vektorski podprostor, po izreku 2.5 vsebuje vse linearne kombinacije vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Zatorej vsebuje tudi $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Ker pa je U najmanjši vektorski prostor, ki vsebuje $v_1, v_2, \ldots, v_n$, morata biti U in $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ enaka. □

2.2 Baza in dimenzija vektorskega prostora

V tem razdelku bomo povedali, kako merimo dimenzije vektorskih prostorov. Naslednja pojma nam bosta povedala, ali je mogoče v neki množici vektorjev nekatere vektorje izražati z ostalimi ali ne. Formalno definiramo linearno neodvisnost na naslednji način.

Definicija. *Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so linearno odvisni, ko obstaja vektor v_k, ki je linearna kombinacija ostalih $v_1, v_2 \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$:*

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n,$$

kjer $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so linearno neodvisni, če niso linearno odvisni.

⚠ Če množica vektorjev vsebuje ničelni vektor $\mathbf{0}$, potem lahko ničelni vektor izrazimo kot trivialno linearno kombinacijo ostalih vektorjev. Zato je vsaka množica vektorjev, ki vsebuje ničelni vektor, linearno odvisna.

Ekvivalentno, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka ničelnemu vektorju $\mathbf{0}$. Z drugimi besedami, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so linearno neodvisni, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Naj vektorji $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vektorskega prostora V napenjajo vektorski prostor $U = \mathcal{L}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Če so $u_1, u_2, \ldots, u_m$ linearno odvisni, potem lahko enega od vektorjev, denimo u_k, izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih in zatorej je $U = \mathcal{L}\{u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m\}$. Torej obstaja podmnožica $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, ki prav tako napenja prostor U. Najmanjšo takšno podmnožico bomo imenovali *baza* vektorskega prostora. Dobimo jo tako, da iz množice $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ izberemo čim manj vektorjev (torej bodo linearno neodvisni), ki bodo še vedno napenjali prostor U.

Definicija. *Množica vektorjev* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *je* baza *vektorskega prostora* V*, če*

(B1) so $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *linearno neodvisni in*

(B2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *napenjajo prostor* V*.*

Izrek 2.7. *Za vsako bazo vektorskega prostora* V *je zapis poljubnega vektorja* $v \in V$ *kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.*

Dokaz. Denimo, da je $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza vektorskega prostora V. Ker $\mathcal{B}$ napenja V, lahko poljuben $v \in V$ izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev. Predpostavimo, da lahko to naredimo na dva načina, torej da obstajajo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ter $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, da velja

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n.$$

Če na srednji in desni strani prištejemo vektor $-\beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \ldots - \beta_n v_n$ in uporabimo lastnost (VS6), potem dobimo

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0.$$

Ker so elementi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ baze $\mathcal{B}$ po definiciji linearno neodvisni, sledi

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0.$$

S tem smo pokazali, da je $\alpha_i = \beta_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, oziroma, da so koeficienti α_i v razvoju vektorja v po baznih vektorjih $\mathcal{B}$ enolično določeni. □

Izrek 2.8. *Vsak vektorski prostor ima nešteto baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.*

Dokaz. Prvega dela izreka ne bomo dokazali.

Da bi videli, da imajo vse baze vektorskega prostora enako število vektorjev, izberimo bazi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ vektorskega prostora V in predpostavimo, da sta m in n različni števili. Po potrebi vlogi vektorjev v množicah $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ zamenjamo, tako da velja $m > n$. Ker je $\mathcal{B}$ baza, lahko po izreku 2.7 vsak vektor u_i, $i = 1, 2 \ldots, m$, enolično izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev iz B. Z drugimi besedami za vsak $i = 1, 2, \ldots, m$ obstajajo $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$, da velja

$$u_i = \alpha_{1i} v_1 + \alpha_{2i} v_2 + \ldots + \alpha_{ni} v_n. \tag{2.2}$$

Števila α_{ji} zložimo v matriko $A = [\alpha_{ji}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ker je $m > n$, ima A več stolpcev kot vrstic in zato je njen rang strogo manjši od števila stolpcev. Zato ima homogeni sistem enačb $Ax = 0$ netrivialno rešitev, denimo $x_0 = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]^\top \neq 0$. Torej za vsak j velja

$$\alpha_{j1}\beta_1 + \alpha_{j2}\beta_2 + \ldots + \alpha_{jm}\beta_m = 0. \tag{2.3}$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots \beta_m u_m &\overset{(2.2)}{=} \\
&= \beta_1(\alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n) + \ldots + \beta_m(\alpha_{1m}v_1 + \ldots + \alpha_{nm}v_n) = \\
&= (\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \ldots \beta_m\alpha_{1m})v_1 + \ldots \beta_m\alpha_{nm})v_n \overset{(2.3)}{=} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ker so vektorji $u_1, u_2, \ldots, u_m$ linearno neodvisni, sledi $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$, kar je v protislovju s predpostavko, da je $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]^\top$ neničelni vektor. Sledi, da morata biti m in n enaka, torej imajo vse baze enako število vektorjev. □

⚠ Obravnavali bomo le vektorske prostore končnih dimenzij, torej le vektorske prostore, katerih baze imajo končno število elementov.

Definicija. Dimenzija prostora V *je enaka moči (poljubne) baze prostora* V*. Označimo jo z* $\dim V$.

Primer 2.9. *Za vektor* $c = [1,2,1]^\top$ *naj bo* $V \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ *množica vseh antisimetričnih matrik, t.j. množica matrik* X*, za katere velja* $X^\top = -X$*, za katere dodatno velja enakost*

$$Ac = A^\top c. \tag{2.4}$$

A. Pokažimo, da je V *vektorski podprostor v* $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Naj bosta $A, B \in V$ *antisimetrični matriki, torej za njiju velja*

$$A^\top = -A,\ Ac = A^\top c,\ B^\top = -B \ \text{ in } \ Bc = B^\top c.$$

Želimo preveriti, da za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *velja tudi* $(\alpha A + \beta B)^\top = -(\alpha A + \beta B)$ *(t.j., da je poljubna linearna kombinacija antisimetričnih matrik zopet antisimetrična) in* $(\alpha A + \beta B)c = (\alpha A + \beta B)^\top c$ *(t.j., da linearna kombinacija matrik iz* V *zadošča pogoju (2.4)).* V *te se je lahko prepričati, saj velja*

$$(\alpha A + \beta B)^\top = \alpha A^\top + \beta B^\top = -\alpha A - \beta B = -(\alpha A + \beta B)$$

ter

$$(\alpha A + \beta B)c = \alpha Ac + \beta Bc = \alpha A^\top c + \beta B^\top c = (\alpha A + \beta B)^\top c.$$

Linearna kombinacija $\alpha A + \beta B$ *torej ustreza obema zahtevanima lastnostma, iz česar po Izreku 2.5 sledi, da je* V *vektorski podprostor v* $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

B. Poiščimo kakšno bazo prostora V.

Da bi poiskali bazo prostora V*, moramo natančneje pogledati, kakšni so elementi prostora* V*. Tega v točki A. še nismo potrebovali. Vsaka antisimetrična matrika* A *v* $\mathbb{R}^{3\times 3}$ *je oblike*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Pogoj $Ac = A^\top c$ po komponentah zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 2a+b \\ c-a \\ -b-2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a-b \\ a-c \\ b+2c \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi $b = -2a$ in $c = a$. V vektorskem prostoru V so torej le matrike oblike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & -2a \\ -a & 0 & a \\ 2a & -a & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Baza za V je lahko kar

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

(saj za eno samo matriko ni potrebno preverjati pogoja linearne neodvisnosti) in tako je dimenzija prostora V enaka 1.

Primer 2.10. *Vsak od prostorov $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{R}_n[x]$ ima posebej lepo bazo, ki jo imenujemo* standardna baza.

A. *Vektorji* $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *tvorijo bazo prostora* $\mathbb{R}^n$, *ki ji rečemo* standardna baza $\mathbb{R}^n$.

B. *V $\mathbb{R}^{m\times n}$ za $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, definirajmo matriko E_{ij}, katere edini neničelni element leži v i-ti vrstici in j-tem stolpcu in je enak 1. Množica*

$$\{E_{ij};\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$$

je baza prostora $\mathbb{R}^{m\times n}$, ki jo imenujemo standardna baza $\mathbb{R}^{m\times n}$.

C. *V $\mathbb{R}_n[x]$ je množica polinomov $\{x^n, x^{n-1}, \ldots, x^2, x, 1\}$ baza prostora $\mathbb{R}_n[x]$, ki jo imenujemo* standardna baza $\mathbb{R}_n[x]$.

2.3 Linearne preslikave

V matematiki se vedno znova in v različnih kontekstih srečujemo s pojmom *preslikave* med dvema množicama. Spomnimo se, da je preslikava $f: A \to B$ množice A v množico B takšen predpis, ki vsakemu elementu $a \in A$ enolično predpiše vrednost $b = f(a) \in B$.

Mi bomo opazovali preslikave $\tau: U \to V$ vektorskih prostorov U in V, ki spoštujejo operaciji vektorskih prostorov. To pomeni, da

- slikajo vsoto vektorjev u in w v vsoto slik vektorjev $\tau(u) + \tau(w)$ in
- večkratnik vektorja u v večkratnik slike vektorja $\tau(u)$.

Linearno preslikavo torej definirajmo na naslednji način.

Definicija. *Naj bosta U in V vektorska prostora. Preslikava $\tau: U \to V$ je* linearna preslikava*, če velja*

(LP1) $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$ *za vsaka* $v, u \in U$ *in*

(LP2) $\tau(\alpha v) = \alpha\tau(v)$ *za vsak* $v \in U$ *in vsak* $\alpha \in \mathbb{R}$.

V posebnem, če v (LP2) vstavimo $\alpha = 0$, dobimo

$$\tau(\mathbf{0}_U) = \tau(0 \cdot u) = 0 \cdot \tau(v) = \mathbf{0}_V$$

za poljuben $u \in U$. Pri tem je prva $\mathbf{0}_U$ ničelni vektor v vektorskem prostoru U, zadnji $\mathbf{0}_V$ pa ničelni vektor v vektorskem prostoru V. To pomeni, da vsaka linearna preslikava slika ničelni vektor v ničelnega.

Izrek 2.11. *Za poljubno linearno preslikavo $\tau: U \to V$ velja $\tau(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.*

Pogoja (LP1) in (LP2) lahko zamenjamo s pogojem ohranjanja linearnih kombinacij, kot to že poznamo iz izreka 2.5.

Izrek 2.12. *Preslikava $\tau: U \to V$ je linearna natanko tedaj, ko velja*

$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u) \tag{2.5}$$

za vse $v, u \in U$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Pokažimo najprej, da če je preslikava $\tau: V \to U$ linearna, potem ohranja tudi linearne kombinacije (2.5). Za linearno preslikavo τ za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ po lastnosti (LP1) velja $\tau(\alpha v + \beta u) = \tau(\alpha v) + \tau(\beta u)$. Nadalje po (LP2) sledi, da je $\tau(\alpha v) + \tau(\beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u)$, iz česar sledi (2.5).

Sedaj moramo pokazati še nasprotno, da je vsaka preslikava τ z lastnostjo (2.5) linearna. Izberimo torej preslikavo τ, za katero velja (2.5) za vse $v, u \in V$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. V posebnem velja ta enakost tudi za $\alpha = \beta = 1$, iz česar sledi $\tau(v + u) = \tau(v) + \tau(u)$ za vse $v, u \in V$, torej (LP1). Če v (2.5) izberemo $\beta = 0$, potem iz (2.5) dobimo $\tau(\alpha v) = \alpha\tau(v)$ za vse $v \in V$ ter vse $\alpha \in \mathbb{R}$, torej (LP2). S tem smo pokazali, da je vsaka preslikavaz lastnostjo (2.5) tudi linearna. ∎

2.3.1 Operacije z linearnimi preslikavami

Ko poznamo nekaj linearnih preslikav, lahko nove preslikave definiramo tudi preko operacij z že znanimi linearnimi transformacijami. Najprej definirajmo tri operacije med linearnimi preslikavami in nato pokažimo, da so tako na novo definirane preslikave tudi linearne.

Definicija. *Naj bodo $\tau, \psi \colon U \to V$ ter $\theta \colon V \to W$ linearne preslikave in naj bo $\gamma \in \mathbb{R}$.*

A. Vsota $\tau + \psi \colon U \to V$ *je preslikava, definirana s predpisom*

$$(\tau + \psi)(v) = \tau(v) + \psi(v).$$

B. Produkt s skalarjem $\gamma\tau \colon U \to V$ *je preslikava, definirana s predpisom*

$$(\gamma\tau)(v) = \gamma\,\tau(v).$$

C. Kompozitum $\theta \circ \tau$ *je preslikava $\theta \circ \tau \colon U \to W$ definirana s predpisom*

$$(\theta \circ \tau)(v) = \theta(\tau(v)).$$

Izrek 2.13. *Vsota, produkt s skalarjem in kompozitum linearnih preslikav so linearne preslikave.*

Dokaz. A. Za linearni preslikavi $\tau, \psi \colon V \to U$ moramo pokazati, da njuna vsota $\tau + \psi$ ohranja linearne kombinacije (2.5). Za poljubne $v, u \in V$ ter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hitro poračunamo

$$\begin{aligned}
(\tau+\psi)(\alpha v + \beta u) &\overset{\text{def (A)}}{=} \tau(\alpha v + \beta u) + \psi(\alpha v + \beta u) \overset{(2.5)}{=} \\
&= \alpha\tau(v) + \beta\tau(u) + \alpha\psi(v) + \beta\psi(u) = \\
&= \alpha\left(\tau(v) + \psi(v)\right) + \beta\left(\tau(u) + \psi(u)\right) \overset{(A)}{=} \\
&= \alpha(\tau+\psi)(v) + \beta\left(\tau+\psi\right)(u),
\end{aligned}$$

s čimer smo s pomočjo izreka 2.12, pokazali da je tudi preslikava $\tau + \psi$ linearna.

B. Podobno kot v (1) moramo za linearno preslikavo $\tau \colon V \to U$ in realno število α pokazati, da $\alpha\tau$ ohranja linearne kombinacije (2.5). Kot prej za poljubne $v, u \in V$ ter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hitro poračunamo, da velja

$$\begin{aligned}
(\gamma\tau)(\alpha v + \beta u) &\overset{\text{def}}{=} \gamma\,\tau(\alpha v + \beta u) \overset{(2.5)}{=} \\
&= \gamma\left(\alpha\tau(v) + \beta\tau(u)\right) = \\
&= \alpha(\gamma\,\tau(v)) + \beta\left(\gamma\,\tau(u)\right) \overset{\text{def}}{=} \\
&= \alpha\left(\gamma\tau\right)(v) + \beta\,\left(\gamma\tau\right)(u),
\end{aligned}$$

in sedaj po izreku 2.12 sledi, da je tudi preslikava $\gamma\tau$ linearna.

C. Sedaj si izberimo linearni preslikavi $\tau\colon V \to U$ ter $\theta\colon U \to W$ in pokažimo, da njun kompozitum $\theta \circ \tau$ ohranja linearne kombinacije (2.5). Izberimo poljubne $v, u \in V$ ter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in izračunajmo

$$\begin{aligned}(\theta \circ \tau)(\alpha v + \beta u) &\overset{\text{def}}{=} \theta\left(\tau(\alpha v + \beta u)\right) \overset{\tau,(2.5)}{=} \\ &= \theta\left(\alpha\tau(v) + \beta\tau(u)\right) \overset{\psi,(2.5)}{=} \\ &= \alpha\,\theta\left(\tau(v)\right) + \beta\,\theta\left(\tau(u)\right) \overset{\text{def}}{=} \\ &= \alpha\,(\theta \circ \tau)(v) + \beta\,(\theta \circ \tau)(u).\end{aligned}$$

S tem smo s pomočjo izreka 2.12, pokazali da je tudi preslikava $\theta \circ \tau$ linearna.

□

Pomembno je, da sta vsota linearnih preslikav in produkt linearne preslikave s skalarjem zopet linearni preslikavi. S tem lahko med drugim ustvarjamo tudi linearne kombinacije linearnih preslikav, $\alpha\tau + \beta\psi$, kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ki so po izreku linearne. Iz tega sledi naslednji izrek.

Izrek 2.14. *Množica vseh linearnih preslikav iz vektorskega prostora U v vektorski prostor V je vektorski prostor.*

Prav tako je izrednega pomena, da je kompozitum linearnih preslikav zopet linearna preslikava. S komponiranjem linearnih preslikav bomo prehajali med različnimi linearnimi prostori.

2.3.2 *Matrike linearne preslikave*

Naj bosta U in V vektorska prostora dimenzij m in n ter $\tau\colon U \to V$ linearna preslikava. Izberimo bazi $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ prostora U in $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ prostora V.

Denimo, da poznamo slike $\tau(b_1), \tau(b_2), \ldots, \tau(b_m)$ vektorjev baze $\mathcal{B}$ preko preslikave τ. Izberimo poljubni vektor $u \in U$ in ga zapišimo kot linearno kombinacijo

$$u = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m$$

baznih vektorjev množice $\mathcal{B}$. Ker je τ linearna preslikava, lahko nato sliko $\tau(u)$ vektorja izračunamo kot

$$\begin{aligned}\tau(u) &= \tau\left(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m\right) = \\ &= \beta_1\tau(b_1) + \beta_2\tau(b_2) + \ldots + \beta_m\tau(b_m).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Tako smo ugotovili, da lahko s pomočjo slik baznih vektorjev izračunamo sliko poljubnega vektorja $u \in U$.

Sedaj pa razvijmo slike vektorjev baze $\mathcal{B}$, ki se nahajajo v vektorskem prostoru V, po bazi $\mathcal{C}$. Torej, za $j = 1, \ldots, m$, vsako sliko $\tau(b_j)$ zapišimo kot linearno kombinacijo vektorjev množice $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$:

$$\tau(b_j) = \alpha_{1j}c_1 + \alpha_{2j}c_2 + \ldots + \alpha_{nj}c_n. \tag{2.7}$$

S tem smo dobili $m \cdot n$ enolično določnih koeficientov α_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Naj bo $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} = [\alpha_{ij}]$ matrika reda $n \times m$ sestavljena iz koeficientov v razvoju slik baznih vektorjev $\mathcal{B}$ po bazi $\mathcal{C}$. Tako definirano matriko

$$A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

imenujemo *matrika linearne preslikave τ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$*. V njej j-ti stolpec predstavlja koeficiente, s katerimi se slika j-tega vektorja baze $\mathcal{B}$ izraža kot linearna kombinacija vektorjev baze $\mathcal{C}$.

Posebej opozorimo, da je matrika $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ odvisna od izbire baz $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ vektorskih prostorov V in U. Če bi si izbrali drugačni bazi (ali vsaj eno od njiju), potem bi isti preslikavi priredili drugo matriko (ki ustreza koeficientom v razvoju po drugih bazah).

Dogovorimo se, da če bomo iskali matriko preslikave $\tau \colon V \to V$ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}$, bomo pri tem opustili enega od indeksov, t.j. $A_{\tau,\mathcal{B}} = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Matrika $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ nam torej preslika koeficiente v razvoju vektorja po bazi $\mathcal{B}$ v koeficiente, če sliko vektorja razvijemo po bazi $\mathcal{C}$. Povedano formalno, če je $u = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j$ in $\tau(u) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i c_i$, potem lahko po (2.6) in (2.7) sliko $\tau(u)$ izračunamo tudi kot

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i c_i = \tau(u) &= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \tau(b_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \alpha_{ij} \right) c_i \end{aligned}$$

Ker so vektorji baze $\mathcal{C}$ linearno neodvisni, morata imeti razvoja na levi in desni strani enake istoležne koeficiente in zatorej je

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_j$$

za $i = 1, \ldots, n$. Povedano drugače, koeficiente γ_i lahko dobimo tudi z matričnim množenjem

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Izrek 2.15. *Naj bodo $\tau, \psi \colon V \to U$ ter $\theta \colon U \to W$ linearne preslikave in naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

A. *Matrika, ki ustreza vsoti preslikav $\tau + \psi$, je enaka vsoti matrik posameznih preslikav.*

$$A_{\tau+\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}} = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} + A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

B. *Matrika, ki ustreza produktu s skalarjem $\alpha\tau$, je enaka večkratniku matrike preslikave.*

$$A_{\alpha\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \alpha A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

C. *Matrika, ki ustreza kompozitumu preslikav, je enaka produktu matrik posameznih preslikav.*

$$A_{\theta\circ\tau,\mathcal{B},\mathcal{D}} = A_{\theta,\mathcal{C},\mathcal{D}} \cdot A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

D. *Matrika, ki ustreza inverzu obrnljive preslikave, je enaka inverzu matrike te preslikave. Torej, če je ψ obrnljiva preslikava, je obrnljiva tudi matrika $A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Velja*

$$A_{\psi^{-1},\mathcal{C},\mathcal{B}} = \left(A_{\psi,\mathcal{B},\mathcal{C}}\right)^{-1}.$$

Denimo, da poznamo matriko $A = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ linearne preslikave $\tau \colon U \to V$ iz baze $\mathcal{B}$ v $\mathcal{C}$. Radi bi zapisali matriko $A' = A_{\tau,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$ iste linearne preslikave τ, a iz neke (morda) druge baze $\mathcal{B}'$ v (morda) drugo bazo $\mathcal{C}'$.

Če si ogledamo spodnji diagram matrik, ki utrezajo preslikavam, potem poznamo "zeleno" matriko $A = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$, želimo pa izračunati "rdečo" matriko $A' = A_{\tau,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$ linearne preslikave τ.

$$\begin{tikzcd}
(V,\mathcal{B}) \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift left, "P"] & (U,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q"'] \\
(V,\mathcal{B}') \arrow[u, shift left, "P^{-1}"] \arrow[r, "A' = QAP^{-1}"'] & (U,\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

Pri tem matrika $P = \mathcal{I}_{V,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ustreza identični preslikavi prostora V vase iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}'$. Takšno matriko dobimo s koeficienti pri razvoju vektorjev baze $\mathcal{B}$ po vektorjih baze $\mathcal{B}'$. Podobno je $Q = \mathcal{I}_{U,\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ ustreza identični preslikavi prostora U vase iz baze $\mathcal{C}$ v bazo $\mathcal{C}'$ in je sestavljena iz koeficientov pri razvoju vektorjev baze $\mathcal{C}$ po vektorjih baze $\mathcal{C}'$. Če se v diagramu sprehodimo po puščicah, vidimo, da bomo morali matriko A' sestaviti kot kompozitum preslikav. Zatorej je A' enak produktu pripadajočih matrik, t.j.

$$A' = QAP^{-1}.$$

2.3.3 Primeri linearnih preslikav in njihovih matrik

Če želimo za preslikavo pokazati, da je linearna, je v večini primerov hitreje preveriti lastnost (2.5) kot pa lastnosti (LP1) in (LP2). V nasprotnem, če želimo za preslikavo pokazati, da ni linearna, imamo več možnosti. Ovržti moramo eno od lastnosti, ki veljajo za linearno preslikavo. To pomeni, da je dovolj ovržti le eno od lastnosti (LP1), (LP2), (2.5) ali pa lastnost iz Leme 2.11. Torej, če preslikava vektorskih prostorov ne slika ničelnega vektorja v ničelnega, potem to ni linearna preslikava.

Primer 2.16. Premik (ali translacija) *vektorskega prostora V za vektor $w \in V$ je preslikava, podana s predpisom*

$$\begin{aligned} \tau : V &\to V \\ v &\mapsto v + w. \end{aligned}$$

Če $w \neq \mathbf{0}_V$, potem je $\tau(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V + w = w \neq \mathbf{0}_V$ in τ ne ohranja ničelnega vektorja. Zatorej po lemi 2.11 premik ni linearna preslikava.

Primer 2.17. Ničelna preslikava *je preslikava $\nu : U \to V$, za katero je $\nu(u) = \mathbf{0}_V$ za vse $u \in U$. Hitro se prepričamo, da za vse $u, w \in U$ ter vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja*

$$\nu(\alpha u + \beta v) = \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V = \alpha \cdot \mathbf{0}_V + \beta \cdot \mathbf{0}_V = \alpha\nu(u) + \beta\nu(v),$$

in zato je po izreku 2.12 ničelna preslikava linearna preslikava.

Kakšne so matrike ničelne preslikave $\nu \colon U \to V$? Izberimo poljubni bazi $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ prostora U in $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ prostora V. Ničelna preslikava slika vsak bazni vektor $b_j \in U$, $j = 1, 2, \dots, m$, v ničelni vektor $\mathbf{0}_V \in V$. Da bi zapisali matriko $A_{\nu,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ ničelne preslikave ν iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$, moramo slike $\tau(b_j) = \mathbf{0}_V$ baznih vektorjev $b_j \in \mathcal{B}$ razviti po bazi $\mathcal{C}$ prostora V. Preprosto zapišemo

$$\tau(b_j) = 0 = 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \ldots + 0 \cdot c_n$$

za $j = 1, 2, \ldots, m$. *S tem smo dobili koeficiente v razvoju slik baznih vektorjev* $\mathcal{B}$ *po bazi* $\mathcal{C}$*, ki so vsi enaki 0. Zatorej je matrika ničelne preslikave* ν *iz baze* $\mathcal{B}$ *v bazo* $\mathcal{C}$ *enaka*

$$A_{\nu,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Primer 2.18. *Identična preslikava*

$$\begin{aligned} \iota : V &\to V \\ v &\mapsto v, \end{aligned}$$

je preslikava, ki slika vsak vektor vektorskega prostora V *nazaj vase. Ker za vse* $v, u \in V$ *in vse* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *velja*

$$\iota(\alpha v + \beta u) = \alpha v + \beta u = \alpha\, \iota(v) + \beta\, \iota(u),$$

je po Izreku 2.12 identična preslikava linearna preslikava.

Za zapis matrike, ki pripada ι *izberimo poljubni bazi* $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ *in* $\mathcal{B}' = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_m\}$ *prostora* V*. Da bi zapisali matriko* $A_{\iota,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ *identične preslikave* ι *iz baze* $\mathcal{B}$ *v bazo* $\mathcal{B}'$*, moramo slike* $\iota(b_j) = b_j$ *baznih vektorjev* $b_j \in \mathcal{B}$ *razviti po bazi* $\mathcal{B}'$ *prostora* V*. Za vsak* b_j*,* $j = 1, 2, \ldots, m$*, obstajajo enolično določeni koeficienti* $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$*, da velja*

$$\iota(b_j) = b_j = \alpha_{1j} b'_1 + \alpha_{2j} b'_2 + \ldots + \alpha_{mj} b'_m.$$

S tem smo dobili koeficiente v razvoju vektorjev baze $\mathcal{B}$ *po bazi* $\mathcal{B}'$*. Ko jih zložimo v stolpce* $m \times m$ *matrike, dobimo matriko identične preslikave* ι *iz baze* $\mathcal{B}$ *v bazo* $\mathcal{B}'$

$$A_{\iota,\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}.$$

V posebnem primeru, ko je $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$*, je razvoj slike baznega vektorja* $b_j \in \mathcal{B}$ *po bazi* $\mathcal{B}$ *enak*

$$\iota(b_j) = b_j = 0 \cdot b_1 + \ldots + 0 \cdot b_{j-1} + 1 \cdot b_j + 0 \cdot b_{j+1} + \ldots + 0 \cdot b_m,$$

in tako je matrika identične preslikave ι *iz baze* $\mathcal{B}$ *v bazo* $\mathcal{B}$ *enaka*

$$A_{\iota,\mathcal{B}} = A_{\iota,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Primer 2.19. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ poljubna matrika. Potem je preslikava*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

linearna. Zatorej je vsaka preslikava, ki vektorje iz $\mathbb{R}^n$ množi z dano matriko (primerne velikosti) linearna preslikava.

V to se je lahko prepričati, saj za poljubna vektorja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ter poljubni števili $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$\psi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y} = \alpha\psi(\mathbf{x}) + \beta\psi(\mathbf{y})$$

in zatorej po izreku 2.12 sledi, da je ψ linearna preslikava.

Primer 2.20. *Pokažimo, da je preslikava*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbb{R}_2[x] &\to \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) &\mapsto x^2\, p\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

linearna. Predpis preslikave $\mathcal{M}$ bomo pisali tudi kot

$$\left(\mathcal{M}(p)\right)(x) = x^2\, p\left(\frac{1}{x}\right).$$

Preslikava $\mathcal{M}$ slika polinome v polinome. Zatorej moramo pokazati, da je

$$\mathcal{M}(\alpha p + \beta q) = \alpha\mathcal{M}(p) + \beta\mathcal{M}(q)$$

za poljubna polinoma $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$. Ker je

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\alpha p + \beta q) &= x^2\left((\alpha p + \beta q)\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \\ &= x^2\left(\alpha p\left(\frac{1}{x}\right) + \beta q\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \\ &= \alpha x^2\, p\left(\frac{1}{x}\right) + \beta x^2\, q\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= \alpha\mathcal{M}(p) + \beta\mathcal{M}(q). \end{aligned}$$

smo dokazali, da $\mathcal{M}$ ohranja linearne kombinacije in tako po izreku 2.12 sledi, da je $\mathcal{M}$ linearna preslikava.

Morda bo kakšnemu bralcu ljubše, da si najprej predstavlja, kaj predpis preslikave sploh pomeni. Za polinom $p(x) = ax^2 + bx + c$ je njegova slika $\mathcal{M}(p)$ enaka polinomu

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(ax^2 + bx + c) = \left(\mathcal{M}(p)\right)(x) = x^2\, p\left(\frac{1}{x}\right) = \\ = x^2\left(a\frac{1}{x^2} + b\frac{1}{x} + c\right) = a + bx + cx^2. \end{aligned}$$

Sedaj izberemo polinoma $p(x) = ax^2 + bx + c$ *ter* $q(x) = a'x^2 + b'x + c'$ *in nato s preprostim (a daljšim) računom kot zgoraj preverimo, da velja* $\mathcal{M}(\alpha p + \beta q) = \alpha\mathcal{M}(p) + \beta\mathcal{M}(q)$. *Če se bralec odloči za to pot, naj poračuna detajle sam :)*

Da bi določili matriko linearne preslike $\mathcal{M}$ *v standardni bazi* $\mathcal{S} = \{x^2, x, 1\}$, *moramo najprej poračunati slike baznih polinomov, torej* $\mathcal{M}(x^2)$, $\mathcal{M}(x)$ *in* $\mathcal{M}(1)$. *Velja*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x^2) &= 1, \\ \mathcal{M}(x) &= x \ \ \textit{ter} \\ \mathcal{M}(1) &= x^2, \end{aligned}$$

zato je matrika $M = A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ *enaka*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ko imamo zapisano matriko v standardni bazi, je lahko odgovoriti na vprašanje, kam se s preslikavo $\mathcal{M}$ *preslika polinom* $x^2 - x + 2$. *Ker je polinom* $x^2 - x + 2$ *že razvit po standardni bazi* $\{x^2, x, 1\}$, *iz* (2.8) *sledi*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

torej je slika polinoma $x^2 - x + 2$ *enaka* $2x^2 - x + 1$. *(Isti odgovor seveda dobimo, če direktno poračunamo* $\mathcal{M}(x^2 - x + 2) = 1 - x + 2x^2$.

2.3.4 Jedro in slika linearne preslikave

Po izreku 2.11 vemo, da vsaka linearna preslikava $\tau\colon U \to V$ slika ničelni element prvega prostora $\mathbf{0}_U$ v ničelni element drugega prostora $\mathbf{0}_V$. Morda obstajajo tudi drugi elementi vektorskega prostora U, ki se slikajo s τ v $\mathbf{0}_V$. Zato definirajmo to množico.

Definicija. Jedro *linearne preslikave* $\tau\colon U \to V$ *je množica* $\ker(\tau)$ *vseh vektorjev* $u \in U$, *za katere velja*

$$\tau(u) = \mathbf{0}_V.$$

Slika *linearne preslikave je zaloga vrednosti preslikave* τ, *torej množica* $\operatorname{im}(\tau) = \{\tau(u) \colon u \in U\} \subseteq V$.

Pri tem bomo oklepaje kar izpuščali, če to ne bo nujno potrebno. Torej bomo pisali $\ker\tau = \ker(\tau)$.

Izrek 2.21. *Jedro* $\ker\tau$ *linearne preslikave* $\tau\colon U \to V$ *je vektorski podprostor v* U, *slika* $\operatorname{im}\tau$ *pa vektorski podprostor v* V.

Dokaz. Če izberemo vektorja $u, w \in \ker \tau$, velja $\tau(u) = \tau(w) = \mathbf{0}_V$. Zato za poljubno njuno linearno kombinacijo velja

$$\tau(\alpha u + \beta w) \overset{\text{lin.}}{=} \alpha \tau(v) + \beta \tau(w) = \alpha \cdot \mathbf{0}_V + \beta \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V.$$

S tem smo pokazali, da je jedro zaprto za seštevanje.

Podobno izberimo vektorja $v_1, v_2 \in \operatorname{im} \tau$, torej obstajata $u_1, u_2 \in U$, da je $\tau(u_1) = v_1$ in $\tau(u_2) = v_2$. Pokazati moramo, da je Zato za poljubno njuno linearno kombinacijo □

Izrek 2.22. *Naj bo $\tau\colon U \to V$ linearna preslikava iz vektorskega prostora U v vektorski prostor V.*

A. τ je injektivna natanko tedaj, ko je $\ker \tau = \{\mathbf{0}_U\}$.

B. τ je surjektivna natanko tedaj, ko je $\operatorname{im} \tau = V$.

Dokaz. Druga trditev je očitna, saj je linearna preslikava $\tau\colon U \to V$ surjektivna natanko tedaj, ko je njena slika enaka celemu vektorskemu prostoru V.

Predpostavimo najprej, da je jedro injektivne linearne preslikave trivialno. Izberimo poljubni vektor $u \in \ker \tau$, t.j. $\tau(u) = \mathbf{0}_V$. Ker je τ linearna preslikava, po Lemi 2.11 velja $\tau(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$. Po predpostavki, da je τ injektivna, se lahko le en element prostora U slika v $\mathbf{0}_V$ in zato je $u = \mathbf{0}_V$. Sledi, da je jedro preslikave τ trivialno.

Za obrat izreka predpostavimo, da je $\tau\colon U \to V$ linearna preslikava, za katero velja $\ker \tau = \{\mathbf{0}_U\}$. Da bi pokazali injektivnost preslikave τ, izberimo $u, w \in U$ in predpostavimo, da velja $\tau(u) = \tau(w)$. Zaradi linearnosti preslikave τ je $\tau(u - w) = \tau(u) - \tau(w) = \mathbf{0}_V$, iz česar po predpostavki o trivialnosti jedra sledi $v - w = \mathbf{0}_U$ oziroma $v = w$. S tem smo pokazali, da je τ res injektivna. □

Oglejmo si, kako lahko izračunamo jedro in sliko linearne preslikave s pomočjo njenih matrik.

Naj bo A_τ matrika, ki pripada linearni preslikavi $\tau\colon U \to V$ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$. Po definiciji je jedro linearne preslikave τ množica vseh vektorjev u, za katere velja $\tau(u) = 0$. Če razvijemo vektor u po bazi $\mathcal{B}$, so koeficienti v razvoju določeni s stolpcem $x = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]^T$. Spomnimo se enakosti (2.8). Ker ima slika $\tau(u) = 0$ v razvoju po bazi $\mathcal{C}$ vse koeficiente enake 0, velja $A_\tau x = \mathbf{0}$. (Z drugimi besedami, vektorji koeficientov v razvoju vektorjev iz $\ker \tau$ po bazi $\mathcal{B}$ ustrezajo natanko ničelnemu prostoru matrike A_τ.)

Podobno si pomagamo z enakostjo (2.8), da bi določili $\operatorname{im} \tau$. Po definiciji je $\operatorname{im} \tau$ množica vseh slik linearne preslikave, torej množica vseh linearnih kombinacij slik vektorjev iz baze $\mathcal{B}$. Z drugimi besedami,

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix} = A^{(1)}\beta_1 + A^{(2)}\beta_2 + \ldots + A^{(m)}\beta_m,$$

kjer z A^j označimo j-ti stolpec matrike $A_\tau = [\alpha_{ij}]$. Torej so vektorji koeficientov $[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]^T$ natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike A_τ. Sledi, da linearna ogrinjača stolpcev natanko določa koeficiente vektorjev v $\mathrm{im}\,\tau$ pri razvoju po bazi $\mathcal{C}$. (Z drugimi besedami, koeficienti pri razvoju vektorjev iz $\mathrm{im}\,\tau$ po bazi $\mathcal{C}$ ustrezajo stolpčnemu prostoru matrike A_τ.)

Izrek 2.23. *Naj bo $\tau\colon U \to V$ linearna preslikava in naj bo $A = A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ matrika, ki pripada preslikavi τ. Potem je $\dim(\mathrm{im}(\tau)) = \mathrm{rang}(A)$ in zato*

$$\dim(\ker(\tau)) + \dim(\mathrm{im}(\tau)) = \dim(V).$$

Izrek 2.24. *Naj bo $\tau\colon U \to V$ linearna preslikava, $\dim V = \dim U = n$ in naj bo A neka matrika, ki pripada τ. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *τ je bijektivna.*
2. *τ je injektivna.*
3. *τ je surjektivna.*
4. *A je obrnljiva.*
5. $\ker\tau = \{\mathbf{0}_U\}$.
6. $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.
7. $\mathrm{im}\,\tau = V$.
8. $C(A) = \mathbb{R}^n$.
9. *Rang matrike A je n.*
10. *Vrstice matrike A so linearno neodvisne.*
11. *Vrstice matrike A napenjajo $\mathbb{R}^n$.*
12. *Vrstice matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$.*
13. *Stolpci matrike A so linearno neodvisni.*
14. *Stolpci matrike A napenjajo $\mathbb{R}^n$.*

15. *Stolpci matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^n$.*

16. $\det A \neq 0$.

17. *Homogeni sistem enačb $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev.*

18. *Sistem enačb $Ax = b$ ima rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.*

2.3.5 Lastne vrednosti linearne preslikave

Definicija. *Neničelnemu vektorju $v \in V$ pravimo* lastni vektor *linearne preslikave $\tau\colon V \to V$, če velja*

$$\tau(v) = \lambda v.$$

Številu λ pravimo lastna vrednost *linearne preslikave τ.*

Ker imajo vse podobne matrike iste lastne vrednosti, sledi naslednja zveza.

Izrek 2.25. *Vsaka lastna vrednost linearne preslikave τ je tudi lastna vrednost poljubne matrike $A_\tau, \mathcal{B}$, ki pripada preslikavi τ. Vse matrike $A_\tau, \mathcal{B}$, ki pripadajo dani linearni preslikavi τ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}$, imajo enake lastne vrednosti.*

Med lastnimi vektorji preslikave in lastnimi vektorji pripadajočih matrik velja naslednja zveza. Vektor v je lastni vektor linearne preslikave τ natanko tedaj, ko koordinate vektorja v v bazi $\mathcal{B}$ tvorijo vektor $x \in \mathbb{R}^n$, ki je lastni vektor matrike $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{B}}$, ki v bazi $\mathcal{B}$ pripada preslikavi τ.

Če je v lastni vektor preslikave τ pri lastni vrednosti λ, potem po definiciji velja $\tau(v) = \lambda v = \lambda\,\iota(v)$, kjer je $\iota\colon V \to V$ identična preslikava prostora V. Oziroma, $(\tau - \lambda\iota)(v) = 0$. Z drugimi besedami, lastni vektorji preslikave τ pri lastni vrednosti λ tvorijo jedro preslikave $\tau - \lambda\iota$, ki ga imenujemo *lastni podprostor pri lastni vrednosti λ*.

Pravimo, da je linearno preslikavo $\tau\colon V \to V$ mogoče *diagonalizirati*, če obstaja baza, v kateri pripada preslikavi τ diagonalna matrika.

Izrek 2.26. *Linearno preslikavo $\tau\colon V \to V$ je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja baza prostora V sestavljena iz lastnih vektorjev preslikave τ.*

2.4 Izometrije

Doslej smo si ogledali le linearne preslikave. Seveda pa niso vse preslikave linearne, oglejte si primer 2.16. V tem razdelku si bomo ogledali (morda nelinearne) preslikave v $\mathbb{R}^n$, ki ohranjajo evklidsko razdaljo.

Imenovali jih bomo izometrije in te so še posebej pomembne v računalniški grafiki.

Razdalja med točkama X in Y je definirana kot dolžina vektorja med njima, torej

$$d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \|\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,$$

kjer smo z $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$ označili krajevni vektor točke X in podobno z $\overrightarrow{OY} = \mathbf{y}$ krajevni vektor točke Y. Če želimo, da neka preslikava $\mathcal{A}$ ohranja razdalje, mora biti razdalja med originalnima točkama X in Y enaka kot razdalja med njunima slikama, torej $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{x})\|$.

Definicija. Izometrija *je preslikava* $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *za katero velja*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|,$$

za vse $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Primer 2.27. *Primer nelinearne izometrije je premik (ali translacija)* τ, *definirana že v primeru 2.16. Ker je*

$$\tau(\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \mathbf{w}) - (\mathbf{y} + \mathbf{w}) = \mathbf{x} - \mathbf{y},$$

je tudi $\|\tau(\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. *Torej je premik izometrija.*

Izrek 2.28. *Vsaka izometrija slika kolinearne točke v kolinearne, oziroma premico v premico.*

Dokaz. Naj bodo X, Y, Z točke na isti premici ter $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ in $\mathbf{z}$ njihovi krajevni vektorji. Potem je $d(X,Z) = d(X,Y) + d(Y,Z)$, oziroma ekvivalentno

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|.$$

Za vsako izometrijo $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ posledično velja

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{z}) - \mathcal{A}(\mathbf{x})\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{A}(\mathbf{z}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|$$

in zato so tudi slike točk X, Y in Z kolinearne. □

Najprej si oglejmo linearne izometrije.

Izrek 2.29. *Za linearno preslikavo* $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *so naslednje trditve ekvivalentne:*

A. τ *je izometrija.*

B. $\|\mathbf{x}\| = \|\tau(\mathbf{x})\|$ *za vse* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

C. $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \tau(\mathbf{x})^\top \tau(\mathbf{y})$ *za vse* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

D. Matrika, ki pripada τ *v ortonormirani bazi, je ortogonalna.*

E. Obstaja takšna ortogonalna matrika Q, da je $\tau(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$ za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Pokažimo ekvivalenco vseh trditev v izreku z zaporedjem posameznih implikacij:

$$(\text{A.} \implies \text{B.} \implies \text{C.} \implies \text{E.} \implies \text{D.} \implies \text{E.} \implies \text{A.})$$

(A. $\implies$ B.) Najprej predpostavimo, da je τ linearna izometrija (predpostavka A.). Potem je

$$\|\tau(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| = \|\tau(\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \tag{2.9}$$

za poljubna vektorja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ker linearne preslikave ohranjajo ničelni vektor, je $\tau(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, in zato po definiciji izometrije velja

$$\|\tau(\mathbf{x})\| = \|\tau(\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\|, \tag{2.10}$$

iz česar sledi B.

(B. $\implies$ C.) Naj bo $A = A_{\tau,\mathcal{S},\mathcal{S}}$ matika, ki pripada linearni preslikavi τ iz standardne baze $\mathcal{S}$ prostora $\mathbb{R}^n$ v standardno bazo $\mathcal{S}$. Če v predpostavko B. vstavimo namesto vektorja $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, velja

$$\|A(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2.$$

Kvadrat norme vektorja je enak skalarnemu produktu vektorja s samim seboj, zatorej je

$$(A(\mathbf{x}-\mathbf{y}))^\top (A(\mathbf{x}-\mathbf{y})) = (\mathbf{x}-\mathbf{y})^\top (\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{2.11}$$

Po večkratnem upoštevanju distributivnosti matričnega množenja je leva stran enakosti (2.11) enaka

$$(A\mathbf{x})^\top A\mathbf{x} - (A\mathbf{y})^\top A\mathbf{x} - (A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y} + (A\mathbf{y})^\top A\mathbf{y}.$$

Skalarni produkt je simetričen, torej velja $(A\mathbf{y})^\top A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y}$ in $\mathbf{y}^\top\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top\mathbf{y}$. Z upoštevanjem predpostavke B. leva stran enakosti (2.11) postane

$$\begin{aligned}(A(\mathbf{x}-\mathbf{y}))^\top (A(\mathbf{x}-\mathbf{y})) &= (A\mathbf{x})^\top A\mathbf{x} - (A\mathbf{y})^\top A\mathbf{x} - (A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y} + (A\mathbf{y})^\top A\mathbf{y} = \\ &= \|A\mathbf{x}\|^2 - 2(A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y} + \|A\mathbf{y}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2(A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2.\end{aligned}$$

Podobno razpišemo desno stran enakosti (2.11) kot

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\top(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &= \mathbf{x}^\top\mathbf{x} - \mathbf{y}^\top\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top\mathbf{y} - \mathbf{y}^\top\mathbf{y} = \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x}^\top\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2.\end{aligned}$$

Z enačenjem poenostavljene leve in poenostavljene desne strani enakosti (2.11) dobimo

$$(A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}, \tag{2.12}$$

ali ekvivalentno

$$\tau(\mathbf{x})^\top \tau(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}.$$

(C. $\Longrightarrow$ E.) Sedaj transponirajmo produkt da levi strani enakosti (2.12) in tako za vsaka vektorja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ velja

$$(A^\top A\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top A^\top A\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y},$$

ali ekvivalentno

$$(A^\top A\mathbf{x} - \mathbf{x})^\top \mathbf{y} = 0.$$

Z besedami, vektor $A^\top A\mathbf{x} - \mathbf{x}$ je pravokoten na vse vektorje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Zatorej je $A^\top A\mathbf{x} - \mathbf{x}$ ničelni vektor. To pomeni, da je

$$(A^\top A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

za vsak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in posledično ima matrika $A^\top A - I$ v svojem ničelnem prostoru prav vse vektorje iz $\mathbb{R}^n$. Zatorej je njen stolpčni prostor enak $\{\mathbf{0}\}$ in matrika $A^\top A - I$ je kar ničelna matrika. Sledi

$$A^\top A = I.$$

Ker je A kvadratna matrika, sledi $A^{-1} = A^\top$, torej je A ortogonalna matrika. Sledi trditev E.

(E. $\Longrightarrow$ D.) Naj bo $\mathcal{B}$ neka ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^n$. Definirajmo matriko Q, katere stolpci so enaki vektorjem iz $\mathcal{B}$, in predstavlja po stolpcih koeficiente pri razvoju baze $\mathcal{B}$ po standardni bazi §. Ker je baza $\mathcal{B}$ ortonormirana, je matrika Q ortogonalna. Matrika, ki pripada linearni preslikavi τ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}$ je torej enaka

$$A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{B}} = QA_{\tau,\S,\S}Q^{-1} = QAQ^\top$$

in je produkt ortogonalnih matrik. Zatorej je matrika, ki pripada τ v ortonormirani bazi $\mathcal{B}$, ortogonalna matrika.

(D. $\Longrightarrow$ E.) Ker je standardna baza $\mathbb{R}^n$ ortonormirana, je trditev E. le poseben primer trditve D.

(E. $\Longrightarrow$ A.) Če je $\tau(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$ za neko ortogonalno matriko Q, potem velja

$$\begin{aligned}
\|\tau(\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{y})\|^2 = \|\tau(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 &= \|Q(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 = \\
&= (Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}))^\top Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\
&= (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top Q^\top Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\
&= (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\
&= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2,
\end{aligned}$$

iz česar sledi, da je τ izometrija. □

Posledica 2.30. *Izometrijo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lahko enolično zapišemo kot*

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{a},$$

kjer je $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalna matrika in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Označimo sliko ničelnega vektorja s preslikavo $\mathcal{A}$ z $\mathbf{a} := \mathcal{A}(\mathbf{0})$ in definirajmo novo preslikavo $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) := \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}.$$

Ker je $\mathcal{A}$ izometrija, je tudi preslikava $\mathcal{B}$ izometrija, saj velja

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{x}) - \mathcal{B}(\mathbf{y})\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{a} - (\mathcal{A}(\mathbf{y}) - \mathbf{a})\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Poleg tega opazimo, da je

$$\mathcal{B}(\mathbf{0}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) - \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

torej preslikava $\mathcal{B}$ ohranja ničelni vektor. Posledično velja tudi

$$\|\mathcal{B}(\mathbf{x})\| = \|\mathcal{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{0}\| = \|\mathcal{B}(\mathbf{x}) - \mathcal{B}(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\|. \tag{2.13}$$

Pokažimo sedaj, da je $\mathcal{B}$ linearna preslikava.

Najprej pokažimo (LP2), torej, da je $\mathcal{B}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathcal{B}(\mathbf{x})$ za vse vektorje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ker trditev jasno velja, če je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se moramo prepričati le še za $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Predpostavimo torej, da $\mathcal{B}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Ker slika izometrija premice v premice (izrek 2.28), so vektorji $\mathcal{B}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ in $\mathcal{B}(\alpha\mathbf{x})$ kolinearni, zato je $\mathcal{B}(\alpha\mathbf{x}) = \beta\mathcal{B}(\mathbf{x})$. Pokazati moramo torej le še, da je $\beta = \alpha$. Po (2.13) je

$$|\beta|\|\mathcal{B}(\mathbf{x})\| = \|\beta\mathcal{B}(\mathbf{x})\| = \|\mathcal{B}(\alpha\mathbf{x})\| = \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathcal{B}(\mathbf{x})\|.$$

torej je $|\alpha| = |\beta|$. Podobno velja

$$\begin{aligned}|1-\beta|\|\mathcal{B}(\mathbf{x})\| &= \|(1-\beta)\mathcal{B}(\mathbf{x})\| = \|\mathcal{B}(\mathbf{x}) - \beta\mathcal{B}(\mathbf{x})\| = \\ &= \|\mathcal{B}(\mathbf{x}) - \mathcal{B}(\alpha\mathbf{x})\| = \\ &= \|\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}\| = |1-\alpha|\|\mathbf{x}\| = |1-\alpha|\|\mathcal{B}(\mathbf{x})\|,\end{aligned}$$

torej tudi $|1-\alpha| = |1-\beta|$. Ker $\mathbf{0}, bfx, \alpha\mathbf{x} \in \mathcal{L}\{\mathbf{x}\}$ in je $\alpha\mathbf{x}$ oddaljena od $\mathbf{0}$ za $|\alpha|\|\mathbf{x}\|$ in od $\mathbf{x}$ za $|1-\alpha|\|\mathbf{x}\|$, je $\alpha\mathbf{x}$ enolično določen vektor v $\mathcal{L}\{\mathbf{x}\}$. Podobno je $\alpha\mathcal{B}(\mathbf{x})$ enolično določen vektor v $\mathcal{L}\{\mathcal{B}(\mathbf{x})\}$, ki je od $\mathbf{0}$ oddaljen za $|\alpha|\mathcal{B}(\mathbf{x})$. Sledi $\mathcal{B}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathcal{B}(\mathbf{x})$. torej tudi $|1-\alpha| = |1-\beta|$. Sledi, da je $\alpha = \beta$, torej tudi $\mathcal{B}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathcal{B}(\mathbf{x})$.

Pokažimo sedaj še (LP1), torej da je $\mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{y})$ za vse vektorje $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Naj bo vektor $\mathbf{x}$ krajevni vektor točke X in $\mathbf{y}$ krajevni vektor točke Y. Ker $\mathcal{B}$ slika premice v premice in ohranja razdalje, slika razpolovišče daljice XY v razpolovišče slike daljice XY. Velja torej

$$\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right) = \frac{1}{2}(\mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{y})).$$

in skupaj z lastnostjo (LP2) preslikave $\mathcal{B}$ velja

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{y}) &= 2\cdot\frac{1}{2}(\mathcal{B}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{y})) = \\ &= 2\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right) = \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}(\mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = \mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Sledi torej, da je $\mathcal{B}$ linearna preslikava, ki je hkrati izometrija. Po izreku 2.29 (A.$\Longrightarrow$ E.) sledi, da obstaja takšna ortogonalna matrika, da je $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$ za vsak $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. Zatorej je

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})+\mathbf{a} = Q\mathbf{x}+\mathbf{a}$$

za vse $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.

Denimo sedaj, da lahko preslikavo $\mathcal{A}$ zapišemo na dva načina kot

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}+\mathbf{a} = S\mathbf{x}+\mathbf{b}$$

za vse $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. Sledi

$$(Q-S)\mathbf{x} = \mathbf{b}-\mathbf{a} \tag{2.14}$$

za vse $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, torej tudi za $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, in posledično

$$\mathbf{0} = (Q-S)\mathbf{0} = \mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

Pokazali smo, da velja $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ in zato je po (2.14) $(Q-S)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ za vse $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, torej je matrika $Q-S$ ničelna matrika. Sledi $Q=S$, torej je zapis izometrije $\mathcal{A}$ kot $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}+\mathbf{a}$ enoličen. $\square$

Z ločevanjem primerov se lahko prepričamo v naslednja dva izreka, ki karakterizirata linearne izometrije v $\mathbb{R}^2$ in v $\mathbb{R}^3$.

Izrek 2.31. *Vsaka ortogonalna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ je ena od naslednjih:*

A. *Zrcaljenje čez premico $y=kx$, kjer $k=\tan\frac{\varphi}{2}$ in*

$$Z_\varphi = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

je matrika, ki pripada τ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$.

Lastni vrednosti zrcaljenja sta 1 in -1, pripadajoča lastna vektorja sta v smeri premice, čez katero zrcalimo (pri lastni vrednosti 1), ter v smeri vektorja, pravokotnega na premico (pri lastni vrednosti -1).

B. *Rotacija za kot φ okoli koordinatnega izhodišča v pozitivni smeri in*

$$R_\varphi = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

je matrika, ki pripada τ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$.

Lastni vrednosti rotacije sta $\cos\varphi + i\sin\varphi$ in $\cos\varphi - i\sin\varphi$, pripadajoča lastna vektorja pa imata kompleksne vrednosti (razen v primeru, ko je $\varphi = k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$).

Izrek 2.32. *Vsaka ortogonalna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je ena od naslednjih:*

A. *Zrcaljenje čez ravnino Σ skozi koordinatno izhodišče $(0,0,0)$. V tem primeru ima τ dvojno lastno vrednost 1 in enojno lastno vrednost -1. Pri tem je ravnina zrcaljenja $\Sigma = \mathcal{L}\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ napeta na lastna vektorja a in b pri lastni vrednosti 1. Matrika, ki pripada τ v bazi $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}\}$, je enaka*
$$A_\tau = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$
kjer je $\mathbf{n}$ normala na ravnino Σ.

B. *Rotacija okoli premice p skozi koordinatno izhodišče $(0,0,0)$ za kot φ. Pri tem ima τ lastne vrednosti 1, $\cos\varphi + i\sin\varphi$ in $\cos\varphi - i\sin\varphi$ in je os rotacije p napeta na lastni vektor $\mathbf{a}$ pri lastni vrednosti 1. Matrika, ki pripada τ, je tako v bazi $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ enaka*
$$A_\tau = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right],$$
kjer sta vektorja $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ pravokotna na $\mathbf{a}$.

C. *Zrcalni zasuk, kjer je os rotacije p pravokotna na ravnino zrcaljenja Σ. Pri tem ima τ lastne vrednosti -1, $\cos\varphi + i\sin\varphi$ in $\cos\varphi - i\sin\varphi$ in je os rotacije $p = \mathcal{L}\{n\}$ napeta na lastni vektor $\mathbf{n}$ pri lastni vrednosti -1, kjer je $\mathbf{n}$ normala na Σ. Tako je matrika, ki pripada τ, v bazi $\{\mathbf{n},\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ enaka*
$$A_\tau = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right],$$
kjer je $\Sigma = \mathcal{L}\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$.

2.5 Naloge

(↯) Naloga 25.

Drži ali ne drži?

A. Množica vseh zgornje trikotnih $n \times n$ matrik vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

B. Množica vseh 3×3 matrik z vsemi diagonalnimi elementi enakimi 0 je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

C. Množica vseh 4×4 matrik, ki imajo vse vrstice enake, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

D. Ravnina v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $x + 2y + 3z = 4$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.

E. Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.

F. Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ baza prostora V.

G. Vsaka linearno neodvisna množica vektorjev v vektorskem prostoru dimenzije 9 vsebuje vsaj 9 elementov.

H. Vsaka baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 4}$ ima največ 4 elemente.

I. Če je U linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_k$, potem vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tvorijo bazo prostora U.

J. Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza vektorskega prostora V in je W vektorski podprostor v V, potem obstaja podmnožica $\mathcal{B}_W \subseteq \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, ki je baza za W.

K. Če množica vektorjev $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ napenja vektorski prostor U, potem lahko vsak vektor iz U zapišemo na en sam način kot linearno kombinacijo vektorjev $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

(ϟ) Naloga 26.

Katere od naslednjih množic realnih $n \times n$ matrik so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^{n\times n}$? Za vsak podprostor določite tudi bazo.

A. Matrike, ki imajo prvo vrstico ničelno.

B. Matrike, ki imajo vsoto elementov v vsaki vrstici enako 1.

C. Vse matrike C, za katere velja $C^2 = I$.

D. Vse matrike D, ki so rešitve sistema $Dx = 0$.

E. Vse matrike, katerih elementi so nenegativna realna števila.

F. Vse matrike F, za katere velja $F = F^T$.

G. Vse matrike G, za katere velja $G = -G^T$.

H. Vse matrike H, za katere velja $\operatorname{rang} H = n$.

I. Vse matrike, katerih vse vrstice so med seboj enake.

J. Vse matrike ranga 2.

K. Vse matrike ranga največ 1.

L. Vse simetrične pozitivno semidefinitne matrike.

M. Vse matrike X, katerih produkt z vnaprej dano matriko L je enak ničelni matriki.

N. Vse matrike Y s sledjo 0.

O. Vse matrike Z, za katere je QZQ^{-1} diagonalna matrika za vnaprej dano obrnljivo matriko $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(↯) Naloga 27.

Naj bo V vektorski prostor ter $U, W \subseteq V$ vektorska prostora v V. Pokažite, da je tudi $U \cap W$ vektorski prodprostor v V.

($\star$) Naloga 28.

Naj $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ označuje vektorski prostor vseh zveznih funkcij na intervalu $[0, 2\pi]$. Pokažite, da so vektorji

$$f(x) = 1,\ g(x) = \cos(2x),\ h(x) = \cos^2 x,$$

linearno odvisni v $\mathcal{C}[0, 2\pi]$.

(↯) Naloga 29.

Naj bo $\mathcal{V}$ množica vseh simetričnih matrik oblike

$$\begin{bmatrix} A & S \\ -S & A \end{bmatrix},$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika ($A^\top = A$), $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pa poševno simetrična ($S^\top = -S$).

A. Pokažite so, da je $\mathcal{V}$ vektorski prostor.

B. Poiščite bazo prostora $\mathcal{V}$ in določite $\dim \mathcal{V}$.

(↯) Naloga 30.

Naj bosta $u, v \in V$ linearno neodvisna lastna vektorja linearne preslikave $\tau \colon V \to V$. Če je $u + v$ tudi lastni vektor za τ, potem pokažite, da u in v pripadata isti lastni vrednosti.

(↯) Naloga 31.

Dokažite, da nobena linearna preslikava $\tau : \mathbb{R}^{2 \times 3} \to \mathbb{R}_4[x]$ ni injektivna.

(↯) Naloga 32.

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ simetrična matrika, katere lastne vrednosti so enake -3, -1, 0, 1 in 3. Pokažite, da je matrika A^5 v jedru preslikave $\tau\colon \mathbb{R}^{5\times 5} \to \mathbb{R}$, podane s predpisom $\tau(X) = \mathrm{tr}(X)$.

(↯) Naloga 33.

Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diagonalizabilna linearna preslikava, za katero velja, da je vsaka njena lastna vrednost enaka bodisi 0 bodisi -1. Določite dimenzijo jedra linearne preslikave $\tau^2 + \tau^3$.

(↯) Naloga 34.

Definirajmo preslikavo $\tau : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ s predpisom $\tau(p(x)) = x^2 p'(x)$.

A. Pokažite, da je τ linearna.

B. Zapišite matriko, ki ustreza preslikavi τ v standardnih bazah $\mathbb{R}_1[x]$ in $\mathbb{R}_2[x]$.

C. Kateri od naslednjih polinomov so v $\ker \tau$?

(a) $3x$ (b) 5 (c) 0

(↯) Naloga 35.

Za vsakega od naslednjih primerov zapišite, ali obstajajo simetrične negativno definitne matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Če takšna matrika obstaja, zapišite primer. Če ne, utemeljite, zakaj ne.

A. $\det(A) \leq 0$.

B. B je linearna izometrija.

C. C^2 ima dvojno lastno vrednost 4.

(↯) Naloga 36.

Za vsakega od naslednjih primerov zapišite primer izometrije $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki niso identiteta, in zanje velja

A. $\mathcal{A}^3$ identična preslikava

B. $\mathcal{B}$ ima lastno vrednost različno od 1 in -1.

C. $\mathcal{C}$ ni linearna in ni translacija.

($\star$) Naloga 37.

Dokažite, da je vsaka rotacija v $\mathbb{R}^2$ kompozitum dveh zrcaljenj.

($\star$) Naloga 38.

Dokažite, da je vsaka rotacija v $\mathbb{R}^n$ kompozitum dveh zrcaljenj.

2.6 Nadaljnje branje

1. David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006, Poglavje 6.
2. Tomaž Košir, Linearna algebra, poglavje VI: Vektorski prostori in poglavje VII: Linearne preslikave.
3. Joseph B. Kadane, Principles of Uncertainty, strani 198-201.
4. Walter Meyer, Geometry and Its Applications, 2006, Poglavje 4.

3

Rešitve nekaterih nalog

Rešitev 3.

Sled matrike $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lahko denimo poračunamo kot

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T) \;\; \text{(po definiciji matrike } A\text{)}\\ &= \operatorname{tr}(\mathbf{y}^T\mathbf{x}) \;\; \text{(simetričnost sledi)}\\ &= \operatorname{tr}(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) \;\; \text{(simetričnost skalarnega produkta)}\\ &= \mathbf{x}^T\mathbf{y} \; (\text{ saj je } \mathbf{x}^T\mathbf{y} \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Seveda se lahko razpišemo tudi po komponentah. Če označimo $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_n]^T$ in $\mathbf{y} = [y_1 \ldots y_n]^T$, potem je matrika A oblike

$$A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{3.1}$$

in tako je $\operatorname{tr}(A) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$.

Iz (3.1) je očitno, da je $\operatorname{rang}(A) = 1$. To lahko vidite tudi tako, da napišete $A = [y_1\mathbf{x}\; y_2\mathbf{x}\; \ldots\; y_n\mathbf{x}]$, torej so vsi stolpci matrike A večkratniki vektorja $\mathbf{x}$. Sledi, da je $\dim N(A) = n-1$, torej je 0 lastna vrednost matrike A in njej pripadajoči lastni podprostor je dimenzije $n-1$. Če označimo lastne vrednosti matrike A z $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, je torej $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ in ima matrika A le eno neničelno lastno vrednost λ_n, ki jo lahko izračunamo denimo kot

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \lambda_n.$$

Rešitev 5.

Po definiciji lahko razpišemo

$$\|UAV\|_{\mathrm{F}}^2 = \operatorname{tr}(UAV(UAV)^\top) = \operatorname{tr}(UAVV^\top A^\top U^\top).$$

Ker je V ortogonalna matrika, je po definiciji $VV^\top = I_n$. Skupaj z upoštevanjem trditve 1.1 tako dobimo

$$\begin{aligned}\|UAV\|_F^2 &= \operatorname{tr}(UAVV^\top A^\top U^\top) = \\ &= \operatorname{tr}(UAA^\top U^\top) = \operatorname{tr}((UAA^\top)U^\top) = \\ &= \operatorname{tr}(U^\top UAA^\top).\end{aligned}$$

Ker je tudi matrika U ortogonalna in zato velja $U^\top U = I_m$, sledi

$$\|UAV\|_F^2 = \operatorname{tr}(U^\top UAA^\top) = \operatorname{tr}(AA^\top) = \|A\|_F^2.$$

Ker je norma nenegativno število, lahko levo in desno stran zadnje enakosti korenimo in tako dobimo

$$\|UAV\|_F = \|A\|_F.$$

Rešitev 19.

Izračunajmo kvadratno formo bločne matrike $\begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix}$ kot

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^\top & \mathbf{y}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top B\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top B^\top \mathbf{x} + \mathbf{y}^\top C\mathbf{y}$$

in kvadratno formo bločne matrike $\begin{bmatrix} A & -B \\ -B^\top & C \end{bmatrix}$ kot

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}^\top & \mathbf{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ -B^\top & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{w}^\top A\mathbf{w} - \mathbf{w}^\top B\mathbf{z} - \mathbf{z}^\top B^\top \mathbf{w} + \mathbf{z}^\top C\mathbf{z}.$$

Opazimo, da če izberemo $\mathbf{w} = \mathbf{x}$ in $\mathbf{z} = -\mathbf{y}$, je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^\top & \mathbf{y}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\top & -\mathbf{y}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ -B^\top & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix}.$$

Zato je kvadratna forma matrike $\begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix}$ nenegativna za vsaka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ natanko tedaj, ko je kvadratna forma $\begin{bmatrix} A & -B \\ -B^\top & C \end{bmatrix}$ nenegativna za vsaka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, iz česar trditev naloge sledi.

Rešitev 20.

Ker je matrika A pozitivno semidefinitna, ima po Izreku 1.22 vseh n lastnih vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, nenegativnih. Prav tako je vseh m lastnih vrednosti $\mu_1, \ldots, \mu_m$ matrike B nenegativnih. Po Izreku 1.19 so lastne vrednosti matrike $A \otimes B$ natanko vsi možni produkti $\lambda_i \mu_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Ker velja $\lambda_i \geq 0$ in $\mu_j \geq 0$ za vse $i = 1, \ldots, n$ in vse

$j = 1, \ldots, m$, so tudi vse lastne vrednosti matrike $A \otimes B$ nenegativne. Po Izreku 1.22 sledi, da je matrika $A \otimes B$ pozitivno semidefinitna.

Rešitev 23.

Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Po Schurovem izreku obstajata takšna ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in takšna zgornjetrikotna matrika $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, da je $Q^\top AQ = Z$.

Matrika Z je zgornjetrikotna, zato lahko s permutacijo vrstic (množenje Z s permutacijsko matriko $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z leve) in s permutacijo stolpcev (množenje Z s permutacijsko matriko $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z desne) dosežemo, da bo matrika PZR oblike

$$PZR = \begin{bmatrix} Z_1 & X \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix},$$

kjer je $Z_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ obrnljiva zgornjetrikotna matrika, $Z_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ pa zgornjetrikotna matrika z ničlami na diagonali. To pomeni, da ima matrika PZR obrnljivo $r \times r$ podmatriko Z_1 in da velja

$$\operatorname{rang}(Z) = \operatorname{rang}(PZR) \geq \operatorname{rang} Z_1 = r.$$

Še več, ker ima Z_2 na diagonali ničelne vrednosti, ima vsaka $(r+1) \times (r+1)$ podmatrika matrike Z ničelno determinanto.

Matrika $Z = P^\top \begin{bmatrix} Z_1 & X \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} R^\top$ ima tako tudi obrnljivo $r \times r$ podmatriko (vendar morda ne več v zgornjem levem vogalu) in posledično jo ima tudi matrika $A = QZQ^\top$ (saj je Q obrnljiva). Ker sta matriki A in Z podobni, je torej $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(Z) \geq r$. Zatorej je $\operatorname{rang}(A)$ enak velikosti največje obrnljive podmatrike matrike A (=največji možni r).

Rešitev 34.

Izberimo $p, q \in \mathbb{R}_1[x]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poračunajmo

$$\begin{aligned} \tau((\alpha p + \beta q)(x)) &= x^2((\alpha p(x) + \beta q(x))') = \\ &= x^2(\alpha p'(x) + \beta q'(x)) = \\ &= \alpha x^2 p'(x) + \beta x^2 q'(x) = \\ &= \alpha\tau(p(x)) + \beta\tau(q(x)), \end{aligned}$$

iz česar sledi, da je τ linearna.

Standardna baza $\mathbb{R}_1[x]$ je enaka $\{1, x\}$, standardna baza $\mathbb{R}_2[x]$ pa $\{1, x, x^2\}$. Ker je

$$\tau(1) = x^2 \cdot 1' = 0 \text{ in } \tau(x) = x^2 \cdot x' = x^2,$$

je matrika T, ki pripada preslikavi τ v standardnih bazah $\mathbb{R}_1[x]$ in $\mathbb{R}_2[x]$

enaka

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

V jedru preslikave τ bodo natanko tisti polinomi $p \in \mathbb{R}_1[x]$, za katere je $p'(x) = 0$, torej konstantni polinomi. Ne pa tisti, ki imajo neničelni koeficient pred linearnim členom. Pravilna sta torej odgovora (b) in (c).

Seveda lahko tudi za vsakega od polinomov poračunate slike: $\tau(3x) = 3x^2$, $\tau(5) = \tau(0) = 0$.