MATEMATIKA 1

študijsko gradivo: tedenski izročki za predavanja

Polona Oblak

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 2024

Tedenski izročki so namenjeni sprotnemu pregledu obravnavane snovi pri predmetu Matematika 1 ter samostojnemu učenju. Vsak teden vsebuje

- bodisi kazalce na obravnavano tekočo snov (prvih šest tednov) bodisi osnovne definicije in pomembnejše izreke (preostalih sedem tednov).
- Sledi priporočena domača naloga, ki zajema kvize, teoretične naloge ali reference na zunanje vire. S temi nalogami boste lahko preverili, v kakšnem obsegu razumete obravnavano snov.
- Na koncu imate navedenih več zunanjih virov, kjer si lahko preberete ali ogledate več o obravnavanih pojmih. Za večino tednov si lahko ogledate posnetke tedenskih predavanj (na daljavo preko Zoom) iz leta 2020/21. Ostale reference so večinoma poglavja knjig v angleškem jeziku, ki obravnavajo sorodno snov, ali posnetki tujih predavanj.

Vse naloge in reference so označene s simboli:

- $\lightning$ označuje vire in naloge, ki natančno pokrivajo snov, tako po vsebini kot po zahtevnosti. Naloge s tem simbolom so večinoma naloge s teoretičnih izpitov.
- $\lightning\lightning$ označuje vire in naloge za zahtevnejše bralce, ki radi rešujejo težje naloge in berejo zahtevnejšo matematično literaturo.
- $\star$ označuje vire in naloge, ki dopolnjujejo obravnavano snov. S temi viri boste razširili svoje znanje, pri čemer sem se trudila, da je večino takšnih virov pomembnih na širšem področju računalništva in informatike.

Preden začnete z branjem, preverite svoje predznanje. Predpostavljali bomo, da ste bralci dobro seznanjeni z naslednjimi pojmi (ki so zbrani iz kataloga znanj za vpis na magistrski študij):

- **Števila in zaporedja** Popolna indukcija, realna in kompleksna števila, polarni zapis, zaporedja, seštevanje vrst.
- **Funkcije ene in več realnih spremenljivk**, odvod in parcialni odvod, gradient funkcije več spremenljivk, iskanje lokalnih in globalnih ekstremov funkcije ene spremenljivke, integral funkcije ene spremenljivke.
- **Geometrija v** $\mathbb{R}^3$: vektorji in osnovne računske operacije, skalarni produkt, vektorski produkt, enačba premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$, ortogonalnost, ortogonalne projekcije, Gram-Schmidtov algoritem.
- Reševanje **sistemov linearnih enačb**, Gaussova eliminacija.
- **Matrike**: osnovne operacije, rang, obrnljivost matrik, stolpčni in ničelni prostor matrike, determinante, lastne vrednosti in lastni vektorji, razcep singularnih vrednosti (SVD).

Študenti, ki ste dokončali program BUN-RI, ste se z vsemi omenjenimi tematikami srečali na svojem prvostopenjskem študiju, in v kolikor ste pozabili kakšno od tem, jo boste hitro obnovili. Študenti BVS-RI v rednem delu svojega prvostopenjskega študija niste obravnavali funkcij več spremenljiv in večine zgoraj omenjenih pojmov linearne algebre. Verjamem, da ste jih spoznali ob pripravi na izbirni izpit na program BM-RI, a vam vseeno svetujem, da si vzamete na začetku predmeta dovolj časa za študij zgornjih tematik. Več o zgoraj omenjenih pojmih najdete v knjigah in v spletni Učilnici predmetov BUN-RI:

[1] Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015.
[2] spletna Učilnica predmeta Linearna algebra.
[3] Gilbert Strang: Introduction to linear algebra, poglavja 1-6.
[4] spletna Učilnica predmeta Osnove matematične analize.
[5] James Stewart: Calculus, early transcendentals, poglavja 1-8, 11, 12, 14, H.

Upam, da vam pričujoči izročki olajšajo osvajanje potrebnega znanja pri predmetu Matematika 1.

Polona Oblak

Matematika 1	**Izročki: 1. teden**

Ponovitev: matrike, sled, rang, lastne vrednosti,...

Polona Oblak

1. Snov

(1) Ponovitev pojmov: rang matrike, ničelni prostor, stolpčni prostor, lastna vrednost matrike.
(2) Sled matrike (Razdelek 1.1)
(3) Podobnost matrik (Razdelek 1.2)

2. Domača naloga

ϟ (1) Rešite kviz in preverite vaše znanje osnovnih pojmov linearne algebre.
ϟ (2) Ponovite več lastnosti ranga matrike.
ϟ (3) Polona Oblak: Matematika 1, Uporabna linearna algebra:
- ponovite snov v razdelkih 1.1. in 1.2.
- rešite naloge 1A, 1B, 1C, 2 in 3 v razdelku 1.7.

ϟ (4) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, stran 53 (Exercise 1, 2, 3).
ϟ (5) Ponovite razcep singularnih vrednosti (SVD) matrike. Če želite, si lahko pomagate s kakšnim od virov:
  (a) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 6.5.
  (b) spletna Učilnica predmeta Linearna algebra
  (c) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 6.7.
  (d) Gilbert Strang: Singular Value Decomposition (the SVD),
  (e) Gilbert Strang, Lecture 29: Singular value decomposition,
  (f) Jure Leskovec: Lecture 46 - Dimensionality Reduction - Introduction.
  (g) Jure Leskovec: Lecture 47 - Singular Value Decomposition.
  (h) Jure Leskovec: Lecture 48 - Dimensionality Reduction with SVD.
  (i) Za geometrijsko predstavo se igrajte z demonstracijo SVD, Mathematica Demonstration.

3. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

ϟ (1) Ste manjkali na predavanjih? Tu so na voljo prastari posnetki predavanj (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto):
- 2020/21, 2. ura

- 2020/21, 3. ura

↯ (2) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, razdelek 5.

↯ (3) 3Blue1Brown, Essence of linear algebra

Matematika 1	Izročki, 2.teden

Schurov izrek, Frobeniusova norma matrike,
izrek Eckarta in Younga

Polona Oblak

4. Snov

(1) Definicija podobnosti in ortogonalne podobnosti. (Razdelek 1.2)
(2) Schurov izrek in njegove posledice (Razdelek 1.3)
(3) Frobeniusova norma matrike, izrek Eckarta in Younga (Razdelek 1.4)

5. Domača naloga

ϟ (1) Polona Oblak: Matematika 1, Uporabna linearna algebra:
- ponovite snov v razdelkih 1.2, 1.3 in 1.4.
- rešite naloge 1CDEFG, 4-9, morda tudi 23 in 24 v razdelku 1.7.

ϟ (2) Rešite kviz na spletni Učilnici.

6. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

ϟ (1) Ste manjkali na predavanjih? Tu so na voljo prastari posnetki predavanj (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto):
- 2020/21, 1. ura
- 2020/21, 2. ura
- 2020/21, 3. ura

ϟ (2) Gilbert Strang, *Linear algebra and Learning from Data*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 2019, razdelek I.9.

ϟϟ (3) Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 2006, razdelka 2.3 and 2.4.

⋆ (4) več matričnih norm: Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 2006, razdelek 5.6.

Matematika 1	**Izročki: 3. teden**
	Kroneckerjev produkt
	Polona Oblak

7. Snov

(1) Kroneckerjev produkt matrik (Razdelek 1.5)

8. Domača naloga

ϟ (1) Polona Oblak: Matematika 1, Uporabna linearna algebra:
- ponovite snov v razdelku 1.5.
- rešite naloge 10-15 v razdelku 1.7.

ϟ (2) Rešite kviz na spletni Učilnici.

ϟ (3) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, stran 368 (Exercises 1, 2, 3, 4, 14, 15, 16).

9. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

ϟ (1) Ste manjkali na predavanjih? Tu so na voljo prastari posnetki predavanj (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto):
- 2020/21, 1. ura
- 2020/21, 2. ura

ϟ (2) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, razdelki 16.1., 16.2. in 16.3.

ϟϟ (3) Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, 2006, razdelek 4.2.

⋆ (4) Charles F. Van Loan:The ubiquitous Kronecker product, Journal of Computational and Applied Mathematics 123 (2000) 85-100.

Matematika 1	**Izročki: 4. teden**

Pozitivno semidefinitne matrike. Razcep Choleskega.

Polona Oblak

10. Snov

(1) Pozitivna (semi)definitnost matrik (Razdelek 1.6)

11. Domača naloga

ϟ (1) Polona Oblak: Matematika 1, Uporabna linearna algebra:
- ponovite snov v razdelku 1.6.
- rešite naloge 16-22 v razdelku 1.7.

ϟ (2) Rešite kviz na spletni Učilnici.

⋆ (3) Preberite in razumite vsaj enega od dokazov Sylvestrovega izreka.

12. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

ϟ (1) Ste manjkali na predavanjih? Tu so na voljo prastari posnetki predavanj (2020/21) (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto).

ϟ (2) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistian's Perspective, Springer, 1997, Poglavje 14.

ϟ (3) Gilbert Strang, *Linear algebra and Learning from Data*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 2019, razdelek I.7.

⋆ (4) Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, 2006, Podpoglavja 7.0, 7.1, 7.2.

⋆ (5) Giorgio Giorgi: Various Proofs of the Sylvester Criterion for Quadratic Forms, Journal of Mathematics Research; Vol 9, No 6, 2017.

Matematika 1 **Izročki: 5. teden**

Vektorski prostor in podprostor.

Polona Oblak

13. Snov

(1) Vektorski prostor in podprostor (Razdelek 2.1)
(2) Baze vektorskih prostorov (Razdelek 2.2)

14. Domača naloga

ϟ (1) Polona Oblak: Matematika 1, Uporabna linearna algebra:
- ponovite snov v razdelkih 2.1 in 2.2.
- rešite naloge 25-29 v razdelku 2.5.

ϟ (2) Rešite kviz na Učilnici.

15. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

ϟ (1) Ste manjkali na predavanjih? Tu so na voljo prastari posnetki predavanj (2020/21) (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto).

ϟ (2) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006, Podpoglavji 6.1 in 6.2.

⋆ (3) Tomaž Košir, Linearna algebra, poglavje VI: Vektorski prostori

Matematika 1	**Izročki: 5. teden**
Linearne preslikave.	
	Polona Oblak

16. Snov

(1) Linearne preslikave (Razdelek 2.3)

17. Domača naloga

ϟ (1) Polona Oblak: Matematika 1, Uporabna linearna algebra:
- ponovite snov v razdelku 2.3.
- rešite naloge 30-34 v razdelku 2.5.

ϟ (2) Rešite kviz na Učilnici.

18. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

ϟ (1) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006, Razdelki 6.4.-6.7.

ϟϟ (2) Tomaž Košir, Linearna algebra, poglavje VII: Linearne preslikave.

Izometrije

Polona Oblak

19. Snov

Izometrija je (*morda nelinearna*) preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katero velja

$$||x-y|| = ||\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)||,$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}^n$. To pomeni, da izometrije ohranjajo razdalje.

Izrek 1. *Za linearno preslikavo $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

(1) *τ je izometrija.*
(2) *$||x|| = ||\tau(x)||$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$.*
(3) *$x^\mathsf{T} y = \tau(x)^\mathsf{T}\tau(y)$ za vse $x, y \in \mathbb{R}^n$.*
(4) *Matrika, ki pripada τ v ortonormirani bazi, je ortogonalna.*

Linearno izometrijo imenujemo ortogonalna *preslikava.*

Izrek 2. *Izometrijo $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lahko enolično zapišemo kot*

$$\mathcal{A}v = Qv + a,$$

kjer je $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalna matrika in $a \in \mathbb{R}^n$.

Ortogonalne preslikave = linearne izometrije

Izrek 3. *Vsaka ortogonalna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je ena od naslednjih:*

(1) *Zrcaljenje čez premico $y = kx$, kjer $k = \tan\frac{\varphi}{2}$ in*

$$Z_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

je matrika, ki pripada τ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$.

Lastni vrednosti zrcaljenja sta 1 in -1, pripadajoča lastna vektorja sta v smeri premice, čez katero zrcalimo (pri lastni vrednosti 1), ter v smeri vektorja, pravokotnega na premico (pri lastni vrednosti -1).

(2) *Rotacija za kot φ okoli koordinatnega izhodišča v pozitivni smeri in*

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

je matrika, ki pripada τ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$.

Lastni vrednosti rotacije sta $\cos\varphi + i\sin\varphi$ in $\cos\varphi - i\sin\varphi$, pripadajoča lastna vektorja pa imata kompleksne vrednosti (razen v primeru, ko je $\varphi = k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$).

Izrek 4. *Vsaka ortogonalna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je ena od naslednjih:*

(1) *Zrcaljenje čez ravnino Σ skozi koordinatno izhodišče $(0,0,0)$. V tem primeru ima τ dvojno lastno vrednost 1 in enojno lastno vrednost -1. Pri tem je ravnina zrcaljenja $\Sigma = \mathcal{L}\{a,b\}$ napeta na lastna vektorja a in b pri lastni vrednosti 1. Matrika, ki pripada τ v bazi $\{a,b,n\}$, je enaka*

$$A_\tau = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

kjer je n normala na ravnino Σ.

(2) *Rotacija okoli premice p skozi koordinatno izhodišče $(0,0,0)$ za kot φ. Pri tem ima τ lastne vrednosti 1, $\cos\varphi + i\sin\varphi$ in $\cos\varphi - i\sin\varphi$ in je os rotacije p napeta na lastni vektor a pri lastni vrednosti 1. Matrika, ki pripada τ, je tako v bazi $\{a,b,c\}$ enaka*

$$A_\tau = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right],$$

kjer sta vektorja b in c pravokotna na a.

(3) *Zrcalni zasuk, kjer je os rotacije p pravokotna na ravnino zrcaljenja Σ. Pri tem ima τ lastne vrednosti -1, $\cos\varphi + i\sin\varphi$ in $\cos\varphi - i\sin\varphi$ in je os rotacije $p = \mathcal{L}\{n\}$ napeta na lastni vektor n pri lastni vrednosti -1, kjer je n normala na Σ. Tako je matrika, ki pripada τ, v bazi $\{n,a,b\}$ enaka*

$$A_\tau = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right],$$

kjer je $\Sigma = \mathcal{L}\{a,b\}$.

20. Domača naloga

- ϟ (1) Rešite kviz na Učilnici.
- ϟ (2) Zapišite primer izometrije $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki ni identiteta, vendar pa je $\mathcal{A}^3$ identična preslikava.
- ϟϟ (3) Dokažite, da je vsaka rotacija v $\mathbb{R}^2$ kompozitum dveh zrcaljenj.
- ⋆ (4) Dokažite, da je vsaka rotacija v $\mathbb{R}^n$ kompozitum dveh zrcaljenj.
- ϟ (5) David Poole, Linear algebra, a modern introduction, Thomson, 2006, strani 374-375, exercises 29-32, 34.

21. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

- ϟ (1) Joseph B. Kadane, Principles of Uncertainty, strani 198-201.
- ⋆ (2) Tomaž Košir, Linearna algebra, Razdelek 5.
- ⋆ (3) (še bolj geometrijski pogled) Walter Meyer, Geometry and Its Applications, 2006, Poglavje 4.

Matematika 1 **Izročki: 8. teden**

Funkcije in vektorske funkcije več spremenljivk

Polona Oblak

22. Snov

Ponovitev funkcij več spremenljivk

Funkcija več spremenljivk

$$\begin{aligned} f\colon \quad & \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n && \to \mathbb{R}, \\ & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) && \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

je funkcija, ki predpiše realno vrednost $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ vsaki točki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Množici $\mathcal{D}_f$ pravimo *definicijsko območje* funkcije f.

V primeru, ko je $n = 2$, je graf funkcije $f = f(x, y)\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ploskev

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y))\colon (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$$

v $\mathbb{R}^3$. *Nivojska krivulja* (ali *nivojnica*) funkcije $f = f(x, y)$ je množica vseh točk $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, za katere velja $f(x, y) = c$ za dano realno realno število $c \in \mathbb{R}$. Tako vsaka točka $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ leži na natanko eni nivojski krivulji in zato se definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ razsloji na nivojske krivulje.

Odvodi

Parcialni odvod funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *po spremenljivki* x_i definiramo kot

$$f_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

Tako nam torej parcialni odvod funkcije f po x_i v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pove relativno spremembo funkcijske vrednosti pri zelo majhni spremembi spremenljivke x_i, kjer so ostale spremenljivke fiksne.

Vektor

$$(\operatorname{grad} f)(\mathbf{a}) = (f_{x_1}(\mathbf{a}), f_{x_2}(\mathbf{a}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{a}))$$

imenujemo *gradient* funkcije f v točki $\mathbf{a}$.

Smerni odvod funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *v smeri vektorja* $\vec{e}$ je enak

$$f_{\vec{e}}(\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} f)(\mathbf{a}) \cdot \frac{\vec{e}}{||\vec{e}||} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a}) \frac{e_i}{||\vec{e}||}.$$

Za funkcijo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja:

(1) Gradient funkcije f v točki $\mathbf{a}$ kaže v smeri najhitrjšega naraščanja funkcije f v točki $\mathbf{a}$.

(2) V primeru $n = 2$ je gradient funkcije $f = f(x, y)$ v točki $\mathbf{a}$ pravokoten na nivojsko krivuljo v tej točki.
(3) Smerni odvod $f_{\vec{e}}(\mathbf{a})$ je relativna sprememba funkcijske vrednosti $f(\mathbf{a})$ ob majhnem premiku iz točke $\mathbf{a}$ v smeri vektorja $\vec{e}$. Zato velja:
   - Če je $f_{\vec{e}}(\mathbf{a}) > 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke $\mathbf{a}$ v smeri vektorja $\vec{e}$ narašča.
   - Če je $f_{\vec{e}}(\mathbf{a}) < 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke $\mathbf{a}$ v smeri vektorja $\vec{e}$ pada.

Višji odvodi

Parcialne odvode drugega reda izračunamo s parcialnim odvajanjem parcialnih odvodov prvega reda. Definiramo jih kot

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right).$$

$n \times n$ matriko

$$H_f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})\right]_{i,j,=1,\ldots,n}$$

imenujemo *Hessejeva matrika* funkcije f v točki $\mathbf{x}$. Če sta pri tem $f_{x_i x_j}$ in $f_{x_j x_i}$ zvezni funkciji, potem sta omenjena druga parcialna odvoda enaka. Zato je v primeru, ko so vsi parcialni odvodi $f_{x_i x_j}$ zvezni, Hessejeva matrika $H_f(x, y)$ matrika.

Če druge parcialne odvode še naprej odvajamo, dobimo parcialne odvode višjih redov. Če so zvezni, so neodvisni od vrstnega reda odvajanja. V tem primeru za funkcijo f dveh spremeljivk dobimo štiri različne parcialne odvode tretjega reda: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a, b)$ in $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b)$.

Vektorske funkcije več spremenljivk

Vektorska funkcija

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{x} &\mapsto [f_1(\mathbf{x})\ f_2(\mathbf{x})\ \ldots\ f_m(\mathbf{x})]^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

je m-terica funkcij več spremenljivk.

Vektor spremenljivk bomo označili tudi kot $\vec{x} = \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in podobno pišemo tudi

$$\vec{F}(\vec{x}) = F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

da poudarimo, da je v F zbranih m funkcij več spremenljivk.

Jacobijeva matrika vektorske funkcije $F\colon \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je $m \times n$ matrika prvih odvodov funkcij $f_1, \ldots, f_m$:

$$J_F(\mathbf{x}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike vektorske funkcije $F\colon \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pove, za kakšen faktor funkcija lokalno raztegne prostornine.

Drugi odvod funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (tu je $m = 1$) definiramo kot

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right)^{\mathsf{T}}.$$

Nekaj pravil:

(1) $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}} = I_n$
(2) Če je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, potem $\frac{\partial A\vec{x}}{\partial \vec{x}} = A$.
(3) Če je $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, potem $\frac{\partial \vec{a}^{\mathsf{T}} \vec{x}}{\partial \vec{x}} = \vec{a}^{\mathsf{T}}$.
(4) Če je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, potem $\frac{\partial (\vec{x}^{\mathsf{T}} A \vec{x})}{\partial \vec{x}} = \vec{x}^{\mathsf{T}}(A + A^{\mathsf{T}})$.
(5) Če je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika, potem velja $\frac{\partial (\vec{x}^{\mathsf{T}} A \vec{x})}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^{\mathsf{T}} A$.
(6) $\frac{\partial ||\vec{x}||^2}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^{\mathsf{T}}$.
(7) Če $\vec{G}\colon \mathcal{D}_G \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ in $\vec{F}\colon \mathcal{D}_F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ in $\vec{H} = \vec{F} \circ \vec{G}$, potem $\frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (\vec{F} \circ \vec{G})}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{G}}(\vec{G}(\vec{x})) \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{x}}$.

23. DOMAČA NALOGA

ϟ (1) Rešite kviz na Učilnici.
ϟ (2) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, stran 945, exercise 5-6, 13-29, 35-48, stran 1020, exercise 1-6.
ϟ (3) Naj bo (u, v) novi koordinatni sistem v $\mathbb{R}^2$, definiran z

$$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v,$$

kjer $u \in \mathbb{R}$ and $v \in [0, 2\pi]$. Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v} = \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)}$.

ϟ (4) Naj bodo (u, v, w) nove koordinate v $\mathbb{R}^3$, definirane s predpisom

$$x = u \cos v, y = 2u \sin v, z = 3w.$$

kjer je $u \geq 0$, $v \in [0, 2\pi]$ in $w \in \mathbb{R}$. Izračunajte determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (u,v,w)}$.

↯ (5) Naj bo (u, v, w) koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ definiran z

$$x = 3ue^v, y = 2we^u, z = u.$$

Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

↯ (6) *Polarne koordinate* v $\mathbb{R}^2$ so podane z

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

kjer je $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Pokažite, da je determinanta Jacobijeve matrike enaka

$$\det(J_{\text{polarne}}) = r.$$

↯ (7) *Cilindrične koordinate* v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$

kjer je $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ in $z \in \mathbb{R}$. , Pokažite, da je determinanta Jacobijeve matrike enaka

$$\det(J_{\text{cilindrične}}) = r.$$

↯ (8) *Sferične koordinate* v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = r\sin\vartheta,$$

kjer je $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pokažite, da je determinanta Jacobijeve matrike enaka

$$\det(J_{\text{spherical}}) = r^2\cos\vartheta.$$

↯ (9) Če $\vec{z} = \vec{z}(\vec{x})$ in $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$, potem pokažite, da je $\frac{\partial(\vec{y}^\mathsf{T}\vec{z})}{\partial\vec{x}} = \vec{z}^\mathsf{T}\frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{x}} + \vec{y}^\mathsf{T}\frac{\partial\vec{z}}{\partial\vec{x}}$.

↯ (10) Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ in funkciji $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirani kot $f(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\vec{a}$ in $g(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\vec{b}$. Izračunajte $\frac{\partial(f(\vec{x})g(\vec{x}))}{\partial\vec{x}}$.

↯ (11) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z lastnostjo $A^\mathsf{T} = -A$. Izračunajte $\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\left(\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} + ||5\vec{x}||^2\right)$.

↯ (12) Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ izračunajte $\frac{\partial||A\vec{x}||^2}{\partial\vec{x}}$.

↯ (13) Naj bodo $B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $\vec{b}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$. Za funkcijo

$$f(\vec{x}) = (B\vec{x} + \vec{b})^\mathsf{T}C(D\vec{x} + \vec{d})$$

izračunajte $\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial\vec{x}^2}$.

24. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

ϟ (1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Poglavja 14.1-14.6.

ϟ (2) David A. Harville: Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, Springer, 1997, Poglavje 15.

ϟϟ (3) J.E. Gentle: Matrix Algebra, Theory, Computations, in Applications in Statistics, Springer, 2017, Poglavje 4.

⋆ (4) K. B. Petersen, M. S. Pedersen: The Matrix Cookbook.

(Pazite na to, da so v vseh treh zgoraj omenjenih referencah odvodi definirani kot transponiranke matrike (1).)

ϟ (5) [če se prvič srečujete z odvajanjem funkcij več spremenljivk] Khan Academy: Unit: Derivatives of multivariable functions.

ϟ (6) Ste manjkali na predavanjih? Tu in tu (od 1h 09min dalje) so na voljo prastari posnetki predavanj (2020/21) (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto).

Matematika 1	Izročki: 9. teden
Večkratni integrali	
	Polona Oblak

25. Snov

Dvojni integral na pravokotniku

Formalno definiramo dvojni integral

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy,$$

funkcije $f\colon R \to \mathbb{R}$ na pravokotniku $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ na naslednji način. Najprej razdelimo pravokotnik R na mn manjših pravokotničkov R_{ij} s stranicama dolžin $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ter $\Delta y = \frac{d-c}{m}$. V vsakem pravokotničku R_{ij} izberemo poljubno točko (x_{ij}^*, y_{ij}^*). Prostornina telesa pod grafom $z = f(x,y)$ nad pravokotnikom R_{ij} je tako približno enaka

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x \Delta y.$$

Dvojni integral funkcije f na pravokotniku $R = [a,b] \times [c,d]$ tako definiramo kot

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x \Delta y,$$

če ta limita obstaja.

Izkaže se, da je integral $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ neodvisen od izbire točke $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$. Če je f nenegativna funkcija, je $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ enak prostornini telesa, ki je omejen s pravokotnikom R ter grafom $z = f(x,y)$.

Izrek 5 (Fubini)**.** *Če je $f\colon R \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na pravokotniku $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$, potem*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Dvojni integral

Če je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ neko omejeno območje ter $f\colon D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, izberimo tak pravokotnik R, da velja $D \subseteq R$. Sedaj definiramo *dvojni integral funkcije f na območju D* kot

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_R F(x,y)\,dxdy\,,$$

kjer

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Sedaj lahko zapišimo tudi Fubinijev izrek za nepravokotna območja.

Izrek 6 (Fubini). (1) *Če je* $D = \{(x,y);\ a \le x \le b$ *in* $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *in* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija, potem je*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(2) *Če je* $D = \{(x,y);\ \vartheta_1(y) \le x \le \vartheta_2(y)$ *in* $c \le y \le d\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *in* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija, potem je*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\vartheta_1(y)}^{\vartheta_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Trojni integral...

... je definiran na podoben način. Po Fubinijevem izreku lahko tudi trojne integrale na nekaterih območjih zapišemo kot trikratne integrale.

Menjava spremenljivk

Spomnimo se izreka prejšnjega tedna:

Izrek 7. *Naj bo* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija na* $D \subseteq \mathbb{R}^2$*. Če je* $x = \varphi(u,v)$*,* $y = \vartheta(u,v)$*, takšna menjava spremenljivk, da je* $\det J_{\varphi,\vartheta} \neq 0$*, potem*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_D f(\varphi(u,v),\vartheta(u,v))\,|\det J_{\varphi,\vartheta}|\ dudv.$$

Podobno, če je $f\colon D \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija na* $D \subseteq \mathbb{R}^3$ *ter* $x = \varphi(u,v,w)$*,* $y = \vartheta(u,v,w)$*,* $z = \psi(u,v,w)$ *takšna menjava spremenljivk, da je* $\det J_{\varphi,\vartheta,\psi} \neq 0$*, potem velja*

$$\iiint\limits_D f(x,y,x)\,dxdydz = \int_D f(\varphi(u,v,w),\vartheta(u,v,w),\psi(u,v,w))\,|\det J_{\varphi,\vartheta,\psi}|\ dudvdw.$$

Nekaj primerov menjave spremenljivk:

(1) *Polarne koordinate* v $\mathbb{R}^2$ so podane z

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

$r \ge 0$, $\varphi \in [0,2\pi]$, in velja $\det J_{\text{polar}} = r$.

(2) *Valjne koordinate* v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$

$r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, in velja $\det J_{\text{cylindric}} = r$.

(3) *Krogelne koordinate* v $\mathbb{R}^3$ so podane z

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = r\sin\vartheta.$$

$r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in velja $\det J_{\text{spherical}} = r^2\cos\vartheta$.

26. Domača naloga

ϟ (1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, strani 1022-23, Exercises 3-52.

ϟ (2) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ neničelno število. Za pišite naslednji integral s spremembo v polarni koordinatni sistem

$$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx \right) dy.$$

ϟ (3) Zamenjajte vrstni red integracije:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy = \int_?^? \left(\int_?^? f(x,y)dy \right) dx$$

ϟ (4) Zapišite integral

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz \right) dx \right) dy$$

v valjnih koordinatah.

27. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

ϟ (1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Poglavje 15.

ϟ (2) Wolfram Demonstrations: Approximating a Double Integral with Cuboids.

ϟ (3) Ste manjkali na predavanjih? Tu so na voljo prastari posnetki predavanj (2020/21) (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto).

Matematika 1	**Izročki: 10. teden**

Klasifikacija lokalnih ekstremov. Konkavnost funkcij.

Polona Oblak

28. SNOV

KLASIFIKACIJA LOKALNIH EKSTREMOV

Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ter $\vec{a}$ v definicijskem območju funkcije f.

Če za vse točke $\vec{x} \neq \vec{a}$, ki so "dovolj blizu"točke $\vec{a}$ (tj. $\|\vec{x}-\vec{a}\| < \varepsilon$ za nek dovolj majhen ε) velja $f(\vec{x}) < f(\vec{a})$, potem pravimo, da ima funkcija f v točki $\vec{a}$ *lokalni maksimum*.

Če za vse točke $\vec{x} \neq \vec{a}$, ki so "dovolj blizu"točke $\vec{a}$ (tj. $\|\vec{x}-\vec{a}\| < \varepsilon$ za nek dovolj majhen ε) velja $f(\vec{x}) > f(\vec{a})$, potem pravimo, da ima funkcija f v točki $\vec{a}$ *lokalni minimum*.

Če je funkcija f zvezno parcialno odvedljiva, potem je jasno, da ima lahko lokalne ekstreme le v stacionarnih točkah. Torej je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije f v točki $\vec{a}$:

$$(\operatorname{grad} f)(\vec{a}) = \mathbf{0},$$

kar pomeni, da moramo lokalne ekstreme iskati zgolj med stacionarnimi točkami.

Izrek 8. *Naj bo $\vec{a}$ stacionarna točka dvakrat parcialno zvezno odvedljive funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

(1) *Če je matrika $H_f(\vec{a})$ pozitivno definitna, ima f v $\vec{a}$ lokalni minimum.*
(2) *Če je matrika $H_f(\vec{a})$ negativno definitna, ima f v $\vec{a}$ lokalni maksimum.*
(3) *Če je matrika $H_f(\vec{a})$ nedefinitna, lokalnega ekstrema v $\vec{a}$ ni.*
(4) *Če je kakšna od lastnih vrednosti matrike $H_f(\vec{a})$ enaka 0, o lokalnih ekstremih funkcije f v točki $\vec{a}$ iz matrike $H_f(\vec{a})$ ne moremo sklepati.*

V primeru, ko je $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, funkcija dveh spremenljivk, se Izrek 8 precej poenostavi:

Posledica 1. *Naj bo (a,b) stacionarna točka vsaj dvakrat parcialno zvezno odvedljive funkcije $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.*

- *Če je $\det H_f(a,b) > 0$ (če sta lastni vrednosti neničelni in enako predznačeni), je v točki (a,b)*
  - *lokalni minimum, če je $f_{xx}(a,b) > 0$ in*
  - *lokalni maksimum, če je $f_{xx}(a,b) < 0$.*
- *Če je $\det H_f(a,b) < 0$ (če sta lastni vrednosti neničelni in različno predznačeni), v točki (a,b) ni ekstrema, imamo sedlo.*

- *Če je* $\det H_f(a,b) = 0$ *(če je vsaj ena od lastnih vrednosti enaka 0), pa samo z drugimi parcialnimi odvodi ne moremo o lokalnih ekstremih v* (a,b) *ničesar sklepati.*

Konveksnost in konkavnost funkcij

Funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *konveksna* na $\mathcal{D}$, če velja
$$f(t\,\mathbf{x} + (1-t)\,\mathbf{y}) \leq t\,f(\mathbf{x}) + (1-t)\,f(\mathbf{y})$$
za vse $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}$ in za vse $t \in [0,1]$. Funkcija f je *konkavna* na $\mathcal{D}$, če je funkcija $-f$ konveksna na $\mathcal{D}$.

Izrek 9. *Dvakrat zvezno odvedljiva funkcija* $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je konveksna natanko tedaj, ko je* $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2}$ *pozitivno semidefinitna matrika na* $\mathcal{D}$*, in je konkavna natanko tedaj, ko je* $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2}$ *negativno semidefinitna na* $\mathcal{D}$.

29. Domača naloga

ϟ (1) Rešite kviz na Spletni učilnici.

ϟ (2) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, strani 940-941, vse naloge.

ϟ (3) Naj bo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija treh spremeljivk. Za vsako od točk $P, R \in \mathbb{R}^3$ določite in utemeljite, ali sta lokalni minimum, lokalni maksimum, ali nista ekstremalni točki ali pa iz danih podatkov ne moremo ugotoviti, katerega tipa sta točki.
  (a.) $f_x(P) = f_y(P) = f_z(P) = 0,\ f_{xx}(P) = 3, f_{yy}(P) = -1, f_{xy}(P) = 0.$
  (b.) $f_x(R) = f_y(R) = f_z(R) = 1,\ f_{xx}(R) = f_{yy}(R) = f_{zz}(R) = 1, f_{xy}(R) = f_{yz}(R) = f_{xz}(R) = 0.$

ϟ (4) Ali obstaja takšna dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, da je
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2,$$
in ima v točki $(x,y) = (0,0)$
  (a) lokalni minumum? (Če da, zapišite primer. Če ne, razložite, zakaj ne.)
  (b) lokalni maksimum? (Če da, zapišite primer. Če ne, razložite, zakaj ne.)

ϟ (5) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrika ter $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirane s predpisom
$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x} - \vec{x}^\mathsf{T}\vec{b}.$$

ϟ (6) Pokažite, da so naslednje funkcije konveksne:
  (a) $f(x,y) = e^y - \log x$,

(b) $g(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x}$, kjer je A pozitivno semidefinitna matrika,
(c) $h(\vec{x}) = ||\vec{x}||^2$,
(d) $k(\vec{x}) = \vec{a}^\mathsf{T}\vec{x}$, kjer je $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

30. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

↯ (1) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Razdelek 14.8.

↯ (2) Ste manjkali na predavanjih? Tu so na voljo prastari posnetki predavanj (2020/21) (ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto).

Optimizacija funkcij več spremenljivk.

Polona Oblak

31. Snov

Naj bodo $f, g_i, h_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dane funkcije več spremenljivk. Radi bi našli rešitev naslednjega problema

$$(P\star) \qquad \begin{aligned} &\text{minimizirajmo}_{\vec{x}}\ f(\vec{x}) \\ &\quad \text{pri pogojih } g_i(\vec{x}) = 0 \text{ za } i = 1, 2, \ldots, m \\ &\qquad\qquad\qquad h_j(\vec{x}) \leq 0 \text{ za } j = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Definirajmo še množice $\mathcal{D}_{g_i} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ g_i(x) = 0\}$ za $i = 1, 2, \ldots, m$, $\mathcal{D}_{h_j} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ h_j(x) \leq 0\}$ za $j = 1, 2, \ldots, r$, in

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap (\cap_{i=1}^m \mathcal{D}_{g_i}) \cap \left(\cap_{j=1}^r \mathcal{D}_{h_j}\right).$$

Sedaj lahko problem $(P\star)$ zapišemo ekvivalentno kot

$$(P\star) \qquad \min_{\vec{x} \in \mathcal{D}} f(\vec{x}).$$

Posebni primer $r = 0$, vezani ekstremi pri pogojih enakosti. Oglejmo si najprej posebni primer problema $(P\star)$, ko je $r = 0$. Dodatno predpostavimo, da so $f, g_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dane zvezno odvedljive funkcije več spremenljivk. Tako se problem $(P\star)$ se poenostavi v:

$$\begin{aligned} &\text{minimizirajmo}_{\vec{x}}\ f(\vec{x}) \\ &\quad \text{pri pogojih } g_i(\vec{x}) = 0 \text{ za } j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Izkaže se, da lahko lokalni ekstremi funkcije f pri pogojih $g_i(\vec{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, nastopijo le v stacionarnih točkah funkcije

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^{\mathsf{T}} \vec{G}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\vec{x}),$$

kjer je

$$\vec{G}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \text{ in } \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Funkciji $L \colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ pravimo *Lagrangeva funkcija* in je funkcija $n + m$ spremenljivk x_1, x_2, ..., x_n, λ_1, λ_2, ..., λ_m. Nove spremenljivke λ_1, λ_2, ..., λ_m imenujemo *Lagrangevi multiplikatorji*.

Omenjeni pogoj ni zadosten. Nekatere kritične točke funkcije L so ekstremalne točke funkcije $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pod pogoji $\vec{G}(\vec{x}) = 0$, ostale pa ne.

Prirejeni problem problema $(P\star)$

V splošnem za problem $(P\star)$ definiramo njeno Lagrangevo funkcijo kot

$$L(\vec{x},\vec{\lambda},\vec{\mu}) = f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^{\mathsf{T}}\vec{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^{\mathsf{T}}\vec{H}(\vec{x}) = \\ = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{r}\mu_j h_j(\vec{x}),$$

kjer je

$$\vec{G}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \vec{H}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ h_r(\vec{x}) \end{pmatrix}, \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}, \text{ in } \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \end{pmatrix}.$$

Funkcijo

$$K(\vec{\lambda},\vec{\mu}) = \inf_{\vec{x}\in\mathcal{D}} L(\vec{x},\vec{\lambda},\vec{\mu}) = \inf_{\vec{x}\in\mathcal{D}} \left\{ f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^{\mathsf{T}}\vec{G}(\vec{x}) - \vec{\mu}^{\mathsf{T}}\vec{H}(\vec{x}) \right\}$$

imenujemo *prirejena funkcija* problema $(P\star)$. Pri tem spremenljivke $\vec{\lambda}$ in $\vec{\mu}$ imenujemo *prirejene spremenljivke*. Opazimo:

(1) $K(\vec{\lambda},\vec{\mu})$ je konkavna funkcija (neodvisno od lastnosti funkcij f, g_i, h_j originalnega problema).
(2) Če je $\mu_j \leq 0$ za $j = 1,2,\dots,r$, potem velja $K(\vec{\lambda},\vec{\mu}) \leq \min_{\vec{x}\in\mathcal{D}} f(x)$ za vse $\vec{\lambda}$ ter vse $\vec{\mu} \leq \vec{0}$.

Problem

$$(D\star) \qquad \begin{aligned} &\text{maksimiziramo}_{\vec{\lambda},\vec{\mu}}\ K(\vec{\lambda},\vec{\mu}) \\ &\quad\text{pri pogoju}\ \ \mu_j \leq 0 \text{ za } j = 1,2,\dots,r \end{aligned}$$

imenujemo *prirejeni problem* problema $(P\star)$.

Označimo z $\vec{x}^*$ vektor iz $\mathcal{D}$, ki reši problem $(P\star)$ in z $\vec{\lambda}^*$ in $\vec{\mu}^*$ prirejeni spremenljivki, ki rešita prirejeni problem $(D\star)$. Naj bo torej $p^* = f(\vec{x}^*)$ rešitev problema $(P\star)$ in $d^* = K(\vec{\lambda}^*,\vec{\mu}^*)$ rešitev problema $(D\star)$. Potem iz (2) sledi

$$d^* \leq p^*.$$

Če

- je $(P\star)$ linearni program (t,.j. $f(\vec{x}) = \vec{c}^{\mathsf{T}}\vec{x}$ je linearna, $\vec{H}(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$ in $\vec{x} \leq 0$), ali pa
- f, h_j so konveksne funkcije in $\vec{G}(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$ za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$,

potem velja $d^* = p^*$.

V primeru, ko je $d^* = p^*$, sledi, da morajo $\vec{x}^*$, $\vec{\lambda}^*$ in $\vec{\mu}^*$ zadoščati *Karush–Kuhn–Tuckerjevim pogojem*:

$$\text{(KKT)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial L(\vec{x}, \vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^*) &= 0, \\ g_i(\vec{x}^*) &= 0 \ \text{ za } i = 1, 2, \ldots, m, \\ h_j(\vec{x}^*) &\leq 0 \ \text{ za } j = 1, 2, \ldots, r, \\ \mu_j^* &\leq 0 \ \text{ za } j = 1, 2, \ldots, r, \\ \mu_j^* h_j(\vec{x}^*) &= 0 \ \text{ za } j = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

32. Domača naloga

ϟ (1) Območje A v $\mathbb{R}^n$ je konveksno, če je za poljubni točki $x, y \in A$ tudi točka $tx + (1-t)y \in A$. Pokažite, da je presek konveksnih množic konveksna množica.

ϟ (2) Naj bodo $g_i \colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, konveksne funkcije na konveksni množici $\mathcal{D}$. Pokažite, da je tedaj območje

$$\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathcal{D};\ g_i(x) \leq 0 \text{ za } i = 1, 2, \ldots, m\}$$

konveksna množica.

ϟ (3) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016:
- Razdelek 14.8., naloge 1.-45.
- Razdelek 14.8., nalogo 46 prepišite v vektorsko obliko in jo rešite brez odvajanja po komponentah.
- Stran 947, naloge 59-65.

ϟ (4) Denimo, da funkcija $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ doseže maksimalno vrednost na krivulji $x^2 + 2y^2 = 3$ v točki $(1, 1)$. Ali sta $(\operatorname{grad} f)(1, 1)$ in $[1, 2]^T$ linearno odvisna?

ϟ (5) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\operatorname{rank} A = m$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Poiščite tisto rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, ki ima najmanjšo normo.

ϟ (6) Za dane vektorje $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ poiščite takšne $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, da bo povprečna kvadratna razdalja med vektorjem $\vec{x}$ in vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ najmanjša možna.

ϟ (7) Naj bosta $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ter $b \in \mathbb{R}$.
- (a) Poiščite najmanjšo in največjo vrednost $\vec{a}^\mathsf{T}\vec{x}$ za vse vektorje $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s predpisano dolžino $||\vec{x}|| = b$.
- (b) Geometrijsko razložite svojo rešitev iz (7a) v primeru, ko je $n = 3$.

ϟϟ (8) Za pozitivno semidefinitno matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simetrično matriko $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ter neničelni $b \in \mathbb{R}$ poiščite najmanjšo in največjo vrednost kvadratne forme $\vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x}$ pri pogoju $\vec{x}^\mathsf{T} B\vec{x} = b$.

ϟ (9) Naj bodo dani vektorji in matriki

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ in } \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiščite najmanjšo vrednost funkcije $\vec{x}^\mathsf{T} P\vec{x} + \vec{q}^\mathsf{T}\vec{x} + \vec{r}$ pri pogoju, da $\vec{x}$ reši linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$.

ϟ(10) Rešite naslednji problem:

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y} \quad & (x-2)^2 + 2(y-1)^2 \\ \text{pri pogojih} \quad & x + 4y \leq 3, \\ & y - x \leq 0. \end{aligned}$$

ϟ(11) Zapišite Karush–Kuhn–Tuckerjeve pogoje naslednjih problemov:

(a)

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y,z} \quad & x + y^2 + z^2 \\ \text{pri pogojih} \quad & x^2 + 2y^2 \leq 4 \\ & x + y + z = 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y,z} \quad & xyz \\ \text{pri pogojih} \quad & x^2 + 2y^2 \leq 4 \\ & x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y,z} \quad & 2x + 2y^2 + xz \\ \text{pri pogojih} \quad & x^2 + y^2 = 1 \\ & x + z = 0 \\ & xy \geq 0 \end{aligned}$$

33. Ste zamudili predavanja ali želite vedeti več?

ϟϟ (1) Wilhelm Forst, Dieter Hoffmann: Optimization - Theory in Practice, Springer, 2010.

ϟ (2) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Section 14.8. (Zgolj o primeru, ko je $r = 0$.)

ϟ (3) Wolfram Demonstrations: The Geometry Of Lagrange Multipliers.

ϟ (4) Ste manjkali na predavanjih? Tu so na voljo prastari posnetki predavanj (2020/21), ki se ne ujemajo nujno s potekom predmeta letošnje leto:
   - O posebnem problemu, ko je $r = 0$.
   - O prirejenem problemu.
   - O Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojih. Žal le v angleškem jeziku.