

张量基础

polosk

June 5, 2022

Contents

| | | |
|-----|------------------------------------|---|
| 1 | 符号说明 | 1 |
| 1.1 | 爱因斯坦记号 | 1 |
| 1.2 | 克罗内克 δ 函数 (Kronecker delta) | 1 |
| 1.3 | 利威尔-奇维塔符号 (Levi-Civita symbol) | 1 |
| 2 | 常见运算表 | 2 |
| 3 | 部分公式推导 | 3 |
| 3.1 | 向量相关 | 3 |
| | 参考文献 | 3 |

1 符号说明

为不失一般性，一般的用如下记号表示标量、向量、张量。

| 名称 | 符号 | L ^A T _E X 代码 | 示例 |
|------|----------------|--|--------------------------------------|
| 标量 | 小写字母 | a, b, c | a, b, c |
| 向量 | 加粗 小写字母 | \mva, \mvp, \mvp | $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ |
| 向量分量 | 小写字母加下标 | a_i, b_j, c_k | a_i, b_j, c_k |
| 张量 | 加粗 大写字母 | \mma, \mmb, \mmc | $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ |
| 张量分量 | 大写字母加下标 | A_{ij}, B_{ijk}, C_{ijkl} | $A_{ij}, B_{ijk}, C_{ijkl}$ |

1.1 爱因斯坦记号

一般的，如果没有额外说明，在用下标表示的张量计算中，将采用爱因斯坦求和约定 (Einstein summation convention)，或者也被称为爱因斯坦记号 (Einstein Notation)。举例说明，如向量的点积 (内积)，其张量 (向量) 表示为 $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ，而使用爱因斯坦记号可以表示为 $c = a_i b_i$ 。这是由于有如下约定

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

这里的下标 i 被称作哑指标，表示对下标 i 进行缩并。在爱因斯坦记号的帮助下，许多张量计算可以更简洁的表示。

这里引入两个常用记号，克罗内克 δ 函数 (Kronecker delta)，以及利威尔-奇维塔符号 (Levi-Civita symbol)。

1.2 克罗内克 δ 函数 (Kronecker delta)

克罗内克 δ 函数一般被定义为一个二元函数 δ_{ij} , 其自变量一般为两个整数, 当且仅当两个整数恰好相同时, 其取值为 1, 否则为 0。即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1.3 利威尔-奇维塔符号 (Levi-Civita symbol)

利威尔-奇维塔符号 $\epsilon_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ 由其每一个下标指标 a_1, a_2, \dots, a_n 的取值所构成的排列的奇偶性来确定。这里直接给出一些结论:

在二维中, 符号 ϵ_{ij} 的定义如下所示

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{if } (i, j) = (1, 2), \\ -1, & \text{if } (i, j) = (2, 1), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此时, ϵ_{ij} 恰好为一个大小为 2×2 的反对称矩阵

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

一般的, 利威尔-奇维塔符号多见于 3 维或更高的维度当中。以三维的符号 ϵ_{ijk} 举例, 其定义与二维类似

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{if } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}, \\ -1, & \text{if } (i, j, k) \in \{(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

即其定义是通过序列 (i, j, k) 是奇排列还是偶排列定义其取值。一般规定, 自然排列 $(1, 2, 3)$ 的取值为 1; 当有任意两个指标相同时, 其符号为 0。对于序列 (i, j, k) 如果可以通过奇数次交换变换成自然排列 $(1, 2, 3)$, 则称其为奇排列, 其符号取值为 -1; 否则为偶排列, 其符号取值与自然排列保持一致, 为 1。如果将序列扩展到更高的维度, 则可以类似的定义符号, 这里不再额外赘述。

2 常见运算表

下面列举部分简单二元运算的张量写法与爱因斯坦记号写法。为不失一般性, 下表中的向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 也可以用列向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 来表示。同时如没有额外说明, 张量一般为二阶张量 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 同时这里的乘法与指标缩并均满足其定义规定。

| 运算 | 张量写法 | 爱因斯坦记号写法 |
|--------------------------|--|--------------------------------|
| 同阶向量/张量加减 | $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ | $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ |
| 标量与向量/张量相乘 | $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$ | $b_{ij} = ka_{ij}$ |
| 对应项相乘 (Hadamard product) | $\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ | $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ |
| 向量点积 (内积) | $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ | $c = a_i b_i$ |
| 向量叉积 (向量积) | $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ | $c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ |
| 向量外积 (张量积) | $\mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T$ | $c_{ij} = a_i b_j$ |
| 矩阵转置 | $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T$ | $c_{ji} = a_{ij}$ |
| 矩阵的迹 | $c = \text{tr} \mathbf{A}$ | $c = a_{ii}$ |

| 运算 | 张量写法 | 爱因斯坦记号写法 |
|-------------------------|--|-------------------------------|
| 矩阵乘法 | $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ | $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$ |
| Frobenius inner product | $\mathbf{C} = \mathbf{A} : \mathbf{B} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_F = \text{tr}(\mathbf{A}^H \mathbf{B})$ | $c = \overline{a_{ij}}b_{ij}$ |
| Kronecker product | $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ | $c_{ijkl} = a_{ij}b_{kl}$ |

3 部分公式推导

3.1 向量相关

$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \mathbf{c} \\
 \implies d_j &= (a_i b_i) c_j = a_i (b_i c_j) = c_j b_i a_i = (c_j b_i) a_{i1} \\
 \implies \mathbf{d} &= (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c})^T \mathbf{a}
 \end{aligned}$$