张量基础

申尚昆

December 29, 2020

Contents

1 符号说明

为不失一般性，一般的用如下记号表示标量、向量、张量。

名称	符号	LaTeX 代码	示例
标量	小写字母	`a`, `b`, `c`	a, b, c
向量	**加粗**小写字母	`\mva`, `\mvb`, `\mvc`	$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$
向量分量	小写字母加下标	`a_i`, `b_j`, `c_k`	a_i, b_j, c_k
张量	**加粗**大写字母	`\mma`, `\mmb`, `\mmc`	$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$
张量分量	大写字母加下标	`A_{ij}`, `B_{ijk}`, `C_{ijkl}`	A_{ij}, B_{ijk}, C_{ijkl}

1.1 爱因斯坦记号

一般的，如果没有额外说明，在用下标表示的张量计算中，将采用爱因斯坦求和约定（Einstein summation convention），或者也被称为爱因斯坦记号（Einstein Notation）。举例说明，如向量的点积（内积），其张量（向量）表示为 $c = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$，而使用爱因斯坦记号可以表示为 $c = a_i b_i$。这是由于有如下约定

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

这里的下标 i 被称作哑指标，表示对下标 i 进行缩并。在爱因斯坦记号的帮助下，许多张量计算可以更简洁的表示。

这里引入两个常用记号，克罗内克 δ 函数（Kronecker delta），以及利威尔-奇维塔符号（Levi-Civita symbol）。

1.2 克罗内克 δ 函数（Kronecker delta）

克罗内克 δ 函数一般被定义为一个二元函数 δ_{ij}，其自变量一般为两个整数，当且仅当两个整数恰好相同时，其取值为 1，否则为 0。即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1.3 利威尔-奇维塔符号（Levi-Civita symbol）

利威尔-奇维塔符号 $\epsilon_{a_1,a_2,\cdots,a_n}$ 由其每一个下标指标 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的取值所构成的排列的奇偶性来确定。这里直接给出一些结论：

在二维中，符号 ϵ_{ij} 的定义如下所示

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{if } (i,j) = (1,2), \\ -1, & \text{if } (i,j) = (2,1), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此时，ϵ_{ij} 恰好为一个大小为 2×2 的反对称矩阵

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

一般的，利威尔-奇维塔符号多见于 3 维或更高的维度当中。以三维的符号 ϵ_{ijk} 举例，其定义与二维类似

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{if } (i,j,k) \in \big\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\big\}, \\ -1, & \text{if } (i,j,k) \in \big\{(3,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\big\}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

即其定义是通过序列 (i,j,k) 是奇排列还是偶排列定义其取值。一般规定，自然排列 $(1,2,3)$ 的取值为 1；当有任意两个指标相同时，其符号为 0。对于序列 (i,j,k) 如果可以通过奇数次交换变换成自然排列 $(1,2,3)$，则称其为奇排列，其符号取值为 -1；否则为偶排列，其符号取值与自然排列保持一致，为 1。如果将序列扩展到更高的维度，则可以类似的定义符号，这里不再额外赘述。

2 常见运算表

下面列举部分简单二元运算的张量写法与爱因斯坦记号写法。为不失一般性，下表中的向量 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ 也可以用列向量 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ 来表示。同时如没有额外说明，张量一般为二阶张量 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，同时这里的乘法与指标缩并均满足其定义规定。

运算	张量写法	爱因斯坦记号写法
同阶向量/张量加减	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}$	$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$
标量与向量/张量相乘	$\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{A}$	$b_{ij} = k a_{ij}$
对应项相乘（Hadamard product）	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$	$c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$
向量点积（内积）	$c = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}$	$c = a_i b_i$
向量叉积（向量积）	$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$	$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$
向量外积（张量积）	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$	$c_{ij} = a_i b_j$
矩阵转置	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$c_{ji} = a_{ij}$
矩阵的迹	$c = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	$c = a_{ii}$

运算	张量写法	爱因斯坦记号写法
矩阵乘法	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$	$c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$
Frobenius inner product	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle_F = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\right)$	$c = \overline{a_{ij}}b_{ij}$
Kronecker product	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$	$c_{ijkl} = a_{ij}b_{kl}$

3 部分公式推导

3.1 向量相关

$(a \cdot b)c$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \\ \Longrightarrow\ & d_j = (a_i b_i)c_j = a_i(b_i c_j) = c_j b_i a_i = (c_j b_i)a_{i1} \\ \Longrightarrow\ & \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} \end{aligned}$$