Bernabé Iturralde Jara

(12) $G=(V,E)$, dar un algoritmo (y analizar coste y corrección) para determinar si G es semiconexo.

Para ello utilizaremos el algoritmo de Kosharaju-Shahir o el de Tarjan indistintamente, obteniendo los componentes fuertemente conexos en tiempo $O(n+m)$ $(n=|V|,\ m=|E|)$. Al ser un algoritmo conocido no entraré en detalles sobre su corrección o tiempo de ejecución.

Hacemos un grafo dirigido C con los componentes conexos de G como nodos y construimos las siguientes aristas:

$\forall a \to b$ en G, $(a,b \in V) \longleftrightarrow c_a \to c_b$ en C

Tq $a \in c_a$ y $b \in c_b$, $c_a \neq c_b \in C$

Esto tendrá un coste $O(m \cdot n)$ en el peor de los casos (m aristas $\cdot$ n componentes conexos de 1 elemento en los que buscar a y b).

Por último, G semiconexo $\Leftrightarrow C$ semiconexo, lo cual se puede comprobar en tiempo $O(n+m)$ en el peor caso con un "BFS" (puesto que C es acíclico).

Por tanto el algoritmo tiene en total coste $O(m \cdot n)$ (aunque probablemente existan algoritmos para resolver el problema en $O(n+m)$, no te pedían optimizar el coste en el enunciado).

Análisis de corrección:

G semiconexo $\Rightarrow C$ semiconexo

dem: Sean $x \neq y$ vértices de C. Sean x' e y' vértices de G tal que x es la comp. conexa de x' e y es la comp conexa de y'. $\exists\, \sigma'$ camino en G con comienzo x' y final y': $\sigma = x' \to p_1 \to \dots \to p \to y'$ y por tanto $\exists\, \sigma$ en C con comienzo x y final y.

C semiconexo $\Rightarrow$ G semiconexo

dem Sean $x' \neq y'$ vértices de G. Sean x, y sus componentes conexa en C. Si $x = y$, por definición de componente conexa $\exists\, \sigma'(x', y')$ en G. Si $x \neq y$, por ser C conexo, $\exists\, \sigma(x,y)$ en C:

$$\sigma = \underset{\overset{\shortparallel}{C_0}}{x} \to C_1 \to \dots \to C_l \to \underset{\overset{\shortparallel}{C_{l+1}}}{y}$$

Sea $d \geq 0$, $d < l+1$, $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$C_d \to C_{d+1} \Rightarrow \exists\, x'_d$ vértice de G, $x'_d \in C_d$ y

x'_{d+1} vértice de G, $x'_{d+1} \in C_{d+1}$ tq $x'_d \to x'_{d+1}$

Por tanto podemos encontrar un camino $\sigma' = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$

- $\sigma_1(x, x'_0)$: $\exists$ por ser $(x = C_0)$ comp. conexa.
- $\sigma_2(x'_0, x'_{l+1}) := x'_0 \to x'_1 \to \dots \to x'_{l+1}$
- $\sigma_3(y, x'_{l+1})$: $\exists$ por ser $(y = C_{l+1})$ comp conexa.

$\exists\, \sigma'(x,y) \Rightarrow$ G semiconexo.