2.36. **Streaming.** Tenim n paquets de vídeo que s'han d'enviar seqüencialment per una única línia de comunicació (això s'anomena *streaming*). El paquet i-èsim té una grandària de b_i bits i triga t_i segons a travessar, on t_i i b_i són enters positius (no es poden enviar dos paquets al mateix temps). Podeu assumir que la velocitat de transmissió d'un paquet es uniforme.

Hem de decidir una planificació de l'ordre en què hem d'enviar els paquets de manera que, un cop tenim un ordre, no pot haver-hi retard entre la fi d'un paquet i el començament del següent. Assumirem que comencem a l'instant 0 i finalitzem al $\sum_{i=1}^{n} t_i$. A més, el proveïdor de la connexió vol utilitzar una amplada de banda no massa gran, per tant s'afegeix la restricció següent: Per a cada enter $t > 0$, el nombre total de bits que enviem de temps 0 a t ha de ser $\leq rt$, per a una $r > 0$ fixada (noteu que aquesta restricció no diu res per a períodes de temps que no comencen a l'instant 0). Direm que una planificació és *vàlida* si satisfà la restricció prèvia.

El problema a resoldre és el següent: donat un conjunt de n paquets, cadascun especificat per la seva grandària b_i i la durada de la seva transmissió t_i, i donat el valor del paràmetre r, hem de determinar si existeix una planificació vàlida dels n paquets. Per exemple, si $n = 3$ amb $(b_1, t_1) = (2000, 1)$, $(b_2, t_2) = (6000, 2)$ i $(b_3, t_3) = (2000, 1)$ amb $r = 5000$, aleshores la planificació $1, 2, 3$ és vàlida, donat que compleix la restricció.

Per a resoldre aquest problema, heu de resoldre els apartats següents:

(a) Demostreu o doneu un contraexemple a l'enunciat de: és veritat que existeix una planificació vàlida si, i únicament si, per a cada paquet i tenim $b_i \leq rt_i$.

(b) Doneu un algorisme que per a una entrada de n paquets (cadascun especificat per (b_i, t_i)) i el paràmetre r, determini si existeix una planificació vàlida. El vostre algorisme hauria de tenir complexitat polinòmica en n.

2.37. CatCar es una cooperativa de compartir cotxe, per a persones que necessiten esporàdicament un cotxe i no volen comprar un. La companya te una web, quan una membre de CatCar necessita un cotxe, la nit prèvia , escriu a la pagina web de la CatCar, l'hora i lloc on vol recollir el cotxe i la hora i lloc on el deixara. CatCar ha de preveure tenir suficients cotxes disponibles a cada lloc per a satisfer les demandes del dia, però per altra banda també es important tenir un excés de cotxes immobilitzats a un lloc. Per tant, CatCar vol un algorisme eficient que minimitze el nombre total de cotxes que la companya a de deixar a cada lloc.
Formalment, el problema es el següent: Com a entrada tenim m llocs (1 fins a m) i n tuples (l, t, l', t'), a on l, t es el lloc i temps de recollida i l', t' es el lloc i tems de retornar el cotxe. Quan una persona s'emporta un cotxe d'un lloc determinat, el nombre de cotxes a el lloc disminueix en 1, i quan el torna, incrementa en 1. Doneu un algorisme que calcule el nombre de cotxes que CatCar ha de deixar a cada un dels m llocs, amb les restriccions de que cada lloc sempre ha de tenir un nombre no negatiu de cotxes i que el nombre de cotxes immobilitzats ha de ser mínim.

2.38. Donat un conjunt $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de punts de la recta real, doneu un algorisme per a determinar el conjunt més petit d'intervals tancats amb longitud unitat, que cobreixen tots els punts.

2.39. Argumenteu si el següent algorisme per a trobar el MST d'un graf donat $G = (V, E)$, que és connex, no dirigit i amb pesos $w : E \to \mathbb{N}^+$, és o no és correcte, i si és correcte doneu la seva complexitat:

(a) Particioneu V en dos subconjunts S_1 i S_2 (i.e. $V = S_1 \cup S_2$ i $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ tal que cadascun dels subgrafs resultants G_{S_1} i G_{S_2} son connexes.

(b) Recursivament trobeu un MST T_{S_1} per a G_{S_1} i un MST T_{S_2} per a G_{S_2}.

(c) Com G és connex hi hauran arestes entre els vèrtexs de T_{S_1} i de T_{S_2}, escolliu l'atesta amb menys pes per a formar un MST de G.

2.40. Tenim un graf no dirigit i connex $G = (V, E)$ amb pesos $w : E \to \mathbb{N}^+$, i tal que $|V| = n$ i $|E| = n$. Doneu un algorisme **linear** per a trobar el MST de G.

2.41. Per cadascuna de les afirmacions següents indique-ho si és o no certa.

(a) En un codi de Huffman, si tots els caràcters tenen freqüència $< 1/3$, aleshores **NO** existeix cap caràcter que es pugui codificar amb longitud 1.

(b) En un codi de Huffman, si tots els caràcters tenen freqüència $< 2/5$, aleshores no hi han caràcters que es pugui codificar amb longitud 1.

(c) Si a un codi Huffman tenim una fulla a profunditat 1 i una altra fulla a profunditat 3, això implica que ha d'haver una fulla a profunditat 2.