4.12. Tenim un digraf $G = (V, E)$ on cada $e \in E$ té capacitat $c(e) = 1$, i amb una font $s \in V$ i un sumider $t \in V$. També en donen un paràmetre $k \in \mathbb{N}$. Doneu un algorisme amb temps polinòmic per a resoldre el següent problema: Volem eliminar k arestes de G de manera que reduïm al màxim que puguem el flux $s \to t$. En altres paraules, volem trobar un $F \subseteq E$ tal que $|F| = k$ i el flux màxim $s \to t$ en $G' = (V, E - F)$ sigui el més petit possible.

En este ejercicio nos piden eliminar k aristas de un grafo de manera que consigamos reducir al máximo el flujo s→t del grafo. Es importante ver que las aristas son todas de capacidad 1.
La estrategia consiste en encontrar la partición de capacidad mínima y quitar k aristas (o todas si hay menos de k), para reducir el flujo lo máximo posible. Encontrada la partición sabemos que no cambiará, pues al quitar una arista el flujo que pase por la partición será más pequeño y por lo tanto seguirá siendo la mínima.

Usamos el algoritmo de Ford Fulkerson para encontrar el flujo máximo del grafo.
Una vez tenemos el flujo, buscamos los vértices accesibles desde el vértice s (por ejemplo mediante un DFS). Una vez los tenemos, ya hemos encontrado el corte (s,t) de flujo mínimo.

G_{f^*} has no augmenting path. So, if
$S_s = \{v \in V | \exists s \leadsto v \text{ in } G_{f^*}\}$, then $(S_s, V - \{S_s\})$ is a (s, t)-cut.
For $e = (u, v) \in E$ with $u \in S_s$ and $v \notin S_s$,
$(u, v) \notin E(G_{f^*}$, therefore $f^*(u, v) = c(u, v)$,
Then, $c(S_s, V - \{S_s\}) = f^*(S_s, V - \{S_s\}) = |f^*|$
$(S_s, V - \{S_s\})$ is a minimum capacity (s, t)-cut in G.

Encontrado el corte de coste mínimo. El procedimiento es el anteriormente descrito.
Eliminamos aristas cualesquiera (todas tienen la misma capacidad) hasta que nos quedemos sin aritas o hayamos eliminado k. El grafo resultante es el que buscábamos.

El coste es el del algoritmo de Ford Fulkerson, que es O(C*m), siendo C el flujo máximo posible, que en este caso es n, así que O(n*m). Eliminar las aristas es lineal, pues aunque k puede ser muy muy grande, eliminaremos como mucho del orden de n aristas, así que no influye en el coste final.
El DFS tampoco influye.