

1.13

a) Considerem un graf dirigit G t.q. $V = C$ i $(u,v) \in E \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x_1 \dots x_k i \\ v = x_2 \dots x_k y \end{cases} \text{ on } x_i \in \{A, C, T, G\} \text{ on } i, y \in N \text{ identifiquen el } k\text{-mer (doncs és multiconjunt)}$$

Aleshores clarament és una reducció polinòmica doncs construir el graf té cost $O(|C|^2 \cdot |C|)$ doncs per cada vèrtex completem la resta

Veiem ara que cadena \Leftrightarrow camí hamiltonià

\Rightarrow Suposem que tenim una cadena w i denotem w_i al k -mer que comença en la posició i , $i = 1, \dots, |w| - k + 1$

Veiem per inducció que tenim camí hamiltonià:

$|w| = k$ només 1 k -mer \checkmark

$|w| > k$ per H.I. tenim camí hamiltonià $w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w_{|w|-k}$ (al subgraf sense $w_{|w|-k+1}$)

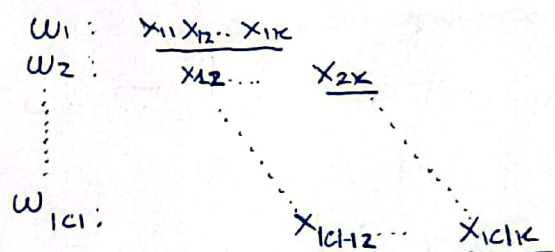
però si $w_{|w|-k} = x_1 \dots x_k$ com $w_{|w|-k+1}$ s'obté començant al següent

índex de la cadena $\Rightarrow w_{|w|-k+1} = x_2 \dots x_k y$ $y \in \{A, C, T, G\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (w_{|w|-k}, w_{|w|-k+1}) \in E \Rightarrow w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w_{|w|-k+1}$ és camí hamiltonià

\Leftarrow Suposem C multiconjunt de k -mers t.q. la reducció té camí hamiltonià

Aleshores la cadena la podem obtenir



Prenent $w = x_{11} \dots x_{1k} x_{2k} \dots x_{|C|k}$ doncs $S(w) = C$

b) La reducció és la següent, donat C multiconjunt de k -mers (si $k=1$ és cert)
 prenem $G=(V,E)$ on $V=\{A,C,T,G\}^{k-1}$ i etiquetem les arestes

$E=\{e_i, i=1, \dots, |C|\}$ on, si $e=\{w_1, \dots, w_{|C|}\}$ aleshores si $w_i = x_{i1} \dots x_{ik}$
 $x_{ij} \in \{A,C,T,G\}$

tenim $e_i = (x_{i1} \dots x_{i(k-1)}, x_{i2} \dots x_{ik})$. Construir el graf és $O(4^{k-1} \cdot |C| \cdot k)$

Veiem codena \Leftrightarrow camí eulerià

\Rightarrow Suposem w és una codena: $S(w) = C$, $w = x_1 \dots x_{|w|} \Rightarrow$

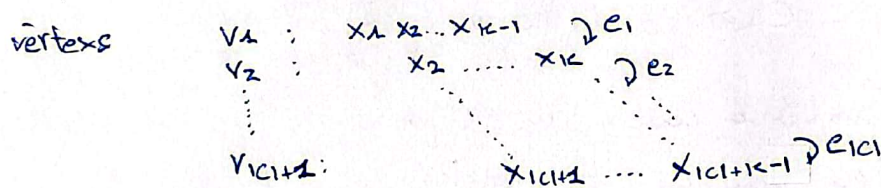
$\Rightarrow w_i = x_i \dots x_{i+k-1}$ i $C = \{w_i, i=1, \dots, |w|-k+1\}$

Veiem que $e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_{|w|-k+1}$ és camí eulerià, només cal veure
 que el destí de e_i coincideix amb l'origen de e_{i+1}

Tenim $e_i = (x_i \dots x_{i+k-2}, x_{i+1} \dots x_{i+k-1})$ coincideixen

$e_{i+1} = (x_{i+1} \dots x_{i+k-1}, x_{i+2} \dots x_{i+k})$

\Leftarrow Suposem camí eulerià $e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_{|C|}$ i existim els $|C|+1$



Aleshores $w = x_1 \dots x_{|C|+k-1}$ és la codena

Tenim, que com $e_i = (x_i \dots x_{i+k-2}, x_{i+1} \dots x_{i+k-1}) \Leftrightarrow w_i = x_i \dots x_{i+k-1}$
 per construcció

Aleshores clarament $C = S(w)$

c) Aquest problema és a P doncs l'hem pogut reduir al problema de trobar un cicle eulerià. També està a NP doncs (a part de que $P \subseteq NP$) l'hem pogut reduir al problema de trobar un cicle hamiltonià. Tot i això, no hem vist que es pugui reduir el problema del cicle hamiltonià a aquest problema, i per tant no podem concloure $NP \subseteq P$, i doncs tampoc podem concloure $P=NP$.

1.15

c) $T(n) = 2T(n/4) + 6.046\sqrt{n} = aT(n/b) + g(n)$ on $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ g(n) = \Theta(n^{1/2}) \end{cases}$ $k=1/2$

Apliquem el teorema mestre de les recurrències

$\alpha = \log_b a = \log_4 2 = 1/2 = k \Rightarrow T(n) = \Theta(n^k \log n) = \Theta(\sqrt{n} \log n)$