Problema 5

(b) Si tenemos una componente conexa fuerte que contiene x y $\neg x$, implica que el grafo contiene caminos de x a $\neg x$ y de $\neg x$ a x. Como tenemos estos caminos, podemos deducir una serie de implicaciones tal que: $x \Rightarrow q_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \neg x$. Como si $A \Rightarrow B \Rightarrow C$, podemos deducir que $A \Rightarrow C$, es decir, $x \Rightarrow \neg x$ y $\neg x \Rightarrow x$, que son dos implicaciones que nos llevan a una contradicción, dado que la única manera de que la primera sea cierta, es que x sea falso, pero esto hace que la segunda sea falsa.

Problema 8:

(a) Asintoticamente $(1+o(1))^{\omega(1)} = 1$ $\Rightarrow (1+0)^{\infty} = 1^{\infty} = e$

(b) Si $f(n) = \frac{(n+2)\cdot n}{2} \Rightarrow f(n) \in \Theta(n^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^2} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)n}{2}}{n^2} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = 1/2 \Rightarrow f(n) \in \Theta(n^2) \Rightarrow \underline{\text{Cierto}}$$

(c) Si $f(n) = \frac{(n+2)\cdot n}{2} \Rightarrow f(n) \in \Theta(n^3)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^3} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)n}{2}}{n^3} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n^2} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n} = 0 \Rightarrow f(n) \in o(n^3) \Rightarrow \underline{\text{Falso}}$$

(d) $n^{1.1} \in O(n(\lg n)^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1.1}}{n(\lg n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.1}}{(\lg n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.1}}{\left(\frac{\ln(n)}{\ln(10)}\right)^2} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{0.1\cdot n^{-0.9}}{\frac{2\ln(n)}{n\ln^2(10)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0.1\cdot \ln^2(10)\cdot n^{0.1}}{2\ln(n)}$$

$$\overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{0.1\cdot \ln^2(10)\cdot 0.1\cdot n^{-0.9}}{2\cdot 1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cdots n}{2} = \infty \Rightarrow n^{1.1} \in \omega(n(\lg n))^2$$

$\Rightarrow \underline{\text{Falso}}$

(e) $n^{0.01} \in \omega(\lg(n)^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.01}}{\left(\frac{\ln(n)}{\ln(10)}\right)^2} \overset{!}{=} \lim \frac{0{,}01\cdot n^{-0{,}99}}{\frac{2\ln(n)}{n\ln^2(10)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0{,}01\cdot \ln^2(10)\cdot n^{0{,}01}}{2\ln(n)} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{0{,}01\cdot \ln^2(10)\cdot 0{,}01\cdot n^{-0{,}99}}{2/n}$$

$= \infty \Rightarrow n^{0.01} \in \omega((\lg n)^2) \Rightarrow$ Cierto