1.13

a) Considerem un graf dirigit G t.q. $V = C$ i $(u,v) \in E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x_1 \dots x_k\, i \\ v = x_2 \dots x_k y\, j \end{cases}$ on $x_i \in \{A, C, T, G\}$ on $i, j \in \mathbb{N}$ identifiquen el k-mer (doncs és multiconjunt)

y

Aleshores clarament és una reducció polinòmica doncs construir el graf té cost $O(|C|^2 \cdot k)$ doncs per cada vèrtex comprovem la resta

Veiem ara que cadena $\Leftrightarrow$ camí hamiltonià

$\Rightarrow$) Suposem que tenim una cadena w i denotem w_i al k-mer que comença en la posició i, $i = 1, \dots, |w| - k + 1$

Veiem per inducció que tenim camí hamiltonià:

$|w| = k$) només 1 k-mer ✓

$|w| > k$) per H.I tenim camí hamiltonià $w_1 \to \dots \to w_{|w|-k}$ (al subgraf sense $w_{|w|-k+1}$)

però si $w_{|w|-k} = x_1 \dots x_k$ com $w_{|w|-k+1}$ s'obté començant al següent índex de la cadena $\Rightarrow w_{|w|-k+1} = x_2 \dots x_k y$ $y \in \{A, C, T, G\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (w_{|w|-k}, w_{|w|-k+1}) \in E \Rightarrow w_1 \to \dots \to w_{|w|-k+1}$ és camí hamiltonià

$\Leftarrow$) Suposem C multiconjunt de k-mers t.q. la reducció té camí hamiltonià

Aleshores la cadena la podem obtenir

$w_1 : x_{11} x_{12} \dots x_{1k}$

$w_2 : \quad x_{12} \dots \quad x_{2k}$

$\vdots$

$w_{|C|} : \quad x_{|C|1\,2} \dots \quad x_{|C|k}$

Prenent $w = x_{11} \dots x_{1k} x_{2k} \dots x_{|C|k}$ doncs $S(w) = C$

b) La reducció és la següent, donat C multiconjunt de k-mers (si $k=1$ és cert) prenem $G=(V,E)$ on $V=\{A,C,T,G\}^{k-1}$ i etiquetem les arestes

$E=\{e_i, i=1,\dots,|C|\}$ on, si $C=\{w_1,\dots,w_{|C|}\}$ aleshores si $w_i=x_{i1}\dots x_{ik}$, $x_{ij}\in\{A,C,T,G\}$

tenim $e_i=(x_{i1}\dots x_{ik-1}, x_{i2}\dots x_{ik})$. Construir el graf és $O(4^{k-1}+|C|\cdot k)$

Veiem cadena $\Leftrightarrow$ camí eulerià

$\Rightarrow$] Suposem w és una cadena i $S(w)=C$, $w=x_1\dots x_{|w|}\Rightarrow$

$\Rightarrow w_i=x_i\dots x_{i+k-1}$ i $C=\{w_i, i=1,\dots,|w|-k+1\}$

Veiem que $e_1\to\dots\to e_{|w|-k+1}$ és camí eulerià, només cal veure que el destí de e_i coincideix amb l'origen de e_{i+1}

Tenim $e_i=(x_i\dots x_{i+k-2}, x_{i+1}\dots x_{i+k-1})$ coincideixen

$e_{i+1}=(x_{i+1}\dots x_{i+k-1}, x_{i+2}\dots x_{i+k})$

$\Leftarrow$] Suposem camí eulerià $e_1\to\dots\to e_{|C|}$ i llistem els $|C|+1$ vèrtexs

v_1 : $x_1x_2\dots x_{k-1}$ $\}\, e_1$
v_2 : $x_2\dots x_k$ $\}\, e_2$
$\vdots$
$v_{|C|+1}$: $x_{|C|+1}\dots x_{|C|+k-1}$ $\}\, e_{|C|}$

Aleshores $w=x_1\dots x_{|C|+k-1}$ és la cadena

Tenim, que com $e_i=(x_i\dots x_{i+k-2}, x_{i+1}\dots x_{i+k-1})\Leftrightarrow w_i=x_i\dots x_{i+k-1}$ per construcció

Aleshores clarament $C=S(w)$

c) Aquest problema és a P doncs l'hem pogut reduir al problema de trobar un cicle eulerià. També està a NP doncs (a part de que $P\subseteq NP$) l'hem pogut reduir al problema de trobar un cicle hamiltonià. Tot i això, no hem vist que es pugui reduir el problema del cicle hamiltonià a aquest problema, i per tant no podem concloure $HP\in P$, i doncs tampoc podem concloure $P=NP$.

1.15

c) $T(n)=2T(n/4)+6.046\sqrt{n}=aT(n/b)+g(n)$ on $\begin{cases}a=2\\ b=4\\ g(n)=\Theta(n^k) & k=1/2\end{cases}$

Apliquem el teorema mestre de les recurrències

$\alpha=\log_b a=\log_4 2=1/2=k\Rightarrow T(n)=\Theta(n^k\log n)=\Theta(\sqrt{n}\log n)$