3.16. Un grup d'amics del departament d'astronomia vol observar el cel aquesta nit (que és un dia amb cel ras). Suposem el següent:

- Hi ha n esdeveniments que ocórren en una seqüència de n minuts, on l'esdeveniment j ocorre al minut j. Si no observem el esdeveniment j al minut j, no l'observem mai.
- Suposem que utilitzem un sistema 1-dimensional per modelitzar el cel (que correspon el grau de l'angle del telescopi); és a dir, l'esdeveniment j té coordenada d_j per $d_j \in \mathbb{Z}$. Al minut 0, la posició del telescopi és 0.
- L'últim esdeveniment n és més important que els altres; per tant estem obligats a observar l'esdeveniment n.

El telescopi del departament és molt gran i només es pot moure un grau cada minut. Per tant, és possible que no es pugui observar tots els esdeveniments. Un conjunt d'esdeveniments S es diu *observable*, si per a cada $j \in S$, es pot observar l'esdeveniment j al minut j i entre dos elements consecutius j, k de S el telescopi té el temps necessari per bellugar-se (amb velocitat com a màxim 1 per minut) de d_j a d_k. Donats n esdeveniments, i una seqüència $\{d_j\}_{j=1}^{n}$ que correspon a les coordenades dels esdeveniments, volem trobar el conjunt més gran de tots els esdeveniments observables S amb la condició que $n \in S$.

Exemple: Si tenim $n = 9$ i $d_1 = 1$, $d_2 = -4$, $d_3 = -1$, $d_4 = 4$, $d_5 = 5$, $d_6 = -4$, $d_7 = 6$, $d_8 = 7$, $d_9 = -2$, llavors la solució òptima és $S = \{1, 3, 6, 9\}$ (Notem que sense la restricció de que l'esdeveniment 9 ha de ser a S la solució seria $\{1, 4, 5, 7, 8\}$.

(a) Demostreu mitjançant un contraexemple que l'algorisme següent no funciona correctament:

Marca tots els esdeveniments j amb $|d_n - d_j| > n - j$ com a il·legal
(no podem observar aquests esdeveniments, perquè hem d'observar
l'esdeveniment n) i tots els altres com a legal
inicialització $p(0) := 0$, $S := \emptyset$
mentre encara no sóm a la fi de la seqüència **fer**
  busca el primer esdeveniment legal j a partir del moment al qual
  es pot arribar bellugant el telescopi amb velocitat ≤ 1/minut
  $S := S \cup \{j\}$
  $p(j) := d_j$
fimentre
tornar S.

(b) Donada una seqüència d'enters $d_1, \ldots, d_n$, doneu un algorisme correcte i polinòmic en n per calcular el conjunt observable S més gran (amb la condició que $n \in S$).

a)
Vemos que el siguiente ejemplo hace fallar el algoritmo greedy propuesto:
n=4, d1 = -1, d2 = 1, d3 = 2, d4 = 2.

El algoritmo greedy seleccionaria el subconjunto {d1, d4}. Mientras que el mejor que se puede ver incluyendo a d4 es {d2,d3,d4}.

b)

Proponemos la siguiente recurrencia:

T(i) = tamaño conjunto observable óptimo que acaba visualizando el evento astronómico i.

$$T(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i<=1 \\ 1+ \max\limits_{\substack{j<i \\ |dj-di|<=n-j}} T(j) & \text{si } i>1 \end{cases}$$

(o lo que es lo mismo, j e i se pueden observar)

Suboptimalidad:
Vemos que dado el conjunto observable óptimo cuyos últimos dos elementos son i y j, podemos quitar el último evento astronómico (el j) y no solo seguimos teniendo un conjunto observable sinó que además ese es el óptimo que acaba en i. Pues si no lo fuese, podríamos substituir la parte inicial (todo el conjunto menos la j e i) por otro conjunto sí óptimo y al añadir j e i y tendríamos un conjunto mejor.
En la recurrencia estamos aprovechando esto mismo. Teniendo el conjunto astronómico óptimo que se puede formar con todos los eventos anteriores a i y que es compatible con ese i, al añadir i al conjunto, tenemos el conjunto astronómico óptimo que acaba en i óptimo.

c)
Análisis complejidad espacial y temporal

Espacial: Vemos que estamos guardando un vector de n posiciones y no necesitamos más espacio auxiliar, así que O(n).

Temporal: Hemos de rellenar el vector de n posiciones. Para cada posición, hemos de recorrer las posiciones anteriores buscando la más alta compatible. Encontrar la más grande se podría hacer en tiempo constante, pero dado que hemos de asegurarnos que es compatible, no podemos, así que tenemos coste O(n) por cada posición del vector. El coste total temporal es $O(n^2)$.

d)
Obtención de la solución final.
Podríamos en cada posición del vector no solo guardar el tamaño del conjunto observable óptimo que acaba en esa posición sinó también el penúltimo elemento del conjunto. De esta manera, podremos reconstruir la solución.