Bernabé Iturralde Jara

(5) c) 2SAT, $G_F = (V, E)$, $|V| = 2n$, $|E| = 2m$

(n variables, m cláusulas)

C = conjunto de las componentes fuertemente conexas de G_F

Queremos demostrar:

$$\nexists\, c \in C \text{ Tq } \exists\, x \text{ variable Tq } x, \overline{x} \in c \Rightarrow \text{satisfactible}$$

(0) Primero veamos que si x_1 y x_2 pertenecen a una misma componente conexa, también pertenecen a una misma componente $\overline{x_1}$ y $\overline{x_2}$ (distinta de la primera por hipótesis).

- $\exists\, \sigma_1$ camino de inicio x_1 y final x_2.
- $\exists\, \sigma_2$ camino de inicio x_2 y final x_1.
- (1) Por la simetría al crear el grafo, la arista $\alpha \to \beta$ existe si y solo si existe la arista $\overline{\beta} \to \overline{\alpha}$.
- $\sigma_1 = (x_1 \to y_1 \to \dots \to y_s \to x_2)$
- $\sigma_2 = (x_2 \to z_1 \to \dots \to z_T \to x_1)$
- Si aplicamos (1), podemos garantizar que existen:

  $\sigma_1' = (\overline{x_2} \to \overline{y_s} \to \dots \to \overline{y_1} \to \overline{x_1})$

  $\sigma_2' = (\overline{x_1} \to \overline{z_T} \to \dots \to \overline{z_1} \to \overline{x_2})$
- Por lo que se cumple la proposición (0).

De esta forma, podemos agrupar las componentes conexas por pares complementarios. A partir de aquí denotaremos $\overline{m_K}$ a la componente conexa complementaria a $m_K \in C$.

Por otra parte, dada esta distribución de los nodos en las componentes conexas, una solución correcta a la instancia consistirá (en caso de que exista) en seleccionar, por cada par de componentes conexas, cuál será cierta y cuál falsa, respetando las aristas (implicaciones) entre componentes conexas derivadas del grafo original.

$$\left(\begin{matrix} \alpha \in m_1 \\ \beta \in m_2 \end{matrix} \;\; y \;\; \exists\, \alpha \to \beta \Rightarrow \exists\, \sigma(\alpha, \beta) \;\; \forall\, \alpha' \in m_1,\ \beta' \in m_2 \right)$$

↳ (camino de inicio α y final β)

El algoritmo que utilizaremos para encontrar la solución a la satisface la instancia es el siguiente:

(2) • Veamos primero, que en el grafo de los componentes conexas de G_F $\exists\, m_K$ Tq $\forall c \in C$, $\nexists$ la arista $m_K \to c$. Esto es cierto puesto que el grafo de los componentes conexos es acíclico (para encontrar m_K basta con seguir cualquier camino hasta que este acabe).

• Por la simetría de construcción mencionada anteriormente, $\forall c \in C$, $\nexists$ la arista $c \to \overline{m}_K$.

• Marcaremos m_K como cierto y $\overline{m}_K$ quedará como falso consecuentemente. De esta forma, podemos eliminar los "nodos" (comp. conexas) m_K y $\overline{m}_K$ del grafo de componentes conexas (eliminando con ello Todos los aristas adyacentes a ellos).

• Ahora Tenemos un grafo de componentes conexas con dos nodos menos, igualmente acíclico. Repetimos el proceso hasta quedar con un grafo vacío.