

Problema 3.13: festa PAS

Marc Valls Camps

Enunciat

La gerenta de la UPC vol donar una festa als PAS de la universitat. Aquest personal té una estructura jeràrquica, en forma d'arbre on la gerenta és l'arrel. L'oficina de personal ha assignat a cada PAS un nombre real que representa el seu grau de simpatia. En vista que la festa sigui distesa, la gerenta no vol que cap superior immediat d'una persona convidada, també sigui convidada. Descriviu un algorisme per confeccionar la llista de convidats de manera que es maximitzi la suma dels graus de simpatia. Quina és la complexitat del vostre algorisme? Què hauríeu de fer per assegurar que la gerenta està invitada a la seva pròpia festa?

Solució

Suboptimalitat

Sigui T un arbre amb alguns vèrtexs seleccionats S que representen els escollits per assistir a la festa de manera que aquesta selecció consisteix en una solució òptima per aquesta estructura de PAS.

Anomenem els següents vèrtexs:

1. r és l'arrel de T
2. F el conjunt dels fills de r és a dir $F = \{v \mid v \sim r\}$
3. N el conjunt dels nets de r és a dir $N = \{v \mid \exists u \in F : v \sim u\}$

Poden passar els dos casos següents:

- $r \in S$:
Aleshores cap vèrtex de F és un dels seleccionats, i a més els subarbres de T arrelats en v per tot $v \in N$ són solucions òptimes al mateix problema per a aquest subconjunt de persones.
- $r \notin S$:
Els subarbres de T arrelats en v per tot $v \in F$ són solucions òptimes al mateix problema per a aquest subconjunt de persones.

Les raons d'aquests dos casos de suboptimalitat és que si algun no fos un subarbre òptim, es podria substituir perfectament el subarbre per una solució local millor i s'obtindria una millor solució global.

Recurrència i subproblemes

Considerem els subproblemes $festa(v)$, la suma màxima dels graus de simpatia que es pot aconseguir amb el subconjunt de persones presents en l'arbre arrelat a v .

Si definim F i N com abans:

1. F el conjunt dels fills de v és a dir $F_v = \{x \mid x \sim v\}$
2. N el conjunt dels nets de v és a dir $N_v = \{x \mid \exists y \in F : x \sim y\}$

La recurrència que es deriva de l'apartat anterior és

$$festa(v) = \max\left(\sum_{\forall x \in F_v} festa(x), \text{simpatia}(v) + \sum_{\forall x \in N_v} festa(x)\right)$$

El cas base són les fulles, aquells v tals que $F_v = \emptyset$ i evidentment $N_v = \emptyset$. Per aquests, l'anterior recurrència també serveix.

Objectiu

Sigui r l'arrel de l'arbre pel qual s'ha de resoldre el problema. Aleshores la solució al problema és el subconjunt de persones en l'arbre que permet aconseguir la suma de simpaties $festa(r)$.

Ordre del càlcul dels subproblemes

Caldrà fer el càlcul de les fulles a l'arrel, és a dir fent els càlculs en postordre. D'aquesta manera garantim tenir calculat el problema pels fills i néts de cada vèrtex al moment d'intentar resoldre el problema.

Del grau de simpatia òptim a la llista d'assistents

A més de resoldre $festa(v)$ quan visitem el vèrtex v guardarem si la solució òptima del subarbre arrelat en v inclou al vèrtex v . Aleshores, quan haguem resolt tots els subproblemes podem recular enrere en funció de si v pertany a la solució parcial òptima, visitant o bé els seus néts o bé els seus fills.

Cost asimptòtic

A excepció de l'arrel i els fills directes de l'arrel de l'arbre, tots tenen un sol pare i un sol avi. Justament aquest pare i aquest avi són els únics que accediran a cada vèrtex, i per tant cada vèrtex s'utilitza com a molt dos cops en el càlcul d'altres problemes, i un tercer per resoldre el seu propi subproblema.

En qualsevol cas, com que cada vèrtex es visita un nombre constant de vegades, el cost és lineal respecte el nombre de vèrtexs n .

Cost: $O(n)$

Com garantir que la gerenta assisteix a la seva pròpia festa?

Si s'hagués definit la recurrència d'una altra manera seria més senzill. En aquest cas, una manera d'aconseguir-ho és assignant a la gerenta un grau de simpatia igual a la suma de la resta de simpaties més 1, que es pot calcular linealment.