Дифференциальные уравнения в прикладных задачах
Практическое задание №5. Уравнения в полных дифференциалах

Аналитическая часть

Проверьте, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решите его.

1)	$6xy^3dx + (2y + 9y^2x^2)dy = 0$	2)	$(x + 3x^2y^3)dx + 3y^2x^3dy = 0$
3)	$2xydx + (2y + x^2)dy = 0$	4)	$2xy^2dx - (3y^2 - 2yx^2)dy = 0$
5)	$(12x^3 - 5y^2)dx - 10yxdy = 0$	6)	$-ydx + (5y - x)dy = 0$
7)	$-2xy^2dx + (y - 2yx^2)dy = 0$	8)	$(2x^2 - x^2y^3)dx - y^2x^3dy = 0$
9)	$-ydx + (y^2 - x)dy = 0$	10)	$4ydx + (9y^2 + 4x)dy = 0$
11)	$3x^2ydx - (5y^4 - x^3)dy = 0$	12)	$5y^2dx + (6y + 10yx)dy = 0$

Практическая часть

1. Перейдите в текстовый режим (F5), наберите текст «Практикум №5», укажите свои ФИО и номер группы. Вернитесь в математический режим (F5). Подключите пакет *plots*:

   ▶ $with(plots):$

2. Решим с помощью Maple следующее уравнение $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

3. Создаем две функции $P1(x, y)$ и $Q1(x, y)$ — коэффициенты при dx и dy:

   ▶ $P1 := (x, y) \to 2xy;$

   ▶ $Q1 := (x, y) \to x^2 - y^2;$

4. Проверяем, что наше уравнение является уравнением в полных дифференциалах ($\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$):

   ▶ $diff(P1(x, y), y) = diff(Q1(x, y), x);$

   Если не получается формальное равенство, то можно попробовать альтернативный вариант (должен получится ноль!):

   ▶ $diff(P1(x, y), y) - diff(Q1(x, y), x);$

   Если все же ноль не получается, то пробуем упростить:

   ▶ $simplify(diff(P1(x, y), y) - diff(Q1(x, y), x));$

5. Вычисляем интеграл от P по переменной x:

   ▶ $int(P1(x, y), x);$

6. Вычисляем второй интеграл от $\left(Q - \int Pdx\right)$ по переменной y (вместо интеграла от P подставляем номер предыдущей формулы!):

   ▶ $int(Q1(x, y) - \boxed{\textbf{Ctrl+L}}, y);$

7. Формируем решение уравнения из двух найденных интегралов и константы C:

   ▶ $U1 := (x, y) \to \boxed{\textbf{Ctrl+L}} + \boxed{\textbf{Ctrl+L}} + C$

8. Решаем уравнение напрямую командой *dsolve* и сравниваем с найденным ранее решением:

   ▶ $dsolve(P1(x, y) + Q1(x, y) \cdot y' = 0);$

9. Строим график семейства интегральных кривых (в неявной форме):

   ► $implicitplot([seq(U1(x,y,C), C=-10..10)], x=-5..5, y=-5..5);$

10. Решите описанным способом свое уравнение из аналитической части (функциям дайте имена $P2$, $Q2$ и $U2$).

11. Решите описанным способом уравнение

$$\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}dy = 0,$$

   функциям дайте имена $P3$, $Q3$ и $U3$.

12. В некоторых случаях из найденного общего интеграла можно выразить явным образом одну из переменных (x или y), что позволяет построить более точные графики. Например, решим следующее уравнение

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$$

13. Выполняем шаги (3–7), функциям даем имена $P4$, $Q4$ и $U4$.

14. Разрешаем найденный общий интеграл $U4(x,y,C) = 0$ относительно x:

   ► $solve(U4(x,y,C) = 0, x);$

15. Строим график (в явной форме) полученного семейства функций $x(y,C)$:

   ► $plot([seq(\boxed{\textbf{Ctrl+L}}, C=-10..10, 0.2)], y=-2..2, x=0..10, 'discont');$

16. Решите по той же схеме уравнение $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

17. Сохраните файл.