Дифференциальные уравнения в прикладных задачах

Практическое задание №6. Модели роста

Аналитическая часть

Решите задачу Коши:

1) $x' = 2x$, $x(2) = 1$;	2) $x' = -x$, $x(1) = 2$;
3) $x' = 3x$, $x(0) = 4$;	4) $x' = x$, $x(4) = 2$;
5) $x' = -2x$, $x(1) = 1$;	6) $x' = -3x$, $x(2) = 4$;
7) $x' = x$, $x(-1) = 2$;	8) $x' = 2x$, $x(-2) = 1$;
9) $x' = -2x$, $x(-1) = 4$;	10) $x' = 3x$, $x(-3) = 1$;
11) $x' = -x$, $x(-4) = 2$;	12) $x' = -2x$, $x(-2) = 2$;

Практическая часть

1. Перейдите в текстовый режим (F5), наберите текст «Практикум №6», укажите свои ФИО и номер группы. Вернитесь в математический режим (F5). Подключите пакет *plots*.

2. Рассмотрим решение в Maple задачи предсказания размера населения Земли в 2017 году по данным трех прошлых годов: 1950 — 2.5 млрд, 1975 — 4 млрд, 2000 — 6.1 млрд. В 2017 население оценивается в 7.5 млрд. Сохраним эти данные в Maple:

   ▶ $T := [1950, 1975, 2000, 2017];$

   ▶ $P := [2.5, 4.0, 6.1, 7.5];$

3. Будем исследовать две модели — простую (Мальтуса) и модель ограниченного роста (Ферхюльста). Начнем с модели Мальтуса — рост численности населения пропорционален самой численности:
$$\frac{dx}{dt} = kx,$$
   где k — некоторый (заранее не известный) параметр.

4. Решаем это уравнение, сохраняя ответ в переменной $dsol1$:

   ▶ $dsol1 := rhs(dsolve(x'(t) = k \cdot x(t)));$

5. Составляем три уравнения (условия) для 1950, 1975 и 2000 годов:

   ▶ $eq1 := subs(t = T[1], dsol1) = P[1];$

   ▶ $eq2 := subs(t = T[2], dsol1) = P[2];$

   ▶ $eq3 := subs(t = T[3], dsol1) = P[3];$

6. Т.к. решение ДУ зависит от двух неизвестных (k и константа интегрирования), то для их определения достаточно двух условий из трех имеющихся. Используем сначала первое и второе условия:

   ▶ $ans1 := solve(\{eq1, eq2\});$

7. Система выдает нам значения k и $\_C1$. Подставим (команда $subs$) их в решение ДУ и найдем функцию, которая удовлетворяет двум использованным дополнительным условиям:

   ▶ $sol1 := subs(ans1, dsol1);$

8. Построим график найденного решения, сохранив его предварительно в переменной $plot1$:

   ▶ $plot1 := plot(sol1, t = 1950..2020, color = \text{'}red\text{'}) :\ display(plot1);$

9. Теперь найдем решение, исходя из условий для 1950 и 2000 годов (шаги 6–8). Используйте имена $sol2$, $ans2$ и $plot2$. Выберите другой цвет кривой на графике.

10. Построим оба решения на одном графике:

    ▶ $display(\{plot1, plot2\});$

11. Добавим к графику точки из исходных данных (массивы T и P):

    ▶ $plot3 := plot(T, P, style = \text{'}point\text{'}, symbol = \text{'}cross\text{'}, symbolsize = 40);$

    ▶ $display(\{plot1, plot2, plot3\});$

12. Видно, что оба полученных графика дают достаточно большую ошибку для 2017 года.

13. Теперь рассмотрим вторую модель, в которой скорость роста населения падает с его увеличением:
$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x(t) \cdot (M - x(t)),$$
    где k и M — два неизвестных заранее параметра.

    Выполните для этого уравнения все шаги, которые мы выполняли для предыдущей модели. Учтите, что в новом решении будут три параметра, которые необходимо определить. Поэтому в данном случае придется использовать все три условия (для 1950, 1975 и 2000 годов). Постройте график полученного решения и общий график для всех трех найденных решений.

14. Сохраните файл.