Н. М. Ершов

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие

2011

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Основные понятия

Определение 1. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** *называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ этой переменной и ее производные $y'(x)$, $y''(x)$, …, $y^{(n)}(x)$:*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1}$$

где F — функция указанных аргументов, заданная в некоторой области их изменения.

Определение 2. ***Порядком*** *дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.*

Пример 1.

1) $y' = 2x$ — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, так как старшая производная y' имеет первый порядок.

2) $y'y'' = 1$ — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, так как старшая производная y'' имеет второй порядок.

Определение 3. *Если в соотношении* (1) *функция F такова, что из него возможно явно выразить старшую производную*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \tag{2}$$

то такое уравнение называется ***уравнением, разрешенным относительно старшей производной.***

Так, первое уравнение в предыдущем примере уже записано в виде, разрешенном относительно старшей производной. Второе

уравнение приводится к этому виду делением обеих частей уравнения на y':

$$y'' = \frac{1}{y'}.$$

С другой стороны, из уравнения

$$y' - \ln y' + y = x$$

явно выразить производную y' нельзя, то есть оно относится к типу уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.

Определение 4. ***Решением*** *дифференциального уравнения* (1) *на некотором интервале (a, b) называется функция $y(x)$, при подстановке которой в уравнение последнее обращается в тождество для всех $x \in (a, b)$.*

Пример 2.

1) Очевидно, что функция $y(x) = x^2$ является решением элементарного дифференциального уравнения $y' = 2x$ на множестве $x \in R$.

2) Нетрудно проверить, что функция $y(x) = \sin x$ является решением уравнения

$$2y'y'' = -\sin 2x$$

на множестве $x \in R$. В самом деле, в этом случае $y' = \cos x$ и $y'' = -\sin x$, и следовательно,

$$2y'y'' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$$

т. е. уравнение обращается в тождество для любого x.

Как правило, если дифференциальное уравнение разрешимо, то оно имеет бесконечно много решений. Так, для уравнения $y' = 2x$ помимо функции $y = x^2$ решениями будут также функции

$y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$ и, вообще, любая функция вида $y = x^2 + C$, где $C \in R$ есть произвольная постоянная.

Определение 5. *Семейство функций $y(x, C_1, \ldots, C_n)$ определяемое n постоянными $C_1, \ldots, C_n \in R$, называется **общим решением** дифференциального уравнения* (1)*, если это семейство удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *для любых конкретных значений постоянных $C_1, \ldots, C_n$ функция $y(x, C_1, \ldots, C_n)$ является решением уравнения* (1)*;*

2) *уравнение* (1) *не имеет других решений, не входящих в указанное семейство функций.*

*При этом любая функция, получаемая из общего решения подстановкой в него конкретного набора постоянных $C_1, \ldots, C_n$, называется **частным решением**.*

Таким образом, семейство функций $y = x^2 + C$ является общим решением уравнения $y' = 2x$, а функция $y = x^2 + 1$ — частным решением этого уравнения, получаемым подстановкой $C = 1$.

Замечание. Некоторые уравнения, тем не менее, могут иметь дополнительные частные решения, которые нельзя получить из общего решения выбором постоянных.

Определение 6. ***Общим интегралом*** *дифференциального уравнения называется соотношение вида*

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{3}$$

неявно определяющее общее решение этого уравнения.

Решить дифференциальное уравнение — значит найти либо его общее решение, либо общий интеграл. При этом процесс решения дифференциального уравнения, обычно связанный с вычислениями различных интегралов, называется *интегрированием* этого уравнения.

Упражнения

1. Проверить, является ли данная функция решением данного дифференциального уравнения:

а) $y = e^{-x}$, $y' + y = 0$; **б)** $y = x^2$, $xy' = 2y$;

в) $y = \sqrt{16 - x^2}$, $x + yy' = 1$; **г)** $y = \dfrac{2}{x+2}$, $xy' + y = y^2$;

д) $y = x \sin^2 x$, $y' - \dfrac{y}{x} = x \sin x$; **е)** $y = \operatorname{tg} x^2$, $\dfrac{y'}{x} = \dfrac{2y}{\sin x^2}$.

1.2. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в одной из следующих форм:

1) $F(x, y, y') = 0$ — уравнение в общей форме;

2) $y' = f(x, y)$, или $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ — уравнение, разрешенное относительно производной;

3) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ — уравнение в дифференециалах.

Отметим, что последние две формы при $Q(x, y) \neq 0$ являются эквивалентными. Так, если $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, то $dy = f(x, y)dx$ и $f(x, y)dx - dy = 0$, и мы получили уравнение в дифференциалах. Можно проделать и обратный переход: из

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

следует, что $Q(x, y)dy = -P(x, y)dx$ и

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Простейшим уравнением первого порядка является уравнение вида

$$y' = f(x). \tag{4}$$

Решается такое уравнение непосредственным интегрированием:

$$y(x) = \int f(x)dx + C,$$

причем, в отличие от курса математического анализа, здесь под интегралом понимается *некоторая* первообразная функции $f(x)$.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{2\ln x}{x}.$$

Решение. Интегрируем данное уравнение:

$$y(x) = \int \frac{2\ln x}{x}dx = \int 2\ln x \frac{1}{x}dx =$$
$$= \{\text{вносим } \frac{1}{x} \text{ под знак дифференциала}\} =$$
$$= \int 2\ln x d\ln x = \ln^2 x + C.$$

Упражнения

2. Решить простейшие дифференциальные уравнения:

а) $y' = x\ln x$; **б)** $y' = x\operatorname{arctg} x$;

в) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$; **г)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$;

д) $(x^2+1)dx + (x+1)dy = 0$; **е)** $xdx - (x^2+1)dy = 0$.

1.3. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Пусть $y = y(x)$ — решение дифференциального уравнения первого порядка. Очевидно, что на плоскости Oxy этому решению соответствует некоторая кривая, которая называется *интегральной кривой* данного уравнения. Тогда общему решению

$y = y(x, C)$ этого уравнения будет соответствовать семейство интегральных кривых, уравнения которых получаются из общего решения подстановкой вместо C различных числовых значений. Задача нахождения интегральной кривой заданного дифференциального уравнения, проходящей через заданную точку (x_0, y_0), называется *задачей Коши* или *начальной задачей*:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{5}$$

Для этой задачи имеет место следующая теорема существования и единственности решения.

Теорема 1 Коши. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в некоторой области D, то решение задачи Коши (5) существует и единственно для любой точки $(x_0,y_0) \in D$, т. е. через любую точку в D проходит единственная интегральная кривая заданного дифференциального уравнения.*

Чтобы решить задачу Коши, надо сначала решить дифференциальное уравнение. Затем в общее решение подставить начальное условие. Из полученного соотношения выразить константу C и подставить найденное значение в общее решение.

Пример 4. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} (1+x^2)dy + dx = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Решение. Разрешаем уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Интегрируем полученное простейшее дифференциальное уравнение:

$$y = -\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arctg} x + C.$$

Подставляем в найденное решение начальное условие $x = 1$ и $y = 0$:

$$0 = -\operatorname{arctg} 1 + C,$$

откуда находим $C = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Подставляя найденное значение константы в общее решение, находим искомое решение задачи Коши

$$y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x.$$

Упражнения

3. Решить задачи Коши:

а) $xdy = dx$, $y(-e) = 2$;

б) $\cos^6 xdy = \sin^3 xdx$, $y(\pi) = 1$;

в) $y' = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$, $y(3) = 0$;

г) $y' = x\sin x$, $y(\pi) = \pi$.

1.4. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 7. *Уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если функцию $f(x, y)$ можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от y:*

$$y' = \varphi(x)\psi(y). \tag{6}$$

Чтобы решить уравнение (6), запишем его в дифференциалах, представив y' как $\dfrac{dy}{dx}$, умножив обе части на dx и разделив на $\psi(y)$ (при условии $\psi(y) \neq 0$):

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx.$$

Проинтегрировав обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C$$

и обозначив первообразные $\displaystyle\int \frac{dy}{\psi(y)} = \Psi(x)$ и $\displaystyle\int \varphi(x)dx = \Phi(x)$, найдем общий интеграл исходного дифференциального уравнения (6):

$$\Psi(y) = \Phi(x) + C.$$

Замечание. Так как разделение переменных в (6) сопровождается делением на $\psi(y)$, то возможна потеря решений вида $y(x) = y_0$, где y_0 является корнем уравнения $\psi(y) = 0$.

Пример 5. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = (2x+1)(y^2+1).$$

Решение. Очевидно, что данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, в котором $\varphi(x) = 2x + 1$ и $\psi(y) = y^2 + 1$. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)(y^2+1) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y^2+1} = (2x+1)dx$$

и проинтегрируем обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int (2x+1)dx + C, \text{ то есть } \operatorname{arctg} y = x^2 + x + C.$$

Полученное соотношение является общим интегралом решаемого дифференциального уравнения. В данном случае из общего интеграла можно найти и общее решение, взяв от обеих его частей тангенс:

$$y(x) = \operatorname{tg}(x^2 + x + C).$$

Если при интегрировании уравнения с разделяющимися переменными справа и слева появляются логарифмы, то полученный общий интеграл можно упростить, сняв эти логарифмы.

Пример 6. Решить уравнение $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Решение. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Следовательно,

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C, \quad C > 0,$$

где произвольная постоянная взята в логарифмическом виде. После потенцирования находим общее решение:

$$|y| = \frac{C}{|x|}, \text{ или } y = \pm\frac{C}{x}.$$

Последнее соотношение упрощается с учетом того, что $\pm C$ есть просто некая произвольная ненулевая константа:

$$y = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0.$$

Кроме того, при делении исходного уравнения на y было потеряно решение $y = 0$, которое, однако, входит в найденное общее решение при $C = 0$. Итак, окончательно имеем общее решение

$$y = \frac{C}{x}.$$

Если дифференциальное уравнение в задаче Коши является уравнением с разделяющимися переменными, то эту задачу Коши можно решать способом, отличным от рассмотренного выше. Пусть дана задача Коши для уравнения, в котором переменные уже разделены:

$$\psi(y)dy = \varphi(x)dx, \quad y(x_0) = y_0.$$

Возьмем от обеих частей *определенные* интегралы, в качестве нижних пределов которых используются начальные условия y_0 и x_0, а в качестве верхних — переменные y и x:

$$\int_{y_0}^{y} \psi(y)dy = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx \;\Rightarrow\; \Psi(y)\big|_{y_0}^{y} = \Phi(x)\big|_{x_0}^{x} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \Psi(y) - \Psi(y_0) = \Phi(x) - \Phi(x_0),$$

что дает искомое решение задачи Коши в неявной форме.

Пример 7. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} (1 + x^2)dy + ydx = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Решение. Разделяем переменные в дифференциальном уравнении:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

При решении задачи вышеописанным способом начальное условие сразу подставляется в интеграл в качестве нижних пределов:

$$\int\limits_{y_0=1}^{y} \frac{dy}{y} = -\int\limits_{x_0=1}^{x} \frac{dx}{1 + x^2},$$

откуда интегрированием находится решение:

$$\ln y\big|_1^y = -\operatorname{arctg} x\big|_1^x \;\Rightarrow\; \ln y = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; y = e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}.$$

Упражнения

4. Решить уравнения:

а) $y' = y^2$; **б)** $y' = y - 2$;

в) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x \ln x}$; **г)** $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0,\ y(1) = 2$;

д) $xydx + (x+1)dy = 0$; **е)** $xyy' = 1 - x^2$;

ж) $\operatorname{ctg} xy' + y = 2,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$; **з)** $y' \sin x = y \ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

и) $(1 - x^2)y' = 2xy^2,\ y(0) = 1$; **к)** $\sqrt{1 + y^2}dx = xydy$;

л) $e^{-s}\left(1 + \dfrac{ds}{dt}\right) = 1$; **м)** $z' = 10^{x+z}$;

н) $xy' + y = y^2,\ y(1) = \dfrac{1}{2}$; **о)** $1 + (x + x^2)y' = y,\ y(1) = 0$.

5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(3, 1)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

6. Найти кривую, у которой отрезок касательной, заключенный между точкой касания и осью Ox, равен расстоянию от точки касания до начала координат.

7. Сосуд объемом 20 л содержит воздух (80 % азота и 20 % кислорода). В сосуд втекает 0,1 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99 % азота?

8. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли останется в баке через час?

9. Тело охладилось за 10 минут от 100 °C до 60 °C. Температура окружающего воздуха поддерживалась равной 20 °C. Когда тело остынет до 25 °C? Принять, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

10. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, через 4 с скорость ее 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с?

11. За 30 дней распалось 50 % первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1 % первоначального количества? Принять, что скорость распада пропорциональна количеству вещества.

12. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия? Принять, что скорость распада пропорциональна количеству вещества.

1.5. Уравнения вида $y' = f(ax + by + c)$

Уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c) \tag{7}$$

приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z(x) = ax + by(x) + c$. Дифференцируя последнее равенство, находим, что $z' = a + by'$, откуда выражаем производную $y' = \dfrac{z' - a}{b}$. Тогда исходное уравнение (7) преобразуется к виду

$$\frac{z' - a}{b} = f(z), \text{ или } z' = a + bf(z).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx.$$

Помимо решения, найденного интегрированием полученного соотношения, уравнение имеет еще одно решение, определяемое неявно соотношением $a + bf(z) = 0$.

Пример 8. Решить дифференциальное уравнение

$$(x+2y)y' = 1.$$

Решение. Выражаем из уравнения производную:

$$y' = \frac{1}{x+2y}.$$

Правая часть есть функция от линейной комбинации $x+2y$, следовательно, данное уравнение должно решаться заменой $z(x) = x + 2y(x)$. Дифференцируя это соотношение, выразим производную y':

$$z' = 1 + 2y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z'-1}{2}.$$

Подставляя z и y' в исходное уравнение, получаем уравнение для z

$$\frac{z'-1}{2} = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{2+z}{z}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{zdz}{z+2} = dx$$

и интегрируем:

$$\int \frac{zdz}{z+2} = \int dx \;\Rightarrow\; \int \left(1 - \frac{2}{z+2}\right) dz = x + C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; z - 2\ln|z+2| = x + C.$$

Делая обратную замену, находим общий интеграл исходного уравнения:

$$x + 2y - 2\ln|x+2y+2| = x + C \quad \text{или} \quad y - \ln|x+2y+2| = C.$$

Кроме того, при делении на $z+2$ было потеряно решение $z=-2$, или, после обратной замены $x+2y+2=0$.

Упражнения

13. Решить дифференциальные уравнения методом разделения переменных, сделав предварительно линейную замену:

а) $y' = (x+y-1)^2$; **б)** $y' - y = 2x - 3$;

в) $y' = \cos(y-x)$; **г)** $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

1.6. Однородные уравнения

Определение 8. *Функция $f(x,y)$ называется **однородной степени** k, если $f(tx,ty) \equiv t^k f(x,y)$ для $\forall t \neq 0$.*

В частном случае, если $f(tx,ty) \equiv f(x,y)$ для $\forall t \neq 0$, то функция является однородной степени 0.

Пример 9.

1) Функция $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ однородна степени 2, так как

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) + 2(ty)^2 = \\ = t^2(x^2 + xy + 2y^2) = t^2 f(x,y).$$

2) Функция $f(x,y) = \sqrt{y}\sin\dfrac{x}{y}$ однородна степени $\dfrac{1}{2}$, так как

$$f(tx,ty) = \sqrt{ty}\sin\frac{tx}{ty} = \sqrt{t}\sqrt{y}\sin\frac{x}{y} = t^{\frac{1}{2}} f(x,y).$$

Определение 9. *Дифференцальное уравнение*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные функции одинаковой степени.

Можно дать эквивалентное определение однородного дифференциального уравнения, записанного в виде, разрешенном относительно производной.

Определение 10. *Дифференциальное уравнение* $y' = f(x, y)$ *называется однородным, если* $f(x, y)$ — *однородная функция нулевой степени.*

Если дифференциальное уравнение однородно, то его можно алгебраическими преобразованиями представить в форме

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (8)$$

Решается такое уравнение заменой неизвестной функции:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}, \text{ или } y(x) = z(x)x \quad \Rightarrow \quad y' = z'x + z.$$

Подставляя z и y' в уравнение (8), получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции z

$$z'x + z = F(z) \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{F(z) - z}{x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными решается методом, описанным выше. Кроме того, если существует корень z_0 уравнения $z = F(z)$, то исходное дифференциальное уравнение имеет решение $y(x) = z_0 x$.

Пример 10. Решить уравнение $xydy - (x^2 + y^2)dx = 0$.

Решение. Разрешим уравнение относительно производной:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Очевидно, что правая часть этого выражения — однородная функция нулевой степени:

$$\frac{(tx)^2 + (ty)^2}{tx \cdot ty} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Делим почленно:

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Сделав замену $z = \dfrac{y}{x}$, переходим к уравнению для z:

$$z'x + z = z + \frac{1}{z}, \text{ или } z' = \frac{1}{zx}.$$

Разделяя переменные:

$$zdz = \frac{dx}{x}$$

и интегрируя, получаем общий интеграл:

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + C.$$

Сделав обратную замену, находим общий интеграл исходного уравнения:

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C.$$

Помимо найденного общего решения, исходное уравнение имеет еще одно (потерянное при делении) частное решение $x = 0$.

Упражнения

14. Проверить уравнения на однородность и решить их:

а) $(x + 2y)dx - xdy = 0$; **б)** $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$;

в) $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$; **г)** $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$;

д) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$; **е)** $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

15. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинакова удалена от точки касания и от начала координат.

16. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 2)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Oy равен расстоянию от точки касания до начала координат.

1.7. Дифференциальные уравнения с линейными коэффициентами

Определение 11. *Уравнение вида*

$$(ax + by + c)dx - (px + qy + r)dy = 0 \tag{9}$$

называется ***уравнением с линейными коэффициентами.***

Чтобы решить уравнение (9), запишем его в эквивалентной форме:

$$y' = \frac{ax + by + c}{px + qy + r}. \tag{10}$$

Уравнения $ax + by + c = 0$ и $px + qy + r = 0$ определяют две прямые на плоскости Oxy. В зависимости от значений параметров, входящих в уравнение (9), возможны три качественно различных варианта.

1) Прямые совпадают: $k = \dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} = \dfrac{c}{r}$.

   В этом случае после деления обеих частей на выражение $px + qy + r$ исходное уравнение преобразуется к виду $y' = k$. Его решением является линейная функция $y = kx + C$.

2) Прямые параллельны: $k = \dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} \neq \dfrac{c}{r}$.

   В этом случае уравнение решается заменой $z = px + qy$. Дифференцируем: $z' = p + qy'$. Подставляя z и y' в уравнение (10):

   $$\frac{z' - p}{q} = \frac{kz + c}{z + r},$$

   получаем для z уравнение с разделяющимися переменными.

3) Прямые пересекаются: $\dfrac{a}{p} \neq \dfrac{b}{q}$.

   В этом случае уравнение решается двойной заменой $x = u + \alpha$ и $y = v + \beta$, где (α, β) — точка пересечения рассматриваемых прямых, т. е. решение системы

   $$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ px + qy + r = 0. \end{cases}$$

   После указанной замены уравнение (9) переходит в однородное уравнение для неизвестной функции $v(u)$:

   $$(au + bv)du - (pu + qv)dv = 0.$$

Аналогичным способом решаются уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{px + qy + r}\right). \tag{11}$$

Пример 11. Решить уравнение $(-2x + 2y)dx + (x - y + 1)dy = 0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с линейными коэффициентами. Выясним, какому из трех вышеперечисленных вариантов соответствуют коэффициенты этого уравнения. Имеем

$$a = -2,\ b = 2,\ c = 0,\ p = 1,\ q = -1,\ r = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = -2 \neq \frac{c}{r} = 0,$$

т. е. это случай параллельных прямых. Делаем замену

$$z = px + qy = x - y \ \Rightarrow\ z' = 1 - y' \ \Rightarrow\ y' = 1 - z'.$$

Подставляя эти формулы в уравнение

$$y' = \frac{2x - 2y}{x - y + 1},$$

получаем уравнение с разделяющимися переменными для z:

$$1 - z' = \frac{2z}{z + 1}, \text{ или } \frac{dz}{dx} = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

Разделяя переменные:

$$\frac{1+z}{1-z}dz = dx$$

и интегрируя:

$$\int \frac{1+z}{1-z}dz = -\int \frac{z+1}{z-1}dz = -\int \left(1+\frac{2}{z-1}\right) dz = -z-2\ln(z-1),$$

находим общий интеграл:

$$-z-2\ln(z-1) = x + C.$$

Делая обратную замену, находим общий интеграл исходного уравнения:

$$x-y-2\ln(x-y-1) = x + C \text{ или } y+2\ln(x-y-1) = C.$$

Пример 12. Решить уравнение $(2x-y-4)dy+(x-2y-5)dx = 0$.

Решение. Выделяем из уравнения производную:

$$y' = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}.$$

Уравнения $2y-x+5=0$ и $2x-y-4=0$ определяют пару пересекающихся прямых. Их точка пересечения имеет координаты $\alpha = 1$ и $\beta = -2$. Делаем замену

$$x = u+1,\ y = v-2 \ \Rightarrow\ dx = du,\ dy = dv \ \Rightarrow\ y'_x = v'_u.$$

Получаем

$$v' = \frac{2v-u}{2u-v} = \frac{2\dfrac{v}{u}-1}{2-\dfrac{v}{u}}$$

— однородное уравнение, которое решается заменой $z = \dfrac{v}{u}$, откуда

$$v' = z'u + z,\ z'u + z = \frac{2z-1}{2-z} \ \Rightarrow\ z'u = \frac{z^2-1}{2-z}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{2-z}{z^2-1}dz = \int \frac{du}{u} \ \Rightarrow\ \frac{z-1}{(z+1)^3} = Cu^2.$$

Обратной подстановкой $z = \dfrac{v}{u}$ находим решение $v(u)$:

$$\frac{v-u}{(v+u)^3} = C.$$

Наконец, обратной подстановкой $u = x-1$ и $v = y+2$ находим искомое решение:

$$y-x+3 = C(y+x+1)^3.$$

Так как в процессе решения проходилось делить на z^2-1, то возможны потерянные решения $z = \pm 1$, или $v = \pm u$. Эти два условия определяют решения $y-x+3 = 0$ и $y+x+1 = 0$. Первое из них входит в найденное общее решение при $C = 0$, а второе не входит ни при каких C. Таким образом, решением исходного уравнения является

$$y-x+3 = C(y+x+1)^3 \text{ и } y+x+1 = 0.$$

Упражнения

17. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy = 0$;

б) $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy = 0$;

в) $x-y-1+(y-x+2)y' = 0$;

г) $(x+4y)y' = 2x+3y-5$;

д) $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$;

е) $(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3} = \dfrac{y+x}{x+3}$.

1.8. Линейные уравнения

Определение 12. ***Линейным уравнением 1-го порядка*** *называется дифференциальное уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной, то есть уравнение вида*

$$y' + p(x)y = f(x). \qquad (12)$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется ***линейным однородным***

$$y' + p(x)y = 0, \qquad (13)$$

в противном случае — ***линейным неоднородным****.*

Очевидно, что линейное однородное уравнение (13) является уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C,$$

а общее решение —

$$y = Ce^{-P(x)},$$

где $P(x) = \int p(x)dx$ — первообразная функции $p(x)$.

Решение линейного неоднородного уравнения (12) ищется методом вариации постоянной, который состоит в том, что сначала вышеописанным способом находится общее решение соответствующего однородного уравнения, затем в этом решении полагают константу C неизвестной функцией $C(x)$, полученное выражение

подставляется в исходное неоднородное уравнение, что приводит к простейшему дифференциальному уравнению для функции $C(x)$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (12) получается в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Пример 13. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2$.

Решение. Записываем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0.$$

Интегрируя его, находим общее решение однородного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln|x| + C \;\Rightarrow\; y = Cx.$$

Заменяем в найденном выражении C на функцию $C(x)$:

$$y(x) = C(x)x \;\Rightarrow\; y' = C'x + C$$

и подставляем полученные соотношения в исходное уравнение

$$C'x + C - C = x^2 \;\Rightarrow\; C' = x \;\Rightarrow\; C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Окончательно получаем

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x, \text{ или } y(x) = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Упражнения

18. Решить линейные дифференциальные уравнения:

а) $(2x+1)y' = 4x + 2y$; **б)** $xy' - 2y = 2x^4$;

в) $(xy'-1)\ln x = 2y$; **г)** $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.

19. Найти кривые, для которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

20. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью Ox, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна a^2. **Указание.** *Рассмотреть функцию* $x(y)$.

1.9. Уравнения Бернулли

Определение 13. ***Уравнением Бернулли*** *называется дифференциальное уравнение вида*

$$y' + p(x)y = f(x)y^n, \tag{14}$$

где $n \neq 1$ *и* $n \neq 0$.

Уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению следующим образом. Разделим правую и левую части на y^n:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = f(x) \tag{15}$$

и сделаем замену

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} \;\Rightarrow\; z' = (1-n)\frac{y'}{y^n}, \text{ или } \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}. \tag{16}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (15), получаем линейное неоднородное уравнение

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z(x) = f(x),$$

общее решение которого ищется вышеописанным методом.

Пример 14. Решить уравнение $y' + xy = \dfrac{x}{y^3}$.

Решение. Сравнивая данное уравнение с (14), видим, что это уравнение является уравнением Бернулли с $n = -3$. Домножая

его на y^3 (или, что то же самое, деля на y^{-3}), приводим его к виду

$$y^3y' + xy^4 = x.$$

Делаем замену

$$z = y^4 \;\Rightarrow\; z' = 4y^3y' \;\Rightarrow\; y^3y' = \frac{z'}{4}.$$

Получаем линейное дифференциальное уравнение для z

$$\frac{z'}{4} + xz = x, \text{ или } z' + 4xz = 4x. \tag{$*$}$$

Решая соответствующее однородное уравнение $z' + 4xz = 0$, находим, что

$$z = Ce^{-2x^2}.$$

Заменяя в последнем выражении C на $C(x)$:

$$z = C(x)e^{-2x^2} \;\Rightarrow\; z' = C'e^{-2x^2} - 4xCe^{-2x^2},$$

и подставляя полученные формулы в $(*)$, получаем уравнение для функции $C(x)$

$$C'e^{-2x^2} - 4xCe^{-2x^2} + 4xCe^{-2x^2} = 4x \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; C' = 4xe^{2x^2} \;\Rightarrow\; C(x) = e^{2x^2} + C.$$

Следовательно,

$$z = \left(e^{2x^2} + C\right)e^{-2x^2} \;\Rightarrow\; z = 1 + Ce^{-2x^2}.$$

Делая обратную замену, получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$y^4 = 1 + Ce^{-2x^2}.$$

Упражнения

21. Решить уравнения Бернулли:

а) $(x+1)(y'+y^2) = -y$; **б)** $y' + 2y = y^2 e^x$;

в) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$; **г)** $y' + 4xy = 4xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

1.10. Уравнения в полных дифференциалах

Определение 14. *Уравнение*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{17}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$*, для которой, следовательно, выполняются равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

Если функция u известна, то общий интеграл уравнения (17) записывается в виде

$$u(x,y) = C.$$

Проверить, является ли уравнение (17) уравнением в полных дифференциалах, можно с помощью следующей теоремы.

Теорема 2. *Уравнение* (17) *является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{18}$$

При доказательстве этой теоремы выводится и формула для функции $u(x,y)$:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy, \tag{19}$$

где точка (x_0, y_0) есть произвольная точка в области, в которой ищется решение уравнения (17). Наряду с формулой (19) может использоваться и симметричная ей формула

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy. \tag{20}$$

Пример 15. Решить уравнение $\cos y dx - (x\sin y - y^2)dy = 0$.

Решение. Имеем $P(x,y) = \cos y$ и $Q(x,y) = -x\sin y + y^2$. Следовательно,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\sin y \text{ и } \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\sin y,$$

т. е. данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Находим функцию $u(x,y)$ по формуле (19), взяв в качестве точки (x_0, y_0) начало координат — $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ (заметим, что в этом случае $Q(x_0, y) = y^2$):

$$u(x,y) = \int_0^x \cos y dx + \int_0^y y^2 dy = x\cos y + \frac{y^3}{3}.$$

Следовательно, общий интеграл исходного уравнения записывается как

$$x\cos y + \frac{y^3}{3} = C.$$

Другой способ решения уравнений в полных дифференциалах, при котором отпадает необходимость помнить формулы (19) и (20), заключается в прямом построении функции u исходя из определения (14).

Пример 16. Решить уравнение

$$(x - 2xy + e^y)dx + (y - x^2 + xe^y)dy = 0.$$

Решение. Имеем $P(x,y) = x - 2xy + e^y$ и $Q(x,y) = y - x^2 + xe^y$. Следовательно,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -2x + e^y \text{ и } \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -2x + e^y,$$

т. е. данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Неизвестная функция $u(x,y)$ должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = x - 2xy + e^y,$$

откуда интегрированием по x находим, что

$$u(x,y) = \int (x - 2xy + e^y)dx + R(y) = \frac{x^2}{2} - x^2y + xe^y + R(y),$$

где $R(y)$ — некоторая неизвестная функция. Подставляя найденное выражение для $u(x,y)$ во второе условие определения (14)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y),$$

получаем простейшее дифференциальное уравнение для $R(y)$

$$-x^2 + xe^y + R'(y) = y - x^2 + xe^y \text{ или } R'(y) = y,$$

откуда

$$R(y) = \frac{y^2}{2}.$$

Окончательно получаем, что

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - x^2y + xe^y + \frac{y^2}{2},$$

и следовательно, общий интеграл исходного уравнения есть

$$\frac{x^2}{2} - x^2y + xe^y + \frac{y^2}{2} = C.$$

Упражнения

22. Проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их:

а) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0;$

б) $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0;$

в) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0;$

г) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0;$

д) $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0;$

е) $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0.$

1.11. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Часто дифференциальное уравнение $F(x,y,y') = 0$ бывает трудно (или даже невозможно) разрешить относительно производной y' (или после такого разрешения получаются трудно интегрируемые уравнения). В этом случае можно искать решение в параметрической форме. Продемонстрируем такой способ решения на примере двух типов уравнений.

Чтобы решить уравнение вида $y = \varphi(y')$, введем параметр $p = y'$. Тогда

$$y = \varphi(p). \tag{21}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей последнего равенства, получим

$$dy = \varphi'(p)dp. \tag{22}$$

С другой стороны, $y' = \frac{dy}{dx} = p$, откуда

$$dy = pdx. \tag{23}$$

Исключая dy из равенств (22) и (23), получим уравнение

$$pdx = \varphi'(p)dp, \text{ или } dx = \frac{\varphi'(p)}{p}dp.$$

Обозначив первообразную функции $\dfrac{\varphi'(p)}{p}$ как $\Phi(p)$, получим, что

$$x = \Phi(p) + C. \tag{24}$$

Окончательно, объединяя (21) и (24), запишем решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \Phi(p) + C, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

Пример 17. Решить уравнение $(y')^5 + (y')^3 - y - 2 = 0$.

Решение. Полагая $y' = p$, получим $y = p^5 + p^3 - 2$. Следовательно, $dy = (5p^4 + 3p^2)dp$, и так как $dy = pdx$, то

$$pdx = (5p^4 + 3p^2)dp \quad \Rightarrow \quad dx = (5p^3 + 3p)dp \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{4}p^4 + \frac{3}{2}p^2 + C.$$

Таким образом, решением исходного дифференциального уравнения является параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{4}p^4 + \dfrac{3}{2}p^2 + C, \\ y = p^5 + p^3 - 2. \end{cases}$$

Аналогично решаются уравнения вида $x = \psi(y')$. Введем параметр p следующим образом: $y' = p$. Подставляя p в исходное уравнение, найдем

$$x = \psi(p). \tag{25}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей последнего равенства, получим

$$dx = \psi'(p)dp. \tag{26}$$

С другой стороны, $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$, откуда

$$dx = \frac{dy}{p}. \tag{27}$$

Исключая dx из равенств (26) и (27), получим уравнение

$$\frac{dy}{p} = \psi'(p)dp, \text{ или } dy = p\psi'(p)dp.$$

Обозначив первообразную функции $p\psi'(p)$ как $\Psi(p)$, получим, что

$$y = \Psi(p) + C. \tag{28}$$

Окончательно, объединяя (25) и (28), запишем решение исходного уравнения в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \psi(p), \\ y = \Psi(p) + C. \end{cases}$$

Упражнения

23. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y = (y' - 1)e^{y'}$; **б)** $y = \ln(1 + y'^2)$;

в) $y'(x - \ln y') = 1$; **г)** $x = y'^3 + y'$.

1.12. Метод изоклин

Можно построить приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$, исходя только из вида правой части $f(x, y)$ и не решая самого уравнения. Это делается с использованием специальных кривых — изоклин.

Определение 15. *Кривая, определяемая уравнением*

$$f(x,y) = k,$$

называется ***изоклиной*** *дифференциального уравнения*

$$y' = f(x,y).$$

Геометрический смысл изоклины состоит в том, что все интегральные кривые данного дифференциального уравнения пересекают каждую изоклину под одним и тем же углом к оси Ox, равным $\operatorname{arctg} k$. Таким образом, чтобы построить приближенное решение уравнения $y' = f(x,y)$, надо:

1) начертить достаточное число изоклин для разных значений параметра k;

2) расставить на изоклинах указатели — короткие отрезки, наклоненные под углом $\operatorname{arctg} k$ к оси Ox;

3) провести кривые, которые пересекают изоклины параллельно расставленным указателям.

Пример 18. Решить графически уравнение $y' = y - x$.

Решение. Изоклины данного уравнения определяются соотношением $y - x = k$, или $y = x + k$, то есть являются прямыми. Построим несколько изоклин для следующих значений параметра $k \in -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. На каждой изоклине расставим указатели. Изоклина $k = 1$ является специальной для данного уравнения, так как ее наклон совпадает с наклоном указателей. Это означает, что данная изоклина является и интегральной кривой данного дифференциального уравнения. Проведем теперь кривые так, чтобы они пересекали построенные изоклины под заданными углами (рис. 1).

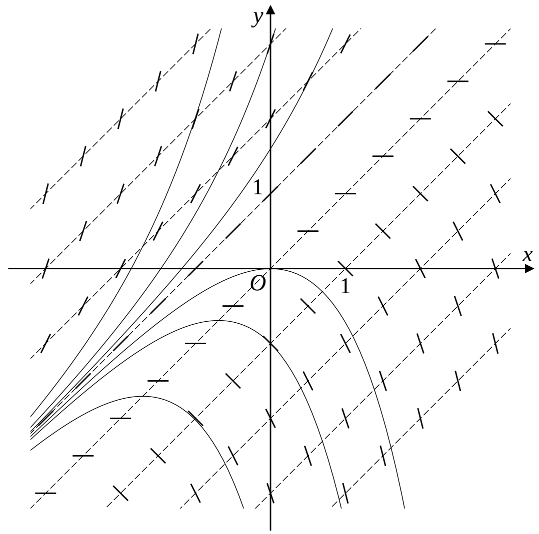

Рис. 1

Упражнения

24. С помощью изоклин построить приближенные решения дифференциальных уравнений:

а) $yy' + x = 0$;

б) $2(y + y') = x + 3$;

в) $xy' = 2y$;

г) $xy' + y = 0$.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1. Простейшие уравнения высших порядков

Простейшим уравнением порядка n называется уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x). \tag{29}$$

Решается такое уравнением непосредственным n-кратным интегрированием.

Пример 19. Решить уравнение $y'' = 2 + \sin x$.

Решение. Интегрируя исходное уравнение один раз, находим первую производную искомой функции:

$$y' = \int (2 + \sin x) dx = 2x - \cos x + C_1.$$

Интегрируя полученное равенство, находим общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = \int (2x - \cos x + C_1) dx = x^2 - \sin x + C_1 x + C_2.$$

Как правило, общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения порядка n зависит ровно от n произвольных констант.

Упражнения

25. Решить уравнения:

а) $y'' = \dfrac{1}{x}$; **б)** $y'' = -\dfrac{1}{2x^3}$;

в) $y''' = xe^x$; **г)** $y''' = x \sin x$.

2.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Для уравнений вида

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{30}$$

которые не содержат искомой функции и ее младших $(k-1)$ производных, порядок может быть понижен до $(n-k)$ заменой $z = y^{(k)}$. Действительно, после такой замены уравнение примет вид

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

В частности, если уравнение второго порядка не содержит y, то замена $z = y'$ приводит к уравнению первого порядка.

Пример 20. Решить уравнение $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{1}{x}\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Решение. Уравнение не содержит искомой функции y и первых двух ее производных. Делая замену $z = \dfrac{d^3y}{dx^3}$, получаем уравнение первого порядка

$$z' = \frac{z}{x}.$$

Его общим решением является функция $z = C_1 x$. Следовательно, делая обратную замену, получаем простейшее уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C_1 x.$$

Интегрируя его три раза, находим общее решение:

$$y = \frac{C_1}{24}x^4 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$$

или, после замены постоянных:

$$y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Для уравнений вида

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{31}$$

которые не содержат независимой переменной, порядок может быть понижен на единицу заменой $z(y) = y'$, причем z будет рассматриваться как новая неизвестная функция от y, а y — как независимая переменная. Следовательно, все производные $y^{(k)}$ должны быть выражены через производные z по y. Это делается с помощью формулы производной сложной функции

$$y^{(k)} = \frac{dy^{(k-1)}}{dx} = \frac{dy^{(k-1)}}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy^{(k-1)}}{dy}z.$$

Применяя эту формулу последовательно, начиная с $k = 2$, и учитывая что $y' = z$, можно выразить все производные от y по x через производные от z по y:

$$y'' = \frac{dy'}{dy}z = \frac{dz}{dy}z = z'z, \quad y''' = \frac{dy''}{dy}z = \frac{d(zz')}{dy}z = (z'^2 + zz'')z \text{ и т. д.}$$

Пример 21. Решить уравнение $yy'' - (y')^2 = 0$.

Решение. Уравнение не содержит x, следовательно его порядок может быть понижен вышеописанной заменой $y' = z$, $y'' = z'z$:

$$yz'z - z^2 = 0 \;\Rightarrow\; z' = \frac{z}{y} \;\Rightarrow\; z = C_1 y.$$

Делая обратную замену, получим уравнение первого порядка уже для y:

$$y' = C_1 y \;\Rightarrow\; y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Упражнения

26. Решить уравнения, понизив их порядок:

а) $2xy'y'' = y'^2 - 1$; **б)** $x^2 y'' = y'^2$;

в) $yy'' = y'^2 - y'^3$; **г)** $y'^2 + 2yy'' = 0$.

2.3. Линейные уравнения

Определение 16. ***Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*** *называется уравнение вида*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \tag{32}$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется ***линейным однородным****, иначе —* ***линейным неоднородным****.*

Для уравнения вида (32) справедлива следующая теорема существования и единственности решения.

Теорема 3. *Если функции $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором интервале X (конечном или бесконечном), то решение начальной задачи*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

существует и единственно всюду на X.

Определение 17. *Будем говорить, что функции $u_1(x)$, ..., $u_n(x)$* ***линейно зависимы на интервале*** *X, если существуют такие числа C_1, ..., C_n, не равные нулю одновременно, что выполняется тождество*

$$\sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x) = 0, \quad x \in X. \tag{33}$$

В противном случае, т. е. если (33) выполняется только при $C_1 = \ldots = C_n = 0$, будем говорить, что функции $u_1(x)$, ..., $u_n(x)$ ***линейно независимы****.*

Определение 18. *Определителем Вронского системы функций $u_1(x)$, ..., $u_n(x)$, каждая из которых $(n-1)$ раз дифференциру-*

ема, называется определитель вида

$$\triangle(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1{}^{(n-1)}(x) & \dots & u_n{}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (34)$$

Теорема 4. *Если $(n-1)$ раз дифференцируемые функции $u_1(x)$, $\dots$, $u_n(x)$ линейно зависимы на интервале X, то их определитель Вронского тождественно равен нулю на X:*

$$\triangle(x) \equiv 0.$$

Замечание. Соответственно верно и обратное утверждение: если определитель Вронского системы функций не равен нулю хотя бы в одной точке $x_0 \in X$, то эта система функций линейно независима.

Пример 22. Показать, что функции $u(x) = x+1$, $v(x) = -x$ и $w(x) = 2x-3$ линейно зависимы на R.

Решение. Показать линейную зависимость системы функций можно только по определению 17, т. е. нужно найти какой-нибудь нетривиальный набор чисел a, b и c, такой что

$$au(x) + bv(x) + cw(x) \equiv 0 \text{ на } R.$$

Имеем

$$a(x+1) + b(-x) + c(2x-3) = (a-b+2c)x + (a-3c) \equiv 0.$$

Чтобы выполнялось последнее тождество, коэффициент при x и свободный коэффициент должны быть равны нулю, т. е. a, b и c

должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0, \\ a - 3c = 0. \end{cases}$$

Так как нам надо найти какое-нибудь частное решение этой системы, то мы можем положить $c = 1$, тогда из второго уравнения находим $a = 3$, и из первого $b = 5$. Таким образом, нетривиальный набор чисел a, b и c существует, следовательно, по определению 17 заданная система функций линейно зависима.

Пример 23. Показать, что функции $u(x) = \cos x$ и $v(x) = \sin x$ линейно независимы на R.

Решение. Найдем определитель Вронского для функций u и v:

$$\triangle(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0 \;\forall x \in R.$$

Таким образом, определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке, следовательно, в силу замечания к теореме 4, функции $u(x)$ и $v(x)$ линейно независимы.

Определение 19. ***Фундаментальной системой решений*** *уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \qquad (35)$$

называется любой набор, состоящий из n линейно независимых решений этого уравнения.

Теорема 5. *Если $y_1(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ — фундаментальная система решений, то общее решение $y(x)$ уравнения (35) представимо в виде линейной комбинации функций из фундаментальной системы решений*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \qquad (36)$$

где C_1, $\dots$, C_n — произвольные постоянные.

Замечание. Таким образом, чтобы решить однородное линейное уравнение, достаточно найти его фундаментальную систему решений.

Упражнения

27. Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми:

а) $1,\ x,\ x^2$; **б)** $4-x,\ 2x+3,\ 6x+8$;

в) $x^2-x+3,\ 2x^2+x,\ 2x-4$; **г)** $x^2+2x,\ 3x^2-1,\ x+4$;

д) $1,\ e^x,\ e^{-x}$; **е)** $1,\ x,\ e^x$;

ж) $\ln(x^2),\ \ln 3x,\ 7$; **з)** $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$.

2.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{37}$$

где $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ — некоторые постоянные, надо составить и решить так называемое характеристическое уравнение

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{38}$$

Это уравнение имеет ровно n корней, причем все комплексные корни входят в него комплексно-сопряженными парами. Зная все корни этого уравнения, фундаментальную систему решений уравнения (37) можно построить следующим образом:

- каждому простому вещественному корню λ этого уравнения соответствует одно решение $e^{\lambda x}$;

- каждому вещественному корню λ кратности k соответствуют ровно k решений:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x};$$

- каждой паре простых комплексно-сопряженных корней $\alpha\pm\beta i$ соответствует пара решений $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

- каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha\pm\beta i$ кратности k соответствует $2k$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Всего, таким образом, набирается ровно n линейно независимых решений уравнения (37), следовательно, они образуют фундаментальную систему решений этого уравнения.

Пример 24. Решить уравнение $y''-5y'-6y=0$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-5\lambda-6=0 \ \Rightarrow\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=6.$$

Корни вещественные кратности 1, следовательно, фундаментальная система решений состоит из функций $y_1(x)=e^{-x}$ и $y_2(x)=e^{6x}$. Соответственно, общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}.$$

Пример 25. Решить уравнение $y''+6y'+9y=0$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+6\lambda+9=0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2}=-3.$$

Имеется один вещественный корень кратности 2, следовательно, фундаментальная система решений состоит из функций

$y_1(x) = e^{-3x}$ и $y_2(x) = xe^{-3x}$. Соответственно, общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}.$$

Пример 26. Решить уравнение $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = 3 \pm 2i.$$

Имеется пара комплексно-сопряженных корней $3 \pm 2i$, то есть, согласно использованным выше обозначениям, $\alpha = 3$ и $\beta = 2$. Тогда фундаментальная система решений состоит из функций $y_1(x) = e^{3x}\cos 2x$ и $y_2(x) = e^{3x}\sin 2x$. Соответственно, общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{3x}\cos 2x + C_2 e^{3x}\sin 2x = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

Пример 27. Решить уравнение $y^{(5)} - y^{(4)} + 16y''' - 16y'' = 0$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 16\lambda^3 - 16\lambda^2 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 + 16) = 0.$$

Таким образом, это уравнение имеет корни:

1) $\lambda_{1,2} = 0$ — вещественный корень кратности 2, ему соответствуют два линейно независимых решения
$$y_1(x) = e^{0x} = 1 \text{ и } y_2(x) = xe^{0x} = x. \tag{39}$$

2) $\lambda_3 = 1$ — вещественный корень кратности 1, ему соответствует одно решение
$$y_3(x) = e^x. \tag{40}$$

3) $\lambda_{4,5} = \pm 4i$ — пара комплексно сопряженных корней кратности 1, ей соответствуют два линейно независимых решения
$$y_1(x) = e^{0x}\cos 4x = \cos 4x \text{ и } y_5 = e^{0x}\sin 4x = \sin 4x. \tag{41}$$

Объединяя результаты (39—41), получаем, что фундаментальная система решений заданного уравнения состоит из пяти функций:

$$\{1,\ x,\ e^x,\ \cos 4x,\ \sin 4x\}.$$

Соответственно, общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4\cos 4x + C_5\sin 4x.$$

Упражнения

28. Решить уравнения:

а) $y'' + y' - 2y = 0$; **б)** $y'' + 4y' + 3y = 0$;

в) $y'' - 2y' = 0$; **г)** $2y'' - 5y' + 2y = 0$;

д) $y'' - 4y' + 5y = 0$; **е)** $y'' + 2y' + 10y = 0$;

ж) $y'' + 4y = 0$; **з)** $9y'' + y = 0$;

и) $y'' - 2y' + y = 0$; **к)** $4y'' + 4y' + y = 0$;

л) $y''' - 2y'' = 0$; **м)** $y''' - 8y = 0$;

н) $y^{(4)} + 4y = 0$; **о)** $y^{(4)} - y = 0$;

п) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$; **р)** $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0$.

2.5. Линейные неоднородные уравнения

Теорема 6. *Если $y_ч(x)$ — частное решение уравнения (32), а $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений соответ-*

ствующего однородного уравнения, то общее решение $y(x)$ уравнения (16) представимо в виде

$$y(x) = y_ч(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{42}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — некоторые постоянные.

Замечание. В силу данной теоремы, чтобы решить линейное неоднородное уравнение, надо сначала найти общее решение соответствующего однородного уравнения (например вышеописанным способом) и какое-либо одно частное решение самого неоднородного уравнения. Их сумма и даст общее решение неоднородного уравнения.

Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$, частное решение можно искать *методом неопределенных коэффициентов*.

Для уравнений с правой частью

$$P_m(x) e^{\lambda_0 x}, \tag{43}$$

где $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, существует частное решение вида

$$y_ч = x^k Q_m(x) e^{\lambda_0 x}, \tag{44}$$

где $Q_m(x)$ — многочлен той же степени m с неопределенными коэффициентами. Число $k = 0$, если λ_0 — не корень характеристического уравнения (38), а если λ_0 — корень, то k равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (44) подставить в исходное дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях полученного соотношения.

Замечание. Уравнение с правой частью в виде многочлена $P_m(x)$ является частным случаем (43) при $\lambda_0 = 0$.

Пример 28. Решить уравнение $y'' - y = (3x+1)e^{2x}$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Правая часть есть функция вида (43), при $m = 1$ и $\lambda_0 = 2$. Так как λ_0 не является корнем характеристического уравнения, то полагаем в (44) $k = 0$. Тогда

$$y_ч = x^0 Q_1(x) e^{2x} = (a + bx)e^{2x}.$$

Чтобы найти коэффициенты a и b, найдем производные:

$$y_ч' = (2a + b + bx)e^{2x}, \ y_ч'' = (4a + 4b + 4bx)e^{2x}$$

и подставим их и $y_ч$ в исходное уравнение:

$$(4a + 4b + 4bx)e^{2x} - (a + bx)e^{2x} = (3x+1)e^{2x}.$$

Сокращаем на экспоненту и приводим подобные члены:

$$3bx + 4b + 3a = 3x + 1.$$

Теперь приравняем коэффициенты при подобных членах справа и слева:

$$3b = 3, \ 4b + 3a = 1.$$

Решая полученную систему линейных уравнений, находим, что $b = 1$ и $a = -1$. Таким образом, найденное частное решение имеет вид $y_ч = (x-1)e^{2x}$. Складывая его с общим решением y_0, получим общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (x-1)e^{2x}.$$

Для неоднородных уравнений с правой частью

$$e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x) \tag{45}$$

можно искать частное решение в виде

$$y_ч = x^k e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x), \tag{46}$$

где $k = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения, и k равно кратности корня $\alpha + \beta i$ в противном случае, а $R_m(x)$ и $T_m(x)$ — многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов P и Q. Чтобы найти коэффициенты многочленов R_m и T_m, надо подставить решение (46) в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Пример 29. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 4y' + 3y = 2\sin x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$. Правая часть

$$f(x) = 2\sin x = e^{0x}(0\cos x + 2\sin x)$$

является функцией вида (45) при $P_m(x) = 0$, $Q_m(x) = 2$, $m = 0$, $\lambda_0 = 0 + 1i = i$. Так как $\lambda = i$ не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$. Следовательно, данное уравнение имеет частное решение вида

$$y_ч = x^0 e^{0x}(T_0(x)\cos x + R_0(x)\sin x) = a\cos x + b\sin x.$$

Чтобы найти a и b, подставляем $y_ч$ в исходное уравнение:

$$y'_ч = -a\sin x + b\cos x,\ y''_ч = -a\cos x - b\sin x \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad y''_ч - 4y'_ч + 3y_ч = (2a - 4b)\cos x + (4a + 2b)\sin x = 2\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых синусах и косинусах, получим для a и b систему уравнений $2a - 4b = 0$, $4a + 2b = 2$. Решая эту систему, найдем $a = \dfrac{2}{5}$ и $b = \dfrac{1}{5}$. Следовательно, исходное уравнение имеет частное решение вида

$$y_ч = \frac{1}{5}(2\cos x + \sin x).$$

Если правая часть неоднородного уравнения есть сумма нескольких функций рассмотренного типа, то надо воспользоваться принципом суперпозиции: частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + \ldots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Пример 30. Решить уравнение $y'' - y' = x + 2e^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda = 0$ имеет два корня $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. Правая часть данного дифференциального уравнения является суммой двух функций вида (43):

1) $f_1(x) = x$, что соответствует параметрам $m = 1$ (степень многочлена x) и $\lambda_0 = 0$. Так как $\lambda = 0$ является корнем кратности 1 характеристического уравнения, то $k = 1$ и дифференциальное уравнение $y'' - y' = x$ имеет частное решение вида $y_1 = x^1 T_1(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx$.

2) $f_2(x) = 2e^{2x}$, что соответствует параметрам $m = 0$ (степень многочлена при e^{2x}) и $\lambda_0 = 2$. Так как $\lambda = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$ и дифференциальное уравнение $y'' - y' = 2e^{2x}$ имеет частное решение вида $y_2 = T_0(x)e^{2x} = ce^{2x}$.

Тогда, по принципу суперпозиции, исходное уравнение имеет частное решение

$$y_ч = y_1 + y_2 = ax^2 + bx + ce^{2x}. \tag{47}$$

Осталось найти неопределенные коэффициенты a, b и c. Для этого подставим функцию (47) в исходное уравнение:

$$y'_ч = 2ax + b + 2ce^{2x},\ y''_ч = 2a + 4ce^{2x} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad y''_ч - y'_ч = 2a + 4ce^{2x} - 2ax - b - 2ce^{2x} =$$
$$= -2ax + (2a - b) + 2ce^{2x} = x + 2e^{2x}.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных слагаемых, получим линейную систему для нахождения коэффициентов a, b и c:

$$\begin{cases} -2a = 1, \\ 2a - b = 0, \\ 2c = 2. \end{cases}$$

Решая ее, найдем $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 1$, т. е. искомое частное решение имеет вид

$$y_ч = -\frac{x^2}{2} - x + e^{2x}.$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения будет функция

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{x^2}{2} - x + e^{2x}.$$

Другим методом решения линейных неоднородных уравнений (с любой правой частью) является *метод вариации постоянных*. Пусть найдено общее решение $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n. \qquad (48)$$

Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \ldots, \\ C_1' {y_1}^{(n-1)} + \ldots + C_n' {y_n}^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (49)$$

Решая эту систему и интегрируя полученные выражения для C_i' (опуская константы интегрирования), находим функции $C_i(x)$. Подставляя их в (48), находим искомое частное решение неоднородного уравнения $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x)$.

Пример 31. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$.

Решение. Сначала решим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение для этого уравнения имеет вид $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, следовательно $\lambda_{1,2} = -1$ — один действительный корень кратности 2. Таким образом, фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = xe^{-x}$, а общее решение имеет вид

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}. \qquad (50)$$

Полагаем C_i в (50) функциями и составляем для производных этих функций систему (49):

$$\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' x e^{-x} = 0, \\ -C_1' e^{-x} + C_2'(1-x) e^{-x} = \frac{1}{xe^x}. \end{cases}$$

Складывая оба уравнения системы получим, что

$$C_2' e^{-x} = \frac{1}{xe^x} \;\Rightarrow\; C_2' = \frac{1}{x}.$$

Интегрируя, находим C_2:

$$C_2 = \ln x.$$

Подставляя $C_2' = \frac{1}{x}$ в первое уравнение системы, получим, что

$$C_1' e^{-x} + \frac{1}{x} x e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; C_1' = -1 \;\Rightarrow\; C_1 = -x.$$

Подставляя найденные выражения для C_1 и C_2 в (50), найдем частное решение исходного неоднородного уравнения:

$$y_ч = -xe^{-x} + x\ln xe^{-x}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения находится как сумма частного решения $y_ч$ и общего решения однородного уравнения y_0:

$$y(x) = -xe^{-x} + x\ln xe^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}.$$

Или, после упрощения:

$$y(x) = e^{-x}(C_1 + C_2x + x\ln x).$$

Упражнения

29. Решить дифференциальные уравнения методом неопределенных коэффициентов:

а) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$; **б)** $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;

в) $y''-6y'+8y = 8x^2-20x+24$; **г)** $2y'' - y' = 1$;

д) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$; **е)** $y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x}$;

ж) $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x$; **з)** $y'' + y = 16\cos 3x$;

и) $y'' + y = 4\cos x$; **к)** $y'' + y = -2\sin x$.

30. Решить дифференциальные уравнения методом вариации постоянных:

а) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$; **б)** $y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x}$;

в) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; **г)** $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$;

д) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; **е)** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

2.6. Уравнения Эйлера

Линейные уравнения вида

$$x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x), \qquad (51)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторые постоянные, называются уравнениями Эйлера. Уравнение (51) сводится к линейному заменой независимой переменной $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$). Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + \ldots + a_{n-2}\lambda(\lambda-1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^ky^{(k)}$ заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел:

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1).$$

Пример 32. Решить уравнение $x^2y'' + \dfrac{5}{2}xy' - y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1) + \frac{5}{2}\lambda - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda - 1 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_2 = -2$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y(t) = C_1e^{\frac{t}{2}} + C_2e^{-2t}.$$

Делая обратную замену $t = \ln x$, получаем искомое решение

$$y(x) = C_1x^{\frac{1}{2}} + C_2x^{-2}.$$

Упражнения

31. Решить уравнения Эйлера (для $x > 0$):

а) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; **б)** $x^2y'' - xy' - 3y = 0$;

в) $x^3y''' + xy' - y = 0$; **г)** $x^2y'' + xy' + y = 0$.

2.7. Интегрирование линейных уравнений с помощью степенных рядов

Значительно более сложными для решения являются линейные уравнения с переменными коэффициентами. В этом случае часто решение может быть найдено в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \tag{52}$$

где x_0 — некоторая точка, в окрестности которой нужно получить решение. Если решается начальная задача для линейного уравнения, то x_0 — точка, в которой задано начальное условие.

Известно, что если некоторая функция представима в виде степенного ряда, то этот ряд является рядом Тейлора данной функции:

$$y(x) = y(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{53}$$

т. е. коэффициенты степенного ряда равны

$$b_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Существование решения уравнения в виде степенного ряда обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 7. *Если все коэффициенты $a_i(x)$ линейного уравнения и его правая часть $f(x)$ разложимы в равномерно сходящийся ряд Тейлора в некоторой окрестности точки x_0, то и решение этого уравнения также разложимо в равномерно сходящийся ряд Тейлора в этой окрестности.*

В частности, если коэффициенты линейного уравнения являются многочленами от x, то такое уравнение удовлетворяет сформулированной теореме.

Для нахождения коэффициентов искомого степенного ряда можно воспользоваться методом последовательного дифференцирования. Рассмотрим работу этого метода на примерах.

Пример 33. Получить решение уравнения $y' - y = 0$ в окрестности точки $x_0 = 0$ с помощью степенного ряда.

Решение. Будем искать решение в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Отметим, что коэффициенты данного уравнения являются постоянными, которые разложимы в степенной ряд на всей числовой оси. Следовательно, по теореме (7) решение уравнения также представимо в виде степенного ряда на всей числовой оси. Обозначим $y(0) = C$. Подставим $x = 0$ в уравнение и найдем $y'(0) = y(0) = C$. Затем, последовательно дифференцируя уравнение и подставляя в него $x = 0$, найдем значения всех производных в нуле $y^{(n+1)}(0) = y^{(n)}(0) = \ldots = y'(0) = C$. Следовательно, ряд Тейлора для решения исходного уравнения имеет вид

$$y = C\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right).$$

Замечание. Из курса математического анализа известно, что найденный при решении данного примера степенной ряд является всюду сходящимся рядом функции $y = Ce^x$.

Пример 34. Получить с помощью степенного ряда решение уравнения

$$y'' - (x+1)y' + x^2 y = x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Первые два коэффициента разложения решения в степенной ряд в окрестности точки $x_0 = 0$ даны в начальном условии

$$b_0 = y(0) = 1 \text{ и } b_1 = y'(0) = 1.$$

Чтобы найти следующий коэффициент, подставим $x = 0$ в уравнение:

$$y''(0) - y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; y''(0) = y'(0) = 1 \;\Rightarrow\; b_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Чтобы найти остальные коэффициенты, последовательно дифференцируем уравнение и подставляем в него $x = 0$:

$$y''' - (x+1)y'' - y' + x^2y' + 2xy = 1 \Rightarrow y'''(0) = 3,$$

$$y^{(4)} - (x+1)y''' - 2y'' + x^2y'' + 4xy' + 2y = 0 \Rightarrow y^{(4)} = 3.$$

Таким образом,

$$b_3 = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2} \text{ и } b_4 = \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, первые пять членов искомого степенного ряда имеют вид

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots.$$

Замечание. В общем случае невозможно получить общую формулу для всех коэффициентов степенного ряда (как это было сделано в первом примере), и поэтому приходится ограничиваться несколькими первыми членами ряда. Их количество обычно определяется необходимой точностью представления решения.

Упражнения

32. Найти разложение решения дифференциального уравнения в степенной ряд в окрестности точки x_0 до четвертого порядка включительно:

а) $y' + x^2y = x$, $y(1) = 0$;

б) $y' - xy + x^2 = 0$, $y(0) = 2$;

в) $y'' - xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

г) $y'' + y' + 4xy = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.8. Краевые задачи

В простейшем случае для отыскания решения краевой задачи

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), x_1 \le x \le x_2, \tag{54}$$

$$\alpha_1 y'(x_1) + \beta_1 y(x_1) = \gamma_1,\ \alpha_2 y'(x_2) + \beta_2 y(x_2) = \gamma_2 \tag{55}$$

надо подставить общее решение дифференциального уравнения (54) в краевые условия (55) и из этих условий определить (если это возможно) значения констант, входящих в общее решение. В отличие от задачи Коши, краевая задача не всегда имеет решение.

Пример 35. Найти решение уравнения $y'' + y = 1$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0) = 0$ и $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решение. Находим каким-либо из вышеописанных методов общее решение дифференциального уравнения

$$y(x) = 1 + C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Подставляя эту функцию в первое краевое условие $1 + C_2 = 0$, находим $C_2 = -1$. Подставляя $y = 1 + C_1 \sin x - \cos x$ во второе условие $1 + C_1 = 1$, находим $C_1 = 0$. Таким образом, искомым решением краевой задачи является функция $y = 1 - \cos x$.

Известно, что если решение краевой задачи (54, 55) с однородными граничными условиями ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) существует и единственно, то оно представимо в виде

$$y(x) = \int\limits_{x_1}^{x_2} G(x,s)f(s)ds. \tag{56}$$

Функция $G(x,s)$, называемая функцией Грина краевой задачи (54, 55), имеет вид

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)y_1(x),\ x_1 \le x \le s; \\ b(s)y_2(x),\ s \le x \le x_2. \end{cases} \tag{57}$$

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются нетривиальными решениями соответстующего однородного уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

удовлетворяющими левому и правому граничному условию (55) соответственно. Функции $a(s)$ и $b(s)$ определяются из условий

$$b(s)y_2(s) = a(s)y_1(s),\ b(s)y_2'(s) = a(s)y_1'(s) + 1. \qquad (58)$$

Пример 36. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Подставляем его в левое граничное условие:

$$y(0) = C_1 = 0 \ \Rightarrow\ y_1(x) = \sin x.$$

Подставляя $y(x)$ в правое граничное условие, находим

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 = 0 \ \Rightarrow\ y_2(x) = \cos x.$$

Составляем систему (58) для поиска функций $a(s)$ и $b(s)$:

$$b \cos s = a \sin s,\ -b \sin s = a \cos s + 1.$$

Из первого уравнения выражаем $b = a \operatorname{tg} s$, подставляем это выражение во второе уравнение $-a \operatorname{tg} s \sin s = a \cos s + 1$, откуда находим $a = -\cos s$. Следовательно, $b = -\cos s \operatorname{tg} s = -\sin s$. Таким образом, искомая функция Грина имеет вид

$$G(x,s) = \begin{cases} -\cos s \sin x,\ 0 \le x \le s, \\ -\sin s \cos x,\ s \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Упражнения

33. Найти решение уравнения, удовлетворяющее указанным краевым условиям:

а) $y'' - y = 2x,\ y(0) = 0,\ y(1) = -1;$

б) $y'' + y = 1,\ y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

в) $y'' - y' = 0,\ y(0) = -1,\ y'(1) - y(1) = 2;$

г) $y'' + y' = 1,\ y'(0) = 0,\ y(1) = 1.$

34. Построить функцию Грина краевой задачи:

а) $y'' = f(x),\ y(0) = 0,\ y(1) = 0;$

б) $y'' + y = f(x),\ y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0;$

в) $y'' - y = f(x),\ y'(0) = 0,\ y'(2) + y(2) = 0;$

г) $y'' + y' = f(x),\ y(0) = 0,\ y'(1) = 0.$

3. Системы дифференциальных уравнений

3.1. Основные понятия

Будем расматривать системы дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$ в виде, разрешенном относительно производных:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{cases} \tag{59}$$

Системы вида (59) называются *нормальными системами*. *Решением* системы (59) называется набор функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, подстановка которого в систему обращает каждое уравнение системы в тождество.

Замечание. Производные вида $\dfrac{dx}{dt}$ будем обозначать $\dot{x}$.

Наиболее общий метод интегрирования систем дифференциальных уравнений состоит в исключении всех неизвестных функций, кроме одной, для которой получаем одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Решая это уравнение, определяем одну из неизвестных функций, а остальные находим из исходных уравнений, подставляя туда ранее найденные функции.

Пример 37. Решить систему $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = -2x + 4y$.

Решение. Из первого уравнения выражаем y через x и $\dot{x}$:

$$y = \dot{x} - x, \tag{$*$}$$

откуда дифференцированием находим $\dot{y}$:

$$\dot{y} = \ddot{x} - \dot{x}.$$

Подставляем эти выражения во второе уравнение системы:

$$\ddot{x} - \dot{x} = -2x + 4(\dot{x} - x) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0.$$

Для функции $x(t)$ получили уравнение второго порядка. Это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Следовательно, $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$. Подставляя найденную функцию $x(t)$ в $(*)$, найдем $y(t)$:

$$y = \dot{x} - x = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t} - C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t}.$$

Упражнения

35. Решить систему методом исключения неизвестных:

а) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

3.2. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \tag{60}$$

где A — постоянная матрица, называется *линейной однородной системой с постоянными коэффициентами*. Для таких систем возможно построение фундаментальной системы решений (а значит и общего решения) с помощью чисто алгебраических операций. Такое построение обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 8. *Пусть* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *— простые корни характеристического уравнения* $\det(A - \lambda E) = 0$, *и пусть* α^i *— нетривиальное решение уравнения* $(A - \lambda_i E)\alpha = 0$ *(называемое собственным* *вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ_i). Тогда столбцы $\alpha^i e^{\lambda_i t}$ $(i = 1, \ldots, n)$ образуют фундаментальную систему решений системы* (60).

Пример 38. Решить систему $\dot{x_1} = x_1 + 4x_2$, $\dot{x_2} = x_1 + x_2$.

Решение. Матрица правой части данной системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1,\; \lambda_2 = 3.$$

Имеем два несовпадающих корня. Для каждого ищем соответствующий собственный вектор.

Для $\lambda = -1$ система для определения собственного вектора α^1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \end{pmatrix} = 0.$$

Видно, что второе уравнение в этой системе есть следствие первого. Следовательно, ранг системы равен 1, и одна из переменных (например, α_2^1) является свободной. Тогда можем положить $\alpha_2^1 = 1$, тогда $\alpha_1^1 = -2$.

Для $\lambda = 3$ система для определения второго собственного

вектора α^2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Опять второе уравнение является следствием первого, т. е. одна из переменных (например, α_2^2) является свободной. Тогда можем положить $\alpha_2^2 = 1$, откуда $\alpha_1^2 = 2$.

Таким образом, фундаментальная система решений состоит из двух столбцов

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \right\},$$

а общее решение, соответственно, имеет вид

$$x = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} -2C_1e^{-t} + 2C_2e^{3t} \\ C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексно сопряженных корней, то чтобы получить соответствующую им пару действительных решений системы, поступают следующим образом. Для одного из корней находят собственный (комплекснозначный) вектор и строят соответствующее комплексное решение. Затем в качестве искомой пары решений берут действительную и мнимую части найденного решения.

Пример 39. Решить систему $\dot{x_1} = x_1 - x_2$, $\dot{x_2} = 2x_1 - x_2$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (1-\lambda)(-1-\lambda)+2=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \lambda^2+1=0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2}=\pm i.$$

Имеем пару комплексно сопряженных корней. Выбираем один из них, например, $\lambda = i$, и для него ищем собственный вектор.

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \end{pmatrix} = 0.$$

Нетрудно проверить, что ранг системы равен 1, и одна из переменных (например, α_1^1) является свободной. Тогда можем положить $\alpha_1^1 = 1$, тогда $\alpha_2^1 = 1-i$.

Находим комплекснозначное решение

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ \cos t - \sin t + i(\sin t - \cos t) \end{pmatrix}.$$

В качестве пары решений для фундаментальной системы решений выбираем действительную и мнимую части найденного вектора:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} \right\}.$$

Вышеописанный метод работает только в случае, если характеристическое уравнение не имеет кратных корней. Если же имеется корень λ кратности k, то для поиска k линейно независимых

решений, соответствующих этому корню, можно применить следующий метод. Решение ищется в виде

$$x = P(t)e^{\lambda t}, \tag{61}$$

где $P(t)$ — вектор, компоненты которого являются многочленами степени $(k-1)$ с неопределенными коэффициентами. Значения этих коэффициентов определяются подстановкой вектора (61) в исходную систему и приравниванием множителей при одинаковых степенях t. В результате для нахождения коэффициентов получается система линейных уравнений, имеющая ранг k. Далее следует обозначить независимые переменные в этой системе как $C_1, \ldots, C_k$ и выразить все остальные переменные через эти константы.

Пример 40. Решить систему $\dot{x_1} = x_2$, $\dot{x_2} = 2x_2 - x_1$.

Решение. Характеристическое уравнение для данной системы имеет один корень $\lambda = 1$ кратности 2. Ищем решение в виде $x_1 = (at+b)e^t$ и $x_2 = (ct+d)e^t$. Подставляем эти функции в систему и после сокращения на $e^t \neq 0$ получаем систему для нахождения коэффициентов a, b, c и d:

$$\begin{cases} a+b=d, \\ a=c, \\ a=c, \\ c+d=2d-b. \end{cases}$$

Видно, что последние два уравнения являются следствием первых двух. Исключая их из системы, получаем два уравнения относительно четырех переменных. Обозначая $c = C_1$ и $d = C_2$, находим $a = C_1$ и $b = C_2 - C_1$. Следовательно, общее решение системы имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} C_1t + C_2 - C_1 \\ \\ C_1t + C_2 \end{pmatrix} e^t = C_1 \begin{pmatrix} t-1 \\ \\ t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Упражнения

36. Решить систему, используя собственные значения матрицы правой части:

а) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

3.3. Метод вариации постоянных

Общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax + f(t)$ всегда может быть представлено в виде суммы частного решения $x_ч$ этой системы и общего решения x_0 соответствующей однородной системы $\dot{x} = Ax$ (с той же матрицей правой части). Для нахождения частного решения неоднородной системы можно воспользоваться методом вариации постоянных. Пусть известна фундаментальная система решений

$\{x^i,\ i = 1, \ldots, n\}$ соотвествующей однородной системы. Тогда существует частное решение $x_ч$ неоднородной системы в виде линейной комбинации

$$x_ч = C_1(t)x^1 + \ldots + C_n(t)x^n,$$

коэффициенты $C_i(t)$ которой могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} \dot{C}_1x_1^1 + \ldots + \dot{C}_nx_1^n = f_1, \\ \ldots, \\ \dot{C}_1x_n^1 + \ldots + \dot{C}_nx_n^n = f_n. \end{cases}$$

Пример 41. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2e^{4t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y + 3e^{4t}. \end{cases}$$

Решение. Это неоднородная система с правой частью

$$f(t) = (e^{4t}, 2e^{4t})^T.$$

Соответствующая однородная система совпадает с системой из примера 37, следовательно, ее общее решение имеет вид

$$x_0 = C_1e^{2t} + C_2e^{3t},$$

$$y_0 = C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t}.$$

Полагаем C_1 и C_2 функциями, для производных которых составляем систему

$$\begin{cases} \dot{C}_1e^{2t} + \dot{C}_2e^{3t} = 2e^{4t}, \\ \dot{C}_1e^{2t} + 2\dot{C}_2e^{3t} = 3e^{4t}. \end{cases} \qquad (*)$$

Вычитая из второго уравнения первое, найдем $\dot{C}_2$:

$$\dot{C}_2 e^{3t} = e^{4t} \;\Rightarrow\; \dot{C}_2 = e^t \;\Rightarrow\; C_2 = e^t.$$

Умножая первое уравнение на 2 и вычитая из него второе, найдем $\dot{C}_1$:

$$\dot{C}_1 e^{2t} = e^{4t} \;\Rightarrow\; \dot{C}_1 = e^{2t} \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{1}{2}e^{2t}.$$

Подставляя найденные функции в (*), получим искомое частное решение

$$x_ч = \frac{1}{2}e^{2t}e^{2t} + e^t e^{3t} = \frac{3}{2}e^{4t},$$
$$y_ч = \frac{1}{2}e^{2t}e^{2t} + 2e^t e^{3t} = \frac{5}{2}e^{4t}.$$

Следовательно, искомое общее решение имеет вид

$$x = x_0 + x_ч = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{3}{2}e^{4t},$$
$$y = y_0 + y_ч = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t} + \frac{5}{2}e^{4t}.$$

Упражнения

37. Решить систему, используя метод вариации постоянных:

а) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{1+e^{2t}}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

3.4. Исследование на устойчивость

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = F(x). \tag{62}$$

Такого рода системы (с правой частью, не зависящей явным образом от t) называются *автономными*.

Определение 20. *Точка $x^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ называется **точкой покоя** системы* (62), *если $F(x^0) = 0$.*

Как вытекает из определения, точка покоя — это постоянное (не зависящее от t) решение системы (62).

Определение 21. *Точка покоя x^0 системы* (62) *называется **устойчивой** (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что для любого решения $x(t)$ этой системы, удовлетворяющего условию $||x(0) - x^0|| < \delta(\varepsilon)$, для всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$||x(t) - x^0|| < \varepsilon. \tag{63}$$

Определение 22. *Точка покоя x^0 системы* (62) *называется **асимптотически устойчивой**, если 1) она устойчива; 2) $\lim\limits_{t\to\infty} ||x(t) - x^0|| = 0$.*

Определение 23. *Линейная система дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$, элементы матрицы которой определяются формулой*

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{x=x^0}, \tag{64}$$

*называется **линеаризованной** системой (или системой **первого приближения**) для системы* (62) *в точке x^0.*

Теорема 9. *Точка покоя x^0 системы* (62) *является асимптотически устойчивой, если **все** собственные значения матрицы* (64) *линеаризованной системы имеют отрицательную действительную часть. Точка покоя является неустойчивой, если **хотя бы одно** собственное значение матрицы линеаризованной системы имеет положительную действительную часть.*

Пример 42. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-y} - 2\sin x - 1, \\ \dot{y} = \ln(\cos y - 3x). \end{cases}$$

Решение. Во-первых, заметим, что тривиальное решение $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ является точкой покоя данной системы, т. к. обращает в ноль правую часть системы. Построим теперь систему первого приближения для данной системы. Для этого вычисляем первые частные производные правых частей в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} (e^{-y} - 2\sin x - 1)'_x &= -2\cos x \quad \Rightarrow \quad a_{11} = -2, \\ (e^{-y} - 2\sin x - 1)'_y &= -e^{-y} \quad \Rightarrow \quad a_{12} = -1, \\ (\ln(\cos y - 3x))'_x &= \frac{-3}{\cos y - 3x} \quad \Rightarrow \quad a_{21} = -3, \\ (\ln(\cos y - 3x))'_y &= -\frac{\sin y}{\cos y - 3x} \quad \Rightarrow \quad a_{21} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = -3x. \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение для построенной системы.

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1.$$

Так как одно из собственных значений положительно (т. е. имеет положительную действительную часть), то по теореме 9 тривиальное решение заданной системы является неустойчивым.

Пример 43. Найти все точки покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(y-2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

и исследовать их на устойчивость.

Решение. Для нахождения точек покоя системы приравниваем правые части к нулю:

$$\begin{cases} (x+1)(y-2) = 0, \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

и решаем полученную алгебраическую систему. Из первого уравнения следует, что либо $x = -1$ либо $y = 2$. Подставляя эти значения во второе уравнение, получим $y = -2$ и $x = 1$ соответственно. Следовательно, заданная система имеет две точки покоя $N(-1, -2)$ и $M(1, 2)$. Прежде чем исследовать их на устойчивость, вычислим частные производные правых частей $f_1(x, y) = (x+1)(y-2)$ и $f_2(x, y) = xy - 2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y - 2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x + 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x.$$

1) Рассмотрим точку $N(-1, -2)$. Матрица линеаризованной системы в этой точке имеет вид (в вычисленные выше частные производные подставляем $x = -1$ и $y = -2$)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -1.$$

Так как $\mathbf{Re}\lambda_{1,2} < 0$, то по теореме 9 точка N является устойчивой точкой покоя.

2) Рассмотрим теперь точку $M(1,2)$. Матрица линеаризованной системы в этой точке имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Так как $\mathbf{Re}\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} > 0$, то по теореме 9 точка M является неустойчивой точкой покоя.

Упражнения

38. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

а) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y; \end{cases}$

39. Найти все точки покоя системы и исследовать их на устойчивость:

а) $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1), \\ \dot{y} = xy - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x+y); \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$

4. Контрольные задания

1. Решить уравнение с разделяющимися переменными:

1) $(x^2+2)y^2dy = -xdx$;

2) $(x-2)(3y-4)dy = (-3x+1)(y-3)dx$;

3) $(2x-1)(y-2)dx = (x-2)(3y+1)dy$;

4) $(2x-3)(y^2+3)dx = 2y^2dy$;

5) $(x^2-1)yy' = (x^2-3)(2y-1)$;

6) $(3x-2)y' = -3x(3y-1)$;

7) $(x+1)(y+1)y' = (x^2-1)y$;

8) $2xdy = (x^2-1)(y^2+3)dx$;

9) $(x-3)dy = x^2(3y-2)dx$;

10) $3(-3y+4)y' = (-2x+3)(2y-3)$;

11) $x^2ydx = (x^2-2)dy$;

12) $x(y^2-3)dx = -3x(y^2-1)dy$.

2. Решить уравнение:

1) $y' = (x+y)^2$;

2) $y' = \dfrac{1}{x-y+1}$;

3) $y' = \sqrt{2x+y}$;

4) $y' = (x-y)^2$;

5) $y' = \dfrac{x+2y}{x+2y+1}$;

6) $y' = \sqrt{4y-x}$;

7) $y' = (4x+y-2)^2$;

8) $y' = \dfrac{2-x-y}{1+x+y}$;

9) $y' = \sqrt{x+y}$;

10) $y' = (4x-y+1)^2$;

11) $y' = \dfrac{2}{x+y}$;

12) $y' = \sqrt{x-y}$.

3. Решить однородное уравнение:

1) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$;

2) $y - 2x\operatorname{ctg}\dfrac{3y+2x}{x} = xy'$;

3) $(y + 2x\sin^2\dfrac{y}{x})dx = xdy$;

4) $(y - 4x\cos^2\dfrac{y}{x})dx = xdy$;

5) $xy' = y - 4xe^{\frac{-2y+x}{x}}$;

6) $xy' = y - 3x\operatorname{tg}\dfrac{2y}{x}$;

7) $(y + 3x\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x})dx = xdy$;

8) $xy' - y = 2\sqrt{4x^2-y^2}$;

9) $(y - 3x\operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x})dx = xdy$;

10) $(y - 4xe^{\frac{-2y+2x}{x}})dx = xdy$;

11) $xy' = y - 3x\cos^2\dfrac{y+2x}{x}$;

12) $(y - 4x\sin^2\dfrac{y+x}{x})dx = xdy$.

4. Решить уравнение с линейными коэффициентами:

1) $y' = \dfrac{-x+y}{3x+y-4}$;

2) $y' = \dfrac{3x+y-5}{y-x-1}$;

3) $y' = \dfrac{2y+2x-2}{3x+y-3}$;

4) $y' = \dfrac{2x-y+1}{y-3}$;

5) $y' = \dfrac{2x+2y}{x-y-2}$;

6) $y' = \dfrac{2y-x+5}{2x+y}$;

7) $y' = \dfrac{3y-x-1}{x+y-3}$;

8) $y' = \dfrac{4x-y-2}{y-x-1}$;

9) $y' = \dfrac{y-4x+2}{5x+y-7}$;

10) $y' = \dfrac{x+3y+2}{3x+y-2}$;

11) $y' = \dfrac{y-4x+1}{x+y-4}$; 12) $y' = \dfrac{3x-6y+3}{y-2x+1}$.

5. Решить линейное уравнение:

1) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x$; 2) $y' = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2} - \dfrac{2y}{x}$;

3) $xy' + y = x\sqrt{1+x^2}$; 4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + x^5$;

5) $y' = \dfrac{y}{x} - x^2$; 6) $x^2y' + 2xy = 1$;

7) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = e^{-x}$; 8) $y' = \dfrac{2y}{x} + x\ln x$;

9) $xy' - y = x^2\cos x$; 10) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3$;

11) $y' = (x-1)^2 - \dfrac{y}{x}$; 12) $xy' - 2y = x - x^2$.

6. Решить уравнение Бернулли:

1) $y' - y = x^2y^2$; 2) $y' + y = \dfrac{x+1}{y}$;

3) $y' - 4y = e^{2x}\sqrt{xy}$; 4) $y' - y = y^3\cos x$;

5) $y' + y = e^{2x}y^2$; 6) $y' + 2y = y^{-1}$;

7) $y' - 2y = e^{x+1}\sqrt{y}$; 8) $y' - 2y = e^{1-2x}y^3$;

9) $y' - 2y = (1+e^x)y^2$; 10) $y' - y = \dfrac{e^{1-x}}{y}$;

11) $y' + 2y = \sin x\sqrt{y}$; 12) $y' + 3y = \left(ye^{2x}\cos x\right)^3$.

7. Проверить, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решить его:

1) $6xy^3dx + (2y + 9y^2x^2)dy = 0$; 2) $(x + 3x^2y^3)dx + 3y^2x^3dy = 0$;

3) $2xydx + (2y + x^2)dy = 0$; 4) $2xy^2dx - (3y^2 - 2yx^2)dy = 0$;

5) $(12x^3 - 5y^2)dx - 10yxdy = 0$; 6) $-ydx + (5y - x)dy = 0$;

7) $-2xy^2dx + (y - 2yx^2)dy = 0$; 8) $(2x^2 - x^2y^3)dx - y^2x^3dy = 0$;

9) $-ydx + (y^2 - x)dy = 0$; 10) $4ydx + (9y^2 + 4x)dy = 0$;

11) $3x^2ydx - (5y^4 - x^3)dy = 0$; 12) $5y^2dx + (6y + 10yx)dy = 0$.

8. Решить уравнение, не разрешенное относительно производной:

1) $y = y'^2 + 2y'^3$; 2) $x = y'^2 - 2y'^3$;

3) $y = (y'-1)e^{y'}$; 4) $y = y'^3 - y' + 2$;

5) $x = y'^3 - y' - 1$; 6) $x = \sqrt{y'} - 3y'$;

7) $y'(x - \ln y') = 1$; 8) $y = \ln(1 + y'^2)$;

9) $y = (y'-1)\ln y'$; 10) $x = \ln y'^2 + 1$;

11) $y = \sqrt{y'} + 4y'$; 12) $y = y'^2 + \ln y'$.

9. Решить задачу Коши:

1) $\ln x dx - xy^2dy = 0,\ y(1) = 3$;

2) $y\ln y dx - x^2dy = 0,\ y(1) = e$;

3) $\cos^2 y dx - \sqrt{x}\sin y dy,\ y(0) = 1$;

4) $xdx + e^x\sin y dy = 0,\ y(0) = \dfrac{\pi}{2}$;

5) $4x\ln x\sin^2 y dx - dy = 0,\ y(e) = \dfrac{\pi}{4};$

6) $xdx + 4y\sqrt{1-x^2}dy = 0,\ y(-1) = 1;$

7) $x^2e^y dx - (1+x^6)dy = 0,\ y(1) = 0;$

8) $(x+1)\operatorname{tg} y dx - \sqrt{x^2-4}dy = 0,\ y(2) = \dfrac{\pi}{6};$

9) $\operatorname{arctg} x\sqrt{y}dx - \dfrac{1+x^2}{4}dy = 0,\ y(0) = 4;$

10) $(e^{2x}-1)y^2dx - (y+1)e^x dy = 0,\ y(0) = 1;$

11) $e^{\frac{1}{x}}dx - x^2\cos^3 y dy = 0,\ y(1) = 0;$

12) $x^2dx + (2-x^2)\sin^3 y dy = 0,\ y(0) = 0;$

10. Решить задачу Коши:

1) $xydy - (x^2+2y^2)dx = 0,\ y(1) = 2;$

2) $x^2dy - (2xy+3)dx = 0,\ y(-1) = 2;$

3) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0,\ y(0) = e;$

4) $(x^2+y^2+x)dx + 2xydy = 0,\ y(-3) = 1;$

5) $(2y - x^4)dx + xdy = 0,\ y(1) = 0;$

6) $(x^2-3y^2)dx + 2xydy = 0,\ y(2) = 1;$

7) $(3x^2y - y^2)dy - (x^3 - 3xy^2 + 2)dx = 0,\ y(2) = 3;$

8) $xdy + (y - e^x)dx = 0,\ y(1) = e;$

9) $2x\cos y dx - (y + x^2\sin y)dy = 0,\ y(0) = 2;$

10) $xdy - (y + \sqrt{x^2+y^2})dx = 0,\ y(1) = 0;$

11) $(e^y\ln x - 2y)dy + \left(1 + \dfrac{e^y}{x}\right)dx = 0,\ y(1) = 0;$

12) $xdy - (y + x^2\cos x)dx = 0,\ y(\pi) = \pi.$

11. Решить линейное уравнение:

1) $y'' + y' - 2y = 0;$

2) $y'' - y' - 2y = 0;$

3) $y'' + 3y' = 0;$

4) $y'' - 3y' - 4y = 0;$

5) $y'' - 5y' + 4y = 0;$

6) $y'' + 2y' - 3y = 0;$

7) $y'' - 2y' = 0;$

8) $y'' - y' + 6y = 0;$

9) $y'' - 2y' - 8y = 0;$

10) $y'' + 6y' + 5y = 0;$

11) $y'' - 2y' - 15y = 0;$

12) $y'' - 4y = 0.$

12. Решить линейное уравнение:

1) $y'' - 4y' + 5y = 0;$

2) $y'' - 2y' + 2y = 0;$

3) $y'' + 2y' + 2y = 0;$

4) $y'' + 4y' + 5y = 0;$

5) $y'' - 6y' + 13y = 0;$

6) $y'' + 4y' + 13y = 0;$

7) $y'' + 2y' + 17y = 0;$

8) $y'' - 2y' + 10y = 0;$

9) $y'' - 4y' + 29y = 0;$

10) $y'' - 10y' + 26y = 0;$

11) $y'' + 8y' + 25y = 0$; 12) $y'' - 14y' + 50y = 0$.

13. Решить линейное уравнение:

1) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$; 2) $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 0$;

3) $y''' - y'' - y' + y = 0$; 4) $y''' + 5y'' + 8y' + 4y = 0$;

5) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$; 6) $y''' + y'' - y' - y = 0$;

7) $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$; 8) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$;

9) $y''' + 4y'' - 3y' + 18y = 0$; 10) $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$;

11) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0$; 12) $y''' + 5y'' + 3y' - 9y = 0$.

14. Решить линейное неоднородное уравнение методом неопределенных коэффициентов:

1) $y'' + 3y' = -3$; 2) $y'' + 2y' - 3y = x + 1$;

3) $y'' + 2y' = 4e^{-2x}$; 4) $y'' + 2y' + y = 3e^{-2x}$;

5) $y'' - y = 3e^{2x}$; 6) $y'' - y' = \cos x$;

7) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$; 8) $y'' - 2y' = 4xe^{x}$;

9) $y'' + 2y' + 10y = 2x + 1$; 10) $y'' + 9y = \cos 2x$;

11) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}$; 12) $y'' + 4y = \sin 2x$.

15. Решить линейное неоднородное уравнение методом вариации постоянных:

1) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctg} x$; 2) $y'' + 9y = \dfrac{6}{\cos^3 3x}$;

3) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$; 4) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{10e^{-2x}}{x^2 + 9}$;

5) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^3}$; 6) $y'' - y = \dfrac{1}{e^{x} - 1}$;

7) $y'' - 2y' + 2y = e^{x} \operatorname{tg} x$; 8) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\sin^3 x}$;

9) $y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x$; 10) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{3e^{2x}}{\sqrt{x + 1}}$;

11) $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{x^2 e^{x}}$; 12) $y'' + y' = \dfrac{1}{e^{x} + 2}$.

16. Решить уравнение Эйлера:

1) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$; 2) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$;

3) $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$; 4) $x^2y'' - xy' + y = 0$;

5) $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$; 6) $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$;

7) $x^2y'' - xy' - 8y = 0$; 8) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$;

9) $x^2y'' + 5xy' + 5y = 0$; 10) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$;

11) $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$; 12) $x^2y'' - 5xy' + 13y = 0$.

17. Найти разложение решения дифференциального уравнения в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$ до четвертого порядка включительно:

1) $y'' + x^2y' + y = -x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

2) $y'' - xy' + y = e^{x} + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

3) $y'' - y' + x^2y = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;

4) $y'' + xy' + xy = x^2 - 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;

5) $y'' + (1+x)y' - 2y = 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

6) $y'' - 2y' + (1-x)y = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

7) $y'' + e^x y' - y = 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

8) $y'' - xy' + (1+x^2)y = 1$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$;

9) $y'' - 3y' + e^{2x}y = x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

10) $y'' + 4xy' + y = \ln(1+x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

11) $y'' + (1-x^2)y' + y = e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;

12) $y'' + e^{-x}y' - 3y = 1 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. Найти решение краевой задачи:

1) $y'' + 4y = 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;

2) $y'' + 2y' + y = 3e^{-2x}$, $y(0) = -1$, $y(1) = 0$;

3) $y'' - 2y' + 2y = e^x$, $y(0) = 2$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

4) $y'' + y' = 4e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y(1) = 0$;

5) $y'' + 2y' - 3y = 3x + 1$, $y(-1) = 0$, $y(1) = -2$;

6) $y'' + 9y = 5\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

7) $y'' + y = 2x + 1$, $y(0) = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

8) $y'' + 3y' = -3$, $y(0) = 0$, $y(1) = -1$;

9) $y'' - 2y' = 4xe^x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$;

10) $y'' - y' = 2\cos x$, $y(0) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

11) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{e}$;

12) $y'' - y = 3e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y(2) = 0$.

19. Решить систему:

1) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -3x + 4y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y, \\ \dot{y} = 3x - y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + 3y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 5x - y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -8x - 2y; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 2x; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

20. Решить систему:

1) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + t, \\ \dot{y} = 3x + 4y + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y + e^{-t}, \\ \dot{y} = -3x - y - e^{-t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{2t}, \\ \dot{y} = 4x + 5y + e^{2t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = 5y - x + e^{t}, \\ \dot{y} = 3y - x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 1, \\ \dot{y} = 5x - y - e^{t}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y + e^{-t}, \\ \dot{y} = 2x + 3y - e^{2t}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 8x - 2y + \sin 2t; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2x - \cos 2t, \\ \dot{y} = -2x + 2y; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{3t}, \\ \dot{y} = -x + 4y; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^{2t}, \\ \dot{y} = y - x - e^{2t}; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - e^{-t}, \\ \dot{y} = -2x - 3y; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2e^{-3t}. \end{cases}$

21. Исследовать тривиальное решение на устойчивость по первому приближению:

1) $\begin{cases} \dot{x} = \arcsin(-x - y), \\ \dot{y} = 2x - 4y - x^2 + y^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = \sin(-4x - y), \\ \dot{y} = 2x - y - x^2 + y^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = e^{4x+7y} - 1, \\ \dot{y} = -2x - 5y + x^2 + y^3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(4x + y), \\ \dot{y} = -7x - 4y - 2xy^2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = \arcsin(-2x - 3y), \\ \dot{y} = -y + \sin^2 x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = y - 2xy^2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(2x - y); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 3y + xy, \\ \dot{y} = \ln(4x + 4y + 1); \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = y - 2xy^2, \\ \dot{y} = \arcsin(2x + y); \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 3y + 3x^2, \\ \dot{y} = e^{4x+5y} - 1; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(5x - 3y), \\ \dot{y} = 4x - 3y + xy; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(-y + 1), \\ \dot{y} = 2x + 3y + \sin^2 x; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y - x^2 + y^2, \\ \dot{y} = e^{4x-4y} - 1. \end{cases}$

22. Найти все точки покоя системы и исследовать их на устойчивость:

1) $\begin{cases} \dot{x} = (x + y)(x - 1), \\ \dot{y} = 2x + y + 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2x + 2, \\ \dot{y} = 1 - x - y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y+x-8), \\ \dot{y} = x - 2y + 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = y - x - x^2, \\ \dot{y} = x + y - 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = y - 4x + 4, \\ \dot{y} = x^2 - y - 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = (1-x)(y-x-1), \\ \dot{y} = x + 2 - y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = (y-4)(y-x+1); \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = x + y - y^2, \\ \dot{y} = 1 - x - y; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y - 6, \\ \dot{y} = (y-2)(3-x); \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 1, \\ \dot{y} = x + 2y - y^2 - 1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dot{x} = (x+2)(y+x), \\ \dot{y} = x + 2 - y; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 3y - x + 1, \\ \dot{y} = 2 - x - 3y. \end{cases}$

5. Ответы к упражнениям

1. **а)** является; **б)** является;

в) не является; **г)** является;

д) не является; **е)** не является.

2. **а)** $y = \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$; **б)** $y = \dfrac{(x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x - x}{2} + C$;

в) $y = \dfrac{1}{4}\arcsin x^4 + C$; **г)** $y = \mathrm{arctg}\,e^x + C$;

д) $y = x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(x+1)^2 + C$; **е)** $y = \ln\sqrt{x^2+1} + C$.

3. **а)** $y = 1 + \ln|x|$; **б)** $y = \dfrac{13\cos^5 x - 5\cos^2 x + 3}{15\cos^5 x}$;

в) $\ln\dfrac{2(x-2)^2}{|x-1|}$; **г)** $y = \sin x - x\cos x$.

4. **а)** $y = -\dfrac{1}{x+C}$, $y = 0$; **б)** $y = 2 + Ce^x$;

в) $y = C\ln x$; **г)** $y = 2x^2$;

д) $y = C(x+1)e^{-x}$; **е)** $x^2 + y^2 - 2\ln x = C$;

ж) $y = 2 - 4\cos x$; **з)** $y = 1$;

и) $y = \dfrac{1}{1 + \ln|1-x^2|}$; **к)** $\sqrt{1+y^2} - \ln x = C$;

л) $s + t - \ln|e^s - 1| = C$; **м)** $z = -\lg(C - 10^x)$;

н) $y = \dfrac{1}{1+x}$; **о)** $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

5. $x = 3y^2$.

6. $y = Cx$, $y = \dfrac{C}{x}$.

7. $200\ln 20 \approx 600$ с.

8. $10e^{-3} \approx 0,5$ кг.

9. 40 мин.

10. $4\left(\dfrac{2}{\lg 1,5}+1\right) \approx 50$ с.

11. $60\log_2 10 \approx 200$ дней.

12. $\dfrac{\ln 0,5}{\ln(1-0,00044)} \approx 1575$ лет.

13. **а)** $y = 1 - x + \operatorname{tg}(x + C)$;

б) $y = 1 - 2x + Ce^x$;

в) $\operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2} = x + C,\ y = x + 2\pi k,\ k \in Z$;

г) $2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = \sqrt{4x+2y-1} - x + C$.

14. **а)** $y = Cx^2 - x$; **б)** $\ln(x^2+y^2) + 2\operatorname{arctg}(\dfrac{y}{x}) = C$;

в) $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$; **г)** $y = -x\ln\ln Cx$;

д) $y = \dfrac{Cx^2}{Cx-1},\ y = x$; **е)** $y^2 = \dfrac{x^2}{C+\ln x},\ y = 0$.

15. $x^2 + y^2 = Cy$.

16. $y = \dfrac{2}{x}$.

17. **а)** $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2,\ y = x + 1$;

б) $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$;

в) $(y - x + 2)^2 + 2x = C$;

г) $(y - x + 5)^5(x + 2y - 2) = C$;

д) $y + 2 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$;

е) $\ln\dfrac{y+x}{x+3} = 1 + \dfrac{C}{x+y}$.

18. **а)** $y = (2x+1)(C+\ln|2x+1|)+1$; **б)** $y = Cx^2 + x^4$;

в) $y = C\ln^2 x - \ln x$; **г)** $y = (x^2 + \dfrac{C}{x})e^{-x}$.

19. $y = \dfrac{2a^2}{x} + Cx^2$.

20. $x = \dfrac{a^2}{y} + Cy$.

21. **а)** $y(x+1)(\ln|x+1| + C) = 1,\ y = 0$;

б) $y(e^x + Ce^{2x}) = 1,\ y = 0$;

в) $y = x^4\ln^2 Cx,\ y = 0$;

г) $y = (\dfrac{x^2}{2} + C)^2 e^{-2x^2},\ y = 0$.

22. **а)** $3x^2y - y^3 = C$; **б)** $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$;

в) $4y\ln x + y^4 = C$; **г)** $xe^{-y} - y^2 = C$;

д) $x - y^2\cos^2 x = C$; **е)** $x + \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{5}{y} = C$.

23. **а)** $\begin{cases} x = e^p + C, \\ y = (p-1)e^p; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x = 2\operatorname{arctg} p + C, \\ y = \ln(1+p^2); \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = \ln p + 1/p, \\ y = p - \ln p + C; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x = p^3 + p, \\ 4y = 3p^4 + 2p^2 + C. \end{cases}$

25. **а)** $y = x\ln x + C_1x + C_2$;

б) $y = -\dfrac{1}{4x} + C_1x + C_2$;

в) $y = (x-3)e^x + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

г) $y = x\cos x - 3\sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

26. **а)** $9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1x + 1)^3$, $y = \pm x + C$;

б) $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2$, $2y = x^2 + C$, $y = C$;

в) $y + C_1\ln|y| = x + C_2$, $y = C$;

г) $y^3 = C_1(x + C_2)^2$, $y = C$.

27. **а)** нет; **б)** да;

в) да; **г)** нет;

д) нет; **е)** нет;

ж) да; **з)** да.

28. **а)** $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$; **б)** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$;

в) $y = C_1 + C_2e^{2x}$; **г)** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{\frac{x}{2}}$;

д) $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$; **е)** $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$;

ж) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$; **з)** $y = C_1\cos\dfrac{x}{3} + C_2\sin\dfrac{x}{3}$;

и) $y = e^x(C_1 + C_2x)$; **к)** $y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 + C_2x)$;

л) $y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$;

м) $y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos(\sqrt{3}x) + C_3\sin(\sqrt{3}x))$;

н) $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{-x}(C_3\cos x + C_4\sin x)$;

о) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$;

п) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x)$;

р) $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + C_4e^{3x} + C^5e^{-3x}$.

29. **а)** $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + \dfrac{e^{5x}}{8}$;

б) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \dfrac{e^{4x}}{5}$;

в) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} + x^2 - x + 2$;

г) $y = C_1 + C_2e^{\frac{x}{2}} - x$;

д) $y = \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3} + C_1\right)e^x + C_2e^{-2x}$;

е) $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^{4x}$;

ж) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \sin x + 3\cos x$;

з) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2\cos 3x$;

и) $y = C_1\cos x + (C_2 + 2x)\sin x$;

к) $y = (C_1 + x)\cos x + C_2\sin x$.

30. **а)** $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + \dfrac{e^{5x}}{8}$;

б) $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^{4x}$;

в) $y = e^x(x\ln|x| + C_1 + C_2x)$;

г) $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1 + e^x) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$;

д) $y = (C_1 + \ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x$;

е) $y = (C_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (C_2 + x)\sin x$.

31. **а)** $y = C_1x^2 + C_2x^3$; **б)** $y = C_1x^3 + C_2x^{-1}$;

в) $y = (C_1 + C_2\ln x + C_3\ln^2 x)x$; **г)** $y = C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x$.

32. **а)** $y=(x-1)-\frac{2}{3}(x-1)^3-\frac{1}{12}(x-1)^4+\cdots;$

б) $y=2+x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots;$

в) $y=1-x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\cdots;$

г) $y=x-\frac{1}{3}x^4+\cdots.$

33. **а)** $y=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}-2x;$ **б)** $y=1-\cos x-\sin x;$

в) $y=e^x-2;$ **г)** $y=x+e^{-x}-e^{-1}.$

34. **а)** $G(x,s)=\begin{cases} x(s-1),\ 0\le x\le s,\\ s(x-1),\ s\le x\le 1;\end{cases}$

б) $G(x,s)=\begin{cases} \cos x\sin s,\ 0\le x\le s,\\ \sin x\cos s,\ s\le x\le \pi;\end{cases}$

в) $G(x,s)=\begin{cases} -\operatorname{ch}xe^{-s},\ 0\le x\le s,\\ -\operatorname{ch}se^{-x},\ s\le x\le 2;\end{cases}$

г) $G(x,s)=\begin{cases} e^s(e^{-x}-1),\ 0\le x\le s,\\ 1-e^s,\ s\le x\le 1.\end{cases}$

35. **а)** $x=C_1e^t+2C_2e^{4t}+3e^{5t},\ y=-C_1e^t+C_2e^{4t}+e^{5t};$

б) $x=(C_1+2C_2t)e^t-3,\ y=(C_1+C_2+2C_2t)e^t-2);$

в) $x=C_1e^{3t}+3t^2+2t+C_2,\ y=-C_1e^3t+6t^2-2t+2C_2-2;$

г) $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-2\sin t-\cos t,$
$y=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}++\sin t+3\cos t.$

36. **а)** $x=C_1e^t+C_2e^{5t},\ y=-C_1e^t+3C_2e^{5t};$

б) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t},\ y=2C_1e^{-t}-2C_2e^{3t};$

в) $x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t),$
$y=e^{2t}((C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t);$

г) $x=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t),\ y=e^t(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t);$

д) $x=(C_1+C_2t)e^{3t},\ y=(C_1+C_2+C_2t)e^{3t};$

е) $x=(C_1+C_2t)e^t,\ y=(2C_1-C_2+2C_2t)e^t.$

37. **а)** $x=C_1e^t+2C_2e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+2e^{2t}\operatorname{arctg}e^t,$
$y=C_1e^t+3C_2e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+3e^{2t}\operatorname{arctg}e^t;$

б) $x=C_1\cos t+C_2\sin t+\operatorname{tg}t,\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t+2;$

в) $x=(C_1+2C_2t-8t^{\frac{5}{2}})e^t,$
$y=(C_1+2C_2t-C_2-8t^{\frac{5}{2}}+10t^{\frac{3}{2}})e^t;$

г) $x=C_1+2C_2e^{-t}+2e^{-t}\ln(e^t-1),$
$y=-2C_1-3C_2e^{-t}-3e^{-t}\ln(e^t-1).$

38. **а)** неустойчиво; **б)** устойчиво;

в) устойчиво; **г)** неустойчиво.

39. **а)** $(0,0)$ неустойчиво, $(1,2)$ устойчиво;

б) $(1,2)$ и $(2,1)$ неустойчивы;

в) $(2k\pi,0)$ неустойчивы, $((2k+1)\pi,0)$ устойчивы;

г) $(3,2)$ неустойчиво, $(0,-1)$ устойчиво.

Оглавление