Вариант **0**

1. Решите начальную задачу и проверьте найденное решение: $y''-6y'+8y=-5e^{3x}, y(0)=2, y'(0)=1$.
2. Цепь длиной 2.45 м соскальзывает с гладкого горизонтального стола. В момент начала наблюдения со стола свисал конец цепи длиной 0.5 м, а скорость движения цепи составляла 1 м/с. Считая ускорение свободного падения равным 9.8 м/с^2 и пренебрегая силой трения цепи о стол найти время соскальзывания всей цепи со стола.
3. Решите начальную задачу: $\dot{x}=3x-2y, \dot{y}=4y-x, x(0)=-1, y(0)=-2$.
4. Рассматривается случай, при котором в процессе опустошения бака с водой через отверстие в дне бака убывание воды соответствует экспоненциальному закону убывания. В момент начала наблюдений вода из первого бака, который содержит воду объемом 1 литр, поступает во второй бак, который в начальный момент времени пуст. Объем воды в первом баке уменьшается по экспоненциальному закону убывания с коэффициентом $k_1=0.2$, во втором баке уменьшается с коэффициентом $k_2=0.1$ по тому же закону. Составьте однородную систему дифференциальных уравнений и определите:
   а) момент времени, когда второй бак заполнится максимально;
   б) максимальный объем, на который заполнится второй бак.

Решение

1. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами. Решение представлено в примерах 28-31, в разделе 2.5 пособия Ершова Н.М. Решение можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов (примеры 28-30) или с помощью метода вариации постоянных (пример 31).

   Требуется убедиться в правильности полученного решения. Для проверки правильности решения необходимо дважды продифференцировать найденное решение и затем подставить результат дифференцирования (y' и y'') и решение в левую часть дифференциального уравнения и получить тождество.

   Например, решением начальной задачи
   $$y''-6y'+8y=-5e^{3x}, y(0)=2, y'(0)=1 \tag{1}$$
   является функция
   $$y(x)=e^{2x}+5e^{3x}-4e^{4x} \tag{2}$$
   Выполним проверку решения. Возьмем первую и вторую производные
   $$y'(x)=2e^{2x}+15e^{3x}-16e^{4x} \tag{3}$$
   $$y''(x)=4e^{2x}+45e^{3x}-64e^{4x}$$
   Подставим указанные производные и решение (2) в левую часть уравнения (1) и упростим
   $$\begin{gathered}4e^{2x}+45e^{3x}-64e^{4x}-6(2e^{2x}+15e^{3x}-16e^{4x})+8(e^{2x}+5e^{3x}-4e^{4x})= \\ 4e^{2x}+45e^{3x}-64e^{4x}-12e^{2x}-90e^{3x}+96e^{4x}+8e^{2x}+40e^{3x}-32e^{4x}= \\ e^{2x}(4-12+8)+e^{3x}(45-90+40)+e^{4x}(-64+96-32)= \\ e^{2x}\cdot 0-5e^{3x}+e^{4x}\cdot 0= \\ -5e^{3x}\end{gathered}$$
   Так как $-5e^{3x}\equiv-5e^{3x}$, т.е. левая часть уравнения тождественно равна правой части, найденное решение (2) является решением начальной задачи (1).

   Помимо этого требуется проверить соответствие решения начальным условиям. Для этого необходимо подставить начальные условия в (2) и (3) и получить соответствующее значение.
   $$y(0)=e^{2\cdot 0}+5e^{3\cdot 0}-4e^{4\cdot 0}=1+5-4=2$$
   $$y'(0)=2e^{2\cdot 0}+15e^{3\cdot 0}-16e^{4\cdot 0}=2+15-16=1$$
   Поскольку значения совпали, найденная функция соответствует начальным условиями.

2. Используя второй закон Ньютона составим начальную задачу. Искомая функция $l(t)$ в уравнении определяет длину цепи, которая уже соскользнула со стола.

$$m \cdot l''(t) = \frac{m \cdot g \cdot l(t)}{2.45},\ l(0) = 0.5,\ l'(0) = 1$$

Получившееся уравнение является линейным однородным с постоянными коэффициентами. Решением начальной задачи является функция $l(t) = 0.5e^{2t}$. Вся цепь соскользнет со стола, когда значение функции будет равно длине цепи. Составим уравнение и определим время t, при котором функция принимает значение равное длине цепи. Найденное время t является ответом задачи.

$$0.5e^{2t} = 2.45, \quad e^{2t} = 4.9, \quad \ln e^{2t} = \ln(4.9), \quad 2t = \ln(4.9), \quad t = \ln(4.9)/2 \approx 0.79$$

3. Решение аналогично примерам в разделе 3.2 *Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами* пособия Ершова Н.М., примеры 38-40. После нахождения общего решения необходимо найти частное решение, которое соответствует начальным условиям. Решением для указанного примера.

$$x(t) = e^{5t} - 2e^{2t}$$
$$y(t) = -e^{5t} - e^{2t}$$

Обратите внимание, при составлении матрицы правой части данной системы следует указывать коэффициенты для функций x и y последовательно, т.е. следующим образом

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение можно представить в векторном виде, т.е. следующим образом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

4. Имея условия составим начальную задачу

$$\begin{cases} x'(t) = -k_1 x(t), & x(0) = 1 \\ y'(t) = k_1 x(t) - k_2 y(t), & y(0) = 0 \end{cases}$$

Решением указанной начальной задачи являются следующие функции

$$\begin{cases} x(t) = e^{-0.2t} \\ y(t) = -2e^{-0.2t} + 2e^{-0.1t} \end{cases}$$

Функция $y(t)$ определяет изменение объема воды во втором баке с течением времени. Найдем максимум функции, зная необходимое условие экстремума функции одной переменной: первая производная функции должна обращаться в нуль. Возьмем производную от функции $y(t)$.

$$y'(t) = 0.4e^{-0.2t} - 0.2e^{-0.1t}$$

Составим уравнение и найдем корни. Если в уравнении несколько корней, интересуют только положительные действительные.

$$0.4e^{-0.2t} - 0.2e^{-0.1t} = 0$$

Таким образом, максимум функции достигается при $t = -10 \ln \frac{1}{2} \approx 6.93$. Это является ответом на первый пункт задания. Для ответа на второй, подставим найденное время в функцию $y(t)$ и получим максимальное значение функции

$$y\left(-10 \ln \frac{1}{2}\right) = -2e^{0.2 \cdot 10 \ln \frac{1}{2}} + 2e^{0.1 \cdot 10 \ln \frac{1}{2}} = -2e^{2 \ln \frac{1}{2}} + 2e^{\ln \frac{1}{2}} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{2}$$

Следовательно, максимальный объем, на который заполнится второй бак, равен $\frac{1}{2}$ литра.

Обратите внимание, в пунктах 1-2 **после решения необходимо указать ответ**, то есть обвести или подчеркнуть полученное решение или написать слово «ответ» перед решением.