# Дифференциальные уравнения в прикладных задачах

## Практическое задание №9. Численные методы

---

### Аналитическая часть

- Выполните две итерации метода Эйлера с шагом $h = 0.1$ для заданной начальной задачи Коши. Для вычисления (арифметика) используйте Maple.

  1. $y' = 2y - x$, $y(0) = 1$;
  2. $y' = y + x + 1$, $y(1) = -1$;
  3. $y' = y - 2x$, $y(2) = 0$;
  4. $y' = -y - x + 2$, $y(-1) = -1$;
  5. $y' = 2y + 2x - 1$, $y(0) = 1$;
  6. $y' = y - x - 3$, $y(1) = 3$;
  7. $y' = y - 3x + 1$, $y(2) = -1$;
  8. $y' = -y + x$, $y(3) = -2$;
  9. $y' = y + 4x - 2$, $y(0) = 1$;
  10. $y' = 2y - x - 3$, $y(-2) = 0$.

- Сравните с точным значением (вычислите его с помощью Maple). Например:
  - ▶ $f := rhs(dsolve(y' = 2y - x, y(0) = 1));$
  - ▶ $evalf(subs(x = 1, f));$

### Практическая часть

1. Перейдите в текстовый режим (F5), наберите текст «Практикум №8», укажите свои ФИО и номер группы. Вернитесь в математический режим (F5).
2. Подключите пакеты *plots* и *DEtools*.
3. Создайте ДУ $y' = 3x$ и начальное условие $y(0) = 1$:
   - ▶ $de1 := y'(x) = 3x;$
   - ▶ $ic1 := y(0) = 1;$
4. Решите начальную задачу:
   - ▶ $s1 := rhs(dsolve(\{de1, ic1\}, y(x)));$
5. Постройте семейство интегральных кривых:
   - ▶ $p1 := plot([seq(s1, \_C1 = -5..5, 0.25)], x = 0..2, y = 0..6, color = grey):$
   - ▶ $display(p1);$
6. Решим ту же задачу с помощью метода Эйлера с шагом $h = 0.5$:
   - ▶ $s1e1 := dsolve(\{de1, ic1\}, y(x), type = numeric, method = classical, stepsize = 0.5);$

7. Построим график найденного решения на интервале $x \in [0, 2]$ с помощью команды *odeplot*. Желательно, чтобы параметр *numpoints* был согласован с шагом $h$ и интервалом $[a, b]$, на котором ищется решение:

$$numpoints = \frac{b-a}{h} + 1.$$

▶ $p1e1 := odeplot(s1e1, [x, y(x)], 0..2, numpoints = 5, color = black, thickness = 3);$

▶ $display(p1, p1e1);$

8. Решите ту же задачу методом Эйлера с шагами $h = 0.2$ и $h = 0.05$ и постройте все 4 графика (семейство интегральных кривых и 3 приближенных решения) на одной картинке.

9. Найдем теперь численное решение с шагом $h = 0.5$ двумя другими численными методами: улучшенный метод Эйлера (ключ $heunform$) и метод Рунге-Кутта 4-го порядка (ключ $rk4$).

▶ $s1a := dsolve(\{de1, ic1\}, y(x), type = numeric, method = classical[heunform], stepsize = 0.5);$

▶ $s1rk := dsolve(\{de1, ic1\}, y(x), type = numeric, method = classical[rk4], stepsize = 0.5);$

10. Постройте решения $s1e1$, $s1a$, $s1rk$ и семейство интегральных кривых на одном графике, чтобы сравнить качество решения.

11. Выполните шаги 3–10 для начальной задачи

$$y' = \sin x, \quad y(0) = 0.$$

Для численного решения используйте шаги $h = 1, 0.25, 0.1$. Численное решение и графики постройте в области $x \in [0, 8]$, $y \in [0, 2]$.

12. Выполните шаги 3–10 для начальной задачи

$$y' = x + \sin y - 2, \quad y(0) = 3.$$

Эта задача не решается аналитически, поэтому вместо построения семейства интегральных кривых постройте поле направлений с помощью команды $DEplot$:

▶ $de3 := y'(x) = x + sin(y(x)) - 2;$

▶ $ic3 := y(0) = 3;$

▶ $p3 := DEplot(de3, y(x), x = 0..4, y = 1..4, arrows = line);$

▶ $display(p3);$

Для численного решения используйте шаги $h = 1, 0.25, 0.1$. Численное решение и графики постройте в области $x \in [0, 4]$, $y \in [1, 4]$.

13. Сохраните файл.