Дифференциальные уравнения в прикладных задачах

Практическое задание №7. Движение под действием силы тяжести

Практическая часть

1. Перейдите в текстовый режим (F5), наберите текст «Практикум №7», укажите свои ФИО и номер группы. Вернитесь в математический режим (F5).

2. Подключите пакет *plots*.

3. Maple поддерживает построение анимированных графиков с помощью команды *animate*. Например, чтобы посмотреть, как меняется график параболы $y = ax^2$ при изменении параметра a, надо применить следующую команду:

   ► $animate(plot, [a \cdot x^2, x = -3..3, y = -3..3], a = -3..3, frames = 100);$

   Первый аргумент у этой команды — это команда построения графика (вместо *plot* можно использовть, например, *implicitplot*). Второй аргумент в квадратных скобках — список параметров для построения графика. Третий аргумент — параметр, по которому выполняется анимация, и диапазон его изменения. Остальные аргументы — различные опции. Например, опция *frames* определяет число кадров анимации (по умолчанию их 25). Чтобы запустить анимацию (и настроить параметры просмотра) надо выделить ее (кликнув мышкой) и воспользоваться панелью управления.

4. Постройте анимации следующих графиков (указаны уравнение кривой, параметр анимации, пределы рисования графика):

   (a) $x^2 + a$, $a \in [-3..3]$, $x \in [-3..3]$, $y \in [-3..3]$;
   (b) $(x-2)^2$, $a \in [-3..3]$, $x \in [-3..3]$, $y \in [-3..3]$;
   (c) $\cos(x-a)$, $a \in [0..2\pi]$, $x \in [-2\pi..2\pi]$, $y \in [-1..1]$;
   (d) $\sin(a) \cdot \cos(x)$, $a \in [0..2\pi]$, $x \in [-2\pi..2\pi]$, $y \in [-1..1]$.

5. Параметр анимации может быть и не в формуле кривой, а в пределах рисования:

   ► $animate(plot, [\sin(x), x = 0..X, y = -1..1], X = 0..2\pi);$

6. Можно анимировать сразу несколько кривых, используя команду *seq*:

   ► $animate(plot, [[seq(a\sin(x), a = -1..1, 0.1)], x = 0..X, y = -1..1], X = 0..2\pi);$

7. Во многих задачах (как, например, в задаче движения тела под действием силы тяжести) мы имеем две зависимости $x(t)$ и $y(t)$. Считается, что таким образом определена функция $y(x)$ в *параметрической* форме. Чтобы построить график параметрической функции, нужно в команде *plot* в квадратных скобках указать обе функции $x(t)$ и $y(t)$ и диапазон изменения параметра t:

   ► $plot([\cos(t), \sin(t), t = 0..2\pi]);$

8. Можно строить *семейства* параметрических кривых:

   ► $plot([seq([r\cos(t), r\sin(t), t = 0..2\pi], r = 0..2, 0.1)]);$

9. Постройте кривую — спираль Архимеда:

$$x(t) = t\cos(t),\ y(t) = t\sin(t),\ t \in [0..20\pi].$$

10. Сделайте анимацию спирали Архимеда по параметру a:

$$x(t) = t\cos(t-a),\ y(t) = t\sin(t-a),\ a \in [0..2\pi].$$

11. Теперь переходим к движению тела под действием силы тяжести около поверхности Земли. Найдем зависимости $x(t)$ и $y(t)$ для тела, брошенного под углом a к горизонту (единственная сила — сила тяжести).

12. Определяем ускорение свободного падения g и начальную скорость тела v_0:

    ▶ $g := 9.8; v0 := 10;$

13. Решаем уравнение $v'_x = 0$ для горизонтальной компоненты скорости v_x с начальным условием $v_x(0) = v_0\cos(a)$:

    ▶ $vx := rhs(dsolve(\{v'(t) = 0, v(0) = v0 \cdot \cos(a)\}));$

14. Решаем уравнение $x'(t) = v_x(t)$ с начальным условием $x(0) = 0$:

    ▶ $X := rhs(dsolve(\{x'(t) = vx, x(0) = 0\}));$

15. Теперь для вертикальной составляющей движения ($v'_y = -g$, $v_y(0) = v_0\sin(a)$):

    ▶ $vy := rhs(dsolve(\{v'(t) = -g, v(0) = v0 \cdot \sin(a)\}));$

    ▶ $Y := rhs(dsolve(\{y'(t) = vy, y(0) = 0\}));$

16. Найдем уравнения траектории движения тела для угла $a = \pi/4$:

    ▶ $X0 := subs(a = \pi/4, X); Y0 := subs(a = \pi/4, Y);$

17. Построим кривую движения тела для угла $a = \pi/4$:

    ▶ $plot([X0, Y0, t = 0..3], x = 0..12, y = 0..6);$

18. Построим анимацию движения тела для угла $a = \pi/4$:

    ▶ $animate(plot, [[X0, Y0, t = 0..T], x = 0..12, y = 0..6], T = 0..2.5);$

19. Построим семейство кривых для разных углов a:

    ▶ $plot([seq([X, Y, t = 0..3], a = 0..1.5, 0.1)], x = 0..12, y = 0..6);$

20. Построим анимацию семейства кривых для разных углов a:

    ▶ $animate(plot, [[seq([X, Y, t = 0..T], a = 0..1.5, 0.1)], x = 0..12, y = 0..6], T = 0..2.5);$

21. Аналогичным способом (шаги 13–20) найдите и визуализируйте траектории движения тела, брошенного под углом a к горизонту, с учетом сопротивления скорости:

$$v'_x(t) = -v_x(t),\ v'_y(t) = -g - v_y(t).$$

    Начальные условия те же, что и в предыдущей задаче. Уравнения для $x(t)$ и $y(t)$ также не меняются. Используйте другие переменные для запоминания промежуточных результатов.

22. Постройте на одном графике кривые движения для угла $a = \pi/4$ для обоих рассмотренных случаев (свободное падение и с сопротивлением воздуха).

23. Сохраните файл.