Дифференциальные уравнения в прикладных задачах

Практическое задание №11. Неоднородные линейные уравнения. Уравнения колебаний маятника

Аналитическая часть

- Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения. Частное решение найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов.

1) $y'' + y' - 2y = f(x)$,	а) $f(x) = x - 2$;	б) $f(x) = e^{-x}$;	в) $f(x) = \sin 2x$;
2) $y'' - y' - 2y = f(x)$,	а) $f(x) = 2x + 1$;	б) $f(x) = 2e^{3x}$;	в) $f(x) = \cos x$;
3) $y'' + 3y' - 4y = f(x)$,	а) $f(x) = x + 3$;	б) $f(x) = 4e^{-x}$;	в) $f(x) = -\sin x$;
4) $y'' - 3y' - 4y = f(x)$,	а) $f(x) = 4x + 1$;	б) $f(x) = -e^{2x}$;	в) $f(x) = \cos 2x$;
5) $y'' - 5y' + 4y = f(x)$,	а) $f(x) = -x + 2$;	б) $f(x) = 3e^{-2x}$;	в) $f(x) = 2\sin x$;
6) $y'' + 2y' - 3y = f(x)$,	а) $f(x) = 3x$;	б) $f(x) = -e^{x}$;	в) $f(x) = -\cos x$;
7) $y'' - 2y' + y = f(x)$,	а) $f(x) = -x + 1$;	б) $f(x) = 8e^{-x}$;	в) $f(x) = \sin 4x$;
8) $y'' - y' - 6y = f(x)$,	а) $f(x) = x - 4$;	б) $f(x) = -4e^{-x}$;	в) $f(x) = -2\cos 2x$;
9) $y'' - 2y' - 8y = f(x)$,	а) $f(x) = 2x + 4$;	б) $f(x) = 2e^{-3x}$;	в) $f(x) = \sin x$;
10) $y'' + 6y' + 5y = f(x)$,	а) $f(x) = -x + 3$;	б) $f(x) = 3e^{x}$;	в) $f(x) = 4\cos 2x$.

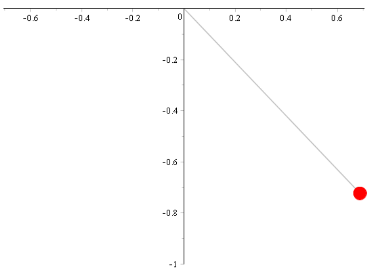
- Проверьте решение в Maple, используя команду *dsolve*.

Практическая часть

1. Перейдите в текстовый режим (F5), наберите текст «Практикум №8», укажите свои ФИО и номер группы. Вернитесь в математический режим (F5).

2. Подключите пакет *plots*.

3. Решим и визуализируем уравнения колебаний маятника: свободные; затухающие; вынужденные.



4. Свободные колебания описываются ДУ

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Будем интерпретировать $x(t)$, как угол отклонения маятника от вертикали (маятник — груз на нити). Начальное условие будет соответствовать отклонению маятника на некоторый угол x_0 с нулевой начальной скоростью:

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = 0.$$

Положим $\omega_0 = 1$.

5. Создаем дифференциальное уравнение (с начальными условиями, $x_0 = \pi/4$) в Maple:

   ▶ $de1 := \{x''(t) + x(t) = 0, x(0) = \pi/4, x'(0) = 0\};$

6. Решим начальную задачу и сохраним результат, как функцию от t:

   ▶ $X1 := unapply(rhs(dsolve(de1)), t);$

7. Определим координаты точки подвеса:

   ▶ $P0 := [0, 0];$

8. Определим координаты груза в момент времени t, считая, что точка подвеса находится в начале координат:

   ▶ $P1 := [\sin(X1(t)), -\cos(X1(t))];$

9. Создадим опции для визуализации процесса колебаний:

   ▶ $opt1 := symbol = solidcircle, style = [line, point], linestyle = [solid, dot];$

   ▶ $opt2 := color = [grey, red], symbolsize = 30, scaling = constrained;$

10. Создаем анимацию:

    ▶ $animate(plot, [[[P0, P1], [P1]], opt1, opt2], t = 0..20\pi, frames = 400);$

11. Затухающие колебания описываются уравнением вида

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

    Положим $\omega_0 = 1$, $r = 0.2$. Выполните шаги 5–10 для визуализации затухающих колебаний.

12. Попробуйте увеличить коэффициент r.

13. Вынужденные (свободные, т.е. без сил сопротивления) колебания описываются уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t).$$

    Положим $x_0 = \pi/12$, $\omega_0 = 1$. Выполните шаги 5–10 для следующих правых частей:

    - $f(t) = 0.1\sin(1.5t);$
    - $f(t) = 0.1\sin(1.2t);$
    - $f(t) = 0.1\sin(1.05t);$
    - $f(t) = 0.1\sin(t)$ — математический резонанс.

    Параметры анимации: $t = 0..30\pi$, $frames = 600$.

14. Сохраните файл.