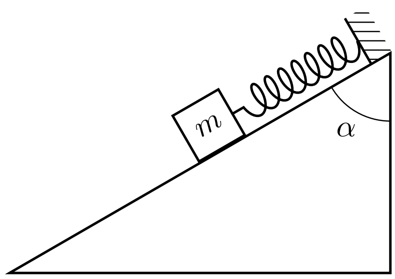
Вариант **0**

1. Решите начальную задачу и проверьте найденное решение: $y'' - 6y' + 8y = -5e^{3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

2. Решите начальную задачу: $\dot{x} = 3x - 2y$, $\dot{y} = 4y - x$, $x(0) = -1$, $y(0) = -2$.

3. Тело массой m находится на гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с вертикалью. К телу прикреплена пружина жёсткостью k, расположенная параллельно наклонной плоскости и закреплённая другим концом на верхнем основании плоскости.



В начальный момент времени тело было прикреплено к концу не растянутой пружины и получило начальную скорость v_0, направленную вниз по плоскости. На тело действует сила тяжести mg. Требуется:

а) составить уравнение движения тела вдоль наклонной;
б) определить закон движения тела;
в) найти период собственных колебаний.

Координату x отсчитывать от положения статического равновесия в направлении вниз по наклонной.

Решение

1. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами. Его решение рассмотрено в примерах 28–31 раздела 2.5 пособия Н. М. Ершова. Для решения можно применить метод неопределённых коэффициентов, если он применим (примеры 28–30), или метод вариации произвольных постоянных (пример 31).

Требуется убедиться в правильности полученного решения. Для этого необходимо дважды продифференцировать найденную функцию, а затем подставить исходное решение y и его производные y' и y'' в левую часть дифференциального уравнения. В результате этой подстановки должно получиться тождественное равенство с его правой частью.

Например, решением начальной задачи

$$y'' - 6y' + 8y = -5e^{3x}, y(0) = 2, y'(0) = 1 \tag{1}$$

является функция

$$\boxed{y(x) = e^{2x} + 5e^{3x} - 4e^{4x}} \tag{2}$$

Выполним проверку решения, которая состоит из ***двух этапов***. Возьмем первую и вторую производные

$$y'(x) = 2e^{2x} + 15e^{3x} - 16e^{4x} \tag{3}$$

$$y''(x) = 4e^{2x} + 45e^{3x} - 64e^{4x}$$

Подставим указанные производные и решение (2) в левую часть уравнения (1) и упростим

$$4e^{2x} + 45e^{3x} - 64e^{4x} - 6(2e^{2x} + 15e^{3x} - 16e^{4x}) + 8(e^{2x} + 5e^{3x} - 4e^{4x}) =$$
$$4e^{2x} + 45e^{3x} - 64e^{4x} - 12e^{2x} - 90e^{3x} + 96e^{4x} + 8e^{2x} + 40e^{3x} - 32e^{4x} =$$
$$e^{2x}(4 - 12 + 8) + e^{3x}(45 - 90 + 40) + e^{4x}(-64 + 96 - 32) =$$
$$e^{2x} \cdot 0 - 5e^{3x} + e^{4x} \cdot 0 =$$
$$-5e^{3x}$$

Так как $-5e^{3x} \equiv -5e^{3x}$, т.е. левая часть уравнения тождественно равна правой части, найденное решение (2) является решением начальной задачи (1). Первый этап проверки завершен.

Помимо этого требуется проверить соответствие решения начальным условиям. Для этого необходимо подставить начальные условия в (2) и (3) и получить соответствующее значение. Это второй этап проверки.

$$y(0) = e^{2\cdot 0} + 5e^{3\cdot 0} - 4e^{4\cdot 0} = 1 + 5 - 4 = 2$$

$$y'(0) = 2e^{2\cdot 0} + 15e^{3\cdot 0} - 16e^{4\cdot 0} = 2 + 15 - 16 = 1$$

Поскольку значения совпали, найденная функция соответствует начальным условиям.

2. Решение аналогично примерам 38–40 из раздела 3.2 «Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами» пособия Н.М. Ершова. После нахождения общего решения необходимо определить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Решением указанного примера являются функции.

$$x(t) = e^{5t} - 2e^{2t}$$
$$y(t) = -e^{5t} - e^{2t}$$

Обратите внимание, что при решении матричным методом матрица коэффициентов системы составляется из коэффициентов при функциях x и y, записанных в строгом порядке, т.е. следующим образом

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение можно представить в векторном виде, т.е. следующим образом

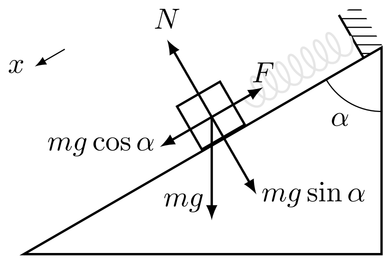
$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}}$$

3. На тело действуют следующие силы:

а) сила тяжести mg;

б) сила реакции опоры N;

в) сила упругости пружины $F = -k(\Delta + x)$.



Поскольку угол задан между наклонной плоскостью и ***вертикальной осью***, компонента силы тяжести вдоль плоскости задается как $mg\cos\alpha$.

Положение статического равновесия: $k\Delta = mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta = \dfrac{mg\cos\alpha}{k}$.

Используя второй закон Ньютона получаем дифференциальное уравнение с начальными условиями:

$$m\ddot{x} = mg\cos\alpha - k\left(\frac{mg\cos\alpha}{k} + x\right) = -kx,$$

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx, \quad x(0) = -\frac{mg\cos\alpha}{k}, \quad \dot{x}(0) = v_0.}$$

Решение уравнения: $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$.

Используя начальные условия определяем A и B: $A = -\dfrac{mg\cos\alpha}{k}, \quad B = \dfrac{v_0}{\sqrt{k/m}}$.

Таким образом, закон движения и период колебаний выглядят следующим образом:

$$\boxed{x(t) = -\frac{mg\cos\alpha}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{v_0}{\sqrt{k/m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.}$$

Обратите внимание, что во всех заданиях после решения **необходимо указать ответ**, то есть обвести или подчеркнуть полученное решение, либо написать слово «ответ» перед решением.