

DOI: 10.32517/0234-0453-2022-37-5-62-75

# ЗАПУСК МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ КАК ПОУЧИТЕЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ИНФОРМАТИКИ

А. Г. Кушниренко<sup>1</sup> , А. А. Малый<sup>1</sup><sup>1</sup> Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Россия agk@mail.ru**Аннотация**

Начиная с первого отечественного школьного учебника по информатике, выпущенного под редакцией А. П. Ершова и В. М. Монахова в 1985 г., во многих пособиях по этому предмету тема «Компьютерное моделирование и компьютерный эксперимент» раскрывается на примерах моделирования физических процессов, разворачивающихся во времени и доступных непосредственному наблюдению. Для таких процессов идея дискретизации во времени может быть введена наглядно с помощью метафоры видеосъемки. В качестве физических процессов, моделируемых компьютерными программами, в российских учебниках информатики рассматривались такие процессы, как малое колебание груза на пружине, вытекание воды из кубического бака, падение человека без парашюта («затяжной прыжок») в атмосфере с учетом сопротивления воздуха, полет брошенного человеком небольшого предмета без учета сопротивления воздуха. Эти примеры содержательны, но в них нет никаких неочевидных выводов, которые без компьютерного моделирования получить нельзя. В статье в качестве более привлекательного объекта моделирования в школьном курсе информатики предлагается выбрать процесс вертикального взлета одноступенчатой ракеты с целью доставки научной аппаратуры в верхние слои атмосферы Земли и прилегающее к ним околоземное космическое пространство. Такие ракеты называются метеорологическими. Предложенный выбор объекта компьютерного моделирования интересен тем, что компьютерные эксперименты с построенной моделью позволяют получить новые результаты: спроектировать ракету, максимальная высота подъема которой парадоксально растет с увеличением полезной нагрузки, а также показать, что высоту подъема одноступенчатых метеорологических ракет можно было бы существенно увеличить, научись мы просто останавливать при разгоне ракетный двигатель на несколько секунд.

**Ключевые слова:** информатика, математическое моделирование, компьютерный эксперимент, дискретизация, взлет метеорологической ракеты, двухрежимный твердотопливный двигатель, учет сопротивления воздуха, школьный алгоритмический язык.

**Для цитирования:**

Кушниренко А. Г., Малый А. А. Запуск метеорологической ракеты как поучительный объект компьютерного моделирования в школьном курсе информатики. *Информатика и образование*. 2022;37(5):62–75. DOI: 10.32517/0234-0453-2022-37-5-62-75

# LAUNCHING A METEOROLOGICAL ROCKET AS AN INSTRUCTIVE OBJECT OF COMPUTER SIMULATION IN THE SCHOOL INFORMATICS COURSE

А. Г. Кушниренко<sup>1</sup> , А. А. Малый<sup>1</sup><sup>1</sup> Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia agk@mail.ru**Abstract**

Since the first Russian school textbook on computer science edited by A. P. Ershov and V. M. Monakhov came out in 1985, the subject of “Computer simulation and computer experiment” has been explored through the simulation of physical processes unfolding in time and accessible to direct observation in many textbooks on Informatics. For such processes, the idea of temporal discretization can be introduced visually with the help of the videotaping metaphor. Russian Informatics textbooks examined a small oscillation of a load on a spring, water flowing out of a cubic tank, a fall of a person without a parachute (“delayed jump”) in the atmosphere considering air resistance as well as the flight of a small object thrown by a person disregarding air resistance as physical processes simulated by computer programs. These examples are informative, but they do not contain any unobvious conclusions that cannot be reached without computer simulation. The article suggests a more attractive simulation object for the school Informatics course, namely the process of vertical takeoff of a one-stage rocket delivering scientific equipment to the upper air of the Earth and the adjacent near-Earth

© Кушниренко А. Г., Малый А. А., 2022

space. Such rockets are called meteorological. The proposed computer simulation object is good because computer experiments with a developed model make it possible to obtain new results. These include designing a rocket whose maximum lift height paradoxically grows with an increase in the payload as well as showing that the lift height of one-stage meteorological rockets could be significantly increased if we only learned to stop the rocket engine for a few seconds during acceleration.

**Keywords:** informatics, mathematical modeling, computer experiment, discretization, meteorological rocket takeoff, dual mode solid propellant engine, air resistance consideration, school algorithmic language.

**For citation:**

Kushnirenko A. G., Maly A. A. Launching a meteorological rocket as an instructive object of computer simulation in the school informatics course. *Informatics and Education*. 2022;37(5):62–75. (in Russian.) DOI: 10.32517/0234-0453-2022-37-5-62-75

## 1. Введение

Термин «вычислительный эксперимент» был введен в 1960 году видным российским ученым академиком А. А. Самарским [1]. Сегодня мы чаще используем синоним этого термина и говорим «компьютерный эксперимент». Вычислительные эксперименты за истекшие годы стали важным инструментом в повседневной работе ученых и инженеров. Федеральный государственный стандарт основного общего образования среди результатов освоения предмета «Информатика» называет (на базовом уровне) владение понятием «модель», а на углубленном уровне — свободное применение понятий «алгоритм», «модель», «моделирование» [2]. Примерная программа курса информатики основной школы предусматривает знакомство с методикой моделирования, включающей термин «компьютерный эксперимент».

Ввиду ограниченности числа учебных часов (не более 2–3 уроков), отводимых на освоение понятия «моделирование», и широты этого понятия авторы школьных учебников информатики, не исключая и одного из авторов данной статьи, вынуждены делить драгоценное учебное время и страницы учебника между обсуждением общих понятий и методов моделирования, с одной стороны, и детальным разбором ключевого примера, демонстрирующего возможности именно компьютерного моделирования, с другой [3, § 8; 4, раздел 11.5; 5, § 26; 6, глава 2; 7, § 9]. Успех в освоении темы «Компьютерное моделирование и компьютерный эксперимент» во многом зависит от того, сколь содержательными будут моделируемые процессы и сколь необходимыми будут компьютерные эксперименты в процессе изучения этих процессов. Таким образом, мы приходим к задаче оптимального выбора ключевого содержательного примера, в котором компьютерные эксперименты позволили бы получить неожиданные результаты, продемонстрировав школьникам разного уровня мотивации и подготовки практичность и эффективность методики компьютерного моделирования. Ниже разбирается содержательный пример, который, по мнению авторов, является привлекательным во многих отношениях.

Во-первых, он основан на одном из проверенных временем достижений российской науки и техники — разработке отечественной одноступенчатой твердотопливной метеорологической ракеты МР-12 [8]. Результаты запусков этой ракеты и ее модификаций внесли большой вклад в отечественную и миро-

вую науку, например, позволили создать уточненную модель атмосферы Земли [9, 10].

Во-вторых, этот пример связан с темами ряда школьных предметов, изучаемыми в 9-м классе: законом всемирного тяготения и вторым законом Ньютона, принципами реактивного движения [11, 12], барометрической формулой [13, с. 128].

В-третьих, и математическая, и компьютерная модели этого процесса просты и могут быть полностью поняты девятиклассниками.

В истории нашей цивилизации важную роль сыграло изучение процесса механического движения тел в атмосфере с учетом и без учета сопротивления воздуха путем математического моделирования, а в последние десятилетия — и путем моделирования компьютерного.

### 1.1. Пример модели физического процесса, которую можно использовать без компьютера

Примером физического процесса, разворачивающегося во времени, может служить полет тела, брошенного в некоторой точке земной поверхности вертикально вверх с некоторой скоростью. Если предположить, что ветра нет и скорость броска мала, то можно пренебречь влиянием атмосферы и описать процесс с помощью следующей математической модели равнускоренного движения\*:

$$h(t) = vt - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

где  $t$  — время, прошедшее от момента бросания, измеренное в секундах (с);

$h(t)$  — высота тела над землей через  $t$  секунд после момента бросания, измеренная в метрах (м);

$v$  — скорость тела в момент бросания, измеренная в метрах в секунду (м/с);

$g$  — ускорение свободного падения в точке бросания, измеренное в м/с<sup>2</sup>.

\* Несмотря на внешнюю простоту этой модели, ее открытие было величайшим прорывом в науке, за которым последовали открытия Ньютона законов механики и закона всемирного тяготения. Об этом можно прочесть в замечательной книге С. Г. Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» [14], которая доступна для скачивания в интернете.



С помощью этой модели мы можем получить ответы на многие вопросы относительно изучаемого процесса, например, вывести формулу для максимальной высоты  $H$ , на которую поднимется тело в процессе подъема, и формулу для времени  $T$ , через которое тело поднимется на эту максимальную высоту. Получение таких ответов в математической форме требует несложных математических (алгебраических) манипуляций, которые человек может без труда проделать на бумаге. Например, формулы для  $H$  и  $T$  могут быть получены путем несложного преобразования выражения (1):

$$\begin{aligned} h(t) &= vt - \frac{gt^2}{2} = \\ &= -\frac{g}{2} \left( t^2 - \frac{2}{g} vt + \left(\frac{v}{g}\right)^2 - \left(\frac{v}{g}\right)^2 \right) = \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2} \left( t - \frac{v}{g} \right)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

После проделанного выше выделения полного квадрата становится ясно, что максимальная высота  $H = \frac{v^2}{2g}$  достигается в момент  $T = \frac{v}{g}$ , поскольку

именно при  $t = \frac{v}{g}$  выражение  $\left( t - \frac{v}{g} \right)^2$  обращается в 0. Из (2) мы, в свою очередь, можем получить формулу для скорости  $v$ , с которой нужно бросить тело, чтобы забросить его на высоту  $H$ :

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (3)$$

Описанные выше манипуляции с математической моделью были чисто алгебраическими и приводили к алгебраическим, а не к числовым результатам.

Если с помощью построенной математической модели мы захотим предсказать конкретные числовые результаты для конкретного эксперимента в конкретной точке на земной поверхности, мы столкнемся с тем, что нам не хватает экспериментальных сведений о планете Земля, нам нужно будет откуда-то взять значение ускорения свободного падения в той точке Земли, в которой будет проводиться эксперимент. Известно, что ускорение свободного падения  $g$  не является фундаментальной физической константой, а зависит как от широты точки измерения (из-за суточного вращения Земли и вызванной этим вращением центробежной силы), так и от высоты этой точки над уровнем Мирового океана (в силу закона всемирного тяготения Ньютона). Поскольку в нашу модель изначально заложено игнорирование сопротивления воздуха, модель будет приближенной и высокой точности задания ускорения свободного падения в этой модели добиваться бессмысленно. Поэтому мы можем пренебречь изменчивостью  $g$  и взять из учебника физики или справочника стандартное приближенное среднее значение константы  $g$ , равное  $9,8 \text{ м/с}^2$ . После подстановки в формулы числового значения константы  $g$  наша математическая модель обретает способность предсказывать результаты численно.

**Задача.** Британский метатель копья Р. Брэдсток сумел забросить вертикально вверх мячик для гольфа на высоту 155 м. Найти скорость мячика в момент отрыва от руки метателя.

**Решение.** Будем считать, что в момент броска мячик находился на высоте 2 м над землей, тогда высота подъема мячика над точкой отрыва составила 153 м. Подставив это значение  $H$  в формулу (3) и проделав под корнем две арифметические операции умножения, получим ответ в виде квадратного корня из конкретного десятичного числа:

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 153} = \sqrt{2998,8}.$$

Найдя корень вручную или с помощью калькулятора, мы можем получить поражающий воображение числовую ответ  $v = 55 \text{ м/с}$ , или  $200 \text{ км/ч}$ .

**Вывод.** Для получения из математической модели (1) новых формул (2) и (3) и для вычислений по этим формулам компьютер не нужен. Математическую модель (1) можно использовать без компьютера, выполнив требуемые вычисления за пару минут на бумаге или за пару секунд на калькуляторе.

## 1.2. Пример модели физического процесса, для использования которой компьютер нужен

Чтобы проиллюстрировать потребность в построении компьютерных моделей, рассмотрим процесс вертикального запуска одноступенчатой ракеты с учетом сопротивления воздуха. Для описания этого процесса, как и в предыдущем разделе, используются и время  $t$ , и высота  $h$ , зависящая от  $t$ , а вот никакой математической формулы, связывающей эти две величины и аналогичной формуле (1), не существует. Но это не означает, что моделирование невозможно, так как можно создать вычислительно-компьютерную модель процесса: мы задаем компьютерной программе параметры ракеты и места ее старта\*, и в ходе выполнения на компьютере программа вычисляет нам требуемые характеристики процесса, например, максимальную высоту  $H$ , на которую поднимется ракета в процессе взлета, и время  $T$  подъема ракеты на эту максимальную высоту.

Принцип создания подобных моделирующих программ с помощью *дискретизации во времени* разбирается в школьных учебниках информатики [4, 5] и во многих других учебниках и состоит в следующем. Если выполнить мысленно видеосъемку процесса и на каждый кадр добавить временную отметку и числовые значения параметров процесса в текущий момент времени, то математическая и вычислительная модели процесса сведутся к приближенным (рекуррентным) соотношениям между числовыми значениями параметров на соседних кадрах. Для вертикально взлетающей ракеты с ракетным двигателем постоянной тяги этими параметрами будут

\* Из параметров точки старта ракеты на максимальную высоту, достигаемую метеорологической ракетой, более всего влияет возвышение точки старта над уровнем Мирового океана (см. Вопрос 1 в разделе 5).

время, высота, скорость, ускорение и масса ракеты. Стартовав с известных значений этих пяти параметров на начальном (нулевом) кадре, с помощью рекуррентных соотношений можно последовательно вычислить значения параметров на первом кадре, затем на втором и так далее шаг за шагом до последнего кадра. Для специалистов заметим, что этот прием избавляет от необходимости формулировать математическую модель в терминах дифференциальных уравнений и позволяет ограничиться привычными для школьников числовыми последовательностями и соотношениями между их членами (в математике это называется методом Эйлера — сведение обыкновенных дифференциальных уравнений к разностным уравнениям). Поскольку число параметров процесса даже в простейших случаях может измеряться десятками, а число кадров вычислительной модели — тысячами, проведение по такой модели вычислений без компьютера практически невозможно.

### 1.3. Интересный объект моделирования: вертикальный взлет метеорологической ракеты

Метеорологические ракеты предназначены для сбора информации об атмосфере Земли на высотах до 200 км. Метеорологическая ракета запускается вертикально вверх и через 3–4 мин полета достигает предельной высоты. На этой высоте от корпуса ракеты отделяется приборная часть, которая спускается на землю на парашюте. (Сам корпус спускается отдельно на другом парашюте.) Научные измерения производятся как при подъеме ракеты, так и при спуске приборной части. Конструкторы метеорологических ракет решают задачу, как запустить на возможно большую высоту возможно большую массу научной аппаратуры, а не обеспечить возможно более точное попадание ракеты в заданную точку пространства в заданный момент времени. Поэтому при моделировании запусков метеорологических ракет требуется всего лишь предсказать с точностью порядка нескольких процентов максимальную высоту подъема ракеты. Мы смоделируем процесс взлета одной реально существовавшей твердотопливной ракеты МР-12 [8] и нескольких воображаемых, мысленно сконструированных нами твердотопливных метеорологических ракет, чтобы определить максимальную высоту их подъема. Промоделировав взлет реальной ракеты, мы сравним результаты моделирования с результатами реальных запусков и убедимся в их совпадении. После этого мы проведем несколько вычислительных экспериментов для предсказания результатов запуска воображаемых ракет и получим ряд неожиданных результатов.

Разумеется, моделирование вертикального взлета одноступенчатой ракеты рассматривается во многих университетских учебниках, посвященных теоретическим курсам механики и вычислительной математики, или в практикумах по компьютерному моделированию физических процессов, см. например, [15, раздел «4.12. Полет одноступенчатой ракеты», 16].

Цель университетских курсов — научить студентов методам компьютерного моделирования. Цель же рассмотрения примеров компьютерного моделирования в школьном курсе другая. В статье [17] высказана парадоксальная точка зрения на истинную цель массового изучения методики компьютерного моделирования в школе: *воспитать у тех детей, которые в будущем будут определять развитие человечества, убеждение в том, что компьютерное моделирование является эффективным инструментом в анализе последствий любых принимаемых инженерных и социальных решений*. Разделяя частично эту точку зрения, авторы предлагают делать акцент в школьном курсе не на методах компьютерного моделирования как таковых, а на демонстрации впечатляющих результатов, которые такими методами могут быть получены. И получены не многомудрыми учеными, а школьниками самостоятельно с опорой на знания и умения, не выходящие за пределы курсов математики, физики и информатики основной школы.

### 1.4. Твердотопливные ракетные двигатели и их свойства

Твердотопливный реактивный двигатель очень прост по конструкции (рис. 1). Он представляет собой набитый специальным порохом металлический цилиндр, одно днище которого сплошное, а во втором сделано отверстие и приварено сопло. В центре порохового заряда устроен полый цилиндрический канал, идущий от сплошного днища до сопла двигателя.

После поджигания пороха в канале близко к днищу (рис. 1) порох по всей поверхности канала воспламеняется, и начинают образовываться пороховые газы, которые под большим давлением и с большой скоростью вырываются через сопло наружу. При этом внутри корпуса двигателя возникает давление пороховых газов. Это давление на любой участок боковой поверхности канала уравновешивается давлением на диаметрально противоположный участок стенки канала. А вот давление газов внутри канала на сплошное днище ничем не уравновешивается — с противоположной стороны канала газы через сопло выходят наружу и давления не создают. Так возникает реактивная тяга — сила, которая толкает двигатель в направлении, противоположном направлению выхода газов через сопло. Эта сила действует, пока весь порох не горит. Обычно эту силу называют *мягкой* двигателя [11].

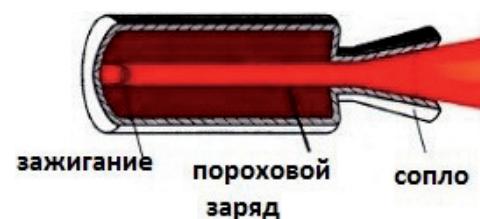


Рис. 1. Твердотопливный реактивный двигатель

Fig. 1. Solid propellant jet engine



*Рис. 2. Государственный музей истории космонавтики имени К. Э. Циолковского в Калуге.  
Площадка метеорологических ракет. Ракета МР-12 — крайняя слева*

*Fig. 2. State Museum of the History of Cosmonautics named after K. E. Tsiolkovsky in Kaluga.  
Meteorological rocket site. MR-12 rocket, far left*

Цилиндрическую форму канала можно усложнить так, чтобы тяга была постоянной в течение всего времени горения пороха. Позже мы будем использовать следующие два свойства твердотопливных двигателей с постоянной тягой:

- время сгорания всего порохового заряда зависит от диаметра двигателя, но не от его длины;
- тяга, при прочих равных, пропорциональна длине двигателя.

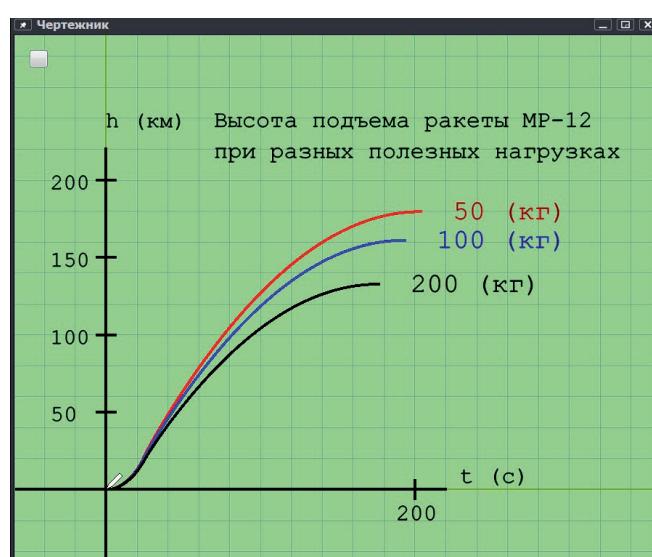
### 1.5. Реальная ракета, которую мы будем моделировать

Знаменитая твердотопливная метеорологическая ракета МР-12 (рис. 2) была разработана в СССР в 60-х годах прошлого века [8]. Число 12 в названии ракеты указывает на требуемую высоту подъема ракеты — 120 км. Ракета могла поднять на эту высоту 200 кг научных приборов, а меньший вес могла доставить на высоты до 180 км. С 1967 года в СССР и России было проведено более тысячи запусков ракеты МР-12 и ее модификаций.

### 1.6. Результаты описанного ниже компьютерного моделирования ракеты МР-12 совпадают с результатами реальных запусков

Теоретические и практические детали компьютерного моделирования запуска ракеты МР-12 мы

разберем позже, а пока на рисунке 3 представим графические результаты этого моделирования. Моделирующая программа написана на школьном алгоритмическом языке в свободно распространяемой



*Рис. 3. Высота подъема ракеты МР-12*

*при разных полезных нагрузках*

*Fig. 3. MR-12 rocket lift height with various payloads*

учебной среде программирования Кумир, разработанной в Российской Академии наук и доступной к загрузке с сайта [18]. Для удобства тех читателей, которые решат поэкспериментировать с обсуждаемыми в статье компьютерными моделями, авторы разместили коды всех моделирующих алгоритмов на школьном алгоритмическом языке и на языке Python 3 в открытом доступе на сайте ФГУ ФНЦ НИСИ РАН [19]. Эти коды могут быть исполнены в среде Кумир и в любой среде программирования, поддерживающей язык Python 3, например в учебной онлайн-среде Trinket, доступной без оплаты и регистрации на сайте разработчика среды: <https://trinket.io/python3>.

Из графиков на рисунке 3 видно, что:

- при полезной нагрузке 50 кг ракета поднимается на высоту 180 км (за 200 с);
- при полезной нагрузке 100 кг ракета поднимается на высоту 160 км (за 190 с);
- при полезной нагрузке 200 кг ракета поднимается на высоту 130 км (за 175 с).

Эти три результата моделирования хорошо согласуются с опубликованными данными по реальным запускам ракеты МР-12, что доказывает применимость построенной нами модели\*.

## 2. Методы

### 2.1. Процесс взлета ракеты с точки зрения физика и с точки зрения программиста

Пока порох горит, ракета быстро набирает скорость. Это называется *активным участком* взлета. На активном участке полета масса ракеты равномерно уменьшается. По прекращении работы двигателя ракета по инерции продолжает движение вверх, пока ее скорость не упадет до нуля под действием силы земного притяжения и силы сопротивления воздуха. Это называется *пассивным участком* взлета. На пассивном участке масса ракеты постоянна. По завершении пассивного участка взлета ракета начинает падать на землю, и этот этап полета мы не рассматриваем.

Моделирующую программу (алгоритм) мы запишем на школьном алгоритмическом языке. Все величины в алгоритме, как и в математической модели, которую мы разобрали в разделе 1.1, будут измеряться в единицах международной системы СИ:

- время ( $t$ ) — в секундах (с);
- высота ( $h$ ) — в метрах (м);
- масса ( $m$ ) — в килограммах (кг);
- тяга ( $F$ ) — в ньютонах (Н);
- скорость ( $v$ ) — в (м/с);
- ускорение ( $a$ ) — в (м/с<sup>2</sup>).

В алгоритм моделирования заложим следующие числовые данные о ракете МР-12:

**вещ** Мтопл=1200, Мкорп=250 | масса топлива и корпуса (кг)  
**вещ** тяга=103600 | (Н)  
**вещ** время работы = 24 | (с) продолжительность работы двигателя

При выполнении нашего алгоритма в вычислениях будут использоваться числовые значения ускорения свободного падения в различных точках траектории ракеты, в том числе и в точке запуска ракеты. Это ускорение в точке запуска ракеты зависит от широты точки запуска и высоты этой точки над уровнем Мирового океана. Вдоль траектории ракеты ускорение свободного падения падает с набором высоты в соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона. В упрощенной версии моделирующего алгоритма мы пренебрежем всеми этими зависимостями и предположим, что ускорение свободного падения во всех точках траектории ракеты постоянно и равно общепринятым приближенному значению:

**вещ** g = 9.8 | (м/с<sup>2</sup>), ускорение свободного падения

В том, что ошибки, вызванные этим упрощением, невелики, нас убеждают следующие два довода. Во-первых, если мы уточним алгоритм, учитывая зависимость ускорения свободного падения от широты и удаленности от центра Земли, и сравним результаты выполнения упрощенного и уточненного алгоритмов, то увидим, что ошибка, вызванная предположением о постоянстве ускорения свободного падения, не превышает нескольких процентов. Во-вторых, и это более важный довод, используя в упрощенном алгоритме конкретные числовые данные ракеты МР-12, мы убеждаемся в том, что приведенные на рисунке 3 предсказания нашего алгоритма о высотах подъема ракеты при различных полезных нагрузках согласуются с опубликованными опытными данными о реальных запусках ракеты МР-12.

Взлетная (стартовая) масса ракеты вычисляется в программе командой присваивания

Mвзлет := Мтопл + Мкорп + полезная нагрузка

При общем весе топлива 1200 кг и времени его сгорания 24 с за каждую секунду полета сгорает 50 кг топлива, поэтому на активном участке через время  $t$  масса ракеты  $m$  становится равной  $M_{взлет} - 50 * t$ .

На активном участке полета на ракету действуют три силы: сила тяги, направленная вверх (за счет нее и происходит взлет), а также мешающие взлету сила сопротивления воздуха и сила земного притяжения  $mg$ . Для упрощения мы предполагаем, что сила тяги и сила земного притяжения от высоты  $h$  подъема ракеты не зависят (см. Вопрос 2 в разделе 5), а вот сила сопротивления воздуха зависит от формы ракеты, пропорциональна квадрату скорости ракеты  $v$  и плотности воздуха на высоте  $h$ . Мы используем в готовом виде простейшую приближенную формулу для силы сопротивления, которую оформим как алгоритм-функцию

\* Продолжительность подъема ракеты на максимальную высоту для метеорологов, как правило, не имеет никакого значения. Мы приводим эту продолжительность для полноты картины.

```

алг веш r (веш v, h) | сила сопротивления
    воздуха (H)
нач знач := 0.10 * v**2 * 10**(-0.0000555 * h)
кон

```

Эта несложная с виду формула основана на сведениях из аэродинамики, физики газа и метеорологии, а также на аэродинамических характеристиках корпуса ракеты МР-12. Эти сведения человечество добывало сотни лет. Согласно аэродинамике, при больших скоростях движения ракеты сопротивление в каждый момент будет пропорционально квадрату скорости ракеты и плотности атмосферы в первой степени. Коэффициент пропорциональности зависит от геометрической формы ракеты (цилиндр, соединенный с конусом) и пропорционален плотности воздуха на уровне Мирового океана. Физика газа говорит, что для плотности атмосферы постоянной температуры справедлива так называемая *барометрическая формула*:  $\rho(h) = \rho_0 10^{-\beta h}$ , где  $\rho_0$  — плотность атмосферы на нулевом уровне отсчета и  $\beta$  — некоторая положительная константа [13, с. 128]. Для Земли  $\rho_0 \sim 1,28 \text{ кг}/\text{м}^3$  и  $\beta \sim 0,0000555 \text{ м}^{-1}$ . Барометрическую формулу можно переформулировать так: *при возрастании высоты в арифметической прогрессии плотность атмосферы постоянной температуры падает в геометрической прогрессии*. На вершине Эльбруса ( $h = 5642 \text{ м}$ ) плотность атмосферы примерно в два раза меньше, чем на пляжах Сочи. Метеорология говорит, что хотя температура земной атмосферы константой не является и меняется с высотой\*, для  $\beta = 0,0000555$  барометрическая формула с хорошим приближением позволяет определить зависимость плотности атмосферы от высоты\*\*.

При моделировании механических явлений не обойтись без законов Ньютона. Нам понадобится формула *второго закона Ньютона*:  $F = ma$ , где  $m$  — масса тела,  $a$  — ускорение тела,  $F$  — сумма сил, действующих на тело.

По этой формуле ускорение ракеты может быть вычислено следующим образом:

- на активном участке командой
$$a := (\text{тяга} - \mathbf{r}(v, h) - m^* g) / m$$
- на пассивном участке командой
$$a := (-\mathbf{r}(v, h) - m^* g) / m$$

\* Тот, кто хотя бы раз летал на самолете, слышал объявление командира корабля о температуре за бортом, при взлете опускающейся до нескольких десятков градусов мороза.

\*\* Уточняя барометрическую формулу, ученые свели известные данные об атмосфере Земли в огромную таблицу, которой и рекомендуется пользоваться при проведении моделирования полетов самолетов и ракет. Эта таблица имеет название *Международная стандартная атмосфера* [9]. Созданы библиотечные программы, которые вычисляют параметры атмосферы, интерполируя данные из этой таблицы. Такие библиотечные программы, вобравшие в себя опыт многолетней работы тысяч учёных со всего мира, очень компактны. На школьном алгоритмическом языке подобную программу можно было бы уложить в десяток строк, и ее использование в моделирующем алгоритме ничем не отличалось бы от использования трехстрочной программы **вещ r (вещ v, h)**, основанной на барометрической формуле.

Мы берем тягу со знаком плюс, а силу сопротивления и силу тяжести — со знаком минус, поскольку тяга помогает увеличению высоты, а сила сопротивления воздуха и сила тяжести — мешают. Напомним, что сила тяжести равна  $m^* g$ , где  $g$  — ускорение свободного падения, измеренное в той точке, где находится ракета. На самом деле сила тяжести зависит от высоты. Она ослабевает при удалении ракеты от Земли в соответствии с законом всемирного тяготения. Однако компьютерные эксперименты показывают, что учет ослабления силы притяжения при удалении ракеты от Земли практически не меняет результатов компьютерного моделирования процесса взлета метеорологической ракеты, поэтому в нашей компьютерной модели мы считаем  $g$  константой.

## 2.2. Метод дискретизации непрерывных процессов

Итак, мы выписали всю информацию, которую собираемся учитывать при моделировании процесса взлета ракеты. Процесс этот сложный: на активном участке меняется масса ракеты, сопротивление воздуха зависит не только от скорости, но и от высоты подъема. Циолковскому в конце XIX века удалось описать формулами более простой процесс взлета ракеты с учетом изменения массы, но без учета сопротивления воздуха [13, с. 91]. Формул, которые учитывали бы и сопротивление воздуха, и изменение массы на активном участке, не существует. Ничего страшного: высоту подъема ракеты при данной нагрузке можно определить как результат работы моделирующего алгоритма, выполняемого на компьютере. Для моделирования процесса взлета ракеты мы применим *метод дискретизации непрерывных процессов*.

Представьте, что мы сделали видеозапись активного участка взлета ракеты и приписали каждому кадру пять чисел, выраженных в системе единиц СИ:

- $t$  — время, прошедшее с момента старта ракеты;
- $m, h, v, a$  — масса, высота подъема, скорость и ускорение ракеты в момент съемки кадра.

Дополненная числовыми данными видеозапись — это модель реального процесса взлета. По ней можно точно определить массу, высоту, скорость и ускорение ракеты в те моменты, когда происходила съемка кадра, и приближенно, путем интерполяции, — в остальные моменты.

Подобного рода замена непрерывного процесса прерывным (принято говорить *дискретным*) называется *дискретизацией*. Если реальный процесс доступен наблюдению, то дискретизацию можно провести, измерив все параметры процесса в момент съемки каждого кадра. Именно так кодируется звук в памяти компьютера. Если же процесс не доступен наблюдению или его невозможно провести, можно попытаться *не измерить, а вычислить* приписанные каждому кадру числа на основе известных нам законов природы и экспериментальных данных. В этом и состоит суть вычислительных экспериментов, проводимых на компьютере.

При дискретизации временная ось обычно разбивается на небольшие интервалы, скажем, с **шагом по времени**  $dt = 0.1$  (с). Продолжительность активного участка у нас в модели равна 24 с, значит, в видеозаписи активного участка будет начальный кадр и еще  $n$  кадров, где  $n = 24/dt = 240$ .

Начальному кадру присвоим номер ноль, а остальным кадрам — номера от 1 до 240. К каждому кадру у нас приписаны пять чисел:

$t_0, m_0, h_0, v_0, a_0$  к кадру номер 0;  
 $t_1, m_1, h_1, v_1, a_1$  к кадру номер 1;  
 $t_2, m_2, h_2, v_2, a_2$  к кадру номер 2;  
 $t_3, m_3, h_3, v_3, a_3$  к кадру номер 3;  
... ... ...  
 $t_{240}, m_{240}, h_{240}, v_{240}, a_{240}$  к кадру номер 240.

Числа на соседних кадрах связаны между собой точными или приближенными соотношениями (в первых двух строках ниже соотношения точные, в остальных — приближенные):

$t_1 = t_0 + dt,$   
 $m_1 = m_0 - M_{\text{топл}}/n,$   
 $h_1 \approx h_0 + v_0 dt,$   
 $v_1 \approx v_0 + a_0 dt,$   
 $a_1 \approx (\text{тяга} - r(v_1, h_1)) - m_1 g / m_1,$   
 $t_2 = t_1 + dt,$   
 $m_2 = m_1 - M_{\text{топл}}/n,$   
 $h_2 \approx h_1 + v_1 dt,$   
 $v_2 \approx v_1 + a_1 dt,$   
 $a_2 \approx (\text{тяга} - r(v_2, h_2)) - m_2 g / m_2, ...$   
 $t_3 = t_2 + dt, ...$   
 $m_3 = m_2 - M_{\text{топл}}/n, ...$   
 $h_3 \approx h_2 + v_2 dt, ...$   
 $v_3 \approx v_2 + a_2 dt, ...$

Откуда берутся приближенные соотношения, например, соотношение  $h_2 \approx h_1 + v_1 dt$ ? Это очень просто. В начале интервала времени  $[t_1, t_2]$  скорость ракеты приближенно равна  $v_1$ . Если бы ракета двигалась с этой скоростью в течение всего интервала времени  $dt$ , то пройденный путь составил бы  $v_1 dt$ . Конечно, в течение интервала времени  $dt$  скорость ракеты менялась. Но если выбрать длину интервала  $dt$  достаточно малой, то на всем интервале скорость «отклонится» от начального значения незначительно, скажем, не более чем на 0,01 %, и высота  $h_2 - h_1$ , набранная за время  $dt$ , будет отличаться от  $v_1 dt$  не более, чем на 0,01 %.

Выписанные выше пять соотношений называются **рекуррентными**, они позволяют выразить (приближенно) пять чисел на следующем кадре через пять чисел на предыдущем кадре. Поскольку на кадре 0 числа нам известны\*:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ m_0 &= M_{\text{взлет}}, \\ h_0 &= 0, \\ v_0 &= 0, \\ a_0 &= (\text{тяга} - m_0 g) / m_0, \end{aligned}$$

то рекуррентные соотношения позволяют шаг за шагом приближенно вычислить по известным числам на кадре 0 неизвестные числа на кадре 1, затем по известным числам на кадре 1 вычислить неизвестные числа на кадре 2 и так далее вплоть до последнего кадра номер 240. При вычислении чисел на новом кадре, скажем, на кадре 3, используются только числа предыдущего кадра 2 и не применяются числа никаких других кадров. Это означает, что для моделирования можно обойтись пятью величинами алгоритмического языка **вещ**  $t, m, h, v, a$ , присваивая им на каждом шагу новые значения и стирая при этом уже не нужные старые значения.

Таким образом, цикл моделирования активного участка взлета ракеты записывается так:

```
нц п раз | моделирование активного участка
. t := t + dt
. m := m - Мтопл/n
. h := h + v*dt
. v := v + a*dt
. a := (тяга - r(v, h) - m*g) / m
кц
```

За активным участком взлета следует пассивный. На этом участке масса ракеты не меняется, а тяга равна нулю. В качестве начального кадра пассивного участка выступает последний кадр активного участка, сделанный в момент прекращения тяги ракетного двигателя. Пассивный участок заканчивается, когда ракета достигает наивысшей точки и начинает падать на Землю. В этот момент скорость подъема  $v$  перестает быть положительной. Таким образом, цикл моделирования пассивного участка взлета ракеты продолжается до тех пор, пока скорость ракеты  $v$  положительна, и число кадров пассивного участка нам заранее не известно. Это записывается так:

```
нц пока v>0 | моделирование пассивного участка
. t := t + dt
. h := h + v*dt
. v := v + a*dt
. a := (-r(v, h) - m*g) / m
кц
```

Значение величины  $h$  по завершении этого цикла и дает искомую высоту подъема ракеты. Если бы мы хотели получить данные об изменении высоты со временем, нужно было бы сделать результатом работы алгоритма не одно число — значение величины  $h$ , а массив значений высот на всех кадрах и запоминать значение высоты ракеты на каждом кадре в элементе массива с индексом, равным номеру кадра.

\* Выбор начального значения высоты  $h = 0$  означает, что программа будет моделировать запуск ракеты в точке, расположенной на уровне Мирового океана.

### 3. Результаты

Алгоритм моделирования взлета ракеты МР-12, из которого исключены команды построения графиков, приведен на рисунке 4.

С помощью алгоритма «Апогей» можно провести компьютерный эксперимент — предсказать высоту подъема ракеты при полезных нагрузках 50, 100 и 200 кг. Для проведения эксперимента составим небольшую программу «эксперимент», которая будет задавать условия (параметры) эксперимента и получать от алгоритма «Апогей» и выдавать человеку-экспериментатору результаты эксперимента (рис. 5).

*Замечание.* Не будем забывать, что рекуррентные соотношения, которые мы использовали, — не точные, а приближенные. Поэтому значения величин  $t$  и  $h$  по завершении последнего цикла будут вычислены с ошибкой. Эта ошибка, как мы уже говорили, будет тем меньше, чем меньше шаг дискретизации по времени  $dt$ . Результаты эксперимента на рисунке 5

получены при  $dt = 0.10$ . Проверка показывает, что при уменьшении шага дискретизации до  $dt = 0.05$  результаты моделирования практически не меняются, т. е. шаг дискретизации выбран правильно.

Итак, мы разработали для ракеты МР-12 вычислительную модель в виде компьютерной программы «Апогей». Эта модель является игрушечной в том смысле, что имеет единственный параметр «полезная нагрузка» и позволяет путем компьютерных экспериментов прогнозировать зависимость апогея только от этого параметра. Но эту модель легко модернизировать так, чтобы она стала отвечать на более широкий круг вопросов.

### 4. Обсуждение

#### 4.1. Может ли увеличение полезной нагрузки увеличить высоту подъема ракеты

Отметим, что высота подъема ракеты МР-12 падает с ростом полезной нагрузки. Это не удивляет, ведь

```
| Моделирование ракеты МР-12 в Кумире
алг веш Апогей(вещ полезная нагрузка) | моделирование ракеты МР-12
дано 50<=полезная нагрузка<=200
надо | подсчитана высота апогея в метрах
нач
| Используем единицы системы СИ: секунда (с), метр (м), килограмм (кг)
. веш Мтопл = 1200, Мкорп = 250 | масса топлива и корпуса (кг)
. веш тяга = 103600 | (Н)
. веш время работы = 24 | (с)
. веш g = 9.8 | (м/с**2)
. веш Мвзлет; Мвзлет := Мтопл + Мкорп + полезная нагрузка
. веш t = 0, h = 0, v = 0, m; m := Мвзлет | начальные время, высота, скорость, масса
. веш a; a := (тяга - m*g)/m | начальное ускорение
. веш dt = 0.1 | шаг дискретизации по времени
. цел n; n := int(время работы/dt + 0.5) | число шагов
. нц n раз | моделирование активного участка
. . t := t + dt
. . m := m - Мтопл/n
. . h := h + v*dt
. . v := v + a*dt
. . a := (тяга - r(v, h) - m*g) / m
. кц
. нц пока v>0 | моделирование пассивного участка
. . t := t + dt
. . h := h + v*dt
. . v := v + a*dt
. . a := (-r(v, h) - m*g) / m
. кц
. знач := h
кон
алг веш r(вещ v, h) | сопротивление воздуха (Н)
нач знач := 0.10*v**2*10**(-0.0000555*h)
кон
```

Рис. 4. Алгоритм «Апогей»\* моделирования взлета ракеты МР-12

Fig. 4. Apogee algorithm for MR-12 takeoff simulation

\* Астрономический термин *апогей* означает точку траектории Луны, искусственного спутника или ракеты, наиболее удаленную от центра Земли. В переводе с греческого «апо» значит «далеко», а «гео» — это наша планета Земля.

```

1 алг эксперимент
2 нач веc полезная нагрузка = 50
3 . нц 3 раза
4 . . вывод "При полезной нагрузке ", полезная нагрузка, " кг "
5 . . вывод "апогей МР-12 = ", int(Апогей(полезная нагрузка)/1000), " км", нс
6 . . полезная нагрузка := (полезная нагрузка)*2
7 . кц
8 кон
9 алг веc Апогей(веc полезная нагрузка) | моделирование ракеты МР-12
10 дано 50<=полезная нагрузка<=200
11 надо | подсчитан апогей
12 нач
13 . веc Мтопл=1200,Мкорп=250 | масса топлива и корпуса (кг)
14 . веc тяга=103600 | (Н)
15 . веc время работы = 24 | (с)

```

При полезной нагрузке 50.0 кг апогей МР-12 = 178 км  
При полезной нагрузке 100.0 кг апогей МР-12 = 160 км  
При полезной нагрузке 200.0 кг апогей МР-12 = 131 км

Рис. 5. Компьютерный эксперимент с алгоритмом «Апогей»

Fig. 5. Computer experiment with the Apogee algorithm

на первый взгляд кажется очевидным следующее утверждение:

*для любой ракеты увеличение нагрузки должно уменьшать максимальную высоту подъема.*

Но это утверждение неверно. Изменим конструкцию ракеты и опровергнем утверждение компьютерным экспериментом. Высота ракеты МР-12 равна примерно 10 м. Сделаем ракету пониже. Укоротим вчетверо пороховой двигатель, не меняя его диаметра. Из-за этого масса топлива уменьшится вчетверо, сила тяги также сократится вчетверо, но время работы, зависящее не от длины, а от диаметра порохового заряда, останется неизменным. Сохраним форму носовой части ракеты и будем считать, что за счет этого сопротивление воздуха для модернизированной ракеты останется таким же, как у исходной. Будем считать, что за счет укорочения двигателя масса корпуса ракеты уменьшится с 250 до 90 кг. Начнем моделировать в программе «Апогей» новую укороченную ракету с параметрами

Мтопл=300|(кг), Мкорп=90|(кг), тяга=25900|(Н),  
время работы=24|(с)

Проведя вычислительные эксперименты с новой укороченной ракетой для уменьшенных полезных нагрузок 15, 30 и 60 кг, получим, что новая ракета достигает высот 20 892, 21 015 и 20 986 м соответственно. Мы получили парадоксальный прогноз: при увеличении полезной нагрузки от 15 до 30 кг высота подъема будет увеличиваться, а вовсе не уменьшаться. Исключим вероятность того, что ошибки вызваны приближенным характером наших вычислений. Для этого уменьшим шаг по времени до значения  $dt = 0.0001$ , дальнейшее уменьшение которого уже не приводит к изменению результатов моделирования. Уточненные результаты компьютерного моделирова-

ния для полезных нагрузок 15, 30 и 60 кг становятся равными 20 851, 20 968 и 20 930 м и по-прежнему предсказывают, что нагрузка 30 кг даст большую высоту подъема, чем нагрузка 15 кг.

Детальные компьютерные эксперименты предсказывают, что рекордная высота подъема укороченной ракеты, равная 20 991, будет достигнута при нагрузке 41 кг. Найденные в этих компьютерных экспериментах числа 20 991 и 41 практикам не очень интересны. Потеря сотни метров высоты подъема ракеты совершенно не важна, а вот возможность увеличения нагрузки на десяток-другой килограммов очень существенна. Поэтому на практике важно знать не точное оптимальное значение нагрузки, равное 41 кг, а интервал нагрузок, при которых значение набранной ракетой высоты не слишком проигрывает рекордному значению 20 991. Наш моделирующий алгоритм предсказывает, что при изменении нагрузки в интервале от 20 до 65 кг высота подъема не падает ниже 20 897 м, т. е. проигрывает рекордному результату менее 100 м. Проведя для контроля эксперимент с нулевой полезной нагрузкой, получим высоту подъема, равную 20 615 кг. Этот результат можно переформулировать так: *увеличение полезной нагрузки от нуля до 41 кг увеличивает максимальную высоту, набранную ракетой, на 376 м.*

Авторы не могут предложить убедительного качественного объяснения обнаруженного парадоксального явления. Возможно, дело в том, что при увеличении полезной нагрузки ракеты большая доля тяги на активном участке тратится на полезный разгон ракеты и приобретение ею кинетической энергии и меньшая доля — на бесполезное преодоление сопротивления воздуха. А накопленная кинетическая энергия на пассивном участке конвертируется в по-

тенциальную энергию, т. е. в набор высоты ракеты, с избытком перекрывая потери, вызванным более медленным разгоном.

#### 4.2. Может ли кратковременное выключение двигателя в процессе взлета увеличить высоту подъема ракеты

Сегодня в мире разрабатываются твердотопливные двигатели двукратного и даже многократного включения. Предположим, что на ракету MR-12 установлен двигатель двукратного включения, который имеет те же размеры, массу топлива, тягу и продолжительность работы, что и двигатель MR-12, но обладает той особенностью, что он может быть включен на некоторое время, потом однократно выключен

и повторно включен после некоторой задержки. Назовем эту ракету MR-12-бис. При выборе расходуемой при первом включении доли топлива, равной 100 %, взлет ракеты MR-12-бис не будет отличаться от взлета MR-12, что позволяет проводить вычислительные эксперименты для сравнения MR-12-бис и MR-12 с помощью одной и той же моделирующей программы. Мы проведем вычислительный эксперимент с MR-12-бис при одном-единственном сценарии запуска: мы планируем выключить двигатель, когда он израсходует долю пороха, равную 50 %, и включить двигатель повторно, когда скорость упадет до выбранного нами наугад значения  $v_{\min} = 337$  м/с. Полезную нагрузку в этом сценарии установим равной 200 кг. Описанный ниже компьютерный экс-

```

...
цел АКТИВ = 1
цел ПАССИВ = 0
вещ vmin = 337
алг Эксперимент | Сравнение MR-12 и двукратно включаемой MR-12бис
нач
. вывод "MR-12бис ==> Апогей = ", int(Апогей_бис(50, vmin)/1000), нс
. вывод "MR-12      ==> Апогей = ", int(Апогей_бис(100, vmin)/1000), нс
кон

алг вещ Апогей_бис(цел доля_в процентах, вещ vmin) | (м)
дано 10<=доля_в процентах<=100 | доля расхода пороха на 1-м акт. участке
нач
. t := 0; h := 0; v := 0; m := Mвзлет | начальные время, высота, скорость, масса
. a := (тяга - m*g)/m | начальное ускорение
. n := int(время работы/dt+0.5) | число шагов всех активных участков
. n1 := int(n*доля_в процентах/100+0.5) | число шагов 1-го активного участка
. нц n1 раз | моделирование 1-го активного участка
. . Шаг(АКТИВ)
. кц
. утв v > vmin
. нц пока v>vmin | моделирование 1-го пассивного участка
. . Шаг(ПАССИВ)
. кц
. нц n-n1 раз | моделирование 2-го активного участка
. . Шаг(АКТИВ)
. кц
. нц пока v>0 | моделирование 2-го пассивного участка
. . Шаг(ПАССИВ)
. кц
. знач := h | (м)
кон

алг Шаг(цел актив) | однократный пересчет параметров процесса
дано актив=1 или актив=0
нач
. t := t+dt
. m := m - актив*dm
. h := h+v*dt
. v := v+a*dt
. a := (актив*тяга - r(v, h) - m*g)/m
кон

```

Рис. 6. Ключевой фрагмент кода программы, моделирующей запуск ракет MR-12-бис и MR-12

Fig. 6. Key fragment of the program code simulating the launch of the MR-12bis and MR-12 rockets

periment предсказывает, что за счет паузы в работе двигателя ракета MR-12-бис поднимется существенно выше, чем MR-12.

Моделирующую программу с заголовком

```
алг вещ Апогей_бис (цел доля_в_процентах,
вещ vmin) | (м)
```

можно скачать с сайта НИИСИ РАН [19]. Имена и назначение переменных в новой программе «Апогей\_бис» почти такие же, как в программе «Апогей» из рисунка 4, однако в новой программе все величины сделаны глобальными, фиксировано значение величины полезная нагрузка = 200 (кг) и введены новые величины  $v_{min}$ ,  $n1$  и вспомогательный алгоритм «Шаг», который служит для пересчета значений пяти параметров процесса  $t$ ,  $m$ ,  $h$ ,  $v$ ,  $a$  и на активных, и на пассивных участках. Ключевой фрагмент этой программы приведен на рисунке 6.

С помощью этой модели авторы провели вычислительный эксперимент, который дал следующий результат:

```
>> 14:21:00 - 5_Моделирование ракеты
MR12-бис в КуМире.кут – Начало выполнения
MR-12бис ==> Апогей = 175
MR-12 ==> Апогей = 131
```

Эксперимент показывает, что за счет временного выключения двигателя можно было бы поднять высоту подъема ракеты со 131 до 175 км, т. е. увеличить высоту подъема на 34 %.

Чтобы разобраться в том, почему это происходит, полезно вывести результаты эксперимента в графической форме. Для вывода графиков авторы перекодировали моделирующий алгоритм на язык Python3 и воспользовались графической библиотекой matplotlib.pyplot. Моделирующую программу авторы разместили в свободном доступе на сайте ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН [19]. С этой программой можно поэкспериментировать в онлайн-среде Trinket, допу-

скающей работу без оплаты и даже без регистрации. Просто зайдите на сайт <https://trinket.io/python3>, перенесите текст программы копипастом в окно программы среди Trinket и запустите выполнение программы. Результаты вычислительного эксперимента в среде Trinket приведены на рисунке 7.

Анализируя графики на рисунке 7, можно предположить, что выигрыш в высоте подъема MR-12-бис по сравнению с MR-12 достигается по следующей причине. По истечении 12 с полета:

- обе ракеты набирают скорость около 700 м в секунду;
- обе ракеты в этот момент находятся на небольшой высоте — около 4 км, на которой сопротивление воздуха велико;
- двигатель ракеты MR-12 продолжает работу еще 12 с, тратя значительную часть своей энергии на преодоление сопротивления воздуха на высотах от 4 до 18 км, в то время как двигатель ракеты MR-12-бис выключается в ожидании более выгодных условий для работы и ракета MR-12-бис около 20 с летит по инерции, набирая к концу 32 с полета высоту 14 км. На этой высоте для любой скорости полета сопротивление воздуха вчетверо меньше, чем на высоте 4 км, и следующие 12 с двигатель MR-12-бис работает на высотах от 14 до 26 км, где сопротивление воздуха существенно меньше, чем на высотах от 4 до 18 км.

Поэтому последние 12 с из предусмотренных конструкцией двигателя 24 с двигатель ракеты MR-12-бис используется более эффективно, чем двигатель MR-12, тратя меньшую долю своей энергии на преодоление сопротивления воздуха. В итоге ракета MR-12-бис достигает большей скорости, чем MR-12, и поднимается на большую высоту.

Приведенные выше рассуждения носят прикидочный, качественный характер. Проведение вычислительного эксперимента заменяет эти каче-

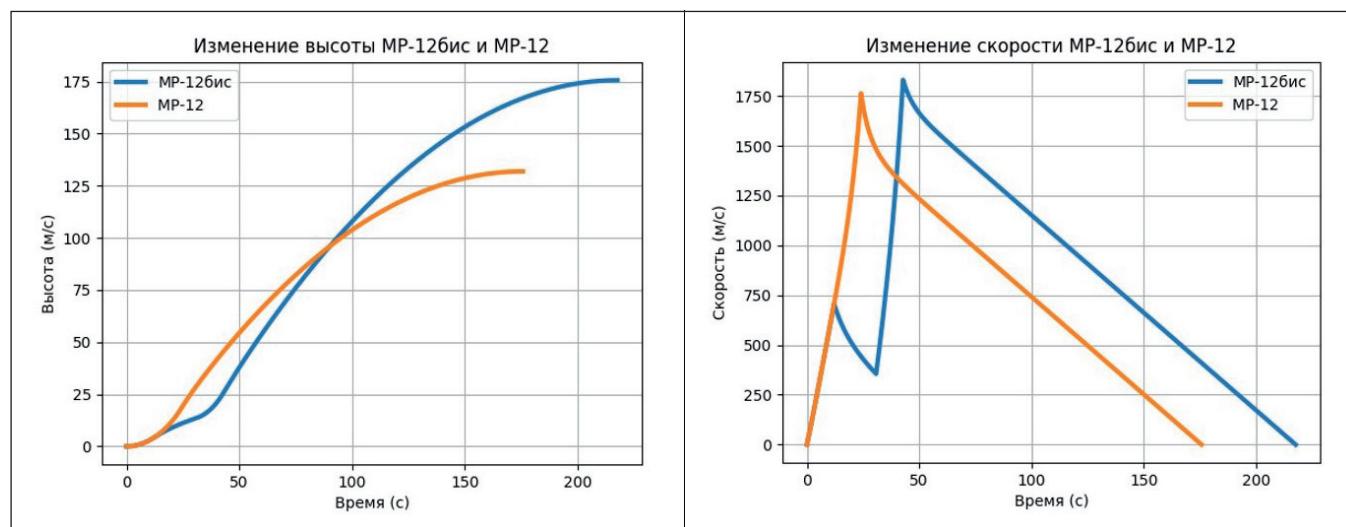


Рис. 7. Графики изменения высоты и скорости ракет MR-12-бис и MR-12  
Fig. 7. Graphs of the changes in the altitude and velocity of the MR-12-bis and MR-12 rockets

ственными рассуждениями предсказанием конкретных результатов, позволяя обойтись без проведения долгих и дорогостоящих натурных экспериментов.

## 5. Темы для исследования

Разобранные примеры моделирующих программ дают учителю возможность легко организовать углубление уровня освоения учебного материала, формулируя легкие вопросы, ответы на которые учащиеся могут получить за 5–10 мин путем модернизации программы «Апогей» (рис. 4).

**Вопрос 1.** Как изменится предсказываемая моделью высота подъема ракеты МР-12, если для места старта выбрать точку, находящуюся на высоте 1, 2 или 3 км над уровнем Мирового океана?

**Вопрос 2.** Как изменится предсказываемая моделью высота подъема ракеты МР-12, если учесть в модели падение ускорения свободного падения с высотой согласно закону всемирного тяготения Ньютона?

**Вопрос 3.** Предположим, что из-за изменения состава порохового заряда тяга двигателя упала на 5 %. На сколько процентов упадет максимальная высота подъема ракеты при полезной нагрузке 200 кг?

Более трудные вопросы, ответы на которые можно получить, модернизируя программы «Апогей\_бис» на школьном алгоритмическом языке (рис. 6 и [19]) или языке Python 3 ([19]), могут послужить темами внеклассной работы.

**Вопрос 4.** Какую рекордную высоту подъема ракеты МР-12-бис при взлете с двумя активными участками можно получить, подбирая долю ресурса двигателя, используемую на первом активном участке, и значение скорости  $v_{min}$ , при достижении которой начинается второй активный участок?

**Вопрос 5.** Существует ли режим взлета ракеты МР-12-бис с тремя активными участками, дающий большее значение высоты подъема, чем любое значение, достигаемое при взлете с двумя активными участками?

В заключение отметим, что изложенный в данной статье материал имеет междисциплинарный характер и может быть использован в рамках методического подхода «Обучение в рамках сообщества учащихся», изложенного в статье [20].

### Финансирование

Работа выполнена в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН в рамках госзадания по теме FNEF-2022-0010.

### Funding

The work was carried out at the Scientific Research Institute of System Development of the Russian Academy of Sciences within the framework of the state assignment FNEF-2022-0010.

### Благодарности

В основу данной статьи лег доклад, представленный авторами на VI Международной научной конференции «Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании», проходившей в г. Красноярске 20–23 сентября 2022 г. Авторы благодарны организаторам конференции за приглашение выступить с докладом.

### Acknowledgments

This article is based on a report presented at the VI<sup>th</sup> International Scientific Conference “Informatization of education and e-teaching methods: digital technologies in education” held in Krasnoyarsk on 20–23 September 2022. We are grateful to the conference organizing committee for the invitation to make a presentation.

### Список источников / References

1. Основные научные результаты академика А. А. Самарского в области математического моделирования. *Мемориальный сайт академика А. А. Самарского*. Режим доступа: <http://samarskii.ru/ru/nauka/matematicheskoe-modelirovanie>

[The main scientific results of Academician A. A. Samarsky in the field of mathematical modeling. *Memorial site of Academician A. A. Samarsky*. (In Russian.) Available at: <http://samarskii.ru/ru/nauka/matematicheskoe-modelirovanie>]

2. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. Утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287. Режим доступа: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027>

[Federal State Educational Standard of basic general education. Approved by order of the Ministry of Education of the Russian Federation dated May 31, 2021 No. 287. (In Russian.) Available at: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027>]

3. Ершов А. П., Монахов В. М., Бешенков С. А. и др. Основы информатики и вычислительной техники: проб. учеб. пособие для сред. учеб. заведений. В 2 ч. Ч. 1: под ред. А. П. Ершова, В. М. Монахова. М.: Просвещение; 1985:68–76. Режим доступа: <http://cip.iis.nsk.su/files/course/oivt1p.pdf>

[Ershov A. P., Monakhov V. M., Beshenkov S. A. et al. Foundations of informatics and computing machinery: Experimental text-book for secondary school. Pt. 1. Moscow, Prosveshchenie; 1985:68–76. (In Russian). Available at: <http://cip.iis.nsk.su/files/course/oivt1p.pdf>]

4. Кушниренко А. Г., Зайдельман Я. Н., А. Г. Леонов А. Г., Тарасова В. В. Информатика. 9 класс: учебник. 4-е изд., перераб. М.: Просвещение; 2022. 240 с.

[Kushnirenko A. G., Zaidelman Ya. N., Leonov A. G., Tarasova V. V. Informatics. 9th grade: textbook. 4th ed., expanded. Moscow, Prosveshchenie; 2022. 240 p. (In Russian.)]

5. Кушниренко А. Г., Лебедев Г. В., Сворень Р. А. Основы информатики и вычислительной техники: учеб. пособие для 10–11-х классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение; 1990. 224 с. Режим доступа: <https://www.niisi.ru/kumir/books/1.pdf>

[Kushnirenko A. G., Lebedev G. V., Svoren R. A. Fundamentals of informatics and computer engineering: Textbook for 10–11th grade educational institutions. Moscow, Prosveshchenie; 1990. 224 p. (In Russian.) Available at: <https://www.niisi.ru/kumir/books/1.pdf>]

6. Поляков К. Ю., Еремин Е. А. Информатика. 11 класс. Базовый и углубленный уровни: учебник. В 2 ч. Ч. 2. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2016. 304 с.

[Polyakov K. Yu., Eremin E. A. Informatics. Grade 11. Basic and advanced levels: textbook. In 2 parts. Part 2. Moscow, BINOM. Knowledge Laboratory; 2016. 304 p. (In Russian.)]

7. Гейн А. Г., Юнерман Н. А. Информатика. 9 класс: учебник. М.: Просвещение; 2021. 240 с.

[Gein A. G., Yunerman N. A. Informatics. 9th grade. A textbook. Moscow, Prosveshchenie; 2021. 240 p. (In Russian.)]

8. Словарная статья «Метеорологическая ракета МР-12». Википедия. Свободная энциклопедия. Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/MP-12>

[Dictionary entry “Meteorological rocket MP-12”. *Wikipedia. The Free Encyclopedia*. (In Russian.) Available at: <https://ru.wikipedia.org/wiki/MP-12>]

9. Словарная статья «Международная стандартная атмосфера». «Академик». Энциклопедия техники. Режим доступа: [https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc\\_tech/2697/Mezhdunarodnaya](https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_tech/2697/Mezhdunarodnaya)

[Dictionary entry “International Standard Atmosphere”. “Academic”. Encyclopedia of technology. (In Russian.) Available at: [https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc\\_tech/2697/Mezhdunarodnaya](https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_tech/2697/Mezhdunarodnaya)]

10. ГОСТ 4401-81 «Межгосударственный стандарт. Атмосфера Стандартная. Параметры». Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200009588>

[GOST 4401-81 “Interstate standard atmosphere. Parameters”. (In Russian.) Available at: <https://docs.cntd.ru/document/1200009588>]

11. Куприков М. Ю. Словарная статья «Реактивный двигатель». Большая российская энциклопедия. Режим доступа: [https://bigenc.ru/technology\\_and\\_technique/text/4422756](https://bigenc.ru/technology_and_technique/text/4422756)

[Kuprikov M. Yu. Dictionary entry “Jet engine”. Great Russian Encyclopedia. (In Russian.) Available at: [https://bigenc.ru/technology\\_and\\_technique/text/4422756](https://bigenc.ru/technology_and_technique/text/4422756)]

12. Лившиц М. Парадоксы реактивного движения. Квант. 1971;(7):11–16. Режим доступа: [http://kvant.mccme.ru/1971/07/paradoksy\\_reaktivnogo\\_dvizheni.htm](http://kvant.mccme.ru/1971/07/paradoksy_reaktivnogo_dvizheni.htm)

[Livshits M. Paradoxes of jet propulsion. Quantum. 1971;(7)11–16. (In Russian.) Available at: [http://kvant.mccme.ru/1971/07/paradoksy\\_reaktivnogo\\_dvizheni.htm](http://kvant.mccme.ru/1971/07/paradoksy_reaktivnogo_dvizheni.htm)]

13. Блудов М. И. Беседы по физике. В 3 ч. Ч. 1: под ред. Л. В. Тарасова. 3-е изд., перераб. М.: Просвещение; 1984. 207 с. Режим доступа: <https://djvu.online/file/zPh5jhi5t0qNM>

[Bludov M. I. Conversations on physics. In 3 parts. Part 1. Ed. L. V. Tarasova. 3rd ed., revised. Moscow, Prosveshchenie; 1984. 207 p. (In Russian.) Available at: <https://djvu.online/file/zPh5jhi5t0qNM>]

14. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. 3-е изд., расширенное. М.: МЦНМО; 2001. 448 с. Режим доступа: <https://www.mccme.ru/free-books/gindikin/contes.pdf>

[Gindikin S. G. Stories about physicists and mathematicians. 3rd ed., expanded. Moscow, MCNMO; 2001. 448 p. (In Russian.) Available at: <https://www.mccme.ru/free-books/gindikin/contes.pdf>]

15. Маликов Р. Ф. Практикум по компьютерному моделированию физических явлений и объектов: учеб. пособие. Уфа: Изд-во БашГПУ; 2005. 291 с. Режим доступа: <http://suroklxj.bget.ru/sibgau/al-malikov.pdf>

[Malikov R. F. Workshop on computer modeling of physical phenomena and objects: Study guide. Ufa, Publishing House of BashGPU; 2005. 291 p. (In Russian.) Available at: <http://suroklxj.bget.ru/sibgau/al-malikov.pdf>]

16. Широкова О. А. Практикум по компьютерному математическому моделированию. Часть II: Компьютерное моделирование физических процессов: учебно-методическое пособие. Казань: КФУ; 2015. 85 с. Режим доступа: [https://repository.kpfu.ru/?p\\_id=111813](https://repository.kpfu.ru/?p_id=111813)

[Shirokova O. A. Workshop on computer mathematical modeling. Part II: Computer modeling of physical processes: educational and methodical study guide. Kazan, KFU; 2015. 85 p. (In Russian.) Available at: [https://repository.kpfu.ru/?p\\_id=111813](https://repository.kpfu.ru/?p_id=111813)]

17. Niazi M. A., Temkin A. Why teach modeling & simulation in schools? *Complex Adaptive Systems Modeling*. 2017;(5):7. DOI: 10.1186/s40294-017-0046-y

18. Головная страница проекта КуМир на сайте Федерального научного центра «НИИСИ РАН». Режим доступа: <https://www.niisi.ru/kumir/>

[The main page of the KuMir project on the website of the Federal Scientific Center SRISA. (In Russian.) Available at: <https://www.niisi.ru/kumir/>]

19. Коды вычислительных моделей данной статьи на школьном алгоритмическом языке и языке Python 3. Режим доступа: <https://www.niisi.ru/kumir/meth/MR12.htm>

[Codes of computational models of this article in the school algorithmic language and Python 3. (In Russian.) Available at: <https://www.niisi.ru/kumir/meth/MR12.htm>]

20. Маркушевич М. В., Федосов А. Ю. Основные методические подходы к использованию свободного программного обеспечения в курсе информатики на уровне основного общего образования. *Информатика и образование*. 2022;37(1):37–48. DOI: 10.32517/0234-0453-2022-37-1-37-48

[Markushevich M. V., Fedosov A. Yu. Key methodological approaches to using free software in informatics course at the level of basic general education. *Informatics and Education*. 2022;37(1):37–48. (In Russian.) DOI: 10.32517/0234-0453-2022-37-1-37-48]

#### **Информация об авторах**

Кушниренко Анатолий Георгиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. отделом учебной информатики, Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Россия; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6898-901X>; e-mail: agk\_@mail.ru

Малый Александр Альбертович, младший научный сотрудник, Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Россия; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9998-6556>; e-mail: maly@niisi.msk.ru

#### **Information about the authors**

Anatoly G. Kushnirenko, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Docent, Head of the Educational Software Department, Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6898-901X>; e-mail: agk\_@mail.ru

Alexander A. Maly, Junior Research Scientist, Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9998-6556>; e-mail: maly@niisi.msk.ru

**Поступила в редакцию / Received:** 06.09.2022.

**Поступила после рецензирования / Revised:** 20.09.2022.

**Принята к печати / Accepted:** 27.09.2022.