МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФРМАТИКИ
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ПОЛУЗЁРОВ Тимофей Дмитриевич

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ НА РЫНКЕ КРИПТОВАЛЮТ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СРЕДНЕ-ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Магистерска диссертация
специальность 1-31 80 09 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель
Харин Алексей Юрьевич
заведующий кафедрой, доктор физико-математических наук, профессор

Допущена к защите
«___» _______________ 2025 г.
Зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики
____________ А. Ю. Харин
доктор физико-математических наук, профессор

Минск, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Ключевые слова: кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g

Задачи исследования:

1. пункт 1

2. пункт 2

Цель работы: тут цель

Объект исследования является

Предмет исследования является

Методы исследования: методы методы

Результаты работы

Области применения

АГУЛЬНАЯ ХАРАКТЫРЫСТЫКА РАБОТЫ

Ключавыя словы: кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g

Мэта работы: тут цель

Задачи исследования:

1. пункт 1

2. пункт 2

Аб'ектам даследавання является

Метады даследавання методы методы

Вынікі работы

Вобласть ўжывання

GENERAL DESCRIPTION OF WORK

Keywords: кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g

The object: тут цель

The objective:

1. item one
2. item two

Research methods: методы методы

The results

Application

ВВЕДЕНИЕ

Тут введение будет

1. ВВЕДЕНИЕ В РЫНОК КРИПТОВАЛЮТ

2. СРЕДНЕ-ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ПОРТФЕЛЯ

2.1. Основные понятия

Будем рассматривать одношаговую задачу инвестирования.

Пусть инвестор имееот возможность разместить свой начальный капитал x по акциям $A_1, \dots, A_N$, стоимость которых в момент $n = 0$ равна соответственно $S_0(A_1), \dots, S_0(A_N)$

Пусть $X_0(b) = b_1 S_0(A_1) + \cdots + B_N S_0(A_N)$, где $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots N$. Иначе говоря, пусть

$$b = (b_1, \dots, b_N) \tag{2.1}$$

есть портфель ценных бумаг, где b_i – число акций A_i стоимостью $S_0(A_i)$.

Будем предпоалагать, что эволбция каждой акции A_i определяется тем, что её цена $S_1(A_i)$ в момент $n = 1$ подчиняется разностному уравнению

$$\Delta S_1(A_i) = \rho(A_i) S_0(A_i) \tag{2.2}$$

или, что равносильно,

$$S_1(A_i) = (1 = \rho(A_i)) S_0(A_i) \tag{2.3}$$

где $\rho(A_i)$ — случайная процентная ставка акции A_i, $\rho(A_i) > -1$.

Если инвестор выбрал портфель $b = (b_1, \dots, b_N)$, то его начальный капитал $X_0(b) = x$ превратится в

$$X_1(b) = b_1 S_1(A_1) + \cdots + b_N S_1(A_N), \tag{2.4}$$

и эту величину желательно сделать «побольше». Это желание, однако, должно рассматриваться с учетом «риска», связанного с получением «большего» дохода.

С этой целью Г. Марковитц рассматривает две характеристики капитала

$X_1(B)$:

$$\mathbb{E}\left[X_1(b)\right] \tag{2.5}$$

– математическое ожидание и

$$\mathbb{D}\left[X_1(b)\right] \tag{2.6}$$

– дисперсию.

Имея эти две характеристики, можно по-разному формулировать оптимизационную задачу выбора наилучшего портфеля в зависимости от критерия оптимальности.

Можно, например, задаться вопросом о том, на каком портфеле b^* достигается максимум некоторой целевой функции $f = f(\mathbb{E}\left[X_1(b)\right], \mathbb{D}\left[X_1(b)\right])$ при «бюджетном ограничении» на класс допустимых портфелей:

$$B(x) = \{b = (b_1, \ldots, b_N) : b_i \geq 0, X_0(b) = x\}, x > 0 \tag{2.7}$$

Естественна и следующая вариационная постановка: найти

$$\inf \mathbb{D}\left[X_1(b)\right] \tag{2.8}$$

в предположении, что inf берется по тем портфелям b, для которых выполнены ограничения

$$b \in B(x), \tag{2.9}$$

$$\mathbb{E}\left[X_1(b)\right] = m, \tag{2.10}$$

где m – некоторая константа.

2.2. Сведение к процентным ставкам

Покажем теперь,что в одношаговой задаче оптимизации портфеля ценных бумаг можно вместо величин $(s_1(A_1), \ldots, S_1(A_N))$ работать непосредственно с процентными ставками $(\rho(A_1), \dots, \rho(A_N))$, подразумевая под этим следующее.

Пусть $b \in B(X)$, т.е. $x = b_1 S_0(A_1) + \dots + b_N S_0(A_N)$. Введем величины $d = (d_1, \dots, d_N)$, полагая

$$d_i = \frac{b_i S_0(A_i)}{x} \tag{2.11}$$

.

Поскольку $b \in B(X)$, получаем, что $d_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{N} = 1$. Представим капитал $X_1(B)$ в виде

$$X_1(b) = (1 + R(b))X_0(b), \tag{2.12}$$

и пусть

$$\rho(d) = d_1 \rho(A_1) + \dots + d_N \rho(A_N). \tag{2.13}$$

Ясно, что

$$R(b) = \frac{X_1(b)}{X_0(b)} - 1 = \frac{X_1(b)}{x} - 1 = \tag{2.14}$$

$$\frac{\sum b_i S_1(A_i)}{x} - 1 = \sum d_i \frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1 = \tag{2.15}$$

$$\sum d_i \left(\frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1 \right) = \sum d_i \rho(A_i) = \rho(d) \tag{2.16}$$

Итак,

$$R(b) = \rho(d), \tag{2.17}$$

откуда следует, что если $d = (d_1, \dots, d_N)$ и $b = (b_1, \dots, b_N)$ связаны соотношениями $d_i = \frac{b_i S_0(A_i)}{x}, i = 1, \dots, N$, то для $b \in B(x)$ выполняется равенство

$$X_1(b) = x(1 + \rho(d)), \tag{2.18}$$

и, следовательно, с точки зрения оптимизационных задач для $X_1(b)$ можно оперировать с соотвествующими задачами для $\rho(d)$.

2.3. Диверсификация портфеля

Обратимся теперь к вопросу о том, как диверсификацией можно добится сколь угодно малого (несистематического) риска, измеряемого дисперсией или стандарным отклонением величин $X_1(b)$.

С этой целью рассмотрим для начала пару случайных величин ξ_1 и ξ_2 с конечными вторыми моментами. Тогда если c_1 и c_2 – константы, $\sigma_i = \sqrt{\mathbb{D}\,[\xi_i]}, i = 1, 2$, то

$$\mathbb{D}\,[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = (c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2)^2 + 2c_1c_2\sigma_1\sigma_2(1 + \sigma_{12}), \tag{2.19}$$

где $\sigma_{12} = \frac{\mathbf{Cov}(\xi_1,\xi_2)}{\sigma_1\sigma_2}, \mathbf{Cov}\,(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\,[\xi_1\xi_2] - \mathbb{E}\,[\xi_1] \cdot \mathbb{E}\,[\xi_2]$. Отсюда ясно, что если $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$ и $\sigma_{12} = -1$, то $\mathbb{D}\,[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = 0$. ак Таким образом, если величины ξ_1 и ξ_2 отрицательно коррелированы с коэффициентом корреляции $\sigma_{12} = -1$, то таким подбором констант c_1 и c_2, что $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$, получаем комбинацию $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ с нулевой дисперсией. Но, конечно, при этом среднее значение $\mathbb{E}\,[c_1\xi_1 + c_2\xi_2]$ может оказаться достаточно малым. (Случай $c_1 = c_2 = 0$ для задачи оптимизации не интересен в силу условия $b \in B(X)$).

Из этих элементарных рассуждений ясно, что при заданных ограничениях на (c_1, c_2) и класс величин (ξ_1, ξ_2) при решении задачи о том, чтобы сделать $\mathbb{E}\,[c_1\xi_1 + c_2\xi_2]$ «побольше», а $\mathbb{D}\,[c_1\xi_1 + c_2\xi_2]$ «поменьше», надо стремиться к выбору таких пар (ξ_1, ξ_2), для которыз их ковариация была бы как можно ближе к минус единице.

Изложенный эффект отрицательной коррелированности, называемый эффектом Марковитца, является одной из основных идей диверсификации при инвестировании — при составлении портфеля ценных бумаг надо стремиться к тому, чтобы вложения делались в бумаги, среди которых по возможности много отрицательно коррелированных.

Другая идея, лежащая в основе диверсификации, основана на следующем соображении.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — последоватльность некоррелированных случайных величин с дисперсиями $\mathbb{D}\,[\xi_i] \leq C, i = 1, \ldots, N$, где C — некоторая константа.

Тогда

$$\mathbb{D}\left[d_1\xi_1+\cdots+d_N\xi_N\right]=\sum_{i=1}^{N} d_i^2\mathbb{D}\left[\xi_i\right]\leq C\sum_{i=1}^{N} d_i^2. \tag{2.20}$$

Поэтому, взяв, например, $d_i=\frac{1}{N}$, находим, что

$$\mathbb{D}\left[d_1\xi_1+\cdots+d_N\xi_N\right]\leq \frac{C}{N}\to 0, N\to\infty \tag{2.21}$$

Этот эффект некорреливанности говорит о том, что если инвестирование производится в некоррелированные ценные бумаги, то для уменьшения риска, т. е. дисперсии $\mathbb{D}\left[d_1\xi_1+\cdots+d_N\xi_N\right]$, надо по возможности брать их число N как можно большим.

Вернемся к вопросу о дисперсии $\mathbb{D}\left[\rho(d)\right]$ величины

$$\rho(d)=d_1\rho(A_1)+\cdots+d_N\rho(A_N). \tag{2.22}$$

Имеем

$$\mathbb{D}\left[\rho(d)\right]=\sum_{i=1}^{N} d_i^2\mathbb{D}\left[\rho(A_i)\right]+\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} d_i d_j\mathbf{Cov}\left(\rho(A_i),\rho(A_j)\right). \tag{2.23}$$

Возьмем здесь $d_i=\frac{1}{N}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2\mathbb{D}\left[\rho(A_i)\right]=\left(\frac{1}{N}\right)\cdot N\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{D}\left[\rho(a_i)\right]=\frac{1}{N}\cdot\overline{\sigma}_N^2, \tag{2.24}$$

где $\bar{\sigma}_N^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{D}\left[\rho(A_i)\right]$ — средняя дисперсия. Далее,

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} d_i d_j\mathbf{Cov}\left(\rho(A_i),\rho(A_j)\right)=\left(\frac{1}{N}\right)^2 N(N-1)\overline{\mathbf{Cov}}_N, \tag{2.25}$$

где $\overline{\mathbf{Cov}}_N$ есть средняя ковариация

$$\overline{\mathbf{Cov}}_N=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\mathbf{Cov}\left(\rho(A_i),\rho(A_j)\right). \tag{2.26}$$

Таким образом,

$$\mathbb{D}\left[\rho(d)\right] = \frac{1}{N}\overline{\sigma}_N^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\overline{\mathbf{Cov}}_N, \tag{2.27}$$

и ясно, что если $\overline{\sigma}_N^2 \le C$ и $\overline{\mathbf{Cov}}_N \to \overline{\mathbf{Cov}}$ при $N \to \infty$, то

$$\mathbb{D}\left[\rho(d)\right] \to \overline{\mathbf{Cov}}, N \to \infty. \tag{2.28}$$

Из этой формулы мы видим, что если $\overline{\mathbf{Cov}}$ равна нулю, то диверсификацией с достаточно большим N риск инвестирования, т.е. $\mathbb{D}\left[\rho(d)\right]$, может быть сделан сколь угодно малым. К сожалению, если рассматривать, скажем, рынок акций, то на нем, как правило, имеется положительная корреляция в ценах (они движутся довольно-таки согласованно в одном направлении), что приводит к тому, что $\overline{\mathbf{Cov}}_N$ не стремится к нулю при $N \to \infty$. Предельное значение $\overline{\mathbf{Cov}}$ и есть тот систематический, иначе — рыночный — риск, который присущ рассматриваемому рынку и диверсификацией не может быть редуцирован. Первый же член в формуле !!! определяет несистематический риск, который может быть редуцирован, как мы видели, выбором большого числа акций.

3. ПРОВЕРКА СТРАТЕГИЙ НА РЫНОЧНЫХ ДАННЫХ

3.1. Подготовка данных

Выгрузим цены закрытия дневных свечей.

3.2. Оценка ожидаемой доходности

Рассмотрим несколько подходов к оценке доходности.

1. На основании исторических данных — предполагается эргодичность?

2. Прогнозирование временных рядов

3. Последнее значение — предположение мартингальности

3.3. Оценка ковариации доходностей

Оценим ковариации по историческим данным

3.4. Множество оптимальных портфелей

Для каждого способа оценки доходностей построим фронтиру оптимальных портфелей

3.5. Проверка стратегий на исторических данных

Используя кросс-проверку протестируем стратегии

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ А