

Ю. Н. Каптанов

Модели финансовой математики и статистическое моделирование

учебное пособие для студентов кафедры статистического
моделирования СПбГУ

Санкт-Петербург
2010

Оглавление

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Дискретные модели | 3 |
| 1.1 | Модель В-S рынка | 3 |
| 1.2 | Портфель ценных бумаг | 5 |
| 1.3 | Безарбитражность | 7 |
| 1.4 | Форварды и фьючерсы | 13 |
| 1.5 | Опцион европейского типа | 16 |
| 1.5.1 | Хеджирование. Цена опциона. | 17 |
| 1.5.2 | Существенная выборка | 20 |
| 1.6 | Опцион американского типа | 21 |
| 1.6.1 | Цена опциона американского типа | 22 |
| 1.6.2 | Марковский случай | 27 |
| 1.6.3 | Метод стохастической сетки | 28 |
| 2 | Модель геометрического броуновского движения | 35 |
| 2.1 | Мартингальная мера | 37 |
| 2.2 | Опцион европейского вида | 39 |
| 2.2.1 | Стандартные опционы | 40 |
| 2.2.2 | Опционы с последствием | 42 |
| 2.2.3 | Барьерные опционы | 44 |
| 2.3 | Опцион американского типа | 45 |
| 2.3.1 | Метод стохастической сетки | 46 |
| 2.3.2 | Метод стохастического интегрирования по частям | 50 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Диффузионные модели | 57 |
| 3.1 | Модель акций | 57 |
| 3.1.1 | Модель локальных волатильностей | 57 |
| 3.1.2 | Вычисление локальных волатильностей. Гладкие функции. | 60 |
| 3.1.3 | Дискретный случай. | 62 |
| 3.1.4 | Модель стохастической волатильности | 63 |
| 3.2 | Модели процентных ставок | 69 |
| 3.2.1 | Модель Васичека | 70 |
| 3.2.2 | Модель Халла-Уайта | 71 |
| 3.2.3 | Модель Хита-Джарроу-Мортонa | 74 |
| 3.3 | Моделирование диффузионных процессов. | 75 |
| 3.3.1 | Оценка погрешности | 78 |
| 3.3.2 | Погрешность при вычислении функционалов. . . . | 81 |
| 3.3.3 | Оценки с минимальной дисперсией | 86 |
| 4 | Модели со скачками. | 91 |
| 4.1 | Пуассоновский процесс | 91 |
| 4.2 | Диффузия со скачками | 94 |
| 4.3 | Уменьшение дисперсии | 99 |

Глава 1

Дискретные модели

Дискретная модель рынка подробно изложена в работах А.Н. Ширяева и др. [1, 2], метод стохастической сетки для оценивания опциона американского типа был предложен в статье П. Глассермана и М. Броди [5].

Везде в этой главе будем предполагать, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с потоком σ -алгебр $\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots, N$. Мы будем рассматривать последовательности неотрицательных \mathcal{F}_n -измеримых случайных величин $S_n, n = 0, \dots, N$, которые будем интерпретировать как цены некоторых ценных бумаг. Будем обозначать $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$; доходность в момент n определим как $\rho_n = \Delta S_n / S_{n-1}$; последовательность S_n в свою очередь может быть выражена через доходности: $S_n = S_0(1 + \rho_1) \dots (1 + \rho_n)$.

1.1 Модель B-S рынка

Свое название данная модель получила по той причине, что в ней рассматриваются два вида ценных бумаг: облигации (bonds) и акции (stocks).

Облигации. В простейшем случае, облигация - это ценная бумага, обладатель которой получает фиксированный доход (будем полагать его равным 1) в момент времени t ; цену облигации в момент времени $n \leq t$

будем обозначать $P_n(t)$ и считать, что это \mathcal{F}_n -измеримые случайные величины, удовлетворяющие условию $P_t(t) = 1$. Текущая процентная ставка (current interest rate) определяется как доходность облигации с ближайшим сроком погашения:

$$r_n = (P_n(n) - P_{n-1}(n))/P_{n-1}(n) = (1 - P_{n-1}(n))/P_{n-1}(n).$$

Таким образом, r_n являются \mathcal{F}_{n-1} измеримыми величинами. Из экономических соображений $P_{n-1}(n) \leq 1$, так что $r_n \geq 0$. С понятием текущей процентной ставки тесно связана величина

$$B_n = B_0(1 + r_1) \dots (1 + r_n),$$

которую мы будем называть "банковский счет". Отметим, что B_n также являются \mathcal{F}_{n-1} измеримыми случайными величинами и, кроме того, последовательность B_n - неубывающая.

Акции. Акция (stock share) - это ценная бумага, дающая владельцу право владения некоторой частью имущества, активов и доходов корпорации. Цену акции в момент времени n будем обозначать S_n , считая, что это неотрицательная, \mathcal{F}_n -измеримая случайная величина.

Часто рассматривается модель рынка, в которой владельцу акции в момент времени n выплачиваются дивиденды δ_n , которые мы будем считать \mathcal{F}_n -измеримыми случайными величинами. Если дивиденды неслучайные и в момент времени $k > n$ выплачиваются дивиденды в размере δ_k , то их можно рассматривать как фиксированный доход. Цена такого актива в момент времени n равна $\delta_k P_n(k)$, а цена акции представляется в виде

$$S_n = R_n + \sum_{k=n+1}^N \delta_k P_n(k),$$

где R_n - неотрицательная \mathcal{F}_n -измеримая случайная величина.

Мы будем рассматривать также ситуации, когда заданы цены не одной а нескольких акций S_n^i , $i = 1, \dots, d$. Кроме того, банковский счет B_n в некоторых случаях тоже можно рассматривать как цену акции; в этом случае будем обозначать его S_n^0 .

1.2 Портфель ценных бумаг

Введем понятие торговой стратегии (портфеля). Стратегией π будем называть набор \mathcal{F}_n -измеримых случайных величин γ_n^i , $i = 0, \dots, d$. Случайная величина γ_n^i обозначает количество бумаг i -го типа в момент времени n , $\pi_n = \{\gamma_n^i\}_{i=0}^d$ - состояние портфеля в момент времени n . Как и в случае с ценами, величину γ_n^0 обозначим особым образом $\gamma_n^0 = \beta_n$ - денежные средства на банковском счете. Отметим, что все величины могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательная величина на банковском счете означает взятие в долг, отрицательная позиция по акциям для трейдеров также возможна и называется "короткой" (short) позицией.

Цена портфеля в момент времени n обозначается символом X_n^π и определяется естественным образом: $X_n^\pi = \sum_{i=0}^d \gamma_n^i S_n^i$. Последнюю сумму обозначим (γ_n, S_n) . Сумму, в которой индекс i пробегает значения от 1 до d , будем обозначать в виде произведения без скобок: $\gamma_n S_n = \sum_{i=1}^d \gamma_n^i S_n^i$, так что X_n^π может быть представлено в виде $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$.

Для стратегии π введем понятие самофинансируемости: стратегия называется самофинансируемой, если $(\gamma_n, S_n) = (\gamma_{n-1}, S_n)$ для любого n . Условие самофинансируемости можно записать как $(\Delta \gamma_n, S_n) = 0$. Поскольку ΔX_n может быть представлено в виде $\Delta X_n^\pi = (\Delta \gamma_n, S_n) + (\gamma_{n-1}, \Delta S_n)$, то отсюда следует, что $\Delta X_n^\pi = (\gamma_{n-1}, \Delta S_n)$ и, следовательно,

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^n (\gamma_{k-1}, \Delta S_k). \quad (1.1)$$

Отметим, что условие самофинансируемости позволяет выразить значение β_k через значения γ_k^i , $i = 1, \dots, d$. Поэтому для самофинансируемой стратегии достаточно задавать X_0 и γ_k^i , $i = 1, \dots, d$ и под стратегией π мы можем понимать пару $(X_0, \{\gamma_k^i\}_{i=1}^d)_{k=0}^N$.

Рассмотрим понятие дисконтирования. Введем величину $\alpha_n = B_0/B_n$,

которую будем называть коэффициентом дисконтирования. Отметим, что величина α_n может быть выражена в виде

$$\alpha_n = \frac{1}{(1+r_1) \dots (1+r_n)}.$$

Цены, умноженные на коэффициент дисконтирования, будем называть дисконтированными и обозначать тем же символом с добавлением значка \sim , например, $\tilde{S}_n^i = \alpha_n S_n^i$. Иногда будем использовать также величину

$$\alpha_{k,n} = \frac{1}{(1+r_k) \dots (1+r_n)}.$$

Дисконтированная цена портфеля имеет представление $\tilde{X}_n = (\gamma_n, \tilde{S}_n)$. Кроме того, для дисконтированных цен выполнено условие самофинансирования $(\Delta\gamma_n, \tilde{S}_n) = 0$. Следовательно, для дисконтированных цен выполняется аналог равенства (1.1):

$$\tilde{X}_n^\pi = \tilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^n (\gamma_{k-1}, \Delta\tilde{S}_k). \quad (1.2)$$

Учитывая, что $\Delta\tilde{B}_k = 0$, а также принятые обозначения, перепишем (1.2) в виде

$$\tilde{X}_n^\pi = \tilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^n \gamma_{k-1} \Delta\tilde{S}_k. \quad (1.3)$$

В случае, когда по акциям выплачиваются дивиденды (δ_n^i) , условие самофинансируемости определяется равенством:

$$\beta_n B_n + \gamma_n S_n = \beta_{n-1} B_n + \gamma_{n-1} (S_n + \delta_n).$$

Для дисконтированных цен получаем формулу

$$\tilde{X}_n^\pi = \tilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^n \gamma_{k-1} (\Delta\tilde{S}_k + \tilde{\delta}_k). \quad (1.4)$$

1.3 Безарбитражность

Дадим определение безарбитражности: рынок называется безарбитражным, если для любой стратегии π , такой что $X_0^\pi = 0$ и $X_N^\pi \geq 0$ п.н. следует, что $X_N^\pi = 0$ п.н.

Пользуясь непосредственно определением, легко показать, что в случае, когда банковский счет является детерминированной последовательностью, из безарбитражности следует выражение для цены облигации

$$P_n(t) = \alpha_{n+1,t}. \quad (1.5)$$

Действительно, предположим, что для некоторых n и t имеет место неравенство $P_n(t) < \alpha_{n+1,t}$, тогда стратегия $\beta_k = -P_n(t)/B_n$, $\gamma_k = 1$, при $k = n, \dots, t$, является арбитражем, поскольку

$$X_t = -\frac{P_n(t)}{B_n} B_t + 1 > 0.$$

Аналогично рассматривается случай $P_n(t) > \alpha_{n+1,t}$.

Сформулируем достаточное условие безарбитражности рынка. Напомним, что последовательность случайных величин M_n называется мартингалом относительно $\{\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}\}$, если $\mathbf{E}|M_n| < \infty$ и $\mathbf{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$.

Теорема 1.1 Пусть существует мера $\tilde{\mathbf{P}}$, эквивалентная исходной мере \mathbf{P} и такая, что \tilde{S}_n является мартингалом относительно $\{\Omega, \mathcal{F}_n, \tilde{\mathbf{P}}\}$, тогда рынок - безарбитражный.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1.1 Пусть последовательность M_n представима в виде $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n Y_k \Delta Z_k$, $\mathbf{E}|M_0| < \infty$, Y_k - \mathcal{F}_{k-1} -измеримы, Z_k -мартингал, тогда

1. $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}|M_n| < \infty$ п.н.;

2. $\mathbf{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$ п.н.

Доказательство. Обозначим через I_n^j индикатор следующего множества $A_n^j = \{\omega : |Y_k| \leq j, k = 1, \dots, n\}$. Кроме того, введем величины $Y_k^j = Y_k I_k^j$, $M_n^j = M_0 + \sum_{k=1}^n Y_k^j \Delta Z_k$. Последовательность M_n^j образует мартингал. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|M_n^j| &\leq \mathbf{E}|M_0| + \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|Y_k^j \Delta Z_k| \leq \mathbf{E}|M_0| + j \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\Delta Z_k| < \infty, \\ \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} M_n^j &= M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^j \Delta Z_k + Y_n^j \mathbf{E}(\Delta Z_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}^j. \end{aligned}$$

Заметим, что I_n^j - \mathcal{F}_{n-1} - измеримы и $I_n^j I_k^j = I_n^j$ при $k \leq n$, поэтому

$$I_n^j \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} |M_n| = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} |M_n| I_n^j = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} |M_n^j| I_n^j \stackrel{\text{п.н.}}{<} \infty.$$

Поскольку $I_n^j \rightarrow 1$ п.н. при $j \rightarrow \infty$, то $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} |M_n| < \infty$ п.н. Аналогично,

$$I_n^j \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} M_n = I_n^j \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} M_n^j = I_n^j M_{n-1}^j = I_n^j M_{n-1}.$$

Устремляя j к ∞ , получим второе утверждение леммы.

Лемма 1.2 Пусть в условиях предыдущей леммы для некоторой константы $C > 0$ выполнено $M_N \leq C$ или $M_N \geq -C$, тогда последовательность M_n является мартингалом.

Доказательство. Фактически доказать остается только конечность математического ожидания случайных величин M_n . Пусть $M_N \geq -C$, тогда, используя неравенство Йенсена и предыдущую лемму, получим

$$C \geq \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{N-1}} M_N^- \geq (\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{N-1}} M_N)^- = M_{N-1}^-.$$

Индукцией получаем, что $M_n \geq -C$ для любого n . Далее, используем лемму Фату:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}M_n^+ &= \mathbf{E} \lim_j (M_n^j)^+ \leq \liminf_j \mathbf{E}(M_n^j)^+ = \liminf_j (\mathbf{E}M_n^j + \mathbf{E}(M_n^j)^-) \\ &\leq \mathbf{E}M_0 + \mathbf{E} \max_{k \leq n} M_k^- \leq \mathbf{E}M_0 + C. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Используя приведенные выше леммы, докажем теорему 1.1. По формуле (1.3) и условиям теоремы

$$\tilde{X}_N = \tilde{X}_0 + \sum_{k=1}^N \gamma_{k-1} \Delta \tilde{S}_k \geq 0.$$

Пусть \tilde{S}_n - мартингал по мере $\tilde{\mathbf{P}}$, тогда из леммы 1.2 следует, что \tilde{X}_n - мартингал по той же мере, следовательно, $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_N = \tilde{X}_0 = 0$ и, значит, $X_N = 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$ -п.н. Поскольку $\tilde{\mathbf{P}}$ эквивалентна исходной мере \mathbf{P} , то $X_N = 0$ \mathbf{P} -п.н. Безарбитражность доказана.

Следствие 1. Предположим, что для некоторой меры $\tilde{\mathbf{P}}$ цены облигаций могут быть выражены в виде

$$P_n(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha_{n+1,t}. \quad (1.6)$$

Заметим, что такое представление согласуется с (1.5). В этом случае рынок, состоящий из банковского счета и облигаций, является безарбитражным. Действительно, в этом случае $\tilde{P}_n(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha_{1,t}$, т.е. дисконтированные цены облигаций являются мартингалом.

Следствие 2. Если рассматривается модель с дивидендами, то из доказательства леммы и представления (1.4) следует, что для безарбитражности достаточно потребовать, чтобы мартингалом была последовательность $\tilde{S}_n + \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_k$. Если дивиденды – детерминированные величины, то последнее выражение может быть переписано в виде

$$\tilde{R}_n + \sum_{k=n+1}^N \delta_k \tilde{P}_n(k) + \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_k.$$

Предположим, что $P_n(k)$ имеет место представление (1.6). Покажем, что величины

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_k + \sum_{k=n+1}^N \delta_k \tilde{P}_n(k).$$

образуют мартингал. Математическое ожидание величин Z_n конечно и, кроме того

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} Z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\delta}_k + \delta_n \alpha_n + \sum_{k=n+1}^N \delta_k \tilde{P}_{n-1}(k).$$

Учитывая что $\alpha_n = \alpha_{n-1} \frac{1}{1+r_n} = \alpha_{n-1} P_{n-1}(n) = \tilde{P}_{n-1}(n)$, получаем, что $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} Z_n = Z_{n-1}$. Таким образом, для безарбитражности рынка с детерминированными дивидендами достаточно потребовать, чтобы мартингалом была последовательность \tilde{R}_n .

Для дисконтированных цен акции имеет место представление

$$\Delta \tilde{S}_n = \alpha_n S_n - \alpha_{n-1} S_{n-1} = \tilde{S}_{n-1} \left(\frac{1 + \rho_n}{1 + r_n} - 1 \right). \quad (1.7)$$

Беря условное математическое ожидание по мере, относительно которой \tilde{S}_n - мартингал, получим

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} \left(\frac{1 + \rho_n}{1 + r_n} - 1 \right) = 0.$$

После преобразований получим $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}} \rho_n = r_n$.

Биномиальная модель. Рассмотрим рынок, при котором σ -алгебры \mathcal{F}_n порождаются процессом S_n , а доходности акций ρ_n на каждом шаге могут принимать только два значения: b_n и a_n , причем эти случайные величины \mathcal{F}_{n-1} -измеримы и $-1 < a_n < r_n < b_n$, тогда последнее равенство имеет вид $\tilde{p}_n b_n + (1 - \tilde{p}_n) a_n = r_n$. Отсюда следует, что

$$\tilde{p}_n = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}. \quad (1.8)$$

Тем самым, в биномиальной модели мартингальная мера определяется однозначно.

Выбор мартингальной меры. В общем случае, множество мартингальных может состоять более, чем из одной меры и естественно рассматривать ту мартингальную меру, которая в каком-то смысле близка к исходной. Выберем какую-то выпуклую функцию $g(x)$ и рассмотрим в качестве критерия близости мартингальной меры \mathbf{Q} к исходной мере \mathbf{P} величину

$$R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \int_{\Omega} g(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}) d\mathbf{P}. \quad (1.9)$$

Если, например, положить $g(x) = 0.5(\sqrt{x} - 1)^2$, то $R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = H^2(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, где H - расстояние Хеллингера. Часто рассматривается в качестве критерия близости относительная энтропия, что соответствует выбору $g(x) = x \ln(x)$. Мартингальная мера \mathbf{Q} выбирается таким образом, чтобы минимизировать $R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q})$.

Рассмотрим пример. Пусть исходная мера порождается переходными плотностями $p_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$, текущая процентная ставка r равна нулю, а $g(x) = x^2$. Пусть некоторая мера \mathbf{Q} , порождается плотностями $q_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$, тогда

$$R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \int_{R^N} dx_1 \dots dx_N \frac{q_1^2}{p_1} \dots \frac{q_N^2}{p_N}.$$

Отметим, что для любой переходной плотности $q_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$, порождающей мартингальную меру, и для любых λ, μ , не зависящих от x_n выполнено равенство

$$\int_0^\infty dx_n (\lambda + \mu x_n) q_n = \lambda + \mu x_{n-1}.$$

Положим $\lambda_{N+1}^* = 1, \mu_{N+1}^* = 0$, и предположим, что для $n = N, \dots, 1$

система уравнений

$$\begin{cases} \int_0^\infty dx_n p_n \frac{\lambda_n + \mu_n x_n}{\lambda_{n+1}^* + \mu_{n+1}^* x_n} = 1, \\ \int_0^\infty dx_n p_n \frac{\lambda_n + \mu_n x_n}{\lambda_{n+1}^* + \mu_{n+1}^* x_n} x_n = x_{n-1}, \end{cases} \quad (1.10)$$

имеет неотрицательное решение λ_n^*, μ_n^* . Обозначим $h_n(x) = \lambda_n^* + \mu_n^* x$. Покажем, что оптимальная по выбранному критерию мартингальная мера порождается переходными плотностями

$$q_n^* = p_n \frac{h_n(x_n)}{h_{n+1}(x_n)}.$$

Действительно, для произвольной мартингальной плотности q_n имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{q_n^2}{p_n} h_{n+1}(x_n) dx_n &= \int_0^\infty \frac{q_n^2}{q_n^*} h_n(x_n) dx_n = \\ &= \int_0^\infty q_n^* h_n(x_n) + \int_0^\infty \frac{(q_n - q_n^*)^2}{q_n^*} h_n(x_{n-1}) \geq h_n(x_{n-1}). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\int_0^\infty (q_n^*)^2 / p_n h_{n+1}(x_n) dx_n = h_n(x_{n-1})$. Поэтому,

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) &= \int_{R^{N-1}} dx_1 \dots dx_n \frac{q_1^2}{p_1} \dots \frac{q_{N-1}^2}{p_{N-1}} \int_R dx_N \frac{q_N^2}{p_N} \\ &\geq \int_{R^{N-1}} dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{q_1^2}{p_1} \dots \frac{q_{N-1}^2}{p_{N-1}} h_N(x_{N-1}) \geq \dots \\ &\geq h_1(x_0) = \int_R dx_1 \frac{(q_1^*)^2}{p_1} h_2(x_1) = \dots \\ &= \int_{R^N} dx_1 \dots dx_N \frac{(q_1^*)^2}{p_1} \dots \frac{(q_N^*)^2}{p_N}. \end{aligned}$$

Пусть процесс цен имеет вид $S_n = S_{n-1} e^{\sigma \xi_n + \tau}$, где ξ_n - независимые стандартные нормальные случайные величины, тогда

$$p_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x) = \frac{d}{dx} \mathbf{P} \left(\xi_n < \frac{\ln \frac{x}{x_{n-1}} - \tau}{\sigma} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln \frac{x}{x_{n-1}} - \tau)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{x\sigma^2}. \quad (1.11)$$

Система уравнений (1.10) при $n = N$ после замены $x_N = x_{N-1}e^{\sigma y}$ принимает вид

$$\begin{cases} \int_R dy \varphi(y)(\lambda_N + \mu_N x_{N-1} e^{\sigma y + \tau}) = 1, \\ \int_R dy \varphi(y)(\lambda_N + \mu_N x_{N-1} e^{\sigma y + \tau}) e^{\sigma y + \tau} = 1, \end{cases}$$

где $\varphi(y)$ - плотность нормального распределения. Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_N &= \frac{1 - a_1}{a_2 - a_1^2} \frac{1}{x_{N-1}}, \\ \lambda_N &= \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_1^2}, \end{aligned}$$

где $a_1 = e^{0.5\sigma^2 + \tau}$, $a_2 = e^{2\sigma^2 + 2\tau}$. Если $-1.5\sigma^2 \leq \tau \leq -0.5\sigma^2$, то $\lambda_N, \mu_N \geq 0$ и, кроме того, $h_N(x_{N-1})$ не зависит от x_{N-1} . Таким образом, оптимальная мартингальная мера порождается плотностью для величин ξ_n , равной

$$q_\xi(x) = \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \varphi(x - \sigma).$$

Отметим, что в данной модели обычно используется другая мартингальная мера, при которой плотность ξ_n имеет вид $q_\xi(x) = \varphi(x + 0.5\sigma + \tau/\sigma)$.

1.4 Форварды и фьючерсы

Форвард - это контракт, по которому один из участников обязуется продать, а другой из участников обязуется купить некоторый актив в

определенный момент времени t по определенной цене. Эта цена называется форвардной ценой; обозначим ее $\Phi_n(t)$, где n - момент заключения контракта. Естественно считать, что величина $\Phi_n(t)$ - \mathcal{F}_n -измерима и $\Phi_t(t) = S_t$.

Опишем данный контракт в терминах некоторой акции на первичном рынке. В момент заключения контракта ни один из участников не затрачивает никаких средств, поэтому мы можем интерпретировать форвардный контракт как некоторую акцию, которая имеет нулевую цену, но по которой в момент времени t выплачиваются дивиденды. Для определенности будем считать, что участник контракта, который обязуется купить оговоренный актив, имеет "длинную" позицию по этой "акции" (т.е. в его портфеле форвардный контракт считается со знаком плюс), а участник, который обязуется его продать имеет "короткую" позицию. Тогда, как нетрудно видеть, размер дивиденда равен $S_t - \Phi_n(t)$. Портфель, состоящий из форвардного контракта, имеет нулевую цену до момента t , а в момент t цена портфеля становится равной $S_t - \Phi_n(t)$. Отметим некоторые особенности данной "акции": в отличие от реальных дивидендов, "дивиденды" у данной бумаги могут быть как положительными, так и отрицательными; кроме того, количество "акций" данного типа в портфеле может измениться только один раз — в момент заключения контракта.

Фьючерс. Определение фьючерсного контракта не отличается от форвардного, но при фьючерсном контракте в качестве посредника выступает биржа. Цену поставки актива (фьючерсную цену) будем обозначать $F_n(t)$. Биржа организует выполнение контракта таким образом, что при изменении фьючерсных цен с $F_n(t)$ на $F_{n+1}(t)$ со счета продавца актива на счет покупателя поступают денежные средства в размере $F_{n+1}(t) - F_n(t)$. Как и в случае форвардного контракта, мы можем рассматривать эти средства как выплату дивидендов в момент $n+1$; сумма этих "дивидендов" равна $S_t - F_n(t)$.

Теорема 1.2 *Предположим, что существует мера $\tilde{\mathbf{P}}$, относительно которой дисконтированные цены акций \tilde{S}_n - мартингал, а форвардные*

и фьючерсные цены равны соответственно

$$\Phi_k^*(t) = S_k / \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k}(B_k/B_t), \quad F_k^*(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} S_t, \quad (1.12)$$

тогда рынок, состоящий из банковского счета, акций, форвардных и фьючерсных контрактов, является безарбитражным.

Доказательство. Рассмотрим рынок, состоящий из активов четырех типов: банковского счета с ценами B_k , акции с ценами S_k^1 , форвардного контракта с моментом заключения n_2 , сроком исполнения t_2 и фьючерсного контракта с моментом заключения n_3 , сроком исполнения t_3 . Обозначим соответствующие "дивиденды" через

$$\delta_k^2 = 1_{\{k=t_2\}} (S_{t_2}^1 - \Phi_{n_2}^*(t_2)), \quad \delta_k^3 = 1_{\{n_3 < k \leq t_3\}} (F_k^*(t_3) - F_{k-1}^*(t_3)).$$

Рассмотрим произвольную стратегию $\{\gamma_n^i\}$, $i = 0, \dots, 3$. Будем считать, что $N \geq t_2, t_3$. По формуле (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{X}_N &= X_0 + \sum_{k=1}^N \gamma_{k-1} (\Delta \tilde{S}_k + \tilde{\delta}_k) \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^N \gamma_{k-1}^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \gamma_{n_2}^2 \tilde{\delta}_{t_2}^2 + \gamma_{n_3}^3 \sum_{k=n_3+1}^{t_3} \tilde{\delta}_k^3. \end{aligned}$$

Предположим, что $X_0 = 0$ и возьмем математическое ожидание по мере, относительно которой \tilde{S}_k^1 - мартингал, тогда

$$\tilde{\mathbf{E}} \tilde{X}_N = \tilde{\mathbf{E}} \gamma_{n_2}^2 \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \tilde{\delta}_{t_2}^2 + \sum_{k=n_3+1}^{t_3} \tilde{\mathbf{E}} \gamma_{n_3}^3 \alpha_k \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \delta_k^3.$$

Сосчитаем условные ожидания:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \tilde{\delta}_{t_2}^2 &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \frac{B_0}{B_{t_2}} (S_{t_2} - \Phi_{n_2}^*(t_2)) = \frac{B_0}{B_{n_2}} S_{n_2} - \Phi_{n_2}^*(t_2) \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \frac{B_0}{B_{t_2}} \\ &= \frac{B_0}{B_{n_2}} S_{n_2} - \frac{S_{n_2} B_0}{\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \frac{B_{n_2}}{B_{t_2}}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n_2}} \frac{1}{B_{t_2}} = 0, \\ \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \delta_k^3 &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} (F_k^*(t_3) - F_{k-1}^*(t_3)) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} S_{t_3}^1 - F_{k-1}^*(t_3) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_N = 0$. Если предположить, что $X_N \geq 0$, то отсюда следует, что $X_N = 0$ п.н. и это означает, что рынок безарбитражный.

Замечание 1. Если B_k - детерминированная последовательность, то несложно показать, что $F_k^*(N) = \Phi_k^*(N)$.

Замечание 2. В принципе, могут существовать и другие безарбитражные цены, но если B_k - детерминированная последовательность и рынок безарбитражный, то $F_k(t) = \Phi_k(t) = F_k^*(t) = \Phi_k^*(t)$. Действительно, если предположить, что при некотором n существует множество $\Omega_n \in \mathcal{F}_n$, такое, что $\mathbf{P}(\Omega_n) > 0$ и для $\omega \in \Omega_n$ $\Phi_n(t) < \Phi_n^*(t)$, то можно использовать стратегию, при которой

$$\gamma_k^0 = S_n^1/B_n, \quad \gamma_k^1 = -1, \quad \gamma_k^2 = 1 \quad \text{для } k \geq n \quad \text{и } \omega \in \Omega_n,$$

в противном случае полагаем все $\gamma_k^i = 0$. Эта стратегия самофинансируемая и с положительной вероятностью

$$X_t = (S_n^1/B_n) \cdot B_t + (-1) \cdot S_t^1 + 1 \cdot (S_t^1 - \Phi_n^*(t)) = \Phi_n^*(t) - \Phi_n(t) > 0,$$

что противоречит безарбитражности.

Замечание 3. Рассмотрим в качестве первичного актива облигацию со сроком погашения $T > t$. Цена облигации в момент времени n равна $P_n(T) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \alpha_{n+1,T}$, поэтому, применяя теорему, получим, что безарбитражные форвардные и фьючерсные цены на облигацию равны соответственно

$$\Phi_k^*(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \alpha_{k+1,T} / \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \alpha_{k+1,t} \quad \text{и} \quad F_k^*(t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \alpha_{t+1,T}.$$

1.5 Опцион европейского типа

Опцион - это некоторый контракт, в котором

- оговорены покупатель и продавец контракта;
- продавец контракта имеет определенные в контракте финансовые обязательства перед покупателем (например, купить или продать некоторый актив в будущем по определенной цене);

- покупатель имеет право исполнить или не исполнить данный контракт.

Основными видами опциона являются опцион покупки (call option) и опцион продажи (put option). Опцион покупки характеризуется ценой поставки актива (strike price) K и датой исполнения (expiration date) N . Если в момент времени N цена актива $S_N > K$, то покупателю (обладателю) опциона выгодно его исполнить. Продавец опциона при этом может вместо того, чтобы поставлять актив по цене K , выплатить денежные средства в размере $S_N - K$, а обладатель опциона добавив к ним денежные средства в размере K , приобрести актив по рыночной цене. Если же в момент времени N цена актива $S_N \leq K$, обладателю опциона невыгодно его исполнить и формально продавец опциона выплачивает 0 денежных средств. Объединяя оба эти случая, можно говорить о том, что опцион покупки полностью характеризуется платежной функцией $f = (S_N - K)^+$. Аналогичные рассуждения показывают, что платежная функция опциона продажи равна $f = (K - S_N)^+$.

В настоящее время имеется большое количество различных видов опционов ("экзотические" опционы), платежная функция которых зависит от траектории последовательности $\{S_n\}$, например, для "азиатского" опциона цена исполнения равна среднему значению по траектории, для опциона "с последствием" - максимальному или минимальному значению. Мы будем предполагать, что платежная функция f - это \mathcal{F}_N -измеримая случайная величина. Через \tilde{f} будем обозначать дисконтированную платежную функцию: $\tilde{f} = \alpha_N f$.

1.5.1 Хеджирование. Цена опциона.

Хеджем (от hedge - ограждать) называется такая стратегия, которая в каком-то смысле ограждает продавца от потерь, связанных с выплатами по платежной функции. Если определено множество хеджей Π , то справедливой ценой опциона называется величина $C(f) = \inf_{\pi \in \Pi} X_0^\pi$.

Определим хедж как стратегию $\pi = (X_0^\pi, \{\gamma_k\})$, при которой $X_N^\pi \geq f$ п.н. Пусть существует эквивалентная мартингальная мера $\tilde{\mathbf{P}}$ и π явля-

ется хеджем, тогда из данного определения и леммы 1.2 следует, что \tilde{X}_n^π является мартингалом по мере $\tilde{\mathbf{P}}$ и $\tilde{X}_0^\pi = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_N^\pi \geq \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$. Отсюда получаем, что $C(f) \geq \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$.

Покажем, что для биномиальной модели имеет место равенство.

Теорема 1.3 В биномиальной модели рынка $C(f) = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$.

Достаточно построить хедж с начальным капиталом $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$. Рассмотрим мартингал $M_n = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n}\tilde{f}$; он является функцией от величин ρ_1, \dots, ρ_n : $M_n = m_n(\rho_1, \dots, \rho_n)$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{n-1}}M_n &= m_n(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, b_n)\tilde{p}_n + m_n(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, a_n)(1 - \tilde{p}_n) \\ &= m_{n-1}(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}),\end{aligned}$$

где \tilde{p}_n имеет вид (1.8). Отсюда следует, что

$$\frac{m_n(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, b_n) - m_{n-1}}{b_n - r_n} = \frac{m_n(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, a_n) - m_{n-1}}{a_n - r_n},$$

т.е. выражение $(M_n - M_{n-1})/(\rho_n - r_n)$ не зависит от ρ_n , а является только функцией от $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$:

$$\frac{M_n - M_{n-1}}{\rho_n - r_n} = \mu_n(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\Delta M_n = \mu_n(\rho_n - r_n) = \frac{\mu_n(1 + r_n)}{\tilde{S}_{n-1}} \left(\frac{1 + \rho_n}{1 + r_n} - 1 \right) \tilde{S}_{n-1}.$$

Обозначим $\gamma_{n-1} = \mu_n(1 + r_n)/\tilde{S}_{n-1}$, тогда используя (1.7), получим что

$$\Delta M_n = \gamma_{n-1} \Delta \tilde{S}_n. \quad (1.13)$$

Рассмотрим стратегию $\pi = (\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}, \{\gamma_n\})$, тогда из формулы (1.13) следует, что $\tilde{X}_n^\pi = M_n$ и, следовательно,

$$X_N^\pi = f, \quad (1.14)$$

т.е. π это хедж и, значит, $C(f) = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$.

Следствие 1. Утверждение теоремы остается верным в тех случаях, когда выполняется равенство (1.14). Безарбитражные модели рынка, в которых (1.14) выполнено для любой ограниченной f и некоторой стратегии $\pi(f)$, называются полными. Для таких моделей, также как и для биномиальной модели, существует единственная мартингальная мера [2].

Следствие 2. Представление цены опциона в виде математического ожидания от платежной функции дает важное для практики соотношение между ценой опциона покупки C и ценой опциона продажи P . Поскольку

$$(S_N - K)^+ = (S_N - K) + (S_N - K)^- = (S_N - K) + (K - S_N)^+,$$

то умножая на коэффициент дисконтирования и беря ожидание от обеих частей равенства, получим

$$C = S_0 - K\tilde{\mathbf{E}}\alpha_N + P. \quad (1.15)$$

Это соотношение известно как "put-call parity".

Полные рынки обладают тем привлекательным свойством, что цена опциона имеет единственно возможное значение. Однако, свойство полноты является довольно сильным ограничением и модели, которые используются на практике, часто не обладают этим свойством. На неполных рынках хедж можно определить как стратегию, минимизирующую среднеквадратичное отклонение $\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{X}_N^\pi - \tilde{f})^2$ по выбранной мартингальной мере. В случае полного рынка является данный критерий дает те же цену и стратегию, что и теорема 1.3.

Будем считать, что $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}^2 < \infty$ и рассматривать такие стратегии, для которых \tilde{X}_n^π является квадратично интегрируемым мартингалом.

Теорема 1.4 *Оптимальная по среднеквадратичному критерию стратегия имеет вид*

$$\pi = \left(\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}, \left\{ (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \Delta \tilde{S}_{k+1} \tilde{f}) / \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} (\Delta \tilde{S}_{k+1})^2 \right\} \right). \quad (1.16)$$

Доказательство. Обозначим $V_n = \tilde{X}_n^\pi - M_n$, где $M_n = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \tilde{f}$. Последовательность V_n является мартингалом, поэтому

$$\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{X}_N^\pi - \tilde{f})^2 = \tilde{\mathbf{E}}V_N^2 = V_0^2 + \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{E}}(\Delta V_k)^2.$$

Слагаемое V_0 равно нулю при $X_0^\pi = M_0 = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}$; математическое ожидание $\tilde{\mathbf{E}}(\Delta V_k)^2$ представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\Delta V_k)^2 &= \tilde{\mathbf{E}}(\gamma_{k-1} \Delta \tilde{S}_k - \Delta M_k)^2 \\ &= \tilde{\mathbf{E}}\left(\gamma_{k-1}^2 \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k}(\Delta \tilde{S}_k)^2 - 2\gamma_{k-1} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \Delta \tilde{S}_k \Delta M_k\right) + \tilde{\mathbf{E}}(\Delta M_k)^2. \end{aligned}$$

Данное выражение достигает своего минимума при

$$\gamma_{k-1} = (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \Delta \tilde{S}_k \Delta M_k) / \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} (\Delta \tilde{S}_k)^2,$$

причем, числитель может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \Delta \tilde{S}_k \Delta M_k &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \Delta \tilde{S}_k (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{f} - \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \tilde{f}) \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \Delta \tilde{S}_k \tilde{f} - (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \Delta \tilde{S}_k) (\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \tilde{f}) \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \Delta \tilde{S}_k \tilde{f}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

1.5.2 Существенная выборка

Пусть $\tilde{p}_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$ - переходные плотности, порожденные мартингальной мерой $\tilde{\mathbf{P}}$, $f(x_1, \dots, x_N)$ - платежная функция, тогда цена опциона выражается как N -мерный интеграл

$$C = \int_{X^N} dx_1 \dots dx_N \tilde{p}_1(x_1) \dots \tilde{p}_N(x_1, \dots, x_{N-1}; x_N) \tilde{f}(x_1, \dots, x_N),$$

для вычисления которого можно применить метод Монте-Карло.

Пусть $r_n(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$ - также переходные плотности, обладающие тем свойством, что $r_1 \dots r_N > 0$ при $\tilde{p}_1 \dots \tilde{p}_N \tilde{f} > 0$, тогда можно определить оценку метода Монте-Карло

$$\check{C}(r) = \tilde{f} \prod_{n=1}^N \frac{\tilde{p}_n}{r_n}.$$

Положим

$$r_n^* = \tilde{p}_n M_n / M_{n-1},$$

где $M_n = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_n} \tilde{f}$. Величины r_n^* неотрицательны; и в силу того, что последовательность M_n - является мартингалом относительно \tilde{P} , имеем

$$\int_X r_n^*(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n) dx_n = 1.$$

Подставляя данные переходные плотности в выражение для $\check{C}(r)$ и произведя сокращения, получим, что $\check{C}(r^*) = C$. Таким образом, переходные вероятности r_n^* дают нулевую дисперсию (независимо от того, является рынок полным или нет).

1.6 Опцион американского типа

В отличие от опциона европейского типа, опцион американского типа может быть исполнен в любой момент времени до оговоренного в контракте срока исполнения, поэтому описывается не одной платежной функцией, а набором платежных функций $\{f_k\}$, соответствующих каждому моменту времени k в пределах срока действия контракта. Например, платежные функции опциона покупки равны $(S_k - K)^+$, а платежные функции опциона продажи равны $(K - S_k)^+$. В общем случае будем предполагать, что платежные функции f_k являются \mathcal{F}_k -измеримыми случайными величинами.

1.6.1 Цена опциона американского типа

Докажем предварительно некоторые леммы. Напомним, что марковским моментом называется случайная величина τ , такая, что для любого n $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Определим σ -алгебру $\mathcal{F}_\tau = \{A : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

Лемма 1.3 Пусть дана последовательность \mathcal{F}_n -измеримых случайных величин ξ_n , $n = 1, \dots, N$, тогда

- 1) величина ξ_τ - \mathcal{F}_τ -измерима;
- 2) если ξ_n - мартингал и $\tau_1 \leq \tau_2 \leq N$, то $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{\tau_1}} \xi_{\tau_2} = \xi_{\tau_1}$.

Доказательство. Нужно показать, что для любого борелевского множества B событие $\{\xi_\tau \in B\}$ принадлежит \mathcal{F}_τ . Это эквивалентно тому, что для любого n $\{\xi_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Но последнее множество можно представить в виде объединения \mathcal{F}_n -измеримых множеств $\bigcup_{k \leq n} \{\xi_k \in B\} \cap \{\tau = k\}$, откуда и следует первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения надо показать, что

$$\int_A \xi_{\tau_1} d\mathbf{P} = \int_A \xi_{\tau_2} d\mathbf{P} \quad (1.17)$$

для любого $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Сначала докажем (1.17) для $B \subset \{\tau_1 = n\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_B \xi_{\tau_1} d\mathbf{P} &= \int_B \xi_n d\mathbf{P} = \int_B \xi_{\tau_2 \wedge n} d\mathbf{P} = \int_{B \cap \{\tau_2 \leq n\}} \xi_{\tau_2} d\mathbf{P} + \int_{B \cap \{\tau_2 > n\}} \xi_n d\mathbf{P} \\ &= \int_{B \cap \{\tau_2 \leq n\}} \xi_{\tau_2} d\mathbf{P} + \int_{B \cap \{\tau_2 > n\}} \xi_{n+1} d\mathbf{P} = \int_B \xi_{\tau_2 \wedge (n+1)} d\mathbf{P} = \dots = \int_B \xi_{\tau_2} d\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Для произвольного $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ получаем

$$\int_A \xi_{\tau_1} d\mathbf{P} = \sum_{n=0}^N \int_{A \cap \{\tau_1 = n\}} \xi_{\tau_1} d\mathbf{P} = \sum_{n=0}^N \int_{A \cap \{\tau_1 = n\}} \xi_{\tau_2} d\mathbf{P} = \int_A \xi_{\tau_1} d\mathbf{P}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.4 *Определим случайные величины*

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_k^{(N)} &= \sup_{k \leq \tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{f}_\tau, \\ \tilde{Z}_k^{(N)} &= \begin{cases} \tilde{f}_N, & k = N, \\ \max(\tilde{f}_k, \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{Z}_{k+1}^{(N)}), & k < N, \end{cases} \\ \tilde{W}_k^{(N)} &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{f}_{\tau_k},\end{aligned}$$

где $\tau_k = \min \{i : k \leq i \leq N, \tilde{Z}_i^{(N)} = \tilde{f}_i\}$.

Имеет место равенство $\tilde{Y}_k^{(N)} = \tilde{Z}_k^{(N)} = \tilde{W}_k^{(N)}$.

Доказательство. Очевидно, что $\tilde{W}_k^{(N)} \leq \tilde{Y}_k^{(N)}$. Покажем, что $\tilde{Y}_k^{(N)} \leq \tilde{Z}_k^{(N)}$. Для $k = N$ это следует из равенства $\tilde{Y}_N^{(N)} = \tilde{f}_N$. Предположим, что выполнено неравенство $\tilde{Y}_{k+1}^{(N)} \leq \tilde{Z}_{k+1}^{(N)}$ и возьмем произвольный момент τ , такой, что $k \leq \tau \leq N$.

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{f}_\tau = 1_{\{\tau=k\}} \tilde{f}_k + 1_{\{\tau>k\}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k+1}} \tilde{f}_\tau.$$

По определению $\tilde{Y}_k^{(N)}$ и индукционному предположению, $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k+1}} \tilde{f}_\tau \leq \tilde{Y}_{k+1}^{(N)} \leq \tilde{Z}_{k+1}^{(N)}$. Поэтому,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{f}_\tau \leq 1_{\{\tau=k\}} \tilde{f}_k + 1_{\{\tau>k\}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{Z}_{k+1}^{(N)} \leq \max(\tilde{f}_k, \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{Z}_{k+1}^{(N)}) = \tilde{Z}_k^{(N)}.$$

Беря супремум по τ , получим, что $\tilde{Y}_k^{(N)} \leq \tilde{Z}_k^{(N)}$.

Остается показать, что $\tilde{Z}_k^{(N)} \leq \tilde{W}_k^{(N)}$. Это неравенство выполнено для $k = N$ и пусть $\tilde{Z}_{k+1}^{(N)} \leq \tilde{W}_{k+1}^{(N)}$, тогда

$$\tilde{Z}_k^{(N)} = 1_{\{\tilde{f}_k = \tilde{Z}_k^{(N)}\}} \tilde{f}_k + 1_{\{\tilde{f}_k < \tilde{Z}_k^{(N)}\}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{Z}_{k+1}^{(N)}.$$

Используя индукционное предположение, а также то, что $\{\tilde{f}_k = \tilde{Z}_k^{(N)}\} = \{\tau_k = k\}$, получим

$$\tilde{Z}_k^{(N)} \leq 1_{\{\tau_k=k\}} \tilde{f}_k + 1_{\{\tau_k>k\}} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{W}_{k+1}^{(N)}.$$

Заметим, что $\tau_k = \tau_{k+1}$ на множестве $\{\tau_k > k\}$, поэтому

$$1_{\{\tau_k > k\}} \widetilde{W}_{k+1}^{(N)} = 1_{\{\tau_k > k\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k+1}} \widetilde{f}_{\tau_{k+1}} = 1_{\{\tau_k > k\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k+1}} \widetilde{f}_{\tau_k}.$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{Z}_k^{(N)} \leq 1_{\{\tau_k = k\}} \widetilde{f}_{\tau_k} + 1_{\{\tau_k > k\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \widetilde{f}_{\tau_k} = \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \widetilde{f}_{\tau_k} = \widetilde{W}_k.$$

Лемма доказана.

Отметим, что в момент τ_0 максимальный ожидаемый в будущем платеж становится меньше, чем текущий платеж. Поэтому с точки зрения покупателя опциона τ_0 - рациональный момент исполнения этого опциона. В дальнейшем момент τ_0 будем также обозначать τ^* .

Хеджирование в среднеквадратичном. В этом случае определим хедж, как стратегию, при которой достигает минимума выражение

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\widetilde{X}_{\tau^*}^\pi - \widetilde{f}_{\tau^*})^2.$$

Введем мартингалы $M_n = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \widetilde{f}_{\tau^*}$ и $V_n = \widetilde{X}_n^\pi - M_n$, тогда $\widetilde{X}_{\tau^*}^\pi - \widetilde{f}_{\tau^*} = V_{\tau^*}$ и

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}} V_{\tau^*}^2 &= \widetilde{\mathbf{E}} (V_0 + \sum_{k=1}^{\tau^*} \Delta V_k)^2 = V_0^2 + \sum_{k=1}^N \widetilde{\mathbf{E}} (\Delta V_k)^2 1_{\{k \leq \tau^*\}} \\ &+ 2V_0 \sum_{k=1}^N \widetilde{\mathbf{E}} \Delta V_k 1_{\{k \leq \tau^*\}} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \widetilde{\mathbf{E}} \Delta V_i \Delta V_j 1_{\{j \leq \tau^*\}}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Поскольку событие $\{k \leq \tau^*\}$ \mathcal{F}_{k-1} -измеримо, то

$$\widetilde{\mathbf{E}} \Delta V_k 1_{\{k \leq \tau^*\}} = \widetilde{\mathbf{E}} 1_{\{k \leq \tau^*\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} \Delta V_k = 0.$$

Таким образом, последние две суммы в (1.18) равны нулю и

$$\widetilde{\mathbf{E}} V_{\tau^*}^2 = (X_0 - M_0)^2 + \sum_{k=1}^N \widetilde{\mathbf{E}} 1_{\{k \leq \tau^*\}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{k-1}} (\gamma_{k-1} \Delta \widetilde{S}_k - \Delta M_k)^2 \quad (1.19)$$

Минимум данного выражения достигается при $X_0 = M_0 = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_{\tau^*}$ и $\gamma_k = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \Delta \tilde{S}_{k+1} \tilde{f}_{\tau^*} / \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} (\Delta \tilde{S}_{k+1})^2$.

Хеджирование на полном рынке. Предположим что рынок полный. Стратегия π называется хеджем для опциона с платежными функциями f_k и моментом исполнения N , если для любого $k \leq N$ выполнено $X_k^\pi \geq f_k$. Справедливой ценой, как и в случае опциона европейского типа, называется величина $C = C(\{f_n\}) = \inf_{\pi \in \Pi} X_0^\pi$.

Поскольку \tilde{X}_k^π является мартингалом, то для любых марковских моментов τ, τ' , согласно лемме 1.3 имеет место равенство $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_\tau^\pi = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_{\tau'}^\pi$. Положив $\tau' = 0$, получим, что $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{X}_\tau^\pi = \tilde{X}_0^\pi$. Пусть теперь π является хеджем, тогда $\tilde{X}_\tau^\pi \geq \tilde{f}_\tau$. Взяв математическое ожидание в предыдущем неравенстве, получим, что $X_0^\pi \geq \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau$. Поскольку неравенство выполняется для любого τ , то оно выполняется и для супремума по τ : $X_0^\pi \geq \sup_{\tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau$. Отсюда следует, что

$$C \geq \sup_{\tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau. \quad (1.20)$$

Покажем, что на самом деле $C = \sup_{\tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau$.

Теорема 1.5 *Предположим, что рынок полный, тогда*

$$C = \sup_{\tau \leq N} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau.$$

Из доказанной леммы следует, что

$$\tilde{Y}_k^{(N)} = \max(\tilde{f}_k, \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{Y}_{k+1}^{(N)}) \geq \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{Y}_{k+1}^{(N)}. \quad (1.21)$$

Представим $\tilde{Y}_k^{(N)}$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_k^{(N)} &= \tilde{Y}_0^{(N)} + \sum_{i=1}^k \left(\tilde{Y}_i^{(N)} - \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{i-1}} \tilde{Y}_i^{(N)} \right) - \sum_{i=1}^k \left(\tilde{Y}_{i-1}^{(N)} - \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{i-1}} \tilde{Y}_i^{(N)} \right) \\ &= M_k - A_k. \end{aligned}$$

Последовательность M_k представляет собой мартингал; в силу полноты рынка она может быть представлена в виде $M_k = M_0 + \sum_{i=1}^k \gamma_{i-1} \Delta \tilde{S}_i$, причем $M_0 = \tilde{Y}_0^{(N)} = \sup_{\tau} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}_{\tau}$. Что касается последовательности A_k , то в силу (1.21) каждое слагаемое в выражении для A_k неотрицательно, и все они \mathcal{F}_{k-1} -измеримы, следовательно, $\{A_k\}$ - неубывающая последовательность и величина A_k - \mathcal{F}_{k-1} -измерима. Рассмотрим стратегию $\pi^* = (M_0, \{\gamma_k\})$ и покажем, что она является хеджем. Действительно, поскольку $\tilde{Y}_k^{(N)} \geq \tilde{f}_k$,

$$\tilde{X}_k^{\pi^*} = \tilde{X}_0^{\pi^*} + \sum_{i=1}^k \gamma_{i-1} \Delta \tilde{S}_i = M_k = \tilde{Y}_k^{(N)} + A_k \geq \tilde{Y}_k^{(N)} \geq \tilde{f}_k.$$

Это означает, что $X_k^{\pi^*} \geq f_k$. Таким образом мы нашли хедж с начальным капиталом $\sup_{\tau} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}_{\tau}$. Это означает, что $C(f) \leq \sup_{\tau} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}_{\tau}$. Вместе с неравенством (1.20) это доказывает утверждение теоремы.

Рассмотрим марковский момент τ^* . При $k < \tau^*$

$$\tilde{X}_k^{\pi^*} = M_k \geq \tilde{Y}_k^{(N)} = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{Y}_k^{(N)} > \tilde{f}_k.$$

Из этого неравенства также следует, что

$$\begin{aligned} A_{\tau^*} &= \sum_{i=1}^{\tau^*} (\tilde{Y}_{i-1}^{(N)} - \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_{i-1}} \tilde{Y}_i^{(N)}) = 0, \\ \tilde{X}_{\tau^*}^{\pi^*} &= M_{\tau^*} = \tilde{Y}_{\tau^*}^{(N)} + A_{\tau^*} = \tilde{Y}_{\tau^*}^{(N)} = \tilde{f}_{\tau^*}. \end{aligned}$$

Таким образом, на полном рынке рациональность исполнения опциона в момент τ^* подкрепляется следующим соображением: обладателю опциона нерационально исполнять его в момент до момента τ^* , т.к. затратив на покупку опциона $X_0^{\pi^*}$ денежных средств, он получит в результате исполнения доход в размере f_k , тогда как используя стратегию π^* с тем же начальным капиталом, он мог бы получить доход в размере $X_k^{\pi^*} > f_k$.

1.6.2 Марковский случай

Будем предполагать, что цены S_k образуют марковский процесс, r_k - детерминированная последовательность, платежные функции имеют вид $f_k = f_k(S_k)$. Покажем, что в этом случае $\tilde{Y}_k^{(N)}(S_0, \dots, S_k) = \tilde{Y}_k^{(N)}(S_k)$. Действительно, $\tilde{Y}_N^{(N)} = \alpha_N f_N(S_N)$. Пусть $\tilde{Y}_{k+1}^{(N)} = \tilde{Y}_{k+1}^{(N)}(S_{k+1})$, т.е. $Y_{k+1}^{(N)}$ измерима относительно $\mathcal{F}_{\geq k+1}$, тогда по свойству марковских процессов

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_k^{(N)} &= \max \left(\alpha_k f_k(S_k), \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_k} \tilde{Y}_{k+1}^{(N)} \right) \\ &= \max \left(\alpha_k f_k(S_k), \tilde{\mathbf{E}}_{k, S_k} \tilde{Y}_{k+1}^{(N)} \right) = \tilde{Y}_k^{(N)}(S_k).\end{aligned}$$

Предположим далее, что процесс S_k - однородный, $f_k(x) = f(x)$, $r_k = r$, тогда α_k имеет вид α^k . В этом случае удобно определить функции $Y_n^{(N)}(x) = \alpha^{n-N} \tilde{Y}_{N-n}^{(N)}(x)$; индекс n означает число шагов до окончания опциона. Из свойств функций $\tilde{Y}_n^{(N)}(x)$ следует, что

$$Y_n^{(N)}(x) = \begin{cases} f(x), & n = 0, \\ \max \left(f(x), \alpha \tilde{\mathbf{E}}_x Y_{n-1}^{(N)}(S_1) \right), & n > 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

Отсюда следует, что $Y_n^{(N)}(x)$ не зависит от N . Кроме того,

$$Y_n(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq n} \tilde{\mathbf{E}}_x \alpha^\tau f(S_\tau) = \tilde{\mathbf{E}}_x \alpha^{\tau_n} f(S_{\tau_n}),$$

где $\tau_n = \min \{k : 0 \leq k \leq n, Y_{n-k}(S_k) = f(S_k)\}$. Мы можем определить "области остановки" $D_n = \{x : Y_n(x) = f(x)\}$ и области "продолжения наблюдений" $C_n = X \setminus D_n$. Рациональный момент исполнения является моментом попадания цены в область остановки:

$$\tau_n = \min \{k \leq n : Y_{n-k}(S_k) = f(S_k)\} = \min \{k \leq n : S_k \in D_{n-k}\}.$$

Отметим, что области остановки становятся шире по мере того, как число шагов n до момента окончания опциона уменьшается. Действительно, поскольку $Y_0(x) = f(x)$, то $Y_1(x) = \max(f(x), \tilde{\mathbf{E}}_x f(S_1)) \geq Y_0(x)$ и далее

$$Y_{n+1}(x) = \max(f(x), \tilde{\mathbf{E}}_x Y_n(S_1)) \geq \max(f(x), \tilde{\mathbf{E}}_x Y_{n-1}(S_1)) = Y_n(x).$$

Это означает, что $D_{n+1} = \{x : Y_{n+1}(x) = f(x)\} \subset \{x : Y_n(x) = f(x)\} = D_n$. Ясно, что D_0 совпадает со всем пространством состояний $D_0 = X$.

Рассмотрим вопрос о цене стандартных опционов. Ясно, что цена опционов американского типа $C_a(f)$ не меньше цены соответствующего опциона европейского типа $C_e(f)$, но, оказывается, что имеет место такой неожиданный результат.

Теорема 1.6 *Цена опциона покупки американского типа равна цене опциона покупки европейского типа.*

Доказательство. Покажем, что последовательность $\tilde{f}_n = \alpha^n(S_n - K)^+$ образует субмартингал. Действительно, используя неравенство Йенсена, и тот факт, что последовательность $\alpha^n S_n$ является мартингалом, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \alpha^{n+1}(S_{n+1} - K)^+ &\geq [\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \alpha^{n+1}(S_{n+1} - K)]^+ \\ &= [\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \alpha^{n+1} S_{n+1} - \alpha^{n+1} K]^+ \\ &= [\alpha^n S_n - \alpha^n K + \alpha^n(1 - \alpha)K]^+ \geq \alpha^n(S_n - K)^+. \end{aligned}$$

Для любого субмартингала ξ_n и марковских моментов τ и τ_1 , таких, что $\tau \leq \tau_1$ выполнено $\mathbf{E}\xi_\tau \leq \mathbf{E}\xi_{\tau_1}$. Взяв $\tau_1 \equiv N$, получим $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau \leq \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_N = C_e(f)$. Поскольку τ - произвольный момент, то $C_a(f) = \sup_\tau \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f}_\tau \leq C_e(f)$. Вместе с очевидным неравенством $C_a(f) \geq C_e(f)$ это доказывает утверждение теоремы.

В общем случае, строится некоторое дерево цен первичного актива и цена опциона в узлах дерева вычисляется по формуле (1.22). Данный алгоритм может быть очень трудоемким, если S_n - это многомерный вектор, т.к. число возможных узлов быстро растет. Поэтому в данном случае имеет смысл использовать метод "стохастической сетки", излагаемый далее.

1.6.3 Метод стохастической сетки

Предположим, что цены S_n образуют марковский процесс с переходными вероятностями $p_n(x, dy)$ при переходе из состояния S_{n-1} в состояние

S_n ; платежная функция опциона имеет вид $f_n = f_n(S_n)$. Обозначим $\tilde{f}_n(x) = \alpha_n f_n(x)$ и последовательно определим функции $Y_n(x)$:

$$\tilde{Y}_N(x) = \tilde{f}_N(x), \quad \tilde{Y}_n(x) = \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{n,x} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1}) \right).$$

Из предыдущего параграфа следует, что цена опциона имеет вид

$$C(\{f_n\}) = C = \sup_{\tau} \mathbf{E} f_{\tau}(S_{\tau}) = \tilde{Y}_0(S_0).$$

Построим на каждом шаге n набор случайных точек ("сетку") $\bar{x}_n = \{x_{n,i}\}_{i=1}^M$ как марковский процесс с переходными вероятностями $\bar{r}_n(\bar{x}, d\bar{y})$ вида

$$\bar{r}_n(\bar{x}, d\bar{y}) = r_{n,1}(\bar{x}, dy_1) \dots r_{n,M}(\bar{x}, dy_M).$$

Относительно $r_{n,j}(\bar{x}, dy)$ будем предполагать, что определены плотности

$$\rho_{n,j}(\bar{x}, x, y) = \frac{p_n(x, dy)}{r_{n,j}(\bar{x}, dy)}.$$

Укажем возможный выбор переходных вероятностей.

1) Независимые траектории:

$$r_{n,j}(\bar{x}, dy) = p_n(x_j, dy).$$

2) Усредненные плотности:

$$r_{n,j}(\bar{x}, dy) = \frac{1}{M} \sum_i p(x_i, dy). \quad (1.23)$$

Далее, для краткости обозначений введем следующие величины:

$$\rho_n(x, j) = \rho_{n,j}(\bar{x}_{n-1}, x, x_{n,j}), \quad \rho_n(i, j) = \rho_n(x_{n-1,i}, j), \quad \tilde{Y}_n(j) = \tilde{Y}_n(x_{n,j}).$$

Построим на сетке случайные величины $\check{Y}_n(x)$: положим $\check{Y}_N(x) = \tilde{f}(x)$,

$$\check{Y}_n(x) = \max \left(\tilde{f}_n(x), \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \rho_{n+1}(x, j) \check{Y}_{n+1}(j) \right),$$

где, аналогично предыдущему, положено $\check{Y}_{n+1}(j) = \check{Y}_{n+1}(x_{n+1,j})$.

Если считать, что для каждого n заданы случайные величины j_n , принимающие с равными вероятностями значения $1, \dots, M$ и независимые в совокупности и по отношению к другим величинам, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\check{Y}_n(x) = \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right).$$

Теорема 1.7 *Величина $\check{Y}_0(S_0)$ является оценкой сверху для цены опциона, а именно:*

$$\mathbf{E} \check{Y}_0(S_0) \geq \tilde{Y}(S_0).$$

Доказательство. Введем индукционное предположение: для любых n и x выполнено

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \check{Y}_n(x) \geq \tilde{Y}_n(x).$$

Это предположение верно для $n = N$, поскольку $\check{Y}_N(x) = \tilde{Y}_N(x) = \tilde{f}_N(x)$. Докажем неравенство в предположении, что оно верно для $n+1$. По неравенству Йенсена

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \check{Y}_n(x) &= \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right) \\ &\geq \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right) \\ &= \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n+1}} \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

По индукционному предположению $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n+1}} \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \geq \tilde{Y}_{n+1}(j_{n+1})$, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \check{Y}_n(x) &\geq \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{\mathcal{F}_n} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \tilde{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right) \\ &= \max \left(\tilde{f}_n(x), \mathbf{E}_{n,x} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1}) \right) = \tilde{Y}_n(x). \end{aligned}$$

Таким образом, индукционное предположение доказано, откуда при $n = 0$ и $x = S_0$, получим утверждение теоремы.

Покажем теперь состоятельность оценки.

Теорема 1.8 *Предположим, что для всех $x, k \leq m$ выполнено*

$$\mathbf{E}[\rho_k(x, j_k) \dots \rho_m(j_{m-1}, j_m) \tilde{Y}_m(j_m)]^2 < \infty, \quad (1.24)$$

тогда для любых x , n имеет место оценка $\mathbf{E}(\check{Y}_n(x) - \tilde{Y}_n(x))^2 \leq C/M$.

Доказательство. Поскольку $|\max(a, b_1) - \max(a, b_2)| \leq |b_1 - b_2|$ для любых a, b_1, b_2 , то

$$\begin{aligned} |\check{Y}_n(x) - \tilde{Y}_n(x)| &\leq \left| \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) - \mathbf{E}_{n,x} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1}) \right| \\ &\leq |\Delta_n(x)| + \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \left| \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) - \tilde{Y}_{n+1}(j_{n+1}) \right|, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где

$$\Delta_n(x) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) - \mathbf{E}_{n,x} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1}).$$

Итерируя данное неравенство, получим

$$\begin{aligned} \left| \check{Y}_n(x) - \tilde{Y}_n(x) \right| &\leq |\Delta_n(x)| + \\ &+ \sum_{k=n}^{N-1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{n+1}(x, j_{n+1}) \dots \rho_k(j_{k-1}, j_k) |\Delta_k(j_k)|. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Возведя в квадрат и беря математическое ожидание, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\check{Y}_n(x) - \tilde{Y}_n(x) \right)^2 &\leq (N - n) \left(\Delta_n^2(x) + \right. \\ &+ \sum_{k=n}^{N-1} \mathbf{E} \rho_{n+1}^2(x, j_{n+1}) \dots \rho_k^2(j_{k-1}, j_k) \mathbf{E}(\Delta_k^2(j_k) \mid \mathcal{F}_k, j_{n+1}, \dots, j_k) \Big). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Поскольку $\mathbf{E}(\Delta_k^2(j_k) \mid \mathcal{F}_k, j_{n+1}, \dots, j_k)$ является дисперсией суммы M независимых случайных величин $\frac{1}{M} \rho_{k+1}(j_k, j) \tilde{Y}_{k+1}(j)$, $j = 1, \dots, M$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Delta_k^2(j_k) \mid \mathcal{F}_k, j_{n+1}, \dots, j_k) &\leq \\ &\leq \frac{1}{M} \mathbf{E}(\rho_{k+1}^2(j_k, j_{k+1}) \tilde{Y}_{k+1}^2(j_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k, j_{n+1}, \dots, j_k). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Подставляя (1.28) в (1.27), получим утверждение теоремы.

Замечание. Неравенство (1.26) для $n = 0$, $x = S_0$ принимает вид

$$\left| \check{Y}_0(S_0) - \tilde{Y}_0(S_0) \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_1(S_0, j_1) \dots \rho_k(j_{k-1}, j_k) |\Delta_k(j_k)|. \quad (1.29)$$

В случае, когда r_n определяется (1.23) $\rho_1(S_0, j) = 1$ для любого j . Далее, $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_2(j_1, j) = 1$ также для любого j . Индукцией получаем, что правая часть в (1.29) равна $\sum_{k=0}^{N-1} |\Delta_k(j_k)|$ и, следовательно,

$$\mathbf{E} \left(\check{Y}_0(S_0) - \tilde{Y}_0(S_0) \right)^2 \leq \frac{N}{M} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E} \rho_k^2(1, 1) \tilde{Y}_k^2(1). \quad (1.30)$$

В свою очередь, последнее математическое ожидание может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \rho_k^2(1, 1) \tilde{Y}_k^2(1) &= \mathbf{E} \rho_k^2(j_{k-1}, 1) \tilde{Y}_k^2(1) = \mathbf{E} \frac{p^2(j_{k-1}, 1)}{r_{k,1}^2(\bar{x}_{k-1}, 1)} \tilde{Y}_k^2(1) = \\ &= \mathbf{E} \int_0^\infty dy \frac{p^2(j_{k-1}, y)}{r_{k,1}(\bar{x}_{k-1}, y)} \tilde{Y}_k^2(y) = \int_0^\infty dy \tilde{Y}_k^2(y) \mathbf{E} \frac{\sum_j p^2(x_{k-1,j}, y)}{\sum_j p(x_{k-1,j}, y)}. \end{aligned}$$

Таким образом, для состоятельности этой оценки достаточно, чтобы для любого k

$$\int_0^\infty dy \tilde{Y}_k^2(y) \mathbf{E} \frac{\sum_j p^2(x_{k-1,j}, y)}{\sum_j p(x_{k-1,j}, y)} < \infty. \quad (1.31)$$

Построим теперь оценку снизу для цены опциона. Пусть $S = (S_0, \dots, S_N)$ - траектория цен, независимая от сетки. Положим

$$\bar{\tau} = \min\{n : \tilde{f}_n(S_n) = \check{Y}_n(S_n)\}.$$

Возьмем в качестве оценки для C величину $\bar{Y} = \tilde{f}_{\bar{\tau}}(S_{\bar{\tau}})$. Нетрудно видеть, что это оценка снизу:

$$\mathbf{E} \bar{Y} = \mathbf{E} \tilde{f}_{\bar{\tau}}(S_{\bar{\tau}}) \leq \sup_{\tau} \mathbf{E} \tilde{f}_{\tau}(S_{\tau}) = C.$$

Покажем, что $\mathbf{E} \bar{Y} \rightarrow C$ при $M \rightarrow \infty$.

Теорема 1.9 Пусть дополнительно выполнены следующие условия

$$\mathbf{P} \left\{ \tilde{f}_n(S_n) = \mathbf{E}_{n,S_n} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1}) \right\} = 0. \quad (1.32)$$

и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{E} \tilde{f}_{\tau^*}^{1+\varepsilon}(S_{\tau^*}) < \infty, \quad (1.33)$$

тогда $\mathbf{E} \bar{Y} \rightarrow C$ при $M \rightarrow \infty$.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\mathbf{P}_S(\bar{\tau}(S) \neq \tau^*(S)) \rightarrow 0 \quad \text{п.н. по } S.$$

Зафиксируем траекторию $S' = (S'_1, \dots, S'_N)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{S'}(\bar{\tau} \neq \tau^*) &= \mathbf{P}_{S'}(\bar{\tau} < \tau^*) + \mathbf{P}_{S'}(\bar{\tau} > \tau^*) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\tau^*-1} \mathbf{P}_{S'} \left(\tilde{f}_k(S'_k) = \check{Y}_k(S'_k) \right) + 1_{\{\tau^* < N\}} \mathbf{P}_{S'} \left(\tilde{f}_{\tau^*}(S'_{\tau^*}) < \check{Y}_{\tau^*}(S'_{\tau^*}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\tau^*-1} \mathbf{P}_{S'} \left(\tilde{f}_k(S'_k) \geq \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{k+1}(S'_k, j_{k+1}) \check{Y}_{k+1}(j_{k+1}) \right) \\ &\quad + 1_{\{\tau^* < N\}} \mathbf{P}_{S'} \left(\tilde{f}_{\tau^*}(S'_{\tau^*}) < \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{\tau^*+1}(S'_{\tau^*}, j_{\tau^*+1}) \check{Y}_{\tau^*+1}(j_{\tau^*+1}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\tau^*-1} \mathbf{P}_{S'}(A_k) + \mathbf{P}_{S'}(A_*). \end{aligned}$$

Из (1.32) следует, что существует $\varepsilon(S')$, такая что для любого n

$$|\tilde{f}_n(S'_n) - \mathbf{E}_{n,S'_n} \tilde{Y}_{n+1}(S_{n+1})| > \varepsilon. \quad (1.34)$$

Для $k < \tau^*$ выполнено $\mathbf{E}_{k,S'_k} \tilde{Y}_{k+1}(S_{k+1}) > \tilde{f}_k(S'_k)$. Более того, в силу (1.34)

$$\mathbf{E}_{k,S'_k} \tilde{Y}_{k+1}(S_{k+1}) \geq \tilde{f}_k(S'_k) + \varepsilon,$$

поэтому из события A_k следует, что

$$\mathbf{E}_{k, S'_k} \tilde{Y}_{k+1}(S_{k+1}) \geq \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{k+1}(S'_k, j_{k+1}) \check{Y}_{k+1}(j_{k+1}) + \varepsilon.$$

Из свойств момента τ^* , того, что $\tau^* < N$, и (1.34) следует, что

$$\tilde{f}_{\tau^*}(S'_{\tau^*}) \geq \mathbf{E}_{\tau^*, S'_{\tau^*}} \tilde{Y}_{\tau^*+1}(S_{\tau^*+1}) + \varepsilon.$$

Таким образом, событие A_* содержится в событии

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{\tau^*+1}(S'_{\tau^*}, j_{\tau^*+1}) \check{Y}_{\tau^*+1}(j_{\tau^*+1}) \geq \mathbf{E}_{\tau^*, S'_{\tau^*}} \tilde{Y}_{\tau^*+1}(S_{\tau^*+1}) + \varepsilon.$$

Окончательно, имеем оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{S'}(\bar{\tau} \neq \tau^*) &\leq \\ &\leq \sum_{k=0}^N \mathbf{P}_{S'} \left(\left| \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N} \rho_{k+1}(S'_k, j_{k+1}) \check{Y}(j_{k+1}) - \mathbf{E}_{k, S'_k} \tilde{Y}_k(S_{k+1}) \right| \geq \varepsilon \right). \end{aligned}$$

В силу теоремы 1.8 каждое слагаемое в последней сумме стремится к нулю и, значит, $\mathbf{P}_S(\bar{\tau} \neq \tau^*) \rightarrow 0$ для п.в. S . Далее, используя неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq C - \mathbf{E}\bar{Y} = \mathbf{E}\tilde{f}_{\tau^*}(S_{\tau^*}) - \mathbf{E}\tilde{f}_{\bar{\tau}}(S_{\bar{\tau}}) = \mathbf{E}(\tilde{f}_{\tau^*}(S_{\tau^*}) - \tilde{f}_{\bar{\tau}}(S_{\bar{\tau}}))1_{\{\bar{\tau} \neq \tau^*\}} \\ &\leq \mathbf{E}\tilde{f}_{\tau^*}(S_{\tau^*})1_{\{\bar{\tau} \neq \tau^*\}} \leq \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \tilde{f}_{\tau^*}^{1+\varepsilon}(S_{\tau^*}) \quad \mathbf{E}^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \mathbf{P}_S(\bar{\tau} \neq \tau^*). \end{aligned}$$

Первое математическое ожидание конечно вследствие условия (1.33), второе стремится к нулю по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема доказана.

Глава 2

Модель геометрического броуновского движения

В работе Ф. Блэка и М. Шоулса [6] была рассмотрена простая диффузионная модель (которая имеет решение в виде геометрического броуновского движения) и была получена аналитическая формула для цены европейского опциона покупки. Впоследствии были получены аналитические выражения и для цен других опционов. Подробное изложение этой модели можно найти в работах А. Н. Ширяева [1, 2]; оценка метода Монте-Карло для опционов американского типа, использующая стохастическое интегрирование по частям, разработана в статье В. Балли и др. [9]; состоятельность метода стохастической сетки для данной модели была доказана в работе П. Ботева [17].

Интегрирование по винеровскому процессу изложено в большом количестве монографий и учебников (см., например, [3, 10, 14, 16]). Приведем некоторые определения и результаты, которые используются в дальнейшем.

Обозначим \mathcal{B}_t - σ -алгебру борелевских множеств на $[0, t]$. Случайный процесс ξ_t , определенный на промежутке $[0, T]$, называется прогрессивно измеримым, если для каждого $t \leq T$ функция $\xi_s(\omega)$, рассматриваемая на множестве $[0, t] \times \Omega$, измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{B}_t \times \mathcal{F}_t$.

Для прогрессивно измеримого процесса ξ_t и марковского момента τ случайная величина ξ_τ является измеримой.

Интеграл по винеровскому процессу $I(t) = \int_0^t a_s dw_s$ определяется сначала для ступенчатых случайных функций a_s , затем предельным переходом распространяется на прогрессивно измеримые процессы из $L_2(\Lambda_t \times \mathbf{P})$, где Λ_t - лебегова мера на \mathcal{B}_t , и, наконец, на такие процессы, для которых $\int_0^t a_s^2 ds < \infty$ п.н. Приведем основные свойства стохастического интеграла:

- 1) $\mathbf{E}(I(t_2) - I(t_1) | \mathcal{F}_{t_1}) = 0$ п.н.,
- 2) $\mathbf{E}(\int_0^t \xi_s dw_s)^2 = \int_0^t \mathbf{E} \xi_s^2 ds$.

Процесс ξ_t на $[0, T]$ называется процессом Ито, если имеет место представление $\xi_t = \xi_0 + \int_0^t a_s dw_s + \int_0^t b_s ds$, где a_s, b_s - прогрессивно измеримые процессы и $\int_0^T a_s^2 ds < \infty, \int_0^T |b_s| ds < \infty$ п.н. Часто представление для ξ_t записывается в виде $d\xi_t = a_t dw_t + b_t dt$. Процесс ξ_t определяет функции a_t и b_t однозначно п.в. по мере $\Lambda_T \times \mathbf{P}$. Если функция $g(t, x)$ имеет непрерывные первую производную g'_t по t , и вторую производную g''_{xx} по x , причем первые производные по x g'_x ограничены, тогда $g(t, \xi_t)$ является процессом Ито и имеет место формула

$$dg(t, \xi_t) = g'_x(t, \xi_t) a_t dw_t + [g'_t(t, \xi_t) + b_t g'_x(t, \xi_t) + 0.5 a_t^2 g''_{xx}(t, \xi_t)] dt.$$

В модели геометрического броуновского движения предполагается, что банковский счет B_t и цена акции S_t изменяются согласно уравнениям

$$dB_t/B_t = r dt \quad \text{и} \quad dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dw_t,$$

где w_t - винеровский процесс. Коэффициент σ называется волатильностью, а коэффициент μ - ожидаемой доходностью. Решения данных уравнений имеют вид

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad S_t = S_0 e^{\sigma w_t + \mu t - 0.5 \sigma^2 t}.$$

Эта модель описывает основные свойства реального рынка и позволяет получить аналитическое решение для многих задач и провести качественное исследование их свойств.

Аналогично дискретному случаю вводится понятие стратегии (портфеля) $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ и цены портфеля $X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$. Относительно β_t, γ_t предполагается, что это прогрессивно-измеримые процессы. Будем говорить, что стратегия является самофинансируемой, если выполняется равенство

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_t dB_t + \int_0^t \gamma_t dS_t,$$

аналогичное равенству (1.1).

2.1 Мартингальная мера

Будем рассматривать рынок на промежутке $[0, T]$, и считать, что σ -алгебры \mathcal{F}_t порождены величинами $\{w_s\}_{s \leq t}$. Для произвольной постоянной b определим процесс $\rho_t = \exp(-bw_t - 0.5b^2t)$ и возьмем условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \rho_t = e^{-bw_s - 0.5b^2t} \mathbf{E}_{w_s} e^{-b(w_t - w_s)}.$$

Для нормальной случайной величины $\xi \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ имеет место равенство $\mathbf{E} e^\xi = e^{0.5\sigma^2}$, поэтому условное математическое ожидание справа равно $e^{0.5b^2(t-s)}$ и, значит, $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \rho_t = \rho_s$, т.е. процесс ρ_t является мартингалом. Отсюда, в частности, следует, что $\mathbf{E} \rho_t = \rho_0 = 1$ и мы можем построить новую меру на \mathcal{F}_T : $d\tilde{\mathbf{P}} = \rho_T d\mathbf{P}$. Поскольку $\rho_T > 0$ \mathbf{P} -п.н., то меры \mathbf{P} и $\tilde{\mathbf{P}}$ эквивалентны.

Лемма 2.1 *Процесс $\tilde{w}_t = w_t + bt$ является винеровским процессом относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$.*

Доказательство. Докажем сначала общее утверждение о замене меры в условных математических ожиданиях. Пусть $d\mathbf{P}/d\mathbf{P} = \rho$, тогда для с.в. ξ , такой, что $\mathbf{E} \rho |\xi| < \infty$,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t} \xi = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \rho \xi / \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \rho. \quad (2.1)$$

Достаточно показать, что для любого \mathcal{F}_t -измеримого множества A

$$\mathbf{E}1_A(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\rho)(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t}\xi) = \mathbf{E}1_A\rho\xi.$$

Выражение в правой части равно $\tilde{\mathbf{E}}1_A\xi$. Покажем, что выражение в левой части равно тому же. Действительно, в силу \mathcal{F}_t -измеримости величин 1_A и $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\xi$, левая часть равна

$$\mathbf{E}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}(\rho\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t}1_A\xi) = \mathbf{E}\rho\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t}1_A\xi = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t}1_A\xi = \tilde{\mathbf{E}}1_A\xi.$$

Таким образом, (2.1) доказано. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{F}_s}\left(\frac{\tilde{w}_t - \tilde{w}_s}{\sqrt{t-s}} < x\right) = \Phi(x).$$

Обозначим для краткости событие в левой части через A и заметим, что $A \in \mathcal{F}_t$, тогда согласно (2.1)

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{F}_s}(A) = \frac{1}{\rho_s}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s}\rho_T 1_A = \frac{1}{\rho_s}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s}1_A\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\rho_T$$

Поскольку ρ_t является мартингалом относительно \mathbf{P} , то $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}\rho_T = \rho_t$, следовательно,

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{F}_s}(A) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_s}e^{-b(w_t - w_s) - 0.5b^2(t-s)}1_{\left\{\frac{w_t - w_s + b(t-s)}{\sqrt{t-s}} < x\right\}}.$$

Воспользуемся теперь тем, что приращение $w_t - w_s$ не зависит от \mathcal{F}_s и $w_t - w_s \in N(0, t-s)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{F}_s}(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} e^{-by - 0.5b^2(t-s)} 1_{\left\{\frac{y+b(t-s)}{\sqrt{t-s}} < x\right\}} dy \\ &= \int_{\frac{y+b(t-s)}{\sqrt{t-s}} < x} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y+b(t-s))^2}{2(t-s)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем использовать процесс $\tilde{w}_t = w_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ и обозначим через $\tilde{\mathbf{P}}$ меру, относительно которой этот процесс - винеровский. Процесс цен S_t представляется через процесс \tilde{w}_t в виде:

$$S_t = S_0 \exp(\sigma \tilde{w}_t + rt - 0.5\sigma^2 t),$$

или в дифференциальной форме

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma d\tilde{w}_t.$$

Дисконтированный процесс цен имеет вид

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t = S_0 \exp(\sigma \tilde{w}_t - 0.5\sigma^2 t).$$

Применяя к нему те же рассуждения, что и к процессу ρ_t , мы видим, что \tilde{S}_t является мартингалом относительно $\tilde{\mathbf{P}}$.

Для дисконтированной цены $\tilde{X}_t = e^{-rt} X_t$, используя формулу Ито, получим $d\tilde{X}_t = \gamma_t \sigma \tilde{S}_t d\tilde{w}_t = \gamma_t d\tilde{S}_t$.

2.2 Опцион европейского вида

Рассмотрим опцион с датой исполнения T и платежной функцией f . Аналогично пункту 1.4 определяется понятие хеджа и справедливой цены опциона. Так же доказывается и то, что

$$C(f) \geq \tilde{\mathbf{E}}f. \quad (2.2)$$

Для доказательства обратного неравенства предположим, что $\tilde{\mathbf{E}}f < \infty$ и рассмотрим мартингал $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t} f$. Воспользуемся следующей теоремой [3]:

Теорема 2.1 Пусть w_t - винеровский процесс, \mathcal{F}_t - σ -алгебры, порожденные величинами $\{w_s\}_{s \leq t}$, и дана с.в. $\xi \in \mathcal{F}_T$, $\mathbf{E}|\xi| < \infty$, тогда существует процесс α_t , такой что $\int_0^T \alpha_t^2 dt < \infty$ п.н. и

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\xi + \int_0^t \alpha_u dw_u.$$

Если $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, то $\int_0^T \mathbf{E}\alpha_t^2 dt < \infty$.

Согласно этой теореме процесс $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t} \tilde{f}$ может быть представлен в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t} \tilde{f} = \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f} + \int_0^t \alpha_u d\tilde{w}_u.$$

Определим стратегию $\pi^* = \left(\tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}, \left\{ \frac{\alpha_u}{\sigma S_u} \right\} \right)$, тогда

$$\tilde{X}_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \int_0^t \gamma_u d\tilde{S}_u = \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f} + \int_0^t \alpha_u d\tilde{w}_u = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t} \tilde{f}. \quad (2.3)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\tilde{X}_T^{\pi^*} = \tilde{f}$, т.е. π^* - это хедж, с начальным капиталом $\tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}$. Это означает, что $C(f) \leq \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}$, что вместе с (2.2) дает формулу справедливой цены $C(f) = \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}$.

2.2.1 Стандартные опционы

Применим ее для вычисления цены стандартных опционов. Рассмотрим опцион покупки $f = (S_T - K)^+$. Его цена равна

$$\begin{aligned} C &= \tilde{\mathbf{E}} \tilde{f} = e^{-rT} \tilde{\mathbf{E}} (S_0 e^{\sigma \tilde{w}_T + rT - 0.5\sigma^2 T} - K)^+ \\ &= e^{-rT} \int_{\frac{\ln \frac{K}{S_0} - rT + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} (S_0 e^{\sigma\sqrt{T}y + rT - 0.5\sigma^2 T} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= S_0 \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT - 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} dy - e^{-rT} K \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT - 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Произведя замену в первом интеграле и введя обозначения

$$y_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + rT \pm 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (2.4)$$

получим известную формулу Блэка-Шоулса:

$$C = S_0 \Phi(y_+) - e^{-rT} K \Phi(y_-). \quad (2.5)$$

Используя соотношение (1.15), получим формулу цены опциона продажи:

$$P = e^{-rt} K \Phi(-y_-) - S_0 \Phi(-y_+). \quad (2.6)$$

Одно из примечательных следствий этих формул состоит в том, что цена опционов не зависит от ожидаемой доходности μ .

Цену опциона можно рассматривать как функцию от различных параметров $C = C(T, S_0, \sigma, \dots)$. Важное значение для практики имеют показатели риска ("Greek letters") - производные цены опциона (портфеля опционов) по различным параметрам. Они показывают, насколько изменится цена при изменении того или иного параметра. Эти производные имеют специальное обозначение: $\Delta = \partial C / \partial S_0$, $\Gamma = \partial^2 C / \partial S_0^2$, $\Theta = -\partial C / \partial T$, $\mathcal{V} = \partial C / \partial \sigma$ ("vega"), и др. Приведем их значения для опциона покупки:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Phi(y_+), \quad \Gamma = \frac{\varphi(y_+)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}, \quad \mathcal{V} = S_0 \sqrt{T} \varphi(y_+), \\ \Theta &= -\frac{S_0 \varphi(y_+) \sigma}{2\sqrt{T}} - r e^{-rT} K \Phi(y_-). \end{aligned}$$

При изменении цены акции на dS_0 цена опциона изменится на величину $\Delta \cdot dS_0 + 0.5\Gamma(dS_0)^2$. Если в портфеле имеется один опцион и $-\Delta$ акций, то цена портфеля изменится на величину $0.5\Gamma(dS_0)^2$. Поскольку $\Gamma > 0$, то мы получаем интересный результат - цена портфеля увеличивается при любом изменении цен; этот факт является основой реальных торговых стратегий. Можно отметить также, что Γ принимает максимальное значение для опциона, у которого цена исполнения $K = S_0 \exp(-rT - 0.5\sigma^2 T)$.

Используя приведенные формулы для производных, можно убедиться, что C , как функция первых двух переменных $C(T, S)$, удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial C(T, S)}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(T, S)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C(T, S)}{\partial S} - rC(T, S) \quad (2.7)$$

и начальному условию $C(0, S) = f(S)$.

Теорема 2.2 *Хеджирующая стратегия для стандартных опционов имеет вид $\gamma_t = \Delta(T - t, S_t)$.*

Найдем сначала выражение для $\tilde{X}_t^{\pi^*}$. Воспользовавшись тем, что S_t - это однородный марковский процесс, получим

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t^{\pi^*} &= \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{F}_t} \tilde{f} = \tilde{\mathbf{E}}_{S_t, t} e^{-rT} f(S_T) = e^{-rt} \tilde{\mathbf{E}}_{S_t, 0} e^{-r(T-t)} f(S_{T-t}) \\ &= e^{-rt} C(T - t, S_t).\end{aligned}$$

Применим формулу Ито по отношению к процессу $\tilde{X}_t^{\pi^*}$:

$$\begin{aligned}d\tilde{X}_t^{\pi^*} &= e^{-rt} \left(-\frac{\partial C(T - t, S_t)}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C(T - t, S_t)}{\partial S^2} \right. \\ &\quad \left. + r S_t \frac{\partial C(T - t, S_t)}{\partial S} - r C(T - t, S_t) \right) dt + e^{-rt} \frac{\partial C(T - t, S_t)}{\partial S} \sigma S_t d\tilde{w}_t.\end{aligned}$$

Выражение при dt в силу (2.7) равно нулю, поэтому

$$d\tilde{X}_t^{\pi^*} = \Delta(T - t, S_t) \sigma \tilde{S}_t d\tilde{w}_t.$$

С другой стороны, $d\tilde{X}_t^{\pi^*} = \gamma_t d\tilde{S}_t = \gamma_t \sigma \tilde{S}_t d\tilde{w}_t$. Поскольку процесс Ито однозначно определяет свои коэффициенты, то $\gamma_t = \Delta(S_t, T - t)$ п.н.

2.2.2 Опционы с последствием

Рассмотрим опцион продажи с последствием (look-back put option), согласно которому обладатель опциона имеет право продать акции по максимальной за промежуток $[0, T]$ цене. Очевидно, что платежная функция данного опциона равна

$$f = \max_{t \leq T} S_t - S_T.$$

Рассмотрим процесс $\bar{w}_t = \tilde{w}_t + \lambda t$, где $\lambda = (r - 0.5\sigma^2)/\sigma$, тогда процесс цен имеет вид $S_t = S_0 e^{\sigma \bar{w}_t}$, причем

$$\max_{t \leq T} S_t = S_0 e^{\sigma \bar{M}_T}, \quad \bar{M}_T = \max_{t \leq T} \bar{w}_t.$$

Согласно лемме 2.1 процесс \bar{w}_t является винеровским относительно меры $d\bar{\mathbf{P}} = \bar{\rho}_T d\tilde{\mathbf{P}}$, где

$$\bar{\rho}_T = e^{-\lambda\tilde{w}_T - 0.5\lambda^2 T} = e^{-\lambda\bar{w}_T + 0.5\lambda^2 T}.$$

Цена опциона может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} C(f) &= \tilde{\mathbf{E}}\tilde{f} = \tilde{\mathbf{E}}\rho_T(\rho_T)^{-1}e^{-rT}(S_0e^{\sigma\bar{M}_T} - S_0e^{\sigma\bar{w}_T}) \\ &= S_0e^{-rT}\tilde{\mathbf{E}}e^{\lambda\bar{w}_T - 0.5\lambda^2 T}(e^{\sigma\bar{M}_T} - e^{\sigma\bar{w}_T}). \end{aligned}$$

Совместная плотность распределения винеровского процесса и его максимума в момент времени t имеет вид

$$p(x, y) = 1_{\{y > x^+\}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2y - x}{t^{3/2}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}}. \quad (2.8)$$

Покажем это. Пусть y - точка на прямой, τ_y - момент достижения винеровским процессом w_t точки y . Рассмотрим отраженный процесс

$$w_t^y = \begin{cases} w_t, & \tau_y > t, \\ 2y - w_t, & \tau_y \leq t. \end{cases}$$

Доказывается [12], что w_t^y - также винеровский процесс; поэтому

$$F(x, y) = \mathbf{P}(w_t < x, M_t < y) = \mathbf{P}(w_t < x) - \mathbf{P}(w_t^y < x, M_t^y \geq y) = P_1 - P_2.$$

Пусть $y > x^+$, тогда

$$P_2 = \mathbf{P}(2y - w_t < x, M_t^y \geq y) = \mathbf{P}(w_t > 2y - x) = 1 - \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right).$$

Заметим, что при $y < 0$ функция $F(x, y) = 0$, а при $0 < y < x$ функция $F(x, y)$ не зависит от x . Дифференцируя $F(x, y)$ по x и по y , получаем выражение (2.8) для плотности.

Таким образом,

$$\begin{aligned} C(f) &= S_0e^{-rT} \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^y dx e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 T} (e^{\sigma y} - e^{\sigma x}) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2y - x}{T^{3/2}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2T}} \\ &= S_0 \left[\frac{\nu\sigma}{r} \Phi(\nu\sqrt{T}) + \frac{\lambda\sigma}{r} e^{-rT} \Phi(-\lambda\sqrt{T}) - 1 \right], \end{aligned}$$

где $\nu = (r + 0.5\sigma^2)/\sigma$.

2.2.3 Барьерные опционы

Существуют различные типы барьерных опционов. Во-первых, это могут быть опционы покупки/продажи (call/put); во вторых, опционы различаются по признаку, находится ли барьер выше/ниже (up/down) начальной цены; в третьих, будет ли он исполнен/не исполнен (in/out) при достижении барьера. Приведем пример барьерного опциона "up-and-out call": обладатель опциона имеет право купить в момент времени T некоторый актив по цене K , если до этого момента цена опциона не превысит уровня H . Платежная функция этого опциона имеет вид

$$f = 1_{\{\max_{t \leq T} S_t < H\}} (S_T - K)^+.$$

Заметим, что платежная функция отлична от нуля только в том случае если $H > S_0$ и $H > K$. Кроме того, она не превосходит платежной функции соответствующего стандартного опциона, следовательно и цена барьерных опционов меньше цены стандартных опционов, чем и объясняется их популярность.

Чтобы упростить вычисления, представим платежную функцию в виде

$$\begin{aligned} f &= (S_T - K)^+ - 1_{\{H < S_T\}} (S_T - K) - 1_{\{K < S_T < H < \max_{t \leq T} S_t\}} (S_T - K) \\ &= f_1 - f_2 - f_3. \end{aligned}$$

Математическое ожидание \tilde{f}_1 выражается формулой (2.5); рассматривая y_{\pm} в формуле (2.4) как функцию от K , мат. ожидание \tilde{f}_2 можно получить в виде

$$S_0 \Phi(y_+(H)) - e^{-rT} K \Phi(y_-(H)).$$

Для того чтобы вычислить ожидание \tilde{f}_3 , произведем такую же замену меры, как и для опционов с последствием:

$$\tilde{\mathbf{E}} \tilde{f}_3 = e^{-rT} \tilde{\mathbf{E}} e^{\lambda \bar{w}_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T} 1_{\{K < S_0 e^{\sigma \bar{w}_T} < H < S_0 e^{\sigma \bar{M}_T}\}} (S_0 e^{\sigma \bar{w}_T} - K)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-rT} \int_{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{K}{S_0}}^{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{H}{S_0}} dx e^{\lambda x - \frac{1}{2} \lambda^2 T} (S_0 e^{\sigma x} - K) \int_{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{H}{S_0}}^{\infty} dy \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2y - x}{T^{3/2}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2T}} \\
&= S_0 \left(\frac{H}{S_0} \right)^{1 + \frac{2r}{\sigma^2}} (\Phi(z_+) - \Phi(u_+)) - K e^{-rT} \left(\frac{H}{S_0} \right)^{-1 + \frac{2r}{\sigma^2}} (\Phi(z_-) - \Phi(u_-)),
\end{aligned}$$

где

$$z_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_0}{H} - (r \pm 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad u_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_0 K}{H^2} - (r \pm 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

2.3 Опцион американского типа

Как мы видели, в модели геометрического броуновского движения цены многих опционов европейского типа считаются аналитически. Но для опциона американского типа, точных формул для цены нет. Уже отмечалось, что в случае одномерного базового актива можно построить одномерную регулярную сетку, аппроксимирующую траектории S_t , и вычислять цену по формулам (1.22). Если же платежная функция зависит от нескольких базовых активов, то можно применить либо общий метод стохастической сетки, либо специфический для данной модели метод "стохастического интегрирования по частям". Рассматриваемые ниже вычислительные схемы формулируются для простоты изложения для одномерного случая, но обобщение на многомерный случай не вызывает затруднений.

Укажем основные вероятностные характеристики процесса. Будем считать, что $S_t = S_0 \exp(\sigma w_t + \lambda t)$. Аналогично формуле (1.11) находим, что плотность распределения величины S_u равна:

$$p_u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{(\log(x/S_0) - \lambda u)^2}{2\sigma^2 u}} \frac{1}{x\sigma}.$$

Поскольку $S_t = S_u e^{\sigma(w_t - w_u) + \lambda(t-u)}$, то переходная плотность $p(u, x; t, y)$

вычисляется аналогично:

$$p(u, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-u)}} e^{-\frac{(\ln(y/x) - \lambda(t-u))^2}{2\sigma^2(t-u)}} \frac{1}{y\sigma}.$$

Мы будем рассматривать рынок в дискретные моменты времени $t_k = k\Delta t$, где $\Delta t = T/N$. Переходные плотности $p(x, y)$ последовательности цен S_{t_k} задаются естественным образом: $p(x, y) = p(0, x; \Delta t, y)$.

2.3.1 Метод стохастической сетки

В этом параграфе мы проверим выполняются ли условия теоремы 1.8 для модели Блэка-Шоулса.

Оценка с усредненной плотностью. Рассмотрим оценку с переходной плотностью

$$r_{k,i}(\bar{x}_{k-1}, y) = \frac{1}{M} \sum_j p(x_{k-1,j}, y).$$

Для состоятельности этой оценки, согласно неравенству (1.31), достаточно показать, что

$$\int_0^\infty dy \tilde{Y}_k^2(y) \mathbf{E} \frac{\sum_j p^2(x_{k-1,j}, y)}{\sum_j p(x_{k-1,j}, y)} < \infty. \quad (2.9)$$

Представим плотность $p(x_{k-1,j}, y)$ в виде

$$p(x_{k-1,j}, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{1}{2}(\xi_{k-1,j} - v)^2} \frac{1}{y\sigma},$$

где

$$\xi_{k-1,j} = \frac{\ln(x_{k-1,j}/S_0) - \lambda(k-1)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad v = \frac{\ln(y/S_0) - \lambda k\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}. \quad (2.10)$$

Несложно показать, что относительно \mathcal{F}_{n-1} случайные величины $\xi_{n,i}$ независимы и одинаково распределены с плотностью

$$p_{\xi_{n,1}}(z|\mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{M} \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\xi_{n-1,j})^2}{2}}. \quad (2.11)$$

Интеграл в (2.9) можно переписать в виде

$$\int_0^\infty dv \tilde{Y}_k^2(y(v)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{E} \frac{\sum_j \exp(-(\xi_{k-1,j} - v)^2)}{\sum_j \exp(-(\xi_{k-1,j} - v)^2/2)}, \quad (2.12)$$

где $y(v) = S_0 e^{v\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda k \Delta t}$.

Оценим математическое ожидание под знаком интеграла в (2.12).

Лемма 2.2 Пусть η_i , $i = 1, \dots, M$, - неотрицательные, независимые, одинаково распределенные величины, $\zeta_i = \eta_i^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $\bar{\eta} = \frac{1}{M} \sum_j \eta_j$, $\bar{\zeta} = \frac{1}{M} \sum_j \zeta_j$, тогда

$$\mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} \leq 3 \frac{\mathbf{E} \zeta}{\mathbf{E} \eta}.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что верно следующее равенство

$$\mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} = \frac{\mathbf{E} \zeta}{\mathbf{E} \eta} - \frac{1}{\mathbf{E} \eta} \mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} (\bar{\eta} - \mathbf{E} \eta),$$

откуда следует оценка

$$\mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} \leq \frac{\mathbf{E} \zeta}{\mathbf{E} \eta} + \frac{1}{\mathbf{E} \eta} \mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} |\bar{\eta} - \mathbf{E} \eta|. \quad (2.13)$$

Из неравенства $\sum_j \eta_j^{1+\varepsilon} \leq (\sum_j \eta_j)^{1+\varepsilon}$ следует, что

$$\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} = \frac{\left(\sum_j \zeta_j\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}{\sum_j \eta_j} \left(\sum_j \zeta_j\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \leq \left(\sum_j \eta_j^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \quad (2.14)$$

Используя последнюю оценку, а затем неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\eta}} |\bar{\eta} - \mathbf{E}\eta| &\leq \mathbf{E} \left(\sum_j \eta_j^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} |\bar{\eta} - \mathbf{E}\eta| \\ &\leq \mathbf{E}^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\sum_j \eta_j^{1+\varepsilon} \right) \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} |\bar{\eta} - \mathbf{E}\eta|^{1+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Далее воспользуемся теоремой ([13], с.79).

Теорема 2.3 Пусть X_1, \dots, X_n - независимые случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными абсолютными моментами порядка p ($1 \leq p \leq 2$). Тогда

$$\mathbf{E} \left| \sum_{k=1}^n X_k \right|^p \leq \left(2 - \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \mathbf{E} |X_k|^p.$$

Используя эту теорему, можем оценить (2.15) величиной

$$M^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \mathbf{E}^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \eta^{1+\varepsilon} \frac{2}{M^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \eta^{1+\varepsilon} = 2\mathbf{E}\zeta.$$

Подставляя полученные оценки в (2.13), получаем утверждение леммы.

Применяя лемму (с $\varepsilon = 1$) к математическому ожиданию в (2.12), получаем, что

$$\mathbf{E} \frac{\sum_j \exp(-(\xi_{k-1,j} - v)^2)}{\sum_j \exp(-(\xi_{k-1,j} - v)^2/2)} \leq 3\mathbf{E} \frac{\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k-2}} \exp(-(\xi_{k-1,1} - v)^2)}{\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k-2}} \exp(-(\xi_{k-1,1} - v)^2/2)}. \quad (2.16)$$

Вычислим математическое ожидание $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} \exp(-(\xi_{n,1} - v)^2/m)$. Согласно (2.11) оно равно

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{n-1}} e^{-\frac{(\xi_{n,1} - v)^2}{m}} = \frac{\sqrt{\pi m}}{M} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(m/2)}} e^{-\frac{(z-v)^2}{2(m/2)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z - \xi_{n-1,j})^2}{2}} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\pi m}}{M} \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\pi(m/2+1)}} e^{-\frac{(\xi_{n-1,j}-v)^2}{2(m/2+1)}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{m+2}} \frac{1}{M} \sum_j \exp(-((\xi_{n-1,j}-v)^2)/(m+2)).
\end{aligned}$$

Применяя полученную формулу, можем переписать правую часть (2.16) в виде

$$3\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{E} \sum_j \exp(-(\xi_{k-2,j}-v)^2/3)}{\sum_j \exp(-(\xi_{k-2,j}-v)^2/4)}.$$

К полученному выражению опять можно применить лемму (при $\varepsilon = 1/3$) и т.д. В результате получаем, что

$$\mathbf{E} \frac{\sum_j \exp(-(\xi_{k-1,j}-v)^2)}{\sum_j \exp(-(\xi_{k-1,j}-v)^2/2)} \leq C_k \frac{\exp(-v^2/(2k-1))}{\exp(-v^2/2k)} = C_k e^{-\frac{v^2}{2k(2k-1)}}.$$

Пусть опцион таков, что для $\tilde{Y}_k(x)$ выполнена оценка $\tilde{Y}_k(x) \leq Cx^m$, тогда интеграл (2.11) оценивается сверху величиной

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{Cv} e^{-\frac{v^2}{2k(2k-1)}} dv < \infty.$$

Таким образом, оценка опциона по усредненной плотности является состоятельной. Отметим, что последнему условию удовлетворяют стандартные опционы.

Оценка по независимым траекториям. В этом случае переходная плотность имеет вид $r_{n,i}(\bar{x}_{n-1}, y) = p(x_{n-1,i}, y)$; отметим, что при этом $\rho_1 \equiv 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \check{Y}_0^2(S_0) &\geq \mathbf{E} [\rho_2(j_1, j_2) f(x_{2,j_2})]^2 \geq \frac{1}{M^2} \mathbf{E} [\rho_2(1, 2) f(x_{2,2})]^2 = \\
&= \frac{1}{M^2} \int_{R^3} \frac{p^2(x_{1,1}, x_{2,2})}{p(x_{1,2}, x_{2,2})} f(x_{2,2}) p(S_0, x_{1,1}) p(S_0, x_{1,2}) dx_{1,1} dx_{1,2} dx_{2,2}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Переходя от переменных $x_{n,i}$ к переменным $\xi_{n,i}$ (см.(2.10)), получим под знаком интеграла экспоненту с показателем

$$\begin{aligned} & -(\xi_{1,1} - \xi_{2,2})^2 + \frac{1}{2}(\xi_{1,2} - \xi_{2,2})^2 - \frac{1}{2}\xi_{1,1}^2 - \frac{1}{2}\xi_{1,2}^2 = \\ = & -\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\xi_{1,1} - \sqrt{\frac{2}{3}}\xi_{2,2}\right)^2 - 2\xi_{1,2}^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\xi_{2,2} - \sqrt{\frac{6}{4}}\xi_{1,2}\right)^2. \end{aligned}$$

Если существуют $\varepsilon > 0$ и K , такие, что $f(x) > \varepsilon$ при $x > K$ или при $x < 1/K$, то интеграл в (2.17) расходится и, следовательно, дисперсия оценки бесконечна.

2.3.2 Метод стохастического интегрирования по частям

Введем формулу стохастического интегрирования по частям. Пусть даны две случайные величины F, G ; будем говорить, что для этих величин верна формула интегрирования по частям, если существует случайная величина $H(F; G)$, такая что

$$\mathbf{E}\varphi'(F)G = \mathbf{E}\varphi(F)H(F; G). \quad (2.18)$$

для любой гладкой функции φ , у которой производная принадлежит $L_1(R)$. Множество таких функций будем обозначать C_1^1 .

Сформулируем лемму, позволяющую вычислять условные математические ожидания.

Лемма 2.3 Пусть F и G - две случайные величины с плотностями $p_F(x)$ и $p_G(x)$, а также совместной плотностью $p_{FG}(x, y)$, для которых существуют $H(F; 1)$ и $H(F; G)$, тогда

$$\mathbf{E}(G \mid F = x) = \frac{\mathbf{E}\theta(F - x)H(F; G)}{\mathbf{E}\theta(F - x)H(F; 1)}, \quad (2.19)$$

где $\theta(x) = 0$, при $x < 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$.

Доказательство. Пусть последовательность непрерывных функций $\omega_n(x)$ из $L_1(R)$ сходится к δ -функции, тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(G \mid F = x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{p_{FG}(x, y)}{p_F(x)} dy = \lim_n \frac{\int y \omega_n(z - x) p_{FG}(z, y) dy dz}{\int \omega_n(z - x) p_F(z) dz} \\ &= \lim_n \frac{\mathbf{E}G \omega_n(F - x)}{\mathbf{E} \omega_n(F - x)}.\end{aligned}$$

Введем функции $\theta_n(x) = \int_{-\infty}^x \omega_n(y) dy$, тогда $\theta'_n(x) = \omega_n(x)$ и $\theta_n(x)$ стремится к $\theta(x)$ п.в. Применяя интегрирование по частям и переходя к пределу, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(G \mid F = x) &= \lim_n \frac{\mathbf{E} \theta'_n(F - x) G}{\mathbf{E} \theta'_n(F - x)} \\ &= \lim_n \frac{\mathbf{E} \theta_n(F - x) H(F; G)}{\mathbf{E} \theta_n(F - x) H(F; 1)} = \frac{\mathbf{E} \theta(F - x) H(F; G)}{\mathbf{E} \theta(F - x) H(F; 1)}.\end{aligned}$$

Возвращаясь к нашей модели, предположим, что $f(x) \leq C(x^m + 1)$ и проверим, что существует $H(S_u; f(S_t))$. Плотность совместного распределения случайных величин S_u и S_t равна $p_{u,t}(x, y) = p_u(x) p(u, x; t, y)$ и $\int_0^\infty dy f(y) p(u, x; t, y) \leq C(x^m + 1)$. Пусть $\varphi \in C_0^1$, тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \varphi'(S_u) f(S_t) &= \int_0^\infty dx \varphi'(x) p_u(x) \int_0^\infty dy p(u, x; t, y) f(y) \\ &= - \int_0^\infty dx \varphi(x) \int_0^\infty dy f(y) \frac{\partial}{\partial x} p_{u,t}(x, y) \\ &= - \mathbf{E} \varphi(S_u) f(S_t) \frac{\partial}{\partial x} \ln p_{u,t}(S_u, S_t).\end{aligned}$$

Положим

$$\pi_{u,t}(x, y) = - \frac{\partial}{\partial x} \ln p_{u,t}(x, y). \quad (2.20)$$

и вычислим $\pi_{u,t} = \pi_{u,t}(S_u, S_t)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln p_u(x) &= -\frac{\ln(x/S_0) - \lambda u}{\sigma^2 u x} - \frac{1}{x}, \\ \frac{d}{dx} \ln p(u, x; t, y) &= \frac{\ln(y/x) - \lambda(t-u)}{\sigma^2(t-u)x}.\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x} \ln p_{u,t}(S_u, S_t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \ln p_u(S_u) - \frac{\partial}{\partial x} \ln p(u, S_u; t, S_t) = \\ &= \frac{\sigma w_u}{\sigma^2 u S_u} + \frac{1}{S_u} - \frac{\sigma(w_t - w_u)}{S_u \sigma^2(t-u)}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\pi_{u,t} = \frac{(t-u)(\sigma u + w_u) - u(w_t - w_u)}{u(t-u)\sigma S_u}. \quad (2.21)$$

и

$$\mathbf{E}\varphi'(S_u)f(S_t) = \mathbf{E}\varphi(S_u)f(S_t)\pi_{u,t}. \quad (2.22)$$

Предположим, что $f(x) \leq Cx^m$, тогда $\mathbf{E}|f(S_t)\pi_{u,t}| < \infty$ и если взять $\varphi \equiv 1$, то из (2.22) следует, что

$$\mathbf{E}f(S_t)\pi_{u,t} = 0. \quad (2.23)$$

Если в формулу (2.22) подставить $f(x) \equiv 1$, то получится что выполняется интегрирование по частям в виде

$$\mathbf{E}\varphi'(S_u) = \mathbf{E}\varphi(S_u)\pi_{u,t}.$$

Таким образом, условное математическое ожидание можно вычислять, используя одинаковые веса для числителя и знаменателя, то есть

$$\mathbf{E}(f(S_t) \mid S_u = x) = \frac{\mathbf{E}f(S_t)\theta(S_u - x)\pi_{u,t}}{\mathbf{E}\theta(S_u - x)\pi_{u,t}}. \quad (2.24)$$

Сформулируем теперь схему вычисления цены американского опциона, использующий формулу (2.24). Моделируем N независимых траекторий S^i и полагаем $Y_T^i = h(T, S_T^i)$. Далее, для $k = N - 1, \dots, 0$, полагаем $u = k\Delta t$, $t = (k + 1)\Delta t$,

$$Y_u^i = \max \left(h(u, S_u^i), \frac{\sum_j Y_t^j \theta(S_u^j - S_u^i) \pi_{u,t}(S_u^j, S_t^j)}{\sum_j \theta(S_u^j - S_u^i) \pi_{u,t}(S_u^j, S_t^j)} \right). \quad (2.25)$$

Заметим, что в отличие от схемы Броуди-Глассермана, оценка условного математического ожидания здесь является, вообще говоря, смещенной. Как показывают вычисления, дисперсия в данной схеме может быть достаточно большой, поэтому рассмотрим некоторые способы уменьшения дисперсии.

Функции локализации. Введем так называемую «локализирующую функцию» $\psi(x)$, обладающую свойствами плотности распределения, то есть: $\psi(x) \geq 0$, $\int \psi(x) dx = 1$. Через $\Psi(x)$ обозначим первообразную $\Psi(y) = \int_{-\infty}^y \psi(x) dx$. Используя (2.22), получаем

$$\mathbf{E} \psi(S_u - x) f(S_t) = \mathbf{E} f(S_t) \Psi(S_u - x) \pi_{u,t}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} f(S_t) \theta(S_u - x) \pi_{u,t} = \mathbf{E} f(S_t) [\psi(S_u - x) + (\theta - \Psi)(S_u - x) \pi_{u,t}],$$

Таким образом, для нахождения условного математического ожидания можно воспользоваться формулой

$$\mathbf{E}(f(S_t) \mid S_u = x) = \frac{\mathbf{E}(f(S_t) [\psi(S_u - x) + (\theta - \Psi)(S_u - x) \pi_{u,t}])}{\mathbf{E}[\psi(S_u - x) + (\theta - \Psi)(S_u - x) \pi_{u,t}]}. \quad (2.26)$$

Подберем ψ таким образом, чтобы минимизировать величину

$$I(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} f^2(S_t) [\psi(X_u - \alpha) + (\theta - \Psi)(S_u - \alpha) \pi_{u,t}]^2 d\alpha \quad (2.27)$$

$$= \mathbf{E} f^2(S_t) \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(\beta) + (\theta - \Psi)(\beta) \pi_{u,t}]^2 d\beta. \quad (2.28)$$

Заметим, что

$$I(\psi) \leq 2\mathbf{E}f^2(S_t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\beta) d\beta + 2\mathbf{E}f^2(S_t)\pi_{u,t}^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \Psi)^2(\beta) d\beta.$$

Таким образом, для конечности функционала достаточно чтобы функции ψ и $\theta - \Psi$ принадлежали $L_2(\mathbf{R})$.

Теорема 2.4 Пусть $\mathcal{L} = \{\psi : \psi \in C_1^1(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R}), (\theta - \Psi) \in L_2(\mathbf{R})\}$, тогда $\inf_{\psi \in \mathcal{L}} I(\psi)$ достигается при $\psi(x) = \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x|}$, где μ равно

$$\mu = \left(\frac{\mathbf{E}f^2(S_t)\pi_{u,t}^2}{Ef^2(S_t)} \right)^{1/2}. \quad (2.29)$$

Доказательство. Рассмотрим вариацию функционала $I(\psi)$. Пусть функция $h \in C^1(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$, тогда вариация функционала $I(\psi)$ в направлении h равна

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\psi + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = 2\mathbf{E}f^2(S_t) \int_{-\infty}^{\infty} [h(\beta) - H(\beta)\pi_{u,t}] [\psi(\beta) + (\theta - \Psi)(\beta)\pi_{u,t}] d\beta,$$

где $H(x) = \int_{-\infty}^x h(\beta) d\beta$. Учитывая (2.23), последнее выражение можно переписать в виде

$$2\mathbf{E}f^2(S_t) \int_{-\infty}^{\infty} [h(\beta)\psi(\beta) - H(\beta)(\theta - \Psi)(\beta)(\pi_{u,t})^2] d\beta.$$

Применим формулу интегрирования по частям в первом слагаемом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)\psi(\beta) d\beta = H(\beta)\psi(\beta) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H(\beta)\psi'(\beta) d\beta.$$

Поскольку $\psi(\pm\infty) = 0$, то получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\psi + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} d\beta H(\beta) \mathbf{E}f^2(X_t) [\psi'(\beta) + (\theta - \Psi)(\beta)\pi_{u,t}^2].$$

Для того чтобы вариация обращалась в 0 для почти любой интегрируемой функции h , необходимо и достаточно чтобы

$$\mathbf{E}f^2(X_t)[\psi'(\beta) + (\theta - \Psi)(\beta)\pi_{u,t}^2] = 0$$

для почти всех β . Таким образом, мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\Psi''(\beta) - \mu^2\Psi(\beta) + \mu^2\theta(\beta) = 0, \quad (2.30)$$

где μ определяется (2.29).

При $\beta < 0$ уравнение (2.30) преобразуется к виду $\Psi''(\beta) - \mu^2\Psi(\beta) = 0$. Общее решение такого уравнения имеет форму

$$\Psi(\beta) = c_1 e^{\mu\beta} + c_2 e^{-\mu\beta}.$$

С учетом того, что $\psi(-\infty) = 0$, получаем, что $c_2 = 0$. При $\beta > 0$ уравнение (2.30) приобретает вид

$$\Psi''(\beta) - \mu^2\Psi(\beta) + \mu^2 = 0.$$

Общее решение этого уравнения $\Psi(\beta) = c_3 e^{\mu\beta} + c_4 e^{-\mu\beta} + 1$. Опять, с учетом того что, $\psi(\infty) = 0$, получаем $c_3 = 0$. Из условий непрерывности в нуле функций Ψ и ψ

$$\begin{cases} c_1 &= c_4 + 1, \\ c_1 &= -c_4, \end{cases}$$

откуда $c_4 = -1/2$, $c_1 = 1/2$.

Вторая производная от I всегда неотрицательна:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} I(\psi + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(X_t) \mathbf{E}[h(\beta) - H(\beta)\pi_{u,t}]^2 d\beta \geq 0;$$

и, следовательно, функция ψ^* задает минимум функционала I .

Аналитическое интегрирование. Модификация схемы (2.25) состоит в том, что мы представляем математические ожидания в формуле (2.24) в виде

$$\mathbf{E}f(S_t)\theta(S_u - x)\pi_{u,t} = \mathbf{E}f(S_t)g_{u,t}(x, S_t),$$

где

$$g_{u,t}(x, y) = \mathbf{E}(\theta(S_u - x)\pi_{u,t} \mid S_t = y). \quad (2.31)$$

Согласно формуле (2.20), $\pi_{u,t}(z, y) = -\partial \ln p_{u,t}(z, y) / \partial z$. Подставляя это выражение в (2.31), получим

$$g_{u,t}(x, y) = -\frac{1}{p_t(y)} \int_x^\infty dz \frac{\partial p_{u,t}(z, y)}{\partial z} = p_{u,t}(x, y) / p_t(y).$$

Формула (2.24) для вычисления условного математического ожидания в данном случае принимает вид

$$\mathbf{E}(f(S_t) \mid S_u = x) = \frac{\mathbf{E}f(S_t)g_{u,t}(x, S_t)}{\mathbf{E}g_{u,t}(x, S_t)}, \quad (2.32)$$

а формула (2.25) для вычисления цены опциона:

$$Y_u^i = \max \left(h(u, S_u^i), \frac{\sum_j g_{u,t}(S_u^i, S_t^j) Y_t^j}{\sum_j g_{u,t}(S_u^i, S_t^j)} \right). \quad (2.33)$$

Несложно вывести, что $\mathbf{E}g_{u,t}(x, S_t) = p_u(x)$, поэтому можно вычислить

$$\rho_{u,t}(x, y) = \frac{g_{u,t}(x, y)}{\mathbf{E}g_{u,t}(x, S_t)} = p(u, x; t, y) / p_t(y).$$

В этом случае формулы (2.32), (2.33) принимают совсем простой вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(S_t) \mid S_u = x) &= \mathbf{E}f(S_t)\rho(x, S_t), \\ Y_u^i &= \max \left(h(u, S_u^i), \frac{1}{N} \sum_j \rho_{u,t}(S_u^i, S_t^j) Y_t^j \right). \end{aligned}$$

Однако, как нетрудно видеть, получившаяся оценка - это "оценка по независимым траекториям" в методе стохастической сетки, а она имеет бесконечную дисперсию.

Глава 3

Диффузионные модели

3.1 Модель акций

Модель геометрического броуновского движения является удобной для анализа, но она не описывает некоторых особенностей реального рынка. Одна из таких особенностей состоит в поведении так называемой "предполагаемой волатильности" ("implied volatility"). Рассмотрим этот эффект. Предположим, что $\tilde{C}(T, K)$ - это наблюдаемая на рынке цена опциона покупки с датой исполнения T и ценой исполнения K . Подставим это значения в формулу (2.5) и рассмотрим полученное выражение как уравнение для неизвестного параметра σ . Пусть $\tilde{\sigma}(T, K)$ - решение рассматриваемого уравнения; именно оно и называется предполагаемой волатильностью. Если модель верна, то для различных параметров T , K мы должны получать одинаковые значения $\tilde{\sigma}(T, K)$. В действительности этого не происходит - значения $\tilde{\sigma}(T, K)$ могут значительно различаться при различных значениях параметров.

3.1.1 Модель локальных волатильностей

Объяснить этот эффект можно с помощью различных моделей, из которых простейшая - это модель локальных волатильностей, согласно которой динамика цен акций описывается диффузионным процессом

вида

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma(t, S_t)dw_t + \mu(t, S_t)dt.$$

"Локальными волатильностями" в данном случае называется функция $\sigma(t, x)$. При условии, что коэффициенты σ и μ являются ограниченными липшицевыми функциями, данное уравнение имеет единственное решение.

Вывод общей формулы для цены опциона и хеджирующей стратегии в данной модели принципиально не отличается от того, который был произведен для модели геометрического броуновского движения. В данной модели мы можем воспользоваться теоремой [14], аналогичной утверждению (2.1):

Теорема 3.1 Пусть $b(t, \omega)$ - прогрессивно-измеримый процесс, такой, что

$$\mathbf{E} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T b^2(t, \omega) dt \right) < \infty,$$

тогда для процесса

$$\rho_T = \exp \left(- \int_0^T b(t, \omega) dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T b^2(t, \omega) dt \right)$$

выполнено $\mathbf{E} \rho_T = 1$ и процесс $\tilde{w}_t = w_t + \int_0^t b(s, \omega) ds$ является винеровским относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$: $d\tilde{\mathbf{P}} = \rho_T d\mathbf{P}$.

Мы также определяем функцию $b(t, x) = (\mu(t, x) - r)/\sigma(t, x)$, новую меру

$$d\tilde{\mathbf{P}} = e^{-\int_0^T b(u, S_u) dw_u - 0.5 \int_0^T b^2(u, S_u) du} d\mathbf{P}$$

и процесс $\tilde{w}_t = w_t + \int_0^t b(u, S_u) du$. Процесс цен выражается через него в виде

$$dS_t/S_t = r dt + \sigma(t, S_t) d\tilde{w}_t, \quad (3.1)$$

Нетрудно видеть, что дисконтированный процесс цен \tilde{S}_t удовлетворяет уравнению

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_t = \sigma(e^{rt}\tilde{S}_t, t) d\tilde{w}_t. \quad (3.2)$$

и, следовательно, является мартингалом относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$.

Также, как и в предыдущих параграфах, показывается, что цена опциона равна $C(f) = \tilde{\mathbf{E}}f$ и, значит, не зависит от параметра μ .

Если рассматривать C как функцию от T и S , то она удовлетворяет [14] уравнению, аналогичному уравнению (2.7):

$$\frac{\partial C(T, S)}{\partial T} = \frac{1}{2}\sigma^2(T, S)S^2\frac{\partial^2 C(T, S)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C(T, S)}{\partial S} - rC(T, S). \quad (3.3)$$

Покажем, что верно и обратное утверждение. Пусть процесс x_t удовлетворяет уравнению $dx_t = a(x_t)dw_t + b(x_t)dt$, а $\varphi(t, x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2}a^2(x)\frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} + c(x)\varphi(t, x) + h(t, x) \quad (3.4)$$

с начальным условием $\varphi(0, x) = f(x)$; тогда φ может быть представлена в виде

$$\varphi(t, x) = \mathbf{E}_x e^{\int_0^t c(x_u)du} f(x_t) + \mathbf{E}_x \int_0^t e^{\int_0^s c(x_u)du} h(t-s, x_s) ds. \quad (3.5)$$

Действительно, рассмотрим процесс $y_s = e^{\int_0^s c(x_u)du} \varphi(t-s, x_s)$. Согласно формуле Ито, этот процесс имеет стохастический дифференциал

$$\begin{aligned} dy_s &= e^{\int_0^s c(x_u)du} \left[-\frac{\partial \varphi(t-s, x_s)}{\partial t} + \frac{1}{2}a^2(x_s)\frac{\partial^2 \varphi(t-s, x_s)}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + b(x_s)\frac{\partial \varphi(t-s, x_s)}{\partial x} + c(x_s)\varphi(t-s, x_s) \right] ds \\ &+ e^{\int_0^s c(x_u)du} b(x_s)\frac{\partial \varphi(t-s, x_s)}{\partial x} dw_s \\ &= e^{\int_0^s c(x_u)du} \left[-h(t-s, x_s)ds + b(x_s)\frac{\partial \varphi(t-s, x_s)}{\partial x} dw_s \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя от 0 до t и беря математическое ожидание, получим

$$\mathbf{E}_x(y_t - y_0) = -\mathbf{E}_x \int_0^t e^{\int_0^s c(x_u) du} h(\xi_s, t-s) ds.$$

Учитывая, что $y_t = e^{\int_0^t c(x_u) du} f(x_t)$ и $y_0 = \varphi(t, x)$, получаем (3.5).

Покажем, как в данной модели можно определить локальные волатильности по известным ценам стандартных опционов. Эта задача имеет важное значение, как калибровочная задача для определения параметров модели. После того как функция σ определена, можно вычислять цены более сложных ("экзотических") опционов.

3.1.2 Вычисление локальных волатильностей.

Гладкие функции.

Обозначим через $p(t, x; T, y)$ переходные вероятности процесса S_t относительно меры \mathbf{P} . Эти вероятности удовлетворяют обратному и прямому уравнениям Колмогорова [10].

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{2} x^2 \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + r x \frac{\partial p}{\partial x} = Lp, \\ \frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [y^2 \sigma^2(T, y) p] - \frac{\partial}{\partial y} [r y p] = L^* p. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\Lambda(t, x; T, y) = e^{-r(T-t)} p(t, x; T, y)$ ("Arrow-Debreu prices"). Она удовлетворяет уравнениям

$$-\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = L\Lambda - r\Lambda, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial T} = L^*\Lambda - r\Lambda.$$

Через эту функцию цена опциона покупки с ценой исполнения K и датой исполнения T выражается в виде

$$C(t, x; T, K) = \tilde{\mathbf{E}}_{x,t} \tilde{f}(S_T, K) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t, x; T, y) f(y, K) dy,$$

где $f(y, K) = (y - K)^+$. Рассматривая f как обобщенную функцию, имеем

$$\partial f / \partial y = -\partial f / \partial K = 1_{\{y > K\}}, \quad \partial^2 f / \partial y^2 = \partial^2 f / \partial K^2 = \delta(y - K). \quad (3.6)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \Lambda(t, x; T, K). \quad (3.7)$$

Вычислим производную $\partial C / \partial T$:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial \Lambda(t, x; T, y)}{\partial T} f(y, K) = \int_{-\infty}^{\infty} dy L^* \Lambda f - \int_{-\infty}^{\infty} dy r \Lambda f.$$

Интегрируя по частям, и предполагая, что соответствующие пределы на бесконечности равны нулю, имеем

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 \sigma^2(T, y) \Lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \int_{-\infty}^{\infty} dy r y \Lambda \frac{\partial f}{\partial y} - rC. \quad (3.8)$$

Учитывая (3.6) и (3.7), получим, что первое слагаемое в (3.8) равно

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 \sigma^2(T, y) \Lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \Lambda(t, x; T, K) = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}.$$

Второе слагаемое в (3.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy r y \Lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= r \int_K^{\infty} dy (y - K) \Lambda + rK \int_K^{\infty} dy \Lambda \\ &= rC - rK \int_K^{\infty} dy \Lambda \frac{\partial f}{\partial K} = rC - rK \frac{\partial C}{\partial K}. \end{aligned}$$

Объединяя полученные выражения, получаем следующее уравнение для C :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K},$$

откуда локальные волатильности выражаются в виде

$$\sigma^2(T, K) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}.$$

Данной формулой можно воспользоваться, если имеется гладкая аппроксимация цен $C(T, K)$.

3.1.3 Дискретный случай.

Зафиксируем некоторое дерево с узлами $S_n(i)$, $i = -n, \dots, n$. Предположим, что из узла $S_n(i)$ процесс может перейти только в узлы $S_{n+1}(i-1)$, $S_{n+1}(i)$, $S_{n+1}(i+1)$ с вероятностями $p_{n+1}(i, j)$; остальные вероятности мы положим равными нулю. Обозначим через $p^{(n)}(i)$ вероятность попасть из состояния S_0 в состояние $S_n(i)$ за n шагов. Для этих вероятностей имеет место формула

$$p^{(n+1)}(j) = \sum_i p^{(n)}(i) p_{n+1}(i, j). \quad (3.9)$$

Цена опциона с датой исполнения t_{n+1} и платежной функцией $f(S_{n+1}, K)$ выражается в виде

$$\begin{aligned} C(t_{n+1}, K) &= e^{-rt_{n+1}} \sum_{j=-n}^n p^{(n+1)}(j) f(S_{n+1}(j), K) \\ &= e^{-r\Delta t} \sum_j \sum_{k=j-2}^j \lambda^{(n)}(k) p_n(k, j) [S_{n+1}(j) - K]^+, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\lambda^{(n)}(k) = e^{-rt_n} p_n(k)$.

Предполагая, что все переходные вероятности до шага n включительно известны, вычислим $p_{n+1}(i, j)$ для $j = i-1, i, i+1$. Нам нужно указать три уравнения, которым удовлетворяют эти вероятности. Первое

из них - это уравнение нормировки: $\sum_j p_{n+1}(i, j) = 1$. Условие мартингалльности процесса дает нам уравнение

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} p_{n+1}(i, j) S_{n+1}(j) = F_{n+1}(i).$$

где $F_{n+1}(i) = e^{r\Delta t} S_n(i)$. Полагая в (3.10) $K = S_{n+1}(i)$, получим

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} C(t_{n+1}, S_{n+1}(i)) &= \lambda^{(n)}(i) p_n(i, i+1) [S_{n+1}(i+1) - S_{n+1}(i)] \\ &+ \sum_{k=i+1} \lambda^{(n)}(k) [F_{n+1}(j) - S_{n+1}(i)]. \end{aligned}$$

Заметим, что в данном уравнении только одно неизвестное $p_n(i, i+1)$.

3.1.4 Модель стохастической волатильности

В данной модели рынок описывается двумя диффузионными процессами

$$dS_t/S_t = \sigma(y_t) dw_t^{(1)} + r dt, \quad (3.11)$$

$$dy_t = a(y_t) dw_t^{(2)} + b(y_t) dt, \quad (3.12)$$

где $w^{(1)}, w^{(2)}$ - винеровские процессы, с коэффициентом корреляции ρ . Можно считать, что

$$w_t^{(2)} = w_t^{(1)} \rho + w_t^{(3)} \sqrt{1 - \rho^2},$$

где $w^{(3)}$ - винеровский процесс независимый от $w^{(1)}$. Как показывают наблюдения, процессы S_t и $\sigma(y_t)$ отрицательно коррелированы. Предполагается также, что процесс y_t имеет стационарное распределение.

Предположим, что уравнение (3.12) имеет решение, такое что для процесса $\sigma_t = \sigma(y_t)$ выполнено условие

$$\mathbf{E} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_t^2 dt \right) < \infty,$$

тогда нетрудно видеть, что процесс S_t может быть представлен в виде

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \sigma_s dw_s^{(1)} - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + rt \right).$$

Укажем, хеджирующую стратегию, оптимальную по среднеквадратичному критерию, то есть стратегию решающую следующую оптимизационную задачу

$$\min_{\gamma_t} \mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f}(S_T))^2.$$

Положим $C(u, x, y) = \mathbf{E}_{x,y} e^{-ru} f(S_u)$ и рассмотрим процесс

$$\psi_t = \mathbf{E}(e^{-rT} f(S_T) | \mathcal{F}_t) = e^{-rt} C(T - t, S_t, y_t).$$

Применяя к нему формулу Ито и учитывая, что ψ_t - мартингал, получим

$$d\psi_t = e^{-rt} \frac{\partial C}{\partial x} S_t \sigma(y_t) dw_t^{(1)} + e^{-rt} \frac{\partial C}{\partial y} a(y_t) dw_t^{(2)}.$$

Проинтегрируем это выражение от 0 до T :

$$\tilde{f}(S_T) = C(T, S_0, y_0) + \int_0^T \frac{\partial C}{\partial x} d\tilde{S}_t + \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial C}{\partial y} a dw_t^{(2)}.$$

Рассмотрим некоторую стратегию (X_0, γ_t) ; из предыдущей формулы имеем

$$\mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f}(S_T))^2 = \mathbf{E} \left(X_0 + \int_0^T \gamma_t d\tilde{S}_t - C - \int_0^T \frac{\partial C}{\partial x} d\tilde{S}_t - \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial C}{\partial y} a dw_t^{(2)} \right)^2.$$

Обозначим

$$\gamma_t^* = \frac{\partial C(T - t, S_t, y_t)}{\partial x} + \rho \frac{a(y_t)}{\sigma(y_t) S_t} \frac{\partial C(T - t, S_t, y_t)}{\partial y},$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f}(S_T))^2 &= \\ &= \mathbf{E} \left(X_0 - C + \int_0^T (\gamma_t - \gamma_t^*) \sigma \tilde{S}_t dw_t^{(1)} - \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial C}{\partial y} a \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^{(3)} \right)^2 \\ &= (X_0 - C)^2 + \int_0^T dt \mathbf{E}(\gamma_t - \gamma_t^*)^2 \sigma^2 \tilde{S}_t^2 + \int_0^T dt \mathbf{E} \left(e^{-rt} \frac{\partial C}{\partial y} a \right)^2 (1 - \rho^2). \end{aligned}$$

Ясно, что минимум данного выражения достигается при $X_0 = C$ и $\gamma_t = \gamma_t^*$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.2 *Оптимальная хеджирующая по критерию среднеквадратичного отклонения стратегия имеет вид:*

$$X_0 = C, \quad \gamma_t = \frac{\partial C(T-t, S_t, y_t)}{\partial x} + \rho \frac{a(y_t)}{\sigma(y_t) S_t} \frac{\partial C(T-t, S_t, y_t)}{\partial y}.$$

При $\rho^2 = 1$ хеджирование является полным, т.е. $X_T = f(S_T)$.

Рассмотрим вопрос о вычислении цен стандартных опционов. Процесс цен может быть представлен в виде $S_t = S_0 \exp(x_t + rt)$, где

$$dx_t = \sigma(y_t) dw_t^{(1)} - \frac{1}{2} \sigma^2(y_t) dt, \quad x_0 = 0.$$

Мы можем определить новую меру $d\bar{\mathbf{P}} = e^{x_T} d\mathbf{P}$, через которую цена покупки выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT} \mathbf{E}(S_0 e^{x_T + rT} - K)^+ \\ &= S_0 \bar{\mathbf{P}}(x_T > \ln(K/F)) - e^{-rT} K \mathbf{P}(x_T > \ln(K/F)) \\ &= S_0 P_1 - e^{-rT} K P_2, \end{aligned}$$

где $F = e^{rT} S_0$. Получим уравнение для P_1 (для P_2 оно может быть получено аналогично). Процесс

$$\bar{w}_t = w_t^{(1)} - \int_0^t \sigma(y_u) du$$

является винеровским по мере $\bar{\mathbf{P}}$ и через него процессы x_t и y_t выражаются в виде

$$\begin{aligned} dx_t &= \sigma d\bar{w}_t + \frac{1}{2} \sigma^2 dt, \\ dy_t &= a d\tilde{w}_t + (a\sigma\rho + b) dt, \end{aligned}$$

где $\tilde{w}_t = \rho \bar{w}_t + \sqrt{1 - \rho^2} w_t^{(3)}$. Рассмотрим характеристическую функцию $\varphi(t, x, y, \eta) = \mathbf{E}(e^{i\eta x_t} | x_0 = x, y_0 = y)$. Она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma^2(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} a^2(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \rho \sigma(y) a(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (b(y) + \rho a(y) \sigma(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned}$$

и начальному условию $\varphi(0, x, y, \eta) = e^{i\eta x}$. Функция φ может быть представлена в виде

$$\varphi(t, x, y, \eta) = e^{i\eta x} \mathbf{E}(e^{i\eta x_t} | x_0 = 0, y_0 = y) = e^{i\eta x} \tilde{\varphi}(t, y, \eta).$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \sigma^2(y) \eta^2 \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} a^2(y) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \rho \sigma(y) a(y) \eta i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2(y) \eta i \tilde{\varphi} + (b(y) + \rho a(y) \sigma(y)) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.13)$$

и начальному условию $\varphi(0, y, \eta) = 1$.

Для некоторых моделей стохастической волатильности это уравнение можно решить аналитически; далее можно применить теорему обращения (см., например [11]).

Теорема 3.3 Пусть $\varphi(\eta)$ характеристическая функция распределения $F(z)$. Тогда

$$F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\eta z} \varphi(-\eta) - e^{-i\eta z} \varphi(\eta)}{i\eta} d\eta.$$

Отсюда P_1 можно выразить в виде

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-i\eta \ln(K/F)} \tilde{\varphi}(T, y_0, \eta) - e^{i\eta \ln(K/F)} \tilde{\varphi}(T, y_0, -\eta)}{i\eta}.$$

Модель Хестона. Приведем одну из конкретных моделей стохастической волатильности, в которой уравнение (3.13) имеет аналитическое решение.

Положим $\sigma(y) = \sqrt{y}$, $a(y) = \alpha\sqrt{y}$, $b(y) = \beta(y^* - y)$, где α , β и y^* - некоторые константы. Таким образом, процесс y_t удовлетворяет уравнению

$$dy_t = \alpha\sqrt{y_t}dw_t + \beta(y^* - y_t). \quad (3.14)$$

Уравнение (3.13) в модели Хестона преобразуется к виду

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = -\frac{1}{2}y\eta^2\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\alpha^2y\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \rho\alpha y\eta i\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} + \frac{1}{2}y\eta i\tilde{\varphi} + (\beta(y - y^*) + \rho\alpha y)\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $\tilde{\varphi} = e^{G(t)+H(t)y}$, где $G(0) = 0$, $H(0) = 0$. Подставляя это выражение в уравнение и приравнявая к нулю множители при степенях y^i , $i = 0, 1$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} G' &= -\beta y^* H, \\ H' &= -\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 H^2 + \rho\alpha\eta i H + \frac{1}{2}\eta i + (\beta + \rho\alpha)H \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2(H - r_1)(H - r_2), \end{aligned}$$

где $r_{1,2}$ - нули многочлена относительно H в последнем уравнении. Эти уравнения имеют решения

$$\begin{aligned} H(t) &= r_1 r_2 \frac{1 - e^{bt}}{r_2 - r_1 e^{bt}}, \\ G(t) &= -\beta y^* \left[r_1 t + \frac{r_1}{b} \ln \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_1 e^{bt}} + \frac{r_2}{b} \ln \frac{r_2 - r_1 e^{bt}}{r_2 - r_1} \right], \end{aligned}$$

где $b = 0.5\alpha^2(r_1 - r_2)$.

Решение уравнение (3.14) можно указать в явном виде, в предположении, что $n = 4\beta y^*/\alpha^2$ - целое число. Для $i = 1, \dots, n$ положим

$$x_t^{(i)} = x_0 e^{-0.5\beta t} + 0.5\alpha \int_0^t e^{0.5\beta(s-t)} dw_s^{(i)},$$

где $w^{(i)}$ - независимые винеровские процессы. Отметим, что $x_t^{(i)}$ удовлетворяют уравнению

$$dx_t^{(i)} = -0.5\beta x_t^{(i)} dt + 0.5\alpha dw_t^{(i)}.$$

Применяя формулу Ито к процессу $y_t = \sum_{i=1}^n \left(x_t^{(i)}\right)^2$, получим

$$\begin{aligned} dy_t &= \sum_{i=1}^n \left(-\beta(x_t^{(i)})^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 \right) dt + \sum_{i=1}^n \alpha x_t^{(i)} dw_t^{(i)} \\ &= \left(-\beta y_t + \frac{n}{4}\alpha^2 \right) dt + \alpha \sqrt{y_t} \sum_{i=1}^n \frac{x_t^{(i)}}{\sqrt{y_t}} dw_t^{(i)}. \end{aligned}$$

Поскольку процесс

$$w_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{x_s^{(i)}}{\sqrt{y_s}} dw_s^{(i)}$$

является мартингалом и для него выполнено равенство $\mathbf{E}w_t^2 = t$, то ([3], теорема 4.1) w_t -винеровский процесс и, значит, y_t удовлетворяет уравнению (3.14).

Плотность стационарного распределения $p(y)$ процесса y_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} (\alpha^2 y p(y)) - \frac{d}{dy} (\beta(y^* - y)) p(y) = 0. \quad (3.15)$$

Нетрудно убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$p(y) = cy^{\gamma y^* - 1} e^{-\gamma y},$$

где $\gamma = 2\beta/\alpha^2$, а c - константа нормировки:

$$c^{-1} = \int_0^\infty y^{\gamma y^* - 1} e^{-\gamma y} dy = \gamma^{-\gamma y^*} \int_0^\infty z^{-\gamma y^* - 1} e^{-z} dz = \gamma^{-\gamma y^*} \Gamma(\gamma y^*).$$

Отметим, что в стационарном режиме процесс колеблется вокруг значения y^* , действительно,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty yp(y)dy &= c \int_0^\infty y^{\gamma y^*} e^{-\gamma y} dy = c \gamma^{-\gamma y^* - 1} \int_0^\infty z^{-\gamma y^*} e^{-z} dz \\ &= \frac{1}{\gamma \Gamma(\gamma y^*)} \Gamma(\gamma y^* + 1) = y^*.\end{aligned}$$

3.2 Модели процентных ставок

Модели процентных ставок подробно изложены в монографии Р. Рибонато [8]. Основными наблюдаемыми величинами на рынке являются цены облигаций $P(t, T)$, где t - текущий момент, T - срок погашения. Безарбитражные цены облигаций могут быть выражены (см. (1.6)) через процесс текущей процентной ставки r_u выражением

$$P(t, T) = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} e^{-\int_t^T r_u du}.$$

Через цены облигаций определяются и другие величины, часто используемые на практике: кривая процентных ставок $R(t, T)$, форвардные процентные ставки $f(t, T)$; они вычисляются по формулам

$$R(t, T) = -\frac{1}{T} \ln P(t, T), \quad f(t, T) = -\frac{d}{dT} \ln P(t, T),$$

так что

$$P(t, T) = e^{-TR(t, T)} = e^{-\int_t^T f(t, u) du}.$$

Одна из задач финансовой математики состоит в построении таких моделей текущей процентной ставки, которые позволяли бы воспроизводить наблюдаемые на рынке величины. Часто для процесса r_t используются те же модели, что и для процесса стохастической волатильности; например, процесс волатильности в модели Хестона известен в теории процентных ставок как модель Кокса-Ингерсолла-Росса.

3.2.1 Модель Васичека

В данной модели предполагается, что текущая процентная ставка удовлетворяет уравнению

$$dr_t = \alpha dw_t + \beta(\bar{r} - r_t)dt,$$

где α , \bar{r} и β - некоторые положительные константы. Нетрудно видеть, что решение этого уравнения имеет явный вид:

$$r_t = \bar{r} + (r_0 - \bar{r})e^{-\beta t} + \alpha \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dw_s.$$

Отсюда следует, что случайные величины r_t нормально распределены со средним $\mathbf{E}r_t = \bar{r} + (r_0 - \bar{r})e^{-\beta t}$ и дисперсией $\mathbf{D}r_t = \alpha^2(1 - e^{-2\beta t})/(2\beta)$. Сосчитаем $\int_0^T r_s ds$:

$$\begin{aligned} \int_0^T r_s ds &= \bar{r}T + (r_0 - \bar{r})\frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta} + \alpha \int_0^T ds \int_0^s dw_u e^{\beta(u-s)} \\ &= \bar{r}T + (r_0 - \bar{r})\frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta} + \alpha \int_0^T dw_u \frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta}. \end{aligned}$$

Этот интеграл также является нормальной случайной величиной и, значит, для вычисления $\mathbf{E} \exp(-\int_0^T r_s ds)$ мы можем воспользоваться следующим равенством для нормальных величин $\mathbf{E}e^\xi = \exp(\mathbf{E}\xi + 0.5\mathbf{D}\xi)$, которое дает нам формулу

$$\mathbf{E}e^{-\int_0^T r_s ds} = \exp\left\{-\bar{r}T - (r_0 - \bar{r})\frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T du \left[\frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta} \right]^2\right\}.$$

Таким образом, кривая процентных ставок имеет вид

$$\begin{aligned} R(T) &= -\frac{1}{T} \ln \mathbf{E}e^{-\int_0^T r_s ds} = \\ &= \bar{r} + (r_0 - \bar{r})\frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta T} - \frac{\alpha^2}{2T\beta^2} \left[T - 2\frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta} + \frac{1 - e^{-2\beta T}}{2\beta} \right]. \end{aligned}$$

Анализ полученного выражения показывает, что $R(T)$ стремится к $\bar{R} = \bar{r} - \frac{\alpha^2}{2\beta^2}$ при $T \rightarrow \infty$. Причем, при $r_0 > \bar{r}$ функция монотонно убывает, при $r_0 < \bar{r} - \frac{3\alpha^2}{4\beta^2}$ - монотонно возрастает, а при r_0 , находящимся в промежутке между указанными значениями, функция имеет горб: сначала возрастает, а затем убывает, приближаясь к \bar{R} . Отметим, что реально наблюдаемые кривые процентных ставок могут иметь и другое поведение, в частности, иметь горб вниз, что в модели Васичека невозможно.

3.2.2 Модель Халла-Уайта

Модель Халла-Уайта является обобщением модели Васичека. В этой модели предполагается, что процесс процентной ставки удовлетворяет уравнению

$$dr_t = \alpha dw_t + \beta(\theta(t) - r_t)dt,$$

где θ - это неизвестная, но не случайная, функция. Она подбирается таким образом, чтобы наблюдаемая кривая процентных ставок и кривая, полученная по этой модели, совпадали. Явный вид процесса r_t задается формулой

$$r_t = r_0 e^{-\beta t} + \beta \int_0^t \theta(s) e^{-\beta(t-s)} ds + \alpha \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dw_s.$$

Для определения функции $\theta(t)$ воспользуемся равенством

$$e^{-\int_0^t f(s)ds} = \mathbf{E} e^{-\int_0^t r_s ds},$$

из которого следует, что

$$\int_0^t f(s)ds = \mathbf{E} \int_0^t r_s ds - 0.5 \mathbf{D} \int_0^t r_s ds. \quad (3.16)$$

Обозначим

$$g(t) = 0.5 \mathbf{D} \int_0^t r_s ds = \frac{\alpha^2}{2t\beta^2} \left[t - 2 \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} + \frac{1 - e^{-2\beta t}}{2\beta} \right].$$

Продифференцировав дважды выражение (3.16), получим:

$$f'(t) = -\beta f(t) + \beta \theta(t) - \beta g'(t) - g''(t).$$

Откуда следует, что

$$\theta(t) = f(t) + \frac{1}{\beta} f'(t) + g'(t) + \frac{1}{\beta} g''(t). \quad (3.17)$$

Формула (3.17) указывает на принципиальную возможность для данной модели воспроизвести кривую процентных ставок. Для целей практического применения данной модели Халлом и Уайтом была предложена дискретная схема вычисления распределений процесса r_t . Сначала заменим параметр θ на другой, более удобный в данной схеме. Определим процесс x_t через уравнение $dx_t = \alpha dw_t - \beta x_t dt$ и положим $\alpha_t = r_t - x_t$. Нетрудно видеть, что процесс γ_t удовлетворяет уравнению $d\gamma_t = a[\theta(t) - \gamma_t]dt$ и значит γ_t не является случайным процессом, а детерминированной функцией $\gamma(t)$, связанной с функцией $\theta(t)$ обыкновенным дифференциальным уравнением $\gamma'(t) = \beta[\theta(t) - \gamma(t)]$.

Рассмотрим дискретную сетку с шагом Δt по времени и шагом δ по пространственной переменной. Соотношение между шагом по времени и шагом по пространству выберем из следующих соображений. Как известно, $\mathbf{E}(\alpha \Delta w_t)^2 = \alpha^2 \Delta t$, $\mathbf{E}(\alpha \Delta w_t)^4 = 3\alpha^4 (\Delta t)^2$. Если мы приближаем случайную величину $\alpha \Delta w_t$ случайной величиной, принимающей значения $-\delta, 0, \delta$ с вероятностями p, q, p , то 2-ой и 4-ый моменты у этой величины будут равны $2\delta^2 p$ и $2p\delta^4$. Приравнивая соответствующие моменты, получим соотношение $\delta = \sqrt{3\Delta t \alpha}$.

Будем считать, что задана однородная марковская цепь x_m , которая из состояния $j\delta$ может перейти в состояния $(j-1)\delta, j\delta, (j+1)\delta$ с вероятностями p_d, p_m и p_u соответственно. Вероятности перехода определим также из соображений аппроксимации моментов:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Delta x_m | x_m = j\delta) &= -\beta j \delta \Delta t = (p_u - p_d)\delta, \\ \mathbf{E}((\Delta x_m)^2 | x_m = j\delta) &= \alpha^2 \Delta t + (\beta j \delta \Delta t)^2 = (p_u + p_d)\delta^2. \end{aligned}$$

Добавляя условие нормировки, получаем систему уравнений для нахождения переходных вероятностей. Однако условие неотрицательности вероятностей выполняется только для ограниченного количества узлов j . Это связано с тем, что процесс x_t имеет снос к нулю тем больший, чем дальше от нуля находятся значения процесса. Для того, чтобы преодолеть эту сложность, Халл и Уайт предложили для далеких от нуля узлов использовать схему, в которой возможен переход только в узлы, расположенные ближе к нулю. Так, например, при больших j возможен только переход из узла j в узлы с номерами $j, j-1, j-2$. При этом система уравнений изменится следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\Delta x_m | x_m = j\delta) &= -\beta j \delta \Delta t = (2p_d + p_m)\delta, \\ \mathbf{E}((\Delta x_m)^2 | x_m = j\delta) &= \alpha^2 \Delta t + (\beta j \delta \Delta t)^2 = (4p_d + p_m)\delta^2.\end{aligned}$$

Эта система также имеет положительное решение только для ограниченного количества узлов. Однако можно указать такие значения j , при которых и первая и вторая системы имеют положительные решения, например, j можно положить равным $j_{max} = \lfloor \frac{0.184}{\alpha \Delta t} \rfloor$ (см.[7]). Аналогичную систему можно написать и для $j_{min} = -j_{max}$. Если для j , таких что $|j| < j_{max}$ применять первую схему, а в узлах j_{max}, j_{min} - граничные схемы, то максимальное значение, которое может принять марковская цепь x_m , равно $j_{max}\delta$. Итак, на каждом шаге m мы можем вычислить вероятности перехода $p_{x,y}^{(m)}$ цепи x_m из состояния x в состояние y . Выведем формулу для последовательности α_m , которая является приближением функции $\alpha(t)$. Цена облигации с погашением на m -ом шаге имеет вид:

$$P^{(m)} = \sum_{x_1, \dots, x_m} p_{x_0, x_1}^{(1)} \dots p_{x_{m-1}, x_m}^{(m)} e^{-(r_0 + \dots + r_{m-1})\Delta t} = \sum_{x_m} \Lambda_{x_m}^{(m)}.$$

Воспользуемся тем, что $r_m = x_m + \alpha_m$

$$\begin{aligned}P^{(m+1)} &= \sum_{x_{m+1}} \Lambda_{x_{m+1}}^{(m+1)} = \sum_{x_m, x_{m+1}} \Lambda_{x_m}^{(m)} p_{x_m, x_{m+1}}^{(m+1)} e^{-r_m \Delta t} \\ &= e^{-\gamma_m \Delta t} \sum_{x_m} \Lambda_{x_m}^{(m)} e^{-\Delta t x_m}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу для γ_m :

$$\gamma_m = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\sum x_m \Lambda_{x_m}^{(m)} e^{-\Delta t x_m}}{P^{(m+1)}}.$$

3.2.3 Модель Хита-Джарроу-Мортон

В модели Халла-Уайта функция θ считалась детерминированной (также как цены облигаций, форвардные процентные ставки и т.д.) Это предположение оправдано, если момент наблюдений фиксирован, но при переходе к другому моменту времени мы будем иметь дело уже с другими ценами облигаций и значит с другой функцией θ .

Модель НЖМ описывает динамику цен облигаций, как диффузионного процесса, зависящего от параметра T . Одним из следствий такой модели является то, что, в отличие от предыдущих моделей, процесс текущей процентной ставки r_t , вообще говоря, не является диффузионным процессом, коэффициент сноса для этого процесса зависит от предшествующей траектории.

Предположим, что цены облигаций удовлетворяют уравнению

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dw_t.$$

Эта модель похожа на модель цены акции, но в отличие от цен акций, коэффициент сноса в данной модели не может быть произвольным. Поскольку в среднем цена облигация растет на величину r_t , то для любого T $\mu(t, T) = r_t$. Кроме того, предположим, что $\sigma(t, T)$ - \mathcal{F}_t измеримый процесс и при любом t является гладкой по T функцией. Применим формулу Ито для процесса $\ln P(t, T)$:

$$\begin{aligned} d \ln P(t, T) &= \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} - \frac{P^2(t, T)\sigma^2(t, T)}{2P^2(t, T)}dt \\ &= (r_t - 0.5\sigma^2(t, T))dt + \sigma(t, T)dw_t. \end{aligned}$$

Рассмотрим данное уравнение при различных значениях T_1 и T_2 параметра T и вычтем одно из другого. Выразив $P(t, T)$ через $f(t, T)$,

получим

$$-\int_{T_1}^{T_2} df(t, s)ds = -\frac{1}{2}[\sigma^2(t, T_2) - \sigma^2(t, T_1)]dt + (\sigma(t, T_2) - \sigma(t, T_1))dw_t.$$

Разделив на $T_2 - T_1$ и перейдя к пределу при $T_1, T_2 \rightarrow T$, получим, что $f(t, T)$ удовлетворяет уравнению

$$df(t, T) = \sigma'_T(t, T)\sigma(t, T)dt - \sigma'_T(t, T)dw_t.$$

Проинтегрируем данное уравнение от 0 до T :

$$f(T, T) - f(0, T) = \int_0^T \sigma'_T(t, T)\sigma(t, T)dt - \int_0^T \sigma'_T(t, T)dw_t.$$

Отсюда получаем явное выражение для процесса r_t :

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t \sigma'_t(\tau, t)\sigma(\tau, t)d\tau - \int_0^t \sigma'_t(\tau, t)dw_\tau.$$

3.3 Моделирование диффузионных процессов.

Данный параграф следует, в основном, работе [15]. Предположим, что нам надо промоделировать диффузионный процесс вида

$$dx_s = a(x_s)dw_s + b(x_s)ds, \quad 0 \leq s \leq T. \quad (3.18)$$

Будем предполагать, что функции $a(x)$ и $b(x)$ являются глобально Липшицевыми:

$$|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq C|x - y|. \quad (3.19)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$|a(x)| + |b(x)| \leq C(1 + |x|). \quad (3.20)$$

Известно [10], что в этом случае существует единственное решение уравнения (3.18). Докажем некоторые свойства x_t . Сначала покажем, что для некоторой константы C при $t \leq T$

$$\mathbf{E}_x x_t^{2m} \leq C(x^{2m} + 1). \quad (3.21)$$

Мы получим эту оценку как следствие более общего утверждения.

Лемма 3.1 Пусть процесс x_t имеет представление,

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_s dw_s + \int_0^t b_s ds,$$

где процессы a_t и b_t удовлетворяют неравенствам

$$|a_t|, |b_t| \leq C(\sup_{s \leq t} |x_s| + 1),$$

тогда выполнено (3.21).

Доказательство. Применяя формулу Ито к процессу x_t^m , получим

$$x_s^m = x_0^m + \int_0^s a_m(u) dw_u + \int_0^s b_m(u) du, \quad (3.22)$$

причем $|a_m(u)|, |b_m(u)| \leq C(\rho_u^m + 1)$, где $\rho_u = \sup_{s \leq u} |x_s|$. Возводя (3.22) в квадрат и беря супремум, получим оценку

$$\rho_t^{2m} \leq 3 \left[x_0^{2m} + \sup_{s \leq t} \left(\int_0^s a_m(u) dw_u \right)^2 + \sup_{s \leq t} \left(\int_0^s b_m(u) du \right)^2 \right] \quad (3.23)$$

Введем момент $\tau = \tau_N = \sup\{t \leq T : |\tilde{x}_t| \leq N\}$. Подставляя в (3.23) $t \wedge \tau$ вместо t и беря математическое ожидание, получим

$$\mathbf{E}_x \rho_{\tau \wedge t}^{2m} \leq 3 \left[x^{2m} + \mathbf{E}_x \sup_{s \leq t} \left(\int_0^{\tau \wedge s} a_m(u) dw_u \right)^2 + \mathbf{E}_x \left(\sup_{s \leq t} \int_0^{\tau \wedge s} b_m(u) du \right)^2 \right].$$

Второе слагаемое в правой части оценим, используя неравенство для мартингалов (см., например, [3]):

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq T} M_t^2 \leq 4 \mathbf{E} M_T^2, \quad (3.24)$$

где M_t - квадратично-интегрируемый мартингал с непрерывными справа траекториями. Это дает нам оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \sup_{s \leq t} \left(\int_0^{\tau \wedge s} a_m(u) dw_u \right)^2 &\leq 4 \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\tau \wedge t} a_m(u) dw_u \right)^2 \\ &= 4 \mathbf{E}_x \int_0^{\tau \wedge t} a_m^2(u) du \leq C \left(1 + \int_0^t \mathbf{E}_x \rho_u^{2m} du \right). \end{aligned}$$

В третьем слагаемом воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\left(\int_0^{\tau \wedge s} b_m(u) du \right)^2 \leq T \int_0^t b_m^2(u) du \leq C \left(1 + \int_0^t \rho_u^{2m} du \right).$$

Обозначим $y^{(N)}(t) = \mathbf{E}_x \rho_{t \wedge \tau_N}^{2m}$, тогда

$$y^{(N)}(t) \leq C(x^{2m} + 1) + C \int_0^t y^{(N)}(u) du.$$

Поскольку $y^{(N)}(t)$ - ограниченная функция, то итерируя данное неравенство, мы получим сходящийся ряд

$$y^{(N)}(t) \leq C(x^{2m} + 1) \sum_k^{\infty} \frac{1}{k!} (Ct)^k.$$

Заметим, что константа C в данном неравенстве зависит от функций a и b , но не зависит от N и, поэтому, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим утверждение леммы.

Несложно показать, что при $s, t \leq T$ имеет место также следующая оценка

$$\mathbf{E}(x_t - x_s)^2 \leq C|t - s|. \quad (3.25)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_t - x_s)^2 &= \mathbf{E} \left[\int_s^t a(x_u) dw_u \right]^2 + \int_s^t b(x_u) du \\ &\leq 2\mathbf{E} \left[\int_s^t a^2(x_u) dw_u \right]^2 + 2\mathbf{E} \left[\int_s^t b(x_u) du \right]^2 \\ &\leq 2 \int_s^t \mathbf{E} a^2(x_u) du + 2(t - s) \int_s^t \mathbf{E} b^2(x_u) du. \end{aligned}$$

В силу неравенств (3.20) и (3.21) математические ожидания $\mathbf{E}a^2(x_u)$ и $\mathbf{E}b^2(x_u)$ конечны и мы получаем оценку (3.25).

3.3.1 Оценка погрешности

Разделим отрезок $[0, T]$ на n отрезков длиной $\Delta = T/n$, обозначим $t_k = k\Delta$.

Метод Эйлера. Определим процесс

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_{t_k} + a(\tilde{x}_{t_k})(w_t - w_{t_k}) + b(\tilde{x}_{t_k})(t - t_k). \quad (3.26)$$

Теорема 3.4 *При перечисленных выше условиях имеет место оценка*

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |x_t - \tilde{x}_t|^2 \leq C/n.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству следующей, более сложной теоремы, поэтому мы его опускаем.

Метод более высокого порядка точности. Предположим дополнительно, что $a(x)$ и $b(x)$ дифференцируемые функции и определим процесс \tilde{x}_t следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t &= \tilde{x}_{t_k} + a(\tilde{x}_{t_k})(w_t - w_{t_k}) + b(\tilde{x}_{t_k})(t - t_k) \\ &+ \frac{1}{2}a'(\tilde{x}_{t_k})a(\tilde{x}_{t_k})[(w_t - w_{t_k})^2 - (t - t_k)] \\ &+ b'(\tilde{x}_{t_k})a(\tilde{x}_{t_k})(w_t - w_{t_k})(t - t_k). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Теорема 3.5 *Предположим, что функции $a(x)$ и $b(x)$ дважды дифференцируемы и $|a'(x)| \leq C$, $|b'(x)| \leq C$, $|a''(x)a(x)| \leq C$, $|b''(x)a(x)| \leq C$, тогда*

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} (\tilde{x}_t - x_t)^2 \leq C/n^2.$$

Доказательство. Используя формулу Ито для процесса \tilde{x}_t , найдем что на промежутке $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ процесс удовлетворяет уравнению:

$$d\tilde{x}_t = \tilde{a}_t dw_t + \tilde{b}_t dt, \quad (3.28)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{a}_t &= \tilde{a}(\tilde{x}_{t_k}, w_t) = a(\tilde{x}_{t_k}) + a'(\tilde{x}_{t_k})a(\tilde{x}_{t_k})(w_t - w_{t_k}) + b'(\tilde{x}_{t_k})a(\tilde{x}_{t_k})(t - t_k), \\ \tilde{b}_t &= \tilde{b}(\tilde{x}_{t_k}, w_t) = b(\tilde{x}_{t_k}) + b'(\tilde{x}_{t_k})a(\tilde{x}_{t_k})(w_t - w_{t_k}). \end{aligned}$$

Обозначим $\varepsilon_t = x_t - \tilde{x}_t$. Процесс ε_t удовлетворяет уравнению

$$d\varepsilon_t = a_\varepsilon(t)dw_t + b_\varepsilon(t)dt, \quad (3.29)$$

где коэффициенты $a_\varepsilon(t)$ и $b_\varepsilon(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(t) &= a(x_t) - \tilde{a}(\tilde{x}_{t_k}, w_t), \\ b_\varepsilon(t) &= b(x_t) - \tilde{b}(\tilde{x}_{t_k}, w_t). \end{aligned}$$

Оценим математические ожидания $\mathbf{E}a_\varepsilon^2(t)$ и $\mathbf{E}b_\varepsilon^2(t)$. Представим $a_\varepsilon(t)$ в виде

$$a_\varepsilon(t) = [a(x_t) - \tilde{a}(x_{t_k}, w_t)] + [\tilde{a}(x_{t_k}, w_t) - \tilde{a}(\tilde{x}_{t_k}, w_t)] = a_1(t) + a_2(t),$$

тогда $\mathbf{E}a_\varepsilon^2(t) \leq 2\mathbf{E}a_1^2(t) + 2\mathbf{E}a_2^2(t)$. Процесс $a_1(t)$ имеет следующий стохастический дифференциал

$$\begin{aligned} da_1(t) &= [a'(x_t)a(x_t) - a'(x_{t_k})a(x_{t_k})]dw_t \\ &+ [a'(x_t)b(x_t) + 0.5a''(x_t)a^2(x_t) - b'(x_{t_k})a(x_{t_k})]dt \\ &= a_{11}(t)dw_t + a_{12}(t)dt. \end{aligned}$$

Поскольку $a_1(t_k) = 0$, мы получаем для $\mathbf{E}a_1^2(t)$ оценку

$$\mathbf{E}a_1^2(t) \leq 2 \int_{t_k}^t \mathbf{E}a_{11}^2(u)du + 2\Delta \int_{t_k}^t \mathbf{E}a_{12}^2(u)du.$$

Обозначим $\mu(x) = a'(x)a(x)$. Эта функция имеет ограниченную производную, поэтому

$$|a_{11}(u)| = |\mu(x_u) - \mu(x_{t_k})| \leq C|x_u - x_{t_k}|.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{E}a_{11}^2(u) \leq C\mathbf{E}(x_u - x_{t_k})^2 \leq C|u - t_k|$. В силу условий теоремы $a_{12}^2(u) \leq C(1 + x_u^2)$ и, значит $\mathbf{E}a_{12}^2(u) \leq C$. Таким образом, $\mathbf{E}a_1^2(t) \leq C\Delta^2$.

Оценим теперь $\mathbf{E}a_2(t)$. Функция $\lambda(x) = b'(x)a(x)$ также имеет ограниченную производную. Поскольку

$$a_2(t) = a(x_{t_k}) - a(\tilde{x}_{t_k}) + (\mu(x_{t_k}) - \mu(\tilde{x}_{t_k}))(w_t - w_{t_k}) + (\lambda(x_{t_k}) - \lambda(\tilde{x}_{t_k}))(t - t_k),$$

то имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{E}a_2^2(t) &\leq C (\mathbf{E}[a(x_{t_k}) - a(\tilde{x}_{t_k})]^2 + \mathbf{E}[\mu(x_{t_k}) - \mu(\tilde{x}_{t_k})]^2(t - t_k) \\ &\quad + \mathbf{E}[\lambda(x_{t_k}) - \lambda(\tilde{x}_{t_k})]^2(t - t_k)^2) \leq C\mathbf{E}\varepsilon^2(t_k). \end{aligned}$$

Окончательно имеем оценку для $\mathbf{E}a_\varepsilon^2(t)$:

$$\mathbf{E}a_\varepsilon^2(t) \leq C(\Delta^2 + \mathbf{E}\varepsilon^2(t_k)) \quad (3.30)$$

Повторяя практически дословно предыдущие рассуждения, получим аналогичную оценку

$$\mathbf{E}b_\varepsilon^2(t) \leq C(\Delta^2 + \mathbf{E}\varepsilon^2(t_k)). \quad (3.31)$$

Проинтегрируем выражение (3.29):

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t_k} + \int_{t_k}^t a_\varepsilon(s)dw_s + \int_{t_k}^t b_\varepsilon(s)ds = \varepsilon_{t_k} + A + B.$$

Возведя в квадрат и взяв математическое ожидание, получим

$$\mathbf{E}\varepsilon_t^2 = \mathbf{E}\varepsilon_{t_k}^2 + \mathbf{E}A^2 + \mathbf{E}B^2 + 2\mathbf{E}\varepsilon_{t_k}A + 2\mathbf{E}\varepsilon_{t_k}B + 2\mathbf{E}AB.$$

Для оценки $\mathbf{E}A^2$ и $\mathbf{E}B^2$, воспользуемся неравенствами (3.30) и (3.31):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}A^2 &\leq \int_{t_k}^t \mathbf{E}a_\varepsilon^2(s)ds \leq \Delta C(\Delta^2 + \mathbf{E}\varepsilon^2(t_k)) = C\Delta^3 + C\Delta\mathbf{E}\varepsilon^2(t_k), \\ \mathbf{E}B^2 &\leq \Delta \int_{t_k}^t \mathbf{E}b_\varepsilon^2(s)ds \leq \Delta^2 C(\Delta^2 + \mathbf{E}\varepsilon^2(t_k)) = C\Delta^4 + C\Delta^2\mathbf{E}\varepsilon^2(t_k). \end{aligned}$$

Далее, $\mathbf{E}AB \leq \mathbf{E}A^2 + \mathbf{E}B^2 \leq C[\Delta^3 + \Delta\mathbf{E}\varepsilon^2(t_k)]$. Из свойств стохастического интеграла следует, что $\mathbf{E}\varepsilon_{t_k}A = \mathbf{E}\varepsilon_{t_k}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{t_k}}A = 0$. Оценим теперь $\mathbf{E}\varepsilon_{t_k}B$. Обозначим

$$B_1 = \int_{t_k}^t (b(x_u) - \tilde{b}(x_{t_k}, w_u))du, \quad B_2 = \int_{t_k}^t (\tilde{b}(x_{t_k}, w_u) - \tilde{b}(\tilde{x}_{t_k}, w_u))du.$$

Заметим, что

$$|\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{t_k}} B_2| = |b(x_{t_k}) - b(\tilde{x}_{t_k})|(t - t_k) \leq C\Delta|\varepsilon_{t_k}|,$$

значит, $|\mathbf{E}_{\varepsilon_{t_k}} B_2| \leq C\Delta\mathbf{E}\varepsilon_{t_k}^2$. Остается оценить $\mathbf{E}_{\varepsilon_{t_k}} B_1$.

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{t_k}} B_1| &= \left| \int_{t_k}^t \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{t_k}} [b(x_s) - b(x_{t_k})] ds \right| \\ &\leq \int_{t_k}^t ds \int_{t_k}^s du \mathbf{E}_{t_k, x_{t_k}} |b'(x_u)a(x_u) + 0.5 b''(x_u)a^2(x_u)| \\ &\leq C\Delta^2(|x_{t_k}| + 1). \end{aligned}$$

Мы воспользовались условиями теоремы и неравенством (3.21).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varepsilon_{t_k}} B_1 &\leq C\Delta^2 \mathbf{E}^{1/2} \varepsilon_{t_k}^2 \mathbf{E}^{1/2} (1 + |x_{t_k}|)^2 \leq C(\Delta^3)^{1/2} (\Delta\mathbf{E}\varepsilon_{t_k}^2)^{1/2} \\ &\leq C(\Delta^3 + \Delta\mathbf{E}\varepsilon_{t_k}^2). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем оценку $\mathbf{E}\varepsilon_t^2 \leq (1+C\Delta)\mathbf{E}\varepsilon_{t_k}^2 + C\Delta^3$, откуда следует, что

$$\mathbf{E}\varepsilon_t^2 \leq C\Delta^2. \quad (3.32)$$

Применяя это неравенство (3.24), а также оценки (3.30), (3.31) и (3.32), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \varepsilon_t^2 &\leq 2\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t a_\varepsilon(s) dw_s \right)^2 + 2\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t b_\varepsilon(s) ds \right)^2 \\ &\leq 8 \int_0^T \mathbf{E} a_\varepsilon^2(s) ds + 2T \int_0^T \mathbf{E} b_\varepsilon^2(s) ds \leq C(\Delta^2 + \max_k \mathbf{E}\varepsilon(t_k)) \leq C\Delta^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3.3.2 Погрешность при вычислении функционалов.

Функционал вида $u(T, x) = \mathbf{E}_x f(x_T)$ мы оцениваем некоторой случайной величиной \hat{u}_n , такой что $\mathbf{E}\hat{u}_n = \mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T^{(n)})$. Здесь добавлен индекс

n в обозначение процесса \tilde{x} , чтобы подчеркнуть зависимость процесса от n . Погрешность оценки состоит из двух частей - систематической и стохастической:

$$\mathbf{E}(\hat{u}_n - u(T, x))^2 = \left(\mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T^{(n)}) - u(T, x) \right)^2 + \mathbf{E}(\hat{u}_n - \mathbf{E}\hat{u}_n)^2.$$

Вторым слагаемым мы займемся в следующем параграфе, а сейчас рассмотрим первое слагаемое. Поскольку для схем (3.26) и (3.27) результат получается тот же, рассмотрим более простую схему (3.26).

Обозначим $v(t, x) = u(T - t, x)$ и введем оператор $\mathcal{L}(y)$:

$$\mathcal{L}(y)v(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2}a^2(y)\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} + b(y)\frac{\partial v(t, x)}{\partial x},$$

в котором y рассматривается как параметр. Функция $v(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}(x)v(t, x) = 0, \quad (3.33)$$

поэтому $\mathcal{L}(y)v(t, x)$ можно представить в виде

$$\mathcal{L}(y)v(t, x) = \frac{1}{2}[a^2(y) - a^2(x)]\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} + [b(y) - b(x)]\frac{\partial v(t, x)}{\partial x}.$$

Выражение $\mathcal{L}^2(y)v(t, x)$ может быть записано в виде

$$\mathcal{L}^2(y)v(t, x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^i v(t, x)}{\partial x^i} \sum_j \alpha_{ij}(y)\beta_{ij}(x),$$

где функции α_{ij} и β_{ij} могут быть представлена в виде полиномов от a и b и их производных до порядка 2 включительно; например, при $i = 4$

$$\sum_j \alpha_{ij}(y)\beta_{ij}(x) = \frac{1}{4}a^4(y) - \frac{1}{2}a^2(y)a^2(x) + \frac{1}{4}a^4(x).$$

Лемма 3.2 Пусть $\varphi(t, x)$ удовлетворяет уравнению (3.4) и пусть все функции a, b, c, f, h - имеют производные по x порядка n , причем все производные функций a, b, c - ограничены, функция c также ограничена, функции f и $h(t, \cdot)$ и их производные имеют полиномиальный рост по x (h - равномерно по $t \leq T$):

$$|f^{(k)}(x)|, |\partial^k h(t, x)/\partial x^k| \leq C_1(1 + x^{2m_1}), \quad k \leq n,$$

тогда функция φ и ее производные по x также имеют полиномиальный рост: $|\partial^k \varphi(t, x)/\partial x^k| \leq C_2(1 + x^{2m_2})$, при $t \leq T, k \leq n$.

Доказательство. Применяя лемму 3.1 к (3.5), получим, что φ имеет полиномиальный рост по x . Формальное дифференцирование уравнения (3.4) приводит к уравнению (относительно $\tilde{\varphi} = \partial\varphi/\partial x$)

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2}a^2(x)\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \tilde{b}(x)\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} + \tilde{c}(x)\tilde{\varphi} + \tilde{h}(t, x),$$

и начальному условию $\tilde{\varphi}(x) = f'(x)$, где $\tilde{b}(x) = b(x) + a(x)a'(x)$, $\tilde{c}(x) = b'(x) + c(x)$, $\tilde{h}(t, x) = h'(t, x) + c'(x)\varphi(t, x)$. В силу наложенных условий, это уравнение имеет решение $\tilde{\varphi}$ (см. [14], с.237). Кроме того, \tilde{c} - ограничена, \tilde{f} и \tilde{h} имеют полиномиальный рост по x , следовательно, еще раз применяя лемму 3.1, получаем, что $\tilde{\varphi}$ также имеет полиномиальный рост по x равномерно по $t \leq T$. Нетрудно убедиться, что $\tilde{\varphi}(t, x_0) + \int_{x_0}^x \tilde{\varphi}(t, y)dy$, является решением уравнения (3.4), т.е. $\tilde{\varphi}$ действительно является производной от φ . Действуя по индукции, получаем утверждение леммы.

Теорема 3.6 Пусть коэффициенты a, b имеют ограниченные производные до порядка 4 включительно, функция f - имеет производные 4-го порядка с полиномиальным ростом, тогда

$$|\mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T^{(n)}) - \mathbf{E}_x f(x_T)| \leq C/n. \quad (3.34)$$

Доказательство. Систематическая погрешность может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T) - \mathbf{E}_x f(x_T) &= \mathbf{E}_x v(T, \tilde{x}_T) - v(0, x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}_x (v(t_{k+1}, \tilde{x}_{t_{k+1}}) - v(t_k, \tilde{x}_{t_k})) . \end{aligned}$$

Дважды применяя формулу Ито и учитывая (3.33), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x [v(t_{k+1}, \tilde{x}_{t_{k+1}}) - v(t_k, \tilde{x}_{t_k})] &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \mathbf{E}_x \mathcal{L}(\tilde{x}_{t_k}) v(t, \tilde{x}_t) \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \mathbf{E}_x [\mathcal{L}(\tilde{x}_{t_k}) v(t, \tilde{x}_t) - \mathcal{L}(\tilde{x}_{t_k}) v(t_k, \tilde{x}_{t_k})] \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \int_{t_k}^t ds \mathbf{E}_x \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_k}) v(s, \tilde{x}_s) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Далее,

$$\mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_k}) v(s, \tilde{x}_s) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^i v(t, \tilde{x}_s)}{\partial x^i} \sum_j \alpha_{ij}(\tilde{x}_{t_k}) \beta_{ij}(\tilde{x}_s).$$

Функции, α_{ij} и β_{ij} имеют полиномиальный рост. Согласно лемме 3.2, производные $\partial^i v / \partial x^i$ также имеют полиномиальный рост. Применяя лемму 3.1 к процессу \tilde{x}_t , получим, что для некоторых C и m

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_k}) v(s, \tilde{x}_s) &= \sum_{i=1}^4 \sum_j \mathbf{E}_x \alpha_{ij}(\tilde{x}_{t_k}) \mathbf{E}_{\tilde{x}_{t_k}} \beta_{ij}(\tilde{x}_s) \frac{\partial^i v(s, \tilde{x}_s)}{\partial x^i} \\ &\leq C \mathbf{E}_x (\tilde{x}_{t_k}^{2m} + 1) \leq C(x^{2m} + 1). \end{aligned}$$

Подставляя данную оценку в равенство (3.35), получим утверждение теоремы.

Теорема 3.7 Пусть коэффициенты a и b имеют ограниченные производные до порядка 8 включительно, функция f - имеет производные

8-го порядка с полиномиальным ростом, тогда существует величина Ψ , такая что

$$\mathbf{E}_x f(\tilde{x}_T^{(n)}) = u(T, x) + \frac{1}{n} \Psi + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (3.36)$$

Доказательство. Положим $\psi(t, x) = \mathcal{L}^2(x)v(t, x)$ и преобразуем выражение $\mathbf{E}_x \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_k})v(s, \tilde{x}_s)$ к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_k})v(s, \tilde{x}_s) &= \mathbf{E}_x [\mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_k})v(s, \tilde{x}_s) - \mathcal{L}^2(\tilde{x}_{t_k})v(t_k, \tilde{x}_{t_k})] \\ &+ \mathbf{E}_x [\psi(t_k, \tilde{x}_{t_k}) - \psi(t_k, x_{t_k})] \\ &+ \mathbf{E}_x \psi(t_k, x_{t_k}). \end{aligned}$$

Покажем, что первые два слагаемые имеют порядок $1/n$, тогда подставляя их в (3.35), получим величины порядка $1/n^2$. Первое слагаемое равно

$$\int_{t_k}^s \mathbf{E}_x \mathcal{L}^3(\tilde{x}_{t_k})v(t, \tilde{x}_t) dt$$

и для доказательства конечности математического ожидания под знаком интеграла можно применить те же рассуждения, что и в предыдущей теореме. Функция ψ вместе со своими производными до 4-го порядка имеет полиномиальный рост и поэтому по предыдущей теореме второе слагаемое не превосходит C/n . Подставляя третье слагаемое в (3.35), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \psi(t_k, x_{t_k})(t_{k+1} - t_k)^2/2 &= \frac{T}{2n} \mathbf{E}_x \psi(t_k, x_{t_k})(t_{k+1} - t_k) = \\ &= \frac{T}{2n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \mathbf{E}_x \psi(t, x_t) - \frac{T}{2n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt [\mathbf{E}_x \psi(t, x_t) - \mathbf{E}_x \psi(t_k, x_{t_k})] \end{aligned}$$

В последнем выражении первое слагаемое определяет вид константы Ψ из (3.34):

$$\Psi = \frac{T}{2} \int_0^T dt \mathbf{E}_x \psi(t, x_t).$$

Во втором слагаемом применим формулу Ито, тогда оно примет вид

$$\frac{T}{2n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \int_{t_k}^t ds \mathbf{E}_x \mathcal{L}(x_s) \psi(s, x_s).$$

Поскольку

$$\psi(t, x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^i v(t, x)}{\partial x^i} \sum_j \alpha_{ij}(x) \beta_{ij}(x),$$

то применение к ψ оператора \mathcal{L} приведет к функции полиномиального роста, а, значит, $\mathbf{E}_x \mathcal{L}(x_s) \psi(s, x_s) < C$. Теорема доказана.

Следствие. Отметим, что Ψ зависит, вообще говоря, от x и T , но существенно то, что Ψ не зависит от n . Это обстоятельство позволяет построить оценку с систематической погрешностью на порядок меньше, чем у исходной оценки, а именно оценка

$$\widehat{z}_n = 2\widehat{u}_{2n} - \widehat{u}_n,$$

имеет погрешность порядка n^{-2} , в то время как у оценки \widehat{u}_n порядок погрешности всего лишь n^{-1} .

3.3.3 Оценки с минимальной дисперсией

Как правило, платежная функция зависит от ряда параметров (цена исполнения K , уровень барьера H и т.д.), причем интерес для вычислений представляет не один конкретный опцион, а целый набор опционов. При этом важно уметь вычислять эти опционы таким образом, чтобы суммарная дисперсия была бы мала. Рассмотрим эту задачу для диффузионного процесса.

Пусть процесс x_t имеет стохастический дифференциал

$$dx_t = a_t dw_t + b_t dt.$$

Предположим $f_\theta(x(\cdot))$ - функционалы на траекториях процесса x_t , θ - некоторый параметр, который принимает значения из некоторого множества Θ ; будем предполагать, что $\mathbf{E} f_\theta^2 \leq C$.

Построим оценки метода **существенной выборки** для $C_\theta = \mathbf{E}f_\theta$. Рассмотрим с.в.

$$\rho_T = \exp \left(\int_0^T \zeta_t dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \zeta_t^2 dt \right),$$

где ζ_t удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1. Мы можем определить вероятностную меру $\tilde{\mathbf{P}}$: $d\tilde{\mathbf{P}} = \rho_T d\mathbf{P}$; через $\tilde{\mathbf{E}}$ обозначим ожидание по мере $\tilde{\mathbf{P}}$. Отметим, что процесс $\tilde{w}_t = w_t - \int_0^t \zeta_s ds$ является винеровским относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}$, а стохастический дифференциал процесса x_t может быть выражен в виде

$$dx_t = a_t d\tilde{w}_t + (b_t + a_t \zeta_t) dt.$$

Рассмотрим оценки вида $\tilde{C}_\theta = f_\theta / \rho$. Очевидно, что $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{C}_\theta = C_\theta$. Пусть на Θ задана вероятностная мера $Q(d\theta)$, которая определяет вес дисперсии в точке θ . Рассмотрим задачу минимизации по ζ взвешенной дисперсии

$$\int_{\Theta} \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{C}_\theta - C_\theta)^2 Q(d\theta)$$

Очевидно, что задача сводится к минимизации взвешенного второго момента $\int_{\Theta} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{C}_\theta^2 Q(d\theta)$. Обозначим $\tilde{G} = (\int_{\Theta} f_\theta^2 Q(dk))^{1/2}$, тогда

$$\int_{\Theta} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{C}_\theta^2 Q(d\theta) = \tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{G} / \rho \right)^2. \quad (3.37)$$

Рассмотрим мартингал $\tilde{\mu}_t = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \tilde{G}$. Поскольку выполнены условия теоремы 2.1, то существует процесс $\tilde{\alpha}_t$, такой что

$$\tilde{\mu}_t = \tilde{\mu}_0 + \int_0^t \tilde{\alpha}_s dw_s, \quad \mathbf{E} \int_0^T \tilde{\alpha}_t^2(\omega) dt < \infty.$$

Положим $\tilde{\zeta}_t = \tilde{\alpha}_t / \tilde{\mu}_t$, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_T &= \exp \left(\int_0^T \tilde{b}_t dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \tilde{b}_t^2 dt \right) = \exp \left(\int_0^T \frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t} dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t} \right)^2 dt \right) \\ &= \exp \left(\int_0^T d \ln \tilde{\mu}_t \right) = \tilde{\mu}_T / \tilde{\mu}_0. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что согласно формуле Ито

$$d \ln \tilde{\mu}_t = \frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t} dw_t - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\alpha}_t^2}{\tilde{\mu}_t^2} dt.$$

Поскольку $\tilde{\mu}_T = \tilde{G}$, получаем $\tilde{\mathbf{E}} \left(\hat{G}/\tilde{\rho} \right)^2 = \tilde{\mu}_0^2$. С другой стороны, для любого процесса ζ_t

$$\tilde{\mathbf{E}} \left(\tilde{G}/\rho \right)^2 \geq \left(\tilde{\mathbf{E}} \tilde{G}/\rho \right)^2 = \tilde{\mu}_0^2.$$

Рассмотрим теперь **выделение главной части**. В этом случае мы рассматриваем оценки вида

$$\bar{C}_\theta = f_\theta + \int_0^T z_s dw_s,$$

где z_s - процесс, такой, что $\mathbf{E} \int_0^T z_s^2 ds < \infty$. Очевидно, что \bar{C}_θ - несмещенная оценка для C_θ : $\mathbf{E} \bar{C}_\theta = C_\theta$; задача состоит в том, чтобы найти процесс z_t , минимизирующий $\int_\Theta \mathbf{E} \bar{C}_\theta^2 Q(d\theta)$. Положим $\bar{G} = \int_\Theta f_\theta Q(d\theta)$, тогда

$$\begin{aligned} \int_\Theta \mathbf{E} \bar{C}_\theta^2 Q(d\theta) &= \mathbf{E} \bar{G}^2 + 2\mathbf{E} \bar{G} \int_0^T z_s dw_s + \mathbf{E} \int_0^T z_s^2 ds \\ &= \mathbf{E} \bar{G}^2 - \mathbf{E} \bar{G}^2 + \mathbf{E} \left(\bar{G} + \int_0^T z_s dW_s \right)^2. \end{aligned}$$

Обозначим $\bar{\mu}_t = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_t} \bar{G}$. Опять используя теорему 2.1, получаем, что существует процесс $\bar{\alpha}_t$, такой, что

$$\bar{\mu}_t = \bar{\mu}_0 + \int_0^t \bar{\alpha}_s dw_s, \quad \mathbf{E} \int_0^T \bar{\alpha}_t^2(\omega) dt < \infty.$$

Если положить $z_t = -\bar{\alpha}_t$, то

$$\mathbf{E} \left(\bar{G} + \int_0^T z_s dw_s \right)^2 = \mathbf{E} \left(\bar{G} - \int_0^T \bar{\alpha}_s dw_s \right)^2 = \mathbf{E}(\bar{G} + \mu_0 - \mu_T) = \mu_0^2.$$

Замечание. Если мера Q сосредоточена в одной точке, то минимальная дисперсия в этом случае равна нулю, как в случае существенной выборки, так и в случае выделения главной части.

Рассмотрим пример применения указанных оценок. Пусть рынок определяется уравнениями

$$dS_t/S_t = \sigma(S_t)dw_t + rdt, \quad dB_t = B_t dt.$$

Рассмотрим опцион с платежной функцией вида

$$f_K = h_K \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right), \quad (3.38)$$

где $h_K(x)$ равно $(x - K)^+$ для опциона покупки и равно $(K - x)^+$ для опциона продажи. Опцион такого типа называется азиатским. Цена опциона равна $C_K = \mathbf{E}e^{-rT}f_K$. Функционал \tilde{G} , определенный выше, имеет в данном случае вид $\tilde{G} = e^{-rT}\tilde{H}(Y_T)$, где

$$Y_t = \frac{1}{T} \int_0^t S_u du, \quad \tilde{H}(x) = \left(\int_{\Theta} h_K^2(x) Q(dK) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассматривая (S_t, Y_t) как а двумерный диффузионный процесс, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_t &= \mathbf{E}(\tilde{G}|\mathcal{F}_t) = e^{-rt} \mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)} \tilde{H} \left(Y_t + \frac{1}{T} \int_t^T S_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-rt} \mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)} \tilde{H} \left(Y_t + \frac{1}{T} \int_t^T S_u du \right) \middle| S_t, Y_t \right) = e^{-rt} \tilde{u}(t, S_t, Y_t), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где

$$\tilde{u}(t, x, y) = \mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)} \tilde{H} \left(y + \frac{1}{T} \int_t^T S_u du \right) \middle| S_t = x \right). \quad (3.40)$$

Предположим, что $\tilde{u}(t, x, y)$ достаточно гладкая функция, тогда применяя формулу Ито для $\tilde{u}(t, S_t, Y_t)$, получим представление мартингала $\hat{\mu}_t$ в виде

$$d\tilde{\mu}_t = e^{-rt} \sigma(t, S_t) S_t \tilde{u}'_x(t, S_t, Y_t) dw_t. \quad (3.41)$$

Таким образом, мы получили представление для ζ_t :

$$\zeta_t = -\sigma(t, S_t) S_t \frac{\tilde{u}'_x \left(t, S_t, \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \right)}{\tilde{u} \left(t, S_t, \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \right)}.$$

Чтобы использовать эту формулу для вычислений, аппроксимируем функцию \tilde{u} следующим образом: рассмотрим процесс \tilde{S}_t с постоянной волатильностью и постоянной процентной ставкой (т.е. модель Блэка-Шоулса) и заменим $\tilde{H}(x)$ кусочно-линейной аппроксимацией. Это позволяет получить аналитическое выражение для ζ_t .

Выделение главной части. Аналогично предыдущему получаем, что процесс z_t задается выражением

$$z_t = -e^{-rt} \sigma(t, S_t) S_t \bar{u}'_x \left(t, S_t, \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \right),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}(t, x, y) &= \mathbf{E} \left(e^{-r(T-t)} \bar{H} \left(y + \frac{1}{T} \int_t^T S_u du \right) \middle| S_t = x \right), \\ \bar{H}(x) &= \int_{\Theta} h_K(x) Q(dK). \end{aligned}$$

Глава 4

Модели со скачками.

Одним из очевидных недостатков диффузионной модели является то, что траектории процесса цен являются непрерывными, хотя реальные траектории достаточно часто имеют скачки.

4.1 Пуассоновский процесс

Если процесс цен имеет скачки, то возникает некоторая техническая сложность, которую мы рассмотрим на следующем примере.

Пусть процесс B_t , описывающий банковский счет, постоянен, а процесс цен акций равен $S_t = \lambda t - N_t$, где $N_t = N_t^{(\lambda)}$ - пуассоновский процесс интенсивности λ , σ -алгебры \mathcal{F}_t порождены случайными величинами $\{S_u\}_{u \leq t}$. Обычно полагают, что базовый процесс (в нашем случае - процесс цен) непрерывен справа и имеет пределы слева (т.о., N_t - количество скачков до момента t включительно). Это делает σ -алгебру \mathcal{F}_t богаче и, как следствие, моменты скачков в этом случае являются марковскими моментами.

Для прогрессивно-измеримого процесса γ_t интегралы вида $\int_0^t \gamma_u dN_u$ определим потраекторно, рассматривая для каждого ω $N_u(\omega)$ как функцию ограниченной вариации, а область интегрирования включает правый конец интервала $(0, t]$. Таким образом, если обозначить через τ_k -

момент k -го скачка, то

$$\int_0^t \gamma_u dS_u = \int_0^t \gamma_u \lambda du - \sum_{k=1}^{N_t} \gamma_{\tau_k}. \quad (4.1)$$

Цену самофинансируемого портфеля определим обычным образом:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \gamma_u dS_u + \int_0^t \beta_u dB_u.$$

Заметим, что в рассматриваемой модели дисконтированный процесс цен \tilde{S}_t является мартингалом. Поэтому естественно было бы ожидать, что такой рынок является безарбитражным. Однако, если мы предположим, что стратегии могут быть непрерывны справа, то в этом случае можно рассмотреть стратегию $\gamma_t = 1$, если $t < \tau_1$ и $\gamma_t = 0$, если $\tau_1 \leq t$, где τ_1 - момент первого скачка. Очевидно, что стратегия γ_t - \mathcal{F}_t -измерима, и, кроме того, $X_T = \lambda \min(T, \tau)$; таким образом, данный рынок является арбитражным.

Чтобы исключить арбитражность такого рода, введем ограничение на стратегии. Определим σ -алгебру \mathcal{P} на $[0, T] \times \Omega$, как σ -алгебру, порожденную всеми \mathcal{F}_t -согласованными, непрерывными слева процессами; \mathcal{P} называется предсказуемой σ -алгеброй, а процессы, измеримые относительно \mathcal{P} - предсказуемыми процессами. Потребуем, чтобы стратегии были предсказуемыми процессами; кроме того, потребуем, чтобы стратегии были таковы, что X_t является мартингалом. Покажем, что этому условию удовлетворяют, по крайней мере, ограниченные стратегии. В этом случае интегрируемость X_t обеспечена; покажем, что $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} X_t = X_s$.

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s}(X_t - X_s) = \int_s^t \mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \gamma_u \lambda du - \mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \sum_{k=N_s+1}^{N_t} \gamma_{\tau_k}.$$

Поскольку траектория S определяется последовательностью τ_k , то мы можем считать, что γ_t - является функцией от t и τ_k , таких что $\tau_k < t$,

т.е. $\gamma_t = \gamma(\tau_1, \dots, \tau_k; t)$, при $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$, в частности, $\gamma_{\tau_k} = \gamma(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}; \tau_k)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \sum_{k=N_s+1}^{N_t} \gamma_{\tau_k} &= \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_{s < t_1 < \dots < t_n < t} dt_1 \dots dt_n \sum_{k=1}^n \gamma(\tau_1, \dots, \tau_{n_s}, t_1, \dots, t_{k-1}; t_k) \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda^n \int_{s < t_1 < \dots < t_k < t} dt_1 \dots dt_k \gamma(\dots; t_k) \frac{(t - t_k)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_{s < t_1 < \dots < t_k < t} dt_1 \dots dt_k \gamma(\dots; t_k) e^{-\lambda(t_k-s)} \\
&= \lambda \int_s^t dt_k e^{-\lambda(t_k-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{s < t_1 < \dots < t_k} dt_1 \dots dt_{k-1} \gamma(\dots; t_k) \\
&= \int_s^t \mathbf{E}_{\mathcal{F}_s} \gamma_u \lambda du.
\end{aligned}$$

Отметим, что, если бы $\gamma_t = \gamma(\tau_1, \dots, \tau_k; t)$ при $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$, то тогда $\gamma_{\tau_k} = \gamma(\tau_1, \dots, \tau_k; \tau_k)$ и последнее равенство в предыдущих выкладках не имело бы места.

Поскольку X_t - мартингал, то безарбитражность рынка доказывается стандартным образом.

Покажем, что этот рынок полный. Пусть f - некоторая платежная функция. Можно считать, что f является функцией от $\tau_1, \dots, \tau_{N_T}$. Для $k \geq 0$ и $t_1 < \dots < t_k \leq t$ определим функцию

$$C(t_1, \dots, t_k, t) = e^{-\lambda(T-t)} \sum_{n=k}^{\infty} \lambda^{n-k} \int_{t < t_{k+1} < \dots < t_n < T} dt_{k+1} \dots dt_n f(t_1, \dots, t_n).$$

Вычислим производную по t :

$$\frac{\partial C(t_1, \dots, t_k, t)}{\partial t} = \lambda[C(t_1, \dots, t_k, t) - C(t_1, \dots, t_k, t, t)]. \quad (4.2)$$

Положим $\gamma_t = \lambda^{-1} \partial C(\tau_1, \dots, \tau_k, t) / \partial t$, где $k = \max\{i : \tau_i < t\}$, тогда согласно (4.2)

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \gamma_t \lambda dt = C(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}) - C(\tau_1, \dots, \tau_k, \tau_k). \quad (4.3)$$

Из (4.1), (4.3) и равенства $C(\tau_1, \dots, \tau_{N_T}, T) = f(\tau_1, \dots, \tau_{N_T})$ следует, что

$$\int_0^T \gamma_t dS_t = f(\tau_1, \dots, \tau_{N_T}) - C(\emptyset, 0),$$

т.е. стратегия $(C(\emptyset, 0), \{\gamma_t\})$ является хеджем, а рынок - полным.

4.2 Диффузия со скачками

Пусть заданы винеровский процесс w_t , независимый от него пуассоновский процесс N_t и последовательность случайных величин α_i , равномерно распределенных на $[0, 1]$, независимых в совокупности и от процессов w_t , N_t . Положим $\tilde{N}_t = \sum_{i=1}^{N_t} \alpha_i$ и будем считать, что σ -алгебры \mathcal{F}_t порождены процессами \tilde{N}_t , w_t . Можно определить интеграл по процессу \tilde{N}_t аналогично тому, как определялся интеграл по процессу N_t . Однако можно дать более общее определение интеграла - как интеграла по мере в $R_+ \times [0, 1]$, сосредоточенной в точках $\{(\tau_i, \alpha_i)\}$. Положим $J([0, t] \times A) = \sum_{i=1}^N 1_A(\alpha_i)$. Пусть заданы предсказуемые процессы $c_t(\alpha) = c_t(\alpha, \omega)$, являющиеся измеримыми функциями относительно произведения σ -алгебр $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{B}([0, 1]) \times \mathcal{F}_T$ то выражение для интеграла по мере J имеет простой вид:

$$\zeta_t = \int_0^t \int_0^1 c_u(\alpha) J(du, d\alpha) = \sum_{i=1}^{N_t} c_{\tau_i}(\alpha_i).$$

Отметим, что мы рассматриваем достаточно частный случай; общая теория интегрирования по случайным мерам изложена, например, в [4],

[14]. Если задан предсказуемый процесс γ_t , то интеграл $\int_0^t \gamma_u d\zeta_u$ определяется как

$$\int_0^t \gamma_u d\zeta_u = \int_0^t \int_0^1 \gamma_u c_u(\alpha) J(du, d\alpha).$$

Введем еще одну меру $\mu(dt, d\alpha) = J(dt, d\alpha) - \lambda dt d\alpha$. Поскольку для любого множества A

$$\mathbf{E}(J([0, t], A) | \mathcal{F}_s) = J([0, s], A) + \lambda(t - s)\Lambda(A),$$

где Λ - лебегова мера, то процесс $\mu_t(A) = \mu([0, t], A)$ является мартингалом, а сама мера μ называется мартингальной.

Пусть процессы $c_t(\alpha)$ удовлетворяют условию

$$\mathbf{E} \int_0^T dt \int_0^1 d\alpha c^2(t, \alpha) < \infty.$$

Доказывается (см. [14]), что процесс $\zeta_t = \int_0^t \int_0^1 c_u(\alpha) \mu(du, d\alpha)$ на $[0, T]$ является квадратично-интегрируемым мартингалом и

$$\mathbf{E}\zeta_t^2 = \mathbf{E} \int_0^t \lambda du \int_0^1 d\alpha c_u^2(\alpha).$$

Далее пусть заданы прогрессивно-измеримые процессы a_t, b_t , такие, что $\mathbf{E} \int_0^T (|b_t| + a_t^2) dt < \infty$. Мы можем построить процесс

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_u dw_u + \int_0^t b_u du + \int_0^t \int_0^1 c_u(\alpha) J(du, d\alpha).$$

Для краткости предыдущую формулу будем записывать в виде

$$dx_t = a_t dw_t + b_t dt + \int_0^1 c_t(\alpha) J(dt, d\alpha).$$

Отметим, что при $b_t = -\int_0^1 c(t, \alpha) \lambda d\alpha$ процесс z_t является мартингалом; в этом случае

$$\mathbf{E}x_t^2 = x_0^2 + \mathbf{E} \int_0^t du \left(a_u^2 + \lambda \int_0^1 d\alpha c^2(u, \alpha) \right).$$

Для процесса x_t и функции $f(t, x) \in C^{1,2}$ имеет место обобщенная формула Ито ([14], с. 143).

$$\begin{aligned} df(t, x_t) = & \left[\frac{\partial f(t, x_{t-})}{\partial t} + b_t \frac{\partial f(t, x_{t-})}{\partial x} + \frac{1}{2} a_t^2 \frac{\partial^2 f(t, x_{t-})}{\partial x^2} \right] dt \\ & + a_t \frac{\partial f(t, x_{t-})}{\partial x} dw_t + \int_0^1 [f(t, x_{t-} + c(t, \alpha)) - f(t, x_{t-})] J(dt, d\alpha). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Отметим, что последнее слагаемое может быть записано в более наглядном виде - как $f(t, x_t) - f(t, x_{t-})$. Рассмотрим в качестве примера процесс $y_t = e^{x_t}$, тогда

$$dy_t/y_{t-} = (b_t + 0.5a_t^2)dt + a_t dw_t + \int_0^1 [e^{c(t, \alpha)} - 1] J(dt, d\alpha). \quad (4.5)$$

Предположим, что заданы функции $a(t, x)$, $b(t, x)$ и $c(t, x, \alpha)$, тогда мы можем рассмотреть уравнение

$$dx_t = a(t, x_t)dw_t + b(t, x_t)dt + \int_0^1 c(t, x_{t-}, \alpha)J(dt, d\alpha) \quad (4.6)$$

Если входящие в него функции являются глобально липшицевыми по x , то данное уравнение имеет единственное решение ([14], с. 186).

Далее мы построим процесс цен, который представляет из себя диффузию с коэффициентами $\sigma(t, x)$; с интенсивностью $m(t, x)$ ($m(t, x) < \lambda$) в точке (t, x) происходит скачок; относительная величина скачка имеет распределение $F(t, x; dy)$, т.е. в точке (t, x) цена может измениться на величину xy . Чтобы после скачка цена оставалась положительной, будем предполагать, что распределения $F(t, x; dy)$ были сосредоточены на $(-1, \infty)$, кроме того, предположим, что $\int_R y^2 F(t, x; dy) < C$. Поскольку распределения $F(t, x; dy)$ нормированы, то m и F определяются мерами $\nu(t, x; dy) = m(t, x)F(t, x; dy)$. Введем функцию распределения

$$\tilde{F}(t, x; y) = (m(t, x)/\lambda)F(t, x; y) + (1 - m(t, x)/\lambda)1_{R_+}(y).$$

и обозначим $\psi(t, x, \alpha)$ решение уравнения $\tilde{F}(t, x; y) = \alpha$, так что

$$\int_0^1 \psi(t, x, \alpha) \lambda d\alpha = \int_R y \nu(t, x; dy).$$

Из условий на F следует, что $\psi(t, x, \alpha) > -1$.

Рассмотрим уравнение вида

$$dS_t/S_{t-} = \rho(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dw_t + \int_0^1 \psi(t, S_{t-}, \alpha)J(dt, d\alpha). \quad (4.7)$$

При липшицевости и ограниченности коэффициентов данное уравнение имеет единственное решение.

Введем процесс

$$\begin{aligned} x_t &= \ln S_0 + \int_0^t \sigma(u, S_u)dw_u + \int_0^t \left[\rho(u, S_u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u, S_u) \right] du \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \ln(1 + \psi(t, S_{u-}, \alpha))J(du, d\alpha). \end{aligned}$$

Из (4.5) следует, что $y_t = e^{x_t}$ удовлетворяет уравнению (4.7). Таким образом, процесс S_t может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp \left(\int_0^t \sigma(u, S_u)dw_u + \int_0^t \left[\rho(u, S_u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u, S_u) \right] du \right) \\ &\times \prod_{i=1}^{N_t} (1 + \psi(\tau_i, S_{\tau_i-}, \alpha_i)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Пусть $B_t = B_0 e^{rt}$; будем считать, что

$$\rho(t, x) = r - \int_0^1 \psi(t, x, \alpha) \lambda d\alpha = r - \int_R y \nu(t, x; dy),$$

тогда дисконтированные цены \tilde{S}_t являются мартингалом и

$$d\tilde{S}_t/\tilde{S}_{t-} = \sigma(t, S_t)dw_t + \int_0^1 \psi(t, S_{t-}, \alpha)\mu(dt, d\alpha). \quad (4.9)$$

Пусть задана платежная функция $f = f(S_T)$. Рассмотрим хеджирование в среднеквадратичном, при котором нужно найти стратегию π , минимизирующую

$$\mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f})^2 \quad (4.10)$$

Положим $C(t, x) = \mathbf{E}(e^{-r(T-t)} f | S_t = x)$; предположим, что эта функция принадлежит $C^{1,2}$. Применим формулу Ито для мартингала

$$\tilde{Y}_t = \mathbf{E}(\tilde{f} | \mathcal{F}_t) = e^{-rt} C(t, S_t) = \tilde{C}(t, S_t),$$

в результате чего получим

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_T &= \tilde{Y}_0 + \int_0^T \frac{\partial C(t, S_{t-})}{\partial x} \tilde{S}_{t-} \sigma(t, S_{t-}) dw_t \\ &+ \int_0^T \int_0^1 [\tilde{C}(t, S_{t-}(1 + \psi(t, S_{t-}, \alpha)) - \tilde{C}(t, S_{t-})] \mu(dt, d\alpha). \end{aligned} \quad (4.11)$$

С другой стороны, пусть γ_t - предсказуемый процесс, тогда дисконтированная цена портфеля равна

$$\begin{aligned} \tilde{X}_T &= X_0 + \int_0^T \gamma_t d\tilde{S}_t \\ &= \int_0^T \gamma_t \tilde{S}_{t-} \sigma(t, S_{t-}) dw_t + \int_0^T \int_0^1 \gamma_t \tilde{S}_{t-} \psi(t, S_{t-}, \alpha) \mu(dt, d\alpha). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Вычитая (4.11) из (4.12) и учитывая, что $\tilde{Y}_T = \tilde{f}$, $Y_0 = \mathbf{E}\tilde{f}$, получаем погрешность хеджирования

$$\begin{aligned} \tilde{X}_T - \tilde{f} &= X_0 - \mathbf{E}\tilde{f} + \int_0^T \left[\gamma_t - \frac{\partial C(S_{t-}, t)}{\partial x} \right] \tilde{S}_{t-} \sigma(t, S_{t-}) dw_t \\ &+ \int_0^T \int_0^1 [\gamma_t \tilde{S}_{t-} \psi(t, S_{t-}, \alpha) - \tilde{C}(t, S_{t-}(1 + \psi(t, S_{t-}, \alpha))) + \\ &\quad + \tilde{C}(t, S_{t-})] \mu(dt, d\alpha). \end{aligned}$$

Возведем в квадрат и возьмем математическое ожидание:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f})^2 &= (X_0 - \mathbf{E}\tilde{f})^2 + \mathbf{E} \int_0^T dt \left[\gamma_t - \frac{\partial C(S_{t-}, t)}{\partial x} \right]^2 \tilde{S}_{t-}^2 \sigma^2(t, S_{t-}) \\ &+ \mathbf{E} \int_0^T dt \int_0^1 [\gamma_t \tilde{S}_t \psi(t, S_{t-}, \alpha) - \tilde{C}(t, S_{t-}(1 + \psi(t, S_{t-}, \alpha))) \\ &\quad + \tilde{C}(S_{t-}, t)]^2 \lambda d\alpha.\end{aligned}$$

Под знаком интеграла находятся положительные функции, которые являются квадратичными многочленами от γ_t . Следовательно, мы можем получить минимум для $\mathbf{E}(\tilde{X}_T - \tilde{f})^2$, если найдем стратегию γ_t , минимизирующую подинтегральное выражение для каждого t . Взяв производную по γ_t , и приравняв ее к нулю, получим уравнение

$$\begin{aligned}&\left[\gamma_t - \frac{\partial C(t, S_{t-})}{\partial x} \right] \sigma^2(t, S_{t-}) \tilde{S}_{t-}^2 \\ &+ \int_{-1}^{\infty} \nu(t, S_{t-}; dy) [\gamma_t \tilde{S}_{t-y} - \tilde{C}(t, S_{t-}(1 + y)) + \tilde{C}(S_{t-}, t)] \tilde{S}_{t-y} = 0.\end{aligned}$$

Отсюда находим выражение для γ_t . Таким образом доказана теорема.

Теорема 4.1 *Оптимальная по среднеквадратичному критерию стратегия имеет вид $X_0 = C(T, S_0)$, $\gamma_t = \Delta(t, S_{t-})$, где*

$$\Delta(t, x) = \frac{\sigma^2(t, x) \frac{\partial C(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{x} \int \nu(t, x; dy) y [C(t, x(1 + y)) - C(t, x)]}{\sigma^2(t, x) + \int \nu(t, x; dy) y^2}.$$

4.3 Уменьшение дисперсии

Рассмотрим процесс x_t , заданный (4.6); аналогично параграфу 3.3.3 построим оценки метода **существенной выборки** для $C_\theta = \mathbf{E}f_\theta(x(\cdot))$. Пусть заданы предсказуемые процессы ζ_t и $\eta_t(\alpha)$, такие, что

$$\eta(t, \alpha) > -1, \quad \zeta_t^2 + \int_0^1 \eta_t^2(\alpha) d\alpha \leq D(t),$$

где $D(t)$ - неслучайная интегрируемая на $[0, T]$ функция. Рассмотрим процесс

$$\begin{aligned} \rho_t = \rho_t(\zeta, \eta) &= \exp \left(\int_0^t \zeta_u dw_u - \int_0^t du \left[0.5 \zeta_u^2 + \int_0^1 \eta_u(\alpha) \lambda d\alpha \right] \right) \times \\ &\times \prod_{i=1}^{N_t} (1 + \eta_{\tau_i}(\alpha_i)). \end{aligned}$$

Этот процесс имеет стохастический дифференциал

$$d\rho_t/\rho_{t-} = \zeta_t dw_t + \int_0^1 \eta(t, \alpha) \mu(dt, d\alpha).$$

При перечисленных выше условиях ρ_T - интегрируемая с.в. и, значит, мартингал. Мы можем определить новую меру $d\tilde{\mathbf{P}} = \rho_T d\mathbf{P}$ и построить оценки $\tilde{C}_\theta = f_\theta/\rho$, которые являются несмещенными: $\tilde{\mathbf{E}}\tilde{C}_\theta = C_\theta$. Наша задача - минимизировать

$$\int_{\Theta} \tilde{\mathbf{E}} \tilde{C}_\theta^2 Q(d\theta) \quad (4.13)$$

по ζ_t и $\eta_t(\alpha)$. Для мартингала $\tilde{\mu}_t$, определенного в параграфе 3.3.3, имеет место представление ([16], стр. 68)

$$\tilde{\mu}_t = \tilde{\mu}_0 + \int_0^t \tilde{\alpha}_u dw_u + \int_0^t \int_0^1 \tilde{\beta}_u(\alpha) \mu(du, d\alpha), \quad (4.14)$$

где $\tilde{\alpha}_t, \tilde{\beta}_u(\alpha)$ - предсказуемые процессы. Покажем, что минимум (4.13) достигается при

$$\zeta_t = \tilde{\zeta}_t = \tilde{\alpha}_t/\tilde{\mu}_t, \quad \eta_t(\alpha) = \tilde{\eta}_t(\alpha) = \tilde{\beta}_t(\alpha)/\tilde{\mu}_{t-}.$$

Действительно,

$$\ln \tilde{\mu}_T = \ln \tilde{\mu}_0 + \int_0^T \frac{\tilde{\alpha}_t}{\tilde{\mu}_t} dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T dt \frac{\tilde{\alpha}_t^2}{\tilde{\mu}_t^2} - \int_0^T \lambda dt \frac{1}{\tilde{\mu}_t} \int_0^1 d\alpha \tilde{\beta}_t(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \int_0^1 [\ln(\mu_{u-} + \tilde{\beta}_u(\alpha)) - \ln(\tilde{\mu}_{u-})] J(du, d\alpha) \\
& = \ln \tilde{\mu}_0 + \int_0^T \tilde{\zeta}_t dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \tilde{\zeta}_t^2 dt - \int_0^T \lambda dt \int_0^1 d\alpha \tilde{\eta}_t(\alpha) \\
& + \int_0^T \ln(1 + \tilde{\eta}_t(\alpha)) J(dt, d\alpha) = \ln \tilde{\mu}_0 + \ln \rho_T(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\rho_T = \tilde{\mu}_T / \tilde{\mu}_0$. Также как в параграфе 3.3.3 отсюда следует оптимальность $\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}$.

Рассмотрим пример. Пусть рынок определяется уравнением (4.9), а опцион - платежной функцией (3.38), тогда для мартингала $\tilde{\mu}_t$ имеет место формула (3.39). Применяя обобщенную формулу Ито, получаем, что в представлении (4.14) процессы $\tilde{\alpha}_t$ и $\tilde{\beta}_t(\alpha)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_t &= e^{-rt} \tilde{u}'_x(t, S_t, Y_t) \sigma(t, S_t) S_t, \\
\tilde{\beta}_t(\alpha) &= e^{-rt} [\tilde{u}(t, S_{t-}(1 + \psi(t, S_{t-}, \alpha)), Y_t) - \tilde{u}(t, S_{t-}, Y_t)].
\end{aligned}$$

Литература

- [1] А. Н. Ширяев, Ю. М. Кабанов, Д. О. Крамков, А. В. Мельников. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. Теория вероятностей и ее применения. Том 39, вып.1, 1994.
- [2] А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. Москва. Фазис. 1998.
- [3] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. Москва. Наука. 1974.
- [4] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. Предельные теоремы для случайных процессов. Москва. Физико-математическая литература. 1994.
- [5] M. Broadie, P. Glasserman. A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options. Journal of Computational Finance. Volume 7 / Number 4, Summer 2004.
- [6] F. Black, M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 1973, Vol.81, No. 3, p. 637-654.
- [7] J. C. Hull. Options, Futures, & Other Derivatives. 4-th Edition. Prentice-Hall. 2000.
- [8] R. Rebonato. Interest-Rate Options Models. Second edition. John Wiley & Sons. Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto. 1998.

- [9] V. Bally, L. Caramellino, A. Zanette. Pricing and hedging American options by Monte Carlo methods using a Malliavin calculus approach. *Journal of Monte Carlo Methods and Applications*, 2005, Vol. 11, No 2, p. 97 – 134.
- [10] А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. Москва. Наука. 1975.
- [11] М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Теория распределений. Москва. Наука. 1966.
- [12] К. Ито, Г. Маккин. Диффузионные процессы и их траектории. Москва. Мир. 1968.
- [13] В. В. Петров. Суммы независимых случайных величин. Москва. Наука. 1972.
- [14] И. И. Гихман, А. В. Скороход. Теория случайных процессов. Т. 3. Москва. Наука. 1975.
- [15] D. Talay. Probabilistic numerical methods for partial differential equations. In: *Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations. Lecture Note in Mathematics*, 1627, pp. 148-196. Springer. Berlin, Heidelberg. 1996.
- [16] Rong Situ. *Theory of stochastic differential equations with jumps and Applications*. Springer Science + Business Media, Inc. 2005.
- [17] П. Ботев. Метод стохастической сетки для вычисления цены многомерных опционов американского типа. В сб. *Методы Монте-Карло в финансовой математике*. стр. 5 - 35, ред. С.М. Ермаков и Ю.Н. Каштанов. Типография НИИХ СПбГУ. 2006.
- [18] A. A. Gormin, Y. N. Kashtanov. The weighted variance minimization for option pricing. *Journal of Monte Carlo Methods and Applications*, Vol. 13, N 5-6, pp. 333 - 351, 2007.

- [19] A. A. Gormin, Y. N. Kashtanov. The weighted variance minimization in jump-diffusion stochastic volatility models. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2008, pp. 383-394. Springer, Berlin, 2009.