

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ  
БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ  
Кафедра теории вероятностей и математической статистики**

**ПОЛУЗЁРОВ Тимофей Дмитриевич**

**ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ  
СРЕДНЕ-ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА ПОРТФЕЛЯ НА  
РЫНКЕ КРИПТОВАЛЮТ**

Магистерская диссертация  
специальность 1-31 80 09 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель  
Харин Алексей Юрьевич  
заведующий кафедрой, доктор  
физико-математических наук,  
профессор

Допущена к защите

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 г.

Зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики

\_\_\_\_\_ А. Ю. Харин

доктор физико-математических наук, профессор

Минск, 2025

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ . . . . .	3
АГУЛЬНАЯ ХАРАКТЫРЫСТЫКА РАБОТЫ . . . . .	4
GENERAL DESCRIPTION OF WORK . . . . .	5
ВВЕДЕНИЕ . . . . .	6
1. ВВЕДЕНИЕ В РЫНОК КРИПТОВАЛЮТ . . . . .	7
2. СРЕДНЕ-ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ПОРТФЕЛЯ . . . .	8
2.1. Основные понятия . . . . .	8
2.2. Сведение к процентным ставкам . . . . .	9
2.3. Диверсификация портфеля . . . . .	11
3. ПРОВЕРКА СТРАТЕГИЙ НА РЫНОЧНЫХ ДАННЫХ . .	14
3.1. Подготовка данных . . . . .	14
3.2. Оценка ожидаемой доходности . . . . .	14
3.3. Оценка ковариации доходностей . . . . .	14
3.4. Множество оптимальных портфелей . . . . .	14
3.5. Проверка стратегий на исторических данных . . . . .	14
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	15
ПРИЛОЖЕНИЕ А . . . . .	16

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Ключевые слова:** кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g

## **Задачи исследования:**

1. пункт 1
2. пункт 2

**Цель работы:** тут цель

**Объект исследования** является

**Предмет исследования** является

**Методы исследования:** методы методы

**Результаты работы**

**Области применения**

## АГУЛЬНАЯ ХАРАКТЕРЫСТИКА РАБОТЫ

[illegible]

## Мэта работы: тут цель

## Задачи исследования:

1. пункт 1
2. пункт 2

**Аб'ектам даследавання** являється

# Метады даследавання метады метады

## Вынікі работы

## Вобласть ўжывання

## GENERAL DESCRIPTION OF WORK

**Keywords:** кейвордс det ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс det ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс det ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс det ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс det ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс det ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g

**The object:** тут цель

**The objective:**

1. item one
2. item two

**Research methods:** методы методы

**The results**

**Application**

# ВВЕДЕНИЕ

Тут введение будет

# 1. ВВЕДЕНИЕ В РЫНОК КРИПТОВАЛЮТ

## 2. СРЕДНЕ-ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ПОРТФЕЛЯ

### 2.1. Основные понятия

Будем рассматривать одношаговую задачу инвестирования.

Пусть инвестор имеет возможность разместить свой начальный капитал  $x$  по акциям  $A_1, \dots, A_N$ , стоимость которых в момент  $n = 0$  равна соответственно  $S_0(A_1), \dots, S_0(A_N)$

Пусть  $X_0(b) = b_1 S_0(A_1) + \dots + b_N S_0(A_N)$ , где  $b_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Иначе говоря, пусть

$$b = (b_1, \dots, b_N) \quad (2.1)$$

есть портфель ценных бумаг, где  $b_i$  – число акций  $A_i$  стоимостью  $S_0(A_i)$ .

Будем предполагать, что эволюция каждой акции  $A_i$  определяется тем, что её цена  $S_1(A_i)$  в момент  $n = 1$  подчиняется разностному уравнению

$$\Delta S_1(A_i) = \rho(A_i) S_0(A_i) \quad (2.2)$$

или, что равносильно,

$$S_1(A_i) = (1 + \rho(A_i)) S_0(A_i) \quad (2.3)$$

где  $\rho(A_i)$  – случайная процентная ставка акции  $A_i$ ,  $\rho(A_i) > -1$ .

Если инвестор выбрал портфель  $b = (b_1, \dots, b_N)$ , то его начальный капитал  $X_0(b) = x$  превратится в

$$X_1(b) = b_1 S_1(A_1) + \dots + b_N S_1(A_N), \quad (2.4)$$

и эту величину желательно сделать «побольше». Это желание, однако, должно рассматриваться с учетом «риска», связанного с получением «большого» дохода.

С этой целью Г. Марковитц рассматривает две характеристики капитала



$X_1(B)$ :

$$\mathbb{E}[X_1(b)] \quad (2.5)$$

– математическое ожидание и

$$\mathbb{D}[X_1(b)] \quad (2.6)$$

– дисперсию.

Имея эти две характеристики, можно по-разному формулировать оптимизационную задачу выбора наилучшего портфеля в зависимости от критерия оптимальности.

Можно, например, задаться вопросом о том, на каком портфеле  $b^*$  достигается максимум некоторой целевой функции  $f = f(\mathbb{E}[X_1(b)], \mathbb{D}[X_1(b)])$  при «бюджетном ограничении» на класс допустимых портфелей:

$$B(x) = \{b = (b_1, \dots, b_N) : b_i \geq 0, X_0(b) = x\}, x > 0 \quad (2.7)$$

Естественна и следующая вариационная постановка: найти

$$\inf \mathbb{D}[X_1(b)] \quad (2.8)$$

в предположении, что  $\inf$  берется по тем портфелям  $b$ , для которых выполнены ограничения

$$b \in B(x), \quad (2.9)$$

$$\mathbb{E}[X_1(b)] = m, \quad (2.10)$$

где  $m$  – некоторая константа.

## 2.2. Сведение к процентным ставкам

Покажем теперь, что в одношаговой задаче оптимизации портфеля ценных бумаг можно вместо величин  $(s_1(A_1), \dots, S_1(A_N))$  работать непосред-

ственно с процентными ставками  $(\rho(A_1), \dots, \rho(A_N))$ , подразумевая под этим следующее.

Пусть  $b \in B(X)$ , т.е.  $x = b_1 S_0(A_1) + \dots + b_N S_0(A_N)$ . Введем величины  $d = (d_1, \dots, d_N)$ , полагая

$$d_i = \frac{b_i S_0(A_i)}{x} \quad (2.11)$$

Поскольку  $b \in B(X)$ , получаем, что  $d_i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^N d_i = 1$ . Представим капитал  $X_1(B)$  в виде

$$X_1(b) = (1 + R(b))X_0(b), \quad (2.12)$$

и пусть

$$\rho(d) = d_1 \rho(A_1) + \dots + d_N \rho(A_N). \quad (2.13)$$

Ясно, что

$$R(b) = \frac{X_1(b)}{X_0(b)} - 1 = \frac{X_1(b)}{x} - 1 = \quad (2.14)$$

$$\frac{\sum b_i S_1(A_i)}{x} - 1 = \sum d_i \frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1 = \quad (2.15)$$

$$\sum d_i \left( \frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1 \right) = \sum d_i \rho(A_i) = \rho(d) \quad (2.16)$$

Итак,

$$R(b) = \rho(d), \quad (2.17)$$

откуда следует, что если  $d = (d_1, \dots, d_N)$  и  $b = (b_1, \dots, b_N)$  связаны соотношениями  $d_i = \frac{b_i S_0(A_i)}{x}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , то для  $b \in B(x)$  выполняется равенство

$$X_1(b) = x(1 + \rho(d)), \quad (2.18)$$

и, следовательно, с точки зрения оптимизационных задач для  $X_1(b)$  можно оперировать с соответствующими задачами для  $\rho(d)$ .

## 2.3. Диверсификация портфеля

Обратимся теперь к вопросу о том, как диверсификацией можно добиться сколь угодно малого (несистематического) риска, измеряемого дисперсией или стандартным отклонением величин  $X_1(b)$ .

С этой целью рассмотрим для начала пару случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$  с конечными вторыми моментами. Тогда если  $c_1$  и  $c_2$  — константы,  $\sigma_i = \sqrt{\mathbb{D}[\xi_i]}$ ,  $i = 1, 2$ , то

$$\mathbb{D}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = (c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2)^2 + 2c_1c_2\sigma_1\sigma_2(1 + \sigma_{12}), \quad (2.19)$$

где  $\sigma_{12} = \frac{\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1\sigma_2}$ ,  $\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}[\xi_1\xi_2] - \mathbb{E}[\xi_1] \cdot \mathbb{E}[\xi_2]$ . Отсюда ясно, что если  $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$  и  $\sigma_{12} = -1$ , то  $\mathbb{D}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = 0$ . Таким образом, если величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  отрицательно коррелированы с коэффициентом корреляции  $\sigma_{12} = -1$ , то таким подбором констант  $c_1$  и  $c_2$ , что  $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$ , получаем комбинацию  $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$  с нулевой дисперсией. Но, конечно, при этом среднее значение  $\mathbb{E}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2]$  может оказаться достаточно малым. (Случай  $c_1 = c_2 = 0$  для задачи оптимизации не интересен в силу условия  $b \in B(X)$ ).

Из этих элементарных рассуждений ясно, что при заданных ограничениях на  $(c_1, c_2)$  и класс величин  $(\xi_1, \xi_2)$  при решении задачи о том, чтобы сделать  $\mathbb{E}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2]$  «побольше», а  $\mathbb{D}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2]$  «поменьше», надо стремиться к выбору таких пар  $(\xi_1, \xi_2)$ , для которых их ковариация была бы как можно ближе к минус единице.

Изложенный эффект отрицательной коррелированности, называемый эффектом Марковитца, является одной из основных идей диверсификации при инвестировании — при составлении портфеля ценных бумаг надо стремиться к тому, чтобы вложения делались в бумаги, среди которых по возможности много отрицательно коррелированных.

Другая идея, лежащая в основе диверсификации, основана на следующем соображении.

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_N$  — последовательность некоррелированных случайных величин с дисперсиями  $\mathbb{D}[\xi_i] \leq C$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где  $C$  — некоторая константа.

Тогда

$$\mathbb{D}[d_1\xi_1 + \dots + d_N\xi_N] = \sum_{i=1}^N d_i^2 \mathbb{D}[\xi_i] \leq C \sum_{i=1}^N d_i^2. \quad (2.20)$$

Поэтому, взяв, например,  $d_i = \frac{1}{N}$ , находим, что

$$\mathbb{D}[d_1\xi_1 + \dots + d_N\xi_N] \leq \frac{C}{N} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

Этот эффект некоррелированности говорит о том, что если инвестирование производится в некоррелированные ценные бумаги, то для уменьшения риска, т. е. дисперсии  $\mathbb{D}[d_1\xi_1 + \dots + d_N\xi_N]$ , надо по возможности брать их число  $N$  как можно большим.

Вернемся к вопросу о дисперсии  $\mathbb{D}[\rho(d)]$  величины

$$\rho(d) = d_1\rho(A_1) + \dots + d_N\rho(A_N). \quad (2.22)$$

Имеем

$$\mathbb{D}[\rho(d)] = \sum_{i=1}^N d_i^2 \mathbb{D}[\rho(A_i)] + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N d_i d_j \mathbf{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)). \quad (2.23)$$

Возьмем здесь  $d_i = \frac{1}{N}$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^N d_i^2 \mathbb{D}[\rho(A_i)] = \left(\frac{1}{N}\right) \cdot N \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{D}[\rho(a_i)] = \frac{1}{N} \cdot \bar{\sigma}_N^2, \quad (2.24)$$

где  $\bar{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{D}[\rho(A_i)]$  — средняя дисперсия. Далее,

$$\sum_{i,j=1, i \neq j}^N d_i d_j \mathbf{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 N(N-1) \overline{\mathbf{Cov}}_N, \quad (2.25)$$

где  $\overline{\mathbf{Cov}}_N$  есть средняя ковариация

$$\overline{\mathbf{Cov}}_N = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \mathbf{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)). \quad (2.26)$$

Таким образом,

$$\mathbb{D}[\rho(d)] = \frac{1}{N}\bar{\sigma}_N^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\overline{\mathbf{Cov}}_N, \quad (2.27)$$

и ясно, что если  $\bar{\sigma}_N^2 \leq C$  и  $\overline{\mathbf{Cov}}_N \rightarrow \overline{\mathbf{Cov}}$  при  $N \rightarrow \infty$ , то

$$\mathbb{D}[\rho(d)] \rightarrow \overline{\mathbf{Cov}}, N \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Из этой формулы мы видим, что если  $\overline{\mathbf{Cov}}$  равна нулю, то диверсификацией с достаточно большим  $N$  риск инвестирования, т.е.  $\mathbb{D}[\rho(d)]$ , может быть сделан сколь угодно малым. К сожалению, если рассматривать, скажем, рынок акций, то на нем, как правило, имеется положительная корреляция в ценах (они движутся довольно-таки согласованно в одном направлении), что приводит к тому, что  $\overline{\mathbf{Cov}}_N$  не стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Предельное значение  $\overline{\mathbf{Cov}}$  и есть тот систематический, иначе — рыночный — риск, который присущ рассматриваемому рынку и диверсификацией не может быть редуцирован. Первый же член в формуле !!! определяет несистематический риск, который может быть редуцирован, как мы видели, выбором большого числа акций.

## **3. ПРОВЕРКА СТРАТЕГИЙ НА РЫНОЧНЫХ ДАННЫХ**

### **3.1. Подготовка данных**

Выгрузим цены закрытия дневных свечей.

### **3.2. Оценка ожидаемой доходности**

Рассмотрим несколько подходов к оценке доходности.

1. На основании исторических данных — предполагается эргодичность?
2. Прогнозирование временных рядов
3. Последнее значение — предположение мартингалльности

### **3.3. Оценка ковариации доходностей**

Оценим ковариации по историческим данным

### **3.4. Множество оптимальных портфелей**

Для каждого способа оценки доходностей построим фронтину оптимальных портфелей

### **3.5. Проверка стратегий на исторических данных**

Используя кросс-проверку протестируем стратегии

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

## ПРИЛОЖЕНИЕ А