ГЛАВА.1

Определение цен в условиях равновесия.

Раздел 1.1
Введение

В современных финансах существуют два основных подхода к определению цен ценных бумаг: безарбитражный и равновесный. Безарбитражный подход будет рассмотрен в главе 2. Настоящая глава посвящена краткому описанию обоих подходов и обсуждению их различия.

Безарбитражный подход широко используется в оценивании производных ценных бумаг. Он основан на принципе отсутствия арбитража, который постулирует, что на хорошо функционирующих финансовых рынках, две ценные бумаги, которые имеют одинаковые выплаты должны продаваться по одинаковой цене. Это означает, что если мы можем сформировать выплаты ценной бумаги, используя ценные бумаги, которыми торгуют на рынке, то мы можем определить цену этой бумаги в терминах ценных бумаг, имеющихся на рынке. Например, в однопериодной модели, выплаты от колл опциона могут быть заменены портфелем, состоящим из лежащего в основе актива и безрисковой облигации. Инвестору должно быть безразлично, иметь ли на руках колл опцион или соответствующий портфель, так как оба обеспечивают одинаковые выплаты в конце периода. Следовательно, цена колла должна равняться цене портфеля, чтобы избежать арбитража. Этот пример проливает свет на безарбитражное оценивание. Чтобы применить этот подход, необходимо заменить выплаты имеющимися рыночными ценными бумагами.

Существуют ситуации, в которых безарбитражный подход не может быть применен. Одним из примеров может служить введение новой ценной бумаги, которая не может быть оценена через ценные бумаги, имеющиеся на рынке. В этой ситуации мы не можем использовать безарбитражный подход. Однако мы можем применить равновесный подход.

Равновесный подход обеспечивает более широкие возможности для анализа рынков и определения цен ценных бумаг. Он связывает цены с более фундаментальными экономическими концепциями в том смысле, что он проясняет происхождение цен. Следовательно, чтобы применить этот подход мы должны рассмотреть более широкую структуру, чем при арбитражном подходе, который рассматривает цены как данные.

При однопериодной равновесной модели мы предполагаем, что множество лиц (экономических агентов) торгуют ценными бумагами. Характеристики этих ценных бумаг фиксированы вначале. Каждый агент имеет начальные ресурсы или *капитал*. Мы предполагаем, что существует финансовый рынок, где агенты покупают и продают ценные бумаги. Агенты максимизируют свой капитал путем торговли доступными ценными бумагами. Равновесные цены возникают в результате оптимальных действий всех агентов на рынке. Равновесие достигается тогда, когда цены становятся такими, что ожидаемая полезность каждого агента является максимальной. При установившемся равновесии цены являются такими, что ни один агент не имеет намерений торговать по этим ценам.

Равновесные цены имеют отношение к таким атрибутам агентов в экономике, как капиталы, ожидания, предпочтения, а также к типу и структуре продаваемых ценных бумаг. Если изменяется один из атрибутов, то это, вообще говоря, приводит к изменению равновесных цен. Если рынок находится в равновесии, то интуитивно мы понимаем, что не должно быть арбитражных возможностей. Если множество цен допускает арбитраж, то агенты способны улучшить свое положение за нулевую стоимость. Это противоречит тому, что при равновесии полезности агентов уже максимизированы. Следовательно, оба подхода приводят к состоятельному ценообразованию.

Равновесный подход играет важную роль в современных финансах. Ряд основных моделей ценообразования может быть получено с использованием этого подхода. В частности, модель оценивания активов и формула Блэка-Шоулса для оценивания опционов получены с использованием этого подхода. Равновесный подход (в случае непрерывного времени) также обеспечивает основу для вывода модели Кокса-Ингерсолла-Росса - одной из наиболее известных моделей процентных ставок.

Мы начнем с рассмотрения гипотезы ожидаемой полезности. Это удобный способ для моделирования процесса принятия решения в условиях неопределенности. Мы будем использовать ее при разработке равновесного подхода. В разделе 3 будет рассматриваться однопериодная модель финансовых рынков. Мы покажем, как равновесные цены на ценные бумаги зависят от характеристик лежащей в основе экономики, и, что цена бумаги может быть выражена как дисконтированное математическое ожидание ее выплат по специальной вероятностной мере. Это формула такого же типа, как и формула, возникающая при безарбитражном подходе, при котором эта специальная мера называется риск нейтральной мерой. В этом случае цена также может быть записана как математическое ожидание. Но существуют два важных различия между этими формулами.

В равновесном случае, действительная выплата корректируется с помощью рискового фактора, и математическое ожидание берется по вероятностной мере не совпадающей с мерой для безарбитражного подхода. Эта вероятностная мера соответствует реальным вероятностям. Важно понимать различие между двумя вероятностными мерами при моделировании будущих доходностей активов и оценивании ценных бумаг. Мы обсудим эти отличия в конце раздела 1.3.

В разделе 1.4 мы покажем, как можно упростить вычисление равновесных цен. При определенных условиях мы можем соединить характеристики каждого агента в одного представительного агента. Мы выведем после этого равновесные цены в терминах атрибутов этого представительного агента и используем метод представительного агента для вывода двух финансовых моделей: модели оценивания активов (раздел 1.5) и формулы Блэка-Шоулса (раздел 1.6). В разделе 2.3 мы обсудим многопериодную модель.

Раздел 1.2
Принятие решений в условиях неопределенности: Гипотеза ожидаемой полезности

Участникам рынка часто приходится делать выбор в условиях неопределенности. Для наших целей мы предположим, что предпочтения агентов для каждого исхода могут быть измерены с помощью функции полезности. В рассматриваемой модели мы будем предполагать, что экономические агенты действуют таким образом, чтобы максимизировать ожидаемое значение функции полезности. При этом агенты вычисляют среднее значение, используя их собственные субъективные вероятностные оценки для будущих исходов. Подход с точки зрения ожидаемой полезности является общим подходом к моделированию принятия решения индивидуумами в условиях неопределенности. Однако существуют и другие подходы. Данный подход дает нам возможность моделировать как агенты производят инвестиции и выбор страхования, а также исследовать к чему приводят их решения.

В этом разделе вводятся функции полезности и обсуждаются некоторые применения. Мы предполагаем, что агенты предпочитают больший капитал меньшему, и что они пытаются избегать риска (т.е.

являются нерасположенными к риску). Эти атрибуты можно отразить в математических свойствах функции полезности индивидуальных агентов. Свойство не расположенности к риску также имеет последствия для индивидуального выбора инвестиций. Интуитивная догадка состоит в том, что чем более нерасположенным к риску является инвестор, тем большую долю он будет инвестировать в менее рискованные активы. Подход с точки зрения ожидаемой полезности также проясняет ключевые мотивы при покупке страховок. Лицо, которое является нерасположенным к риску, пожелает заплатить за страховое прикрытие больше, чем ожидаемая величина потерь. Мы проиллюстрируем эти применения на примерах.

Вначале мы рассмотрим однопериодную модель с дискретным временем, в которой исход в конце периода является неопределенным. Период начинается в моме6нт времени 0 и заканчивается в момент. Лицо принимающее решение интересуется капиталом в момент 1 и максимизирует ожидаемую полезность в этот момент.

Мы предположим, что функция полезности $u(x)$, где x выражает сумму капитала агента, является возрастающей и выпуклой вверх, т.е. $u'(x) > 0$ и $u''(x) \le 0$. Лицо, функция полезности которого является выпуклой вверх называется нерасположенным к риску. Наиболее часто используются две меры не расположенности к риску, которые получаются из функции полезности: функция абсолютной не расположенности к риску, $R_A(x)$, и функция относительной не расположенности к риску, $R_R(x)$,

$$R_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad R_R(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)} , \qquad (1.2.1)$$

где x означает сумму капитала агента. Эти меры содержат полезную информацию об отношении лица принимающего решение к риску.

Простой пример, рассматриваемый ниже, иллюстрирует как подход с помощью ожидаемой полезности используется для моделирования принятия решения.

Пример 1.2.1. Предположим, что лицо принимающее решение имеет в момент времени 0 капитал в размере w единиц. Допустим, что имеются только две ценные бумаги: безрисковая ценная бумага стоимостью 1 и доходностью i, и рисковая ценная бумага с такой же стоимостью. Предположим, что для рисковой ценной бумаги возможны два исхода в момент 1. Либо ее доходность равна i_u, либо - i_d. Будем полагать, что лицо принимающее решение считает, что доходность i_u будет иметь место с вероятностью p, и доходность i_d - с вероятностью $(1-p)$. Пусть $u(x)$- функция полезности лица принимающего решение. Мы можем сравнить теперь привлекательность альтернативных инвестиционных стратегий. Если агент инвестирует весь капитал только в безрисковый актив, то полезность будет равна $u(w(1+i))$. Если лицо принимающее решение инвестирует исключительно в рисковый актив, то ожидаемая полезность будет равна

$$pu(w(1+i_u)) + (1-p)u(w(1+i_d)) .$$

Сравнивая ожидаемые полезности, мы видим, что инвестиция в рисковый актив будет предпочтительней, если

$$pu(w(1+i_u)) + (1-p)u(w(1+i_d)) > u(w(1+i)) .$$

Гипотеза ожидаемой полезности может быть использована для упорядочения этих двух инвестиционных альтернатив. Заметим, что ни одна из рассмотренных альтернатив может не быть лучшей. Может оказаться, что лучше будет инвестировать часть в безрисковый актив, а оставшуюся часть - в рисковый. Как мы увидим позже, подход с точки зрения ожидаемой полезности может быть использован для нахождения оптимальной инвестиционной стратегии при решении проблем для портфеля возможных активов.

Подход с точки зрения ожидаемой полезности также может быть использован при моделировании решений о приобретении того или иного вида страховки. Мы можем получить уравнение для максимальной цены, которую лицо согласилось бы заплатить за страховое прикрытие. Предположим, что совокупный начальный капитал инвестора равен w , и что этот капитал подвергается случайным потерям Y на протяжении периода, где $0 \le Y < w$. Пусть страховка гарантирует полное возмещение этих потерь. Цена страховки равна π, и она уплачивается в момент 0.Мы пренебрегаем временной стоимостью денег, и сосредоточимся на страховых аспектах проблемы. В случае, если лицо решило купить страховку, то ожидаема яполезность его капитала равна $E[u(w-Y\}]$. Заметим, что это математическое ожидание вычисляется с использованием субъективных вероятностей инвестора. Если он решает купить страховку, то его капитал в момент 1 не является случайной величиной, а равен $w-\pi$, так как страховщик полностью компенсирует инвестору любые потери. В этом случае полезность в момент 1 равна $u(w-\pi)$. Инвестор будет принимать решение о покупке страховки до тех пор, пока

$$u(w-\pi) > E[u(w-Y)] \ . \qquad (1.2.2)$$

Также он всегда будет готов заплатить за страховку больше, чем ожидаемые потери $E[Y]$.Это вытекает из неравенства Йенсена. В соответствии с неравенством Йенсена $u(w-E[Y]) \geq E[u(w-Y)]$. Это означает, что лицо, избегающее риска, пожелает заплатить больше, чем ожидаемое значение потерь. Вообще говоря, чем больше лицо не расположено к риску, тем большую цену оно захочет заплатить.
Мы можем получить интуитивное соотношение между размером этой разности (цены и ожидаемого значения) и не расположенностью лица к риску, если мы предположим, что риск "мал" в том смысле, что центральные моменты третьего порядка и выше пренебрежимо малы в сравнении с дисперсией.

Теорема 1.2.1. *Пусть для случайной величины Y с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 с центральные моменты $\mu_3, \mu_4, ...$ пренебрежимо малы в сравнении с дисперсией. Максимальная цена, которую нерасположенное к риску лицо пожелает заплатить, чтобы избежать возможных случайных потерь Y, приблизительно равна*

$$\pi = \mu + \frac{\sigma^2}{2} R_A(w-\mu) \qquad (1.2.3)$$

Доказательство. Цена удовлетворяет соотношению

$$u(w-\pi) = E[u(w-Y)].$$

Запишем Y в виде $Y = \mu + zV$, где V случайная величина с $E[V] = 0$. Тогда цена удовлетворяет соотношению

$$u(w-\pi) = E[u(w-\mu-zV] \qquad (1.2.4)$$

и является функцией z. Рассмотрим разложение цены в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$:

$$\pi = a + bz + cz^2 + ... \ .$$

Полагая в (1.2.4) $z=0$, мы имеем, что $a=\mu$. Дифференцируя (1.2.4) один , и полагая $z=0$ получаем, что $b=0$. Дифференцируя дважды, мы получаем, положив $z=0$, что

$$c=\frac{1}{2}R_A(w-\mu)Var(V).$$

Отбрасывая члены выше третьего порядка, мы получаем

$$\pi \approx \mu+\frac{1}{2}R_A(w-\mu)\cdot Var(V)\cdot z^2 = \mu+\frac{1}{2}R_A(w-\mu)\cdot Var(Y)=\mu+\frac{\sigma^2}{2}R_A(w-\mu).$$

Формула (1.2.3) интуитивно ясна. Из нее ясно, что для малых рисков, максимальный взнос при страховании пропорционален произведению дисперсии риска и абсолютной не расположенности к риску. В экономической литературе величина $\pi-\mu$ иногда называется взносом за риск (рисковой премией). Формула (1.2.3) показывает, что для малых рисков, взнос за риск пропорционален произведению дисперсии распределения потерь и абсолютной не расположенности лица к риску. Лица с большей антипатией к риску пожелают заплатить большие страховые взносы по сравнению с теми, чей уровень антипатии к риску меньше. Также из формулы (1.2.3) следует, что больший риск потерь (в смысле увеличения дисперсии) увеличивает взнос за риск.
Теперь мы рассмотрим наиболее часто используемые функции полезности. Удобно характеризовать эти функции с точки зрения их не расположенности к риску.

Пример 1.2.2. (Квадратичная полезность). Одна из простейших функций полезности является квадратичной:

$$u(x)=x-\frac{x^2}{2b}, \text{ для } x<b,$$
$$u'(x)=1-\frac{x}{b},$$
$$u''(x)=-\frac{1}{b}, \tag{1.2.5}$$

Мы требуем, чтобы полезность была положительной. Это накладывает ограничения на область изменения параметра b. Для квадратичной полезности абсолютная не расположенность к риску равна

$R_A = \frac{1}{b-x}$, для $x < b$,

и является возрастающей функцией x для $x < b$. Это означает, что квадратичные функции полезности отражают возрастающую не расположенность к риску. Квадратичные функции допускают понятную интерпретацию. Действительно, лицо принимающее решение заботится только о первых двух моментах доходности ценной бумаги (среднем значении и дисперсии). Мы увидим в главе 3, что это предположение имеет отношение к подходу Марковица к выбору оптимального портфеля на основе подхода “ риск-доходность”. С другой стороны, Квадратичные функции полезности имеют ряд недостатков. Во-первых, мы видели. Что область изменения аргумента, на которой функция возрастает, является ограниченной. Во-вторых, возрастание не расположенности к риску представляется нежелательным свойством. В самом деле, если агент может разместить капитал в рисковый и безрисковый активы, то весьма сомнительно, что при увеличении суммы капитала, он будет помещать меньшую сумму в рисковый актив. Поэтому возрастание абсолютной не расположенности к риску представляется не разумным свойством.

Пример 1.2.3. (Экспоненциальная полезность). Экспоненциальная функция полезности интенсивно используется как в финансах, так и в страховании. Для $x > 0$

$$\begin{aligned} &u(x) = 1 - e^{-ax}, \quad a > 0, \\ &u'(x) = ae^{-ax}, \\ &u''(x) = -a^2 e^{-ax}. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Абсолютная и относительная не расположенность к риску равны, соответственно,

$$R_A = a, \qquad R_R(x) = x \cdot a.$$

Пример 1.2.4 . (Степенная полезность). Следующей функцией полезности является степенная.

$$\begin{aligned} &u(x) = \frac{x^a - 1}{a}, \quad a \in (0,1), \\ &u'(x) = x^{a-1}, \end{aligned}$$

$$u''(x) = (a-1)x^{a-2}. \qquad (1.2.7)$$

Абсолютная не расположенность к риску

$$R_A = \frac{1-a}{x},$$

убывает по x. Относительная не расположенность к риску является константой $R_R(x) = 1-a$. Степенная функция полезности имеет убывающую абсолютную не расположенность к риску, и это считается более желательным свойством, чем свойство убывания абсолютной не расположенности к риску. В силу упомянутого свойства, агент, распределяющий капитал между рисковым активом и безрисковым, будет помещать большую сумму в рисковый актив по мере увеличения имеющегося в его распоряжении капитала.

Пример 1.2.5.(Логарифмическая полезность). При $a = 0$ в примере 1.2.4, функция полезности становится равной $u(x) = \ln(x)$. В общем случае логарифмическая функция полезности определяется соотношением
$u(x) = a\ln x + b, \quad a > 0$.

Для нее

$$u'(x) = \frac{a}{x},$$

$$u''(x) = -\frac{a}{x^2}.$$

$$R_A(x) = \frac{a}{x}.$$

Теперь мы обсудим проблему распределения капитала между активами, и покажем как можно найти оптимальные пропорции инвестиций с использованием подхода с точки зрения ожидаемой полезности. Мы предположим, что инвестор имеет степенную функцию полезности вида

$$u(x) = \frac{x^a}{a}, \quad 0 < a < 1 .$$

Заметим, что числитель -1 в выражении для $u(x)$ в примере 1.2.4 может быть опущен без потери общности. Инвестор имеет начальный капитал w и может распределить фонды между двумя активами: рисковым и безрисковым. Настоящая цена каждого актива равна 1. В момент времени 1 существует два возможных состояния. В одном состоянии (“верхнем”) рисковый актив приносит доход $1+i_u$, в “нижнем” состоянии – $1+i_d$. Безрисковый актив в любом состоянии приносит доход $1+i_f$. Инвестор полагает, что вероятность верхнего состояния равна p, а нижнего - $1-p$. Заметим, что это субъективные вероятности. Таким образом, оценка ожидаемой доходности для рисковой ценной бумаги равна

$$m = pi_u + (1-p)i_d .$$

Из этого уравнения можно выразить вероятности состояний:

$$p = \frac{m-i_d}{i_u-i_d}, \qquad 1-p = \frac{i_u-m}{i_u-i_d}.$$

Естественно ввести условие $m > i_f$, так как в противном случае разумный инвестор никогда не станет инвестировать положительную сумму в рисковый актив. Мы имеем также условия отсутствия арбитража: $i_u > i_f > i_d$ и $i_u > m > i_d$. Предположим, что инвестор помещает часть начального капитала x в рисковый актив. Тогда капитал инвестора в верхнем состоянии будет $w((1+i_f)+x(i_u-i_f))$, а в нижнем - $w((1+i_f)+x(i_d-i_f))$. Ожидаемая полезность инвестора в момент времени 1 равна

$$p\frac{\left[w((1+i_f)+x(i_u-i_f))\right]^a}{a} + (1-p)\frac{\left[w((1+i_f)+x(i_d-i_f))\right]^a}{a}, \qquad (1.2.7)$$

Найдем x, которое максимизирует ожидаемую полезность. Так как функция $u(x)$ выпукла вниз, то ожидаемая полезность тоже будет функцией выпуклой вниз. Взяв производную по x и приравняв ее к нулю, имеем

$$x^{opt} = \frac{(1+i_f)(\theta-1)}{i_u-i_f+\theta(i_f-i_d)}, \qquad (1.2.8)$$

где

$$\theta = \frac{\left[p(i_u - i_f)\right]^{1/(1-a)}}{\left[(1-p)(i_f - i_d)\right]^{1/(1-a)}}.$$

Из условий отсутствия арбитража можно показать, что $\theta \geq 1$.
Заметим, что инвестиция в рисковый актив является положительной до тех пор пока $\theta > 1$. При m стремящемся к i_f, θ стремится к 1, и оптимальная пропорция инвестиций в рисковый актив стремится к нулю. Это имеет определенный смысл. Избегающий риска инвестор предпочтет безрисковый актив, если он дает ту же самую доходность, что и ожидаемая доходность рискового актива. Оптимальная пропорция в рисковом активе будет меньше 1 до тех пор, пока
$\theta < (1+i_u)/(1+i_d)$.
Мы можем вывести более понятное интуитивно выражение для оптимальной пропорции x^*, если мы рассмотрим предельный переход от модели с дискретным временем к модели с непрерывным временем. Чтобы сделать это, мы должны вначале разработать оптимальное решение для случая нескольких периодов, в которых ценные бумаги имеют одинаковые распределения доходностей. Можно показать, что в силу стационарности распределения доходностей многопериодный случай сводится к ряду одинаковых одноопериодных проблем[1]. Следовательно, оптимальное значение x^* мы получили в (1.2.8) для однопериодной задачи. Мы теперь выберем параметры распределения рискового актива дискретной модели таким образом, чтобы получить необходимое предельное распределение. Этот подход по сути позволяет нам получить нормальное распределение из дискретного случайного блуждания. Пусть мы имеем n временных интервалов длины $h = 1/n$. Пусть i_u, i_d, m, σ и μ удовлетворяют равенствам

$$1 + i_u = e^{\sigma\sqrt{h}}, \quad 1 + i_d = e^{-\sigma\sqrt{h}}, \quad m = e^{\mu h} - 1.$$

Непрерывно конвертируемая доходность r и соответствующая i_f связаны соотношением:

$$e^{rh} = 1 + i_f.$$

---

[1] Смотрите статью Gennotte & Jung [69] из которой этот результат следует, как частный случай более общей проблемы.

Эти выражения для i_u, i_d, i_f и p являются теперь функциями h. Подставляя их выражения в (1.2.8) и устремляя h к нулю, мы получаем следующее выражение для оптимальной доли в рисковом активе:

$$x^{\bullet} = \frac{\mu - r}{\sigma^2 (1 - a)}. \qquad (1.2.9)$$

Это выражение для доли рискового актива впервые было получено Мертоном [132] для случая непрерывного времени. Правая часть (1.2.9) называется *отношением Мертона*. Мертон предполагал, что доходность актива подчиняется геометрическому броуновскому движению с постоянными средним и волатильностью, а также, что инвестор имеет степенную функцию полезности. В дополнение к этому предполагалось, что рынок без трения и отсутствуют стоимости сделок.

Это решение показывает, что оптимальным для инвестора является помещение постоянной пропорции капитала в рисковый актив. С течением времени стоимость актива изменяется , и это требует от инвестора постоянного изменения портфеля, чтобы доля капитала в рисковом активе была постоянна. Поскольку отсутствуют стоимости сделок, то изменение портфеля инвестору ничего не стоит.

Отношение Мертона имеет несколько интуитивно очевидных свойств:

- Во-первых, оно может быть записано в словесном виде следующим образом:

$$\textit{Оптимальная доля} = \frac{\textit{Рисковая премия на актив}}{(\textit{Дисперсия}) \cdot (\textit{Относительная нерасположенность к риску})}.$$

- Во-вторых, заметим, что оптимальная доля пропорциональна $(\mu - r)$, т.е. рисковой премии на актив. При прочих равных условиях, чем больше рисковая премия, тем большая часть капитала инвестируется в рисковый актив. При μ стремящемся к r оптимальная доля стремится к нулю. Это представляется разумным, поскольку если рисковый актив не приносит дополнительной ожидаемой доходности, то инвестор предпочитает безрисковый актив.
- В-третьих, оптимальная доля, инвестированная в рисковый актив, обратно пропорциональна дисперсии рискового актива. С увеличением дисперсии, эта доля убывает.

- В-четвертых, оптимальная доля обратно пропорциональна относительной не расположенности инвестора к риску $(1-a)$. С увеличением не расположенности инвестора к риску, его доля в рисковом активе будет сокращаться.
- В-пятых, для $a=0$ мы имеем портфель, который является оптимальным при логарифмической функции полезности. Он называется *портфелем оптимального роста.* При заданном начальном капитале $W_0 = w$, портфель оптимального роста получается путем максимизации

$$E\left[\log(\frac{W_T}{w})\right], \qquad (1.2.10)$$

где W_T означает капитал в момент времени T. Используя представление

$$W_T = w(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_T),$$

мы получаем

$$Log\left(\frac{W_T}{w}\right) = \sum_{t=1}^{T}\log(1+i_t).$$

При условии независимости и одинаковой распределенности, это эквивалентно нахождению

$$\max E\left[Log(1+i_t)\right], \qquad t = 1,2,...,T.$$

Если мы обозначим оптимальное значение через $V_{\max}$, тогда при $T\to\infty$, по закону больших чисел

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\log(1+i_t)\to V_{\max}$$

с вероятностью 1. Это предполагает, что долговременные портфельные стратегии, превышающие по доходности доходность акций, являются проблематичными.

Одним из достоинств отношения Мертона является то, что оно позволяет сделать численные оценки оптимальной доли в рисковом активе. Распределение инвестиций между активами имеют очень важное стратегическое значение для пенсионных планов и индивидуальных инвесторов. В случае пенсионных планов часто используется правило, в соответствии с которым 60% капитала помещается в акции и 40% в облигации. При этом обычно предполагается, что рисковый актив соответствует хорошо диверсифицированному портфелю акций с оценками для $\mu = 10\%,\ \sigma = 20\%$.Долговременные оценки для безрисковой процентной ставки составляют 5%.В финансовой литературе существует широкий спектр оценок для a. В соответствии с рекомендациями Constantinides [40] a полагается равным –1. С такими параметрами отношение Мертона равно 62,5%, что близко к ранее упомянутым 60%.

Раздел 1 .3

Однопериодная модель рынков ценных бумаг

В этом разделе, мы используем однопериодную модель рынка ценных бумаг со следующими характеристиками:

- В модели отсутствует производство. Такие модели известны под названием биржевые экономики.
- Существует единственный продукт, который не может накапливаться. Мы используем этот продукт как единицу измерений.
- Ценная бумага представляет собой контракт, который определяет размер потребления в каждом будущем состоянии.
- Ценные бумаги свободны от риска неуплаты.
- Агенты максимизируют их ожидаемую полезность потребления торгуя доступными ценными бумагами на рынке.
- Равновесные цены являются результатом действий всех агентов модели.

Мы начнем с рассмотрения случая, при котором нет неопределенности в момент 1. Это предположение позволяет нам интерпретировать процентную ставку в терминах отношений маргинальных полезностей отдельных агентов. После этого мы рассмотрим ситуацию, в которой имеется неопределенность относительно исходов в момент 1. Мы исследуем оценивание активов, выплаты которых зависят от состояний мира. В этой ситуации, цены таких рисковых активов могут быть соотнесены с маргинальными полезностями отдельных агентов.

Раздел 1.3.1
Модель в условиях определенности.

Мы начнем с детерминистической модели. Даже в этой простой ситуации мы получим некоторые интересные выводы. В частности, мы установим связь между ценой бескупонной облигации и параметрами экономики, такими как предпочтения агентов и их ресурсы. Характерной чертой равновесного подхода является тот факт, что мы получим цены активов в терминах других параметров экономики. В этом смысле равновесный подход является более фундаментальным по сравнению с безарбитражным подходом главы 2, при котором предполагается, что цены даны. Здесь мы прослеживаем происхождение цен. Мы получим выражение для однопериодной процентной ставки в терминах характеристик отдельного агента.

Напомним, что не существует неопределенности в момент времени 1. Мы предполагаем, что агент имеет начальный капитал w и потребляет c_0 в момент 0, и c_1 - в момент 1. Мы предполагаем, что агент может заимствовать и давать взаймы по рыночной процентной ставке i_f. Мы предположим также, что не существует риска неуплаты, то есть процентная ставка является безрисковой. Для настоящих целей мы полагаем процентную ставку заданной.
Допустим, что функция полезности агента является аддитивно сепарабельной. Это означает, что для способа потребления (c_0, c_1)

$$u(c_0, c_1) = u_0(c_0) + u_1(c_1),$$

где $u_0(c_0)$ и $u_1(c_1)$ - возрастающие, выпуклые и дважды дифференцируемые функции. Функция полезности $u(c_0, c_1)$ является функцией потребления за два периода. Аддитивная сепарабельность введена для вычислительных удобств.
Целью агента является максимизация ожидаемой полезности при ограничении на капитал:

$$w \geq c_0 + \frac{c_1}{1+i_f}.$$

Это означает, что суммарное настоящее потребление и дисконтированное будущее потребление финансируется из настоящего капитала агента. Чтобы получить оптимальный способ потребления, мы можем применить метод множителей Лагранжа. В условиях оптимальности, выше приведенное неравенство становится равенством, так как выпуклость функции полезности агента гарантирует наличие максимума в критической точке. Решение оптимизационной проблемы (c_0^*, c_1^*) находится из равенства

$$\frac{1}{1+i_f} = \frac{u_1'(c_1^*)}{u_0'(c_0^*)} \qquad (1.3.1)$$

В равновесии агент выбирает способ потребления, который максимизирует ожидаемую полезность при данных ресурсах агента и данной рыночной процентной ставке. Левая часть равенства (1.3.1) представляет собой цену однопериодной дисконтированной облигации. Правая часть является маргинальной скоростью замены потребления в момент 1 и потребления в момент 0. Равенство (1.3.1) может быть истолковано следующим образом: при оптимальном распределении агент торгует потреблением во времени со скоростью равной рыночной процентной ставке. Заметим, что в рассмотренном примере цена безрискового актива относится к атрибутам отдельного агента.

Вместо предположения о том, что состояние агента состоит только из капитала в момент времени 0, мы могли бы предположить, что агент имеет e_0 в момент 0 и e_1 в момент 1. Тогда мы приходим к той же оптимизационной задаче с ограничением на ресурсы

$$w = e_0 + \frac{e_1}{1+i_f},$$

и нет существенного различия в решении.

В рассмотренной экономике точно такие же ценовые отношения имеют место для каждого агента i, так что функция полезности правой части (1.3.1) может быть описана с помощью индекса i. Левая часть, с другой стороны, не зависит от индекса i вообще. Эта независимость является свойством рыночной равновесной процентной ставки. Рыночная процентная ставка определяется нахождением такой равновесной процентной ставки, при которой выбранный агенты ой способ потребления максимизирует их индивидуальную ожидаемую полезность и при которой рынок для безрискового актива очищается.

Раздел 1.3.2. | Модель рынка ценных бумаг с неопределенностью

В этом разделе мы анализируем однопериодную модель в условиях неопределенности. Мы предположим, что существует данное множество ценных бумаг, которыми торгуют на рынке, и покажем, как цены этих бумаг соотносятся с более фундаментальными экономическими переменными. Однако, начинаем с предположения, что цены существующих ценных бумаг даны. Мы выведем выражения для цены определенной ценной бумаги в терминах атрибутов индивидуального агента. Несмотря на то, что подход выглядит слегка абстрактным, эти идеи формируют основу для важных формул оценивания, представляющих практический интерес.

В момент 1, состояние экономики выражается множеством исходов $w \in \Omega$. Предположим, что существует N ценных бумаг, которые характеризуются своими выплатами в момент 1. Существует единственный продукт, в единицах которого мы измеряем все цены и выплаты. Выплата ценной бумаги j в состоянии ω в момент 1 равна $X_j(\omega)$. Мы в дальнейшем предполагаем, что отсутствует риск неуплаты.

Допустим, что ценными бумагами в нашей экономике на рынке без трения торгует множество нерасположенных к риску агентов. Эти агенты покупают и продают ценные бумаги с целью максимизировать их индивидуальные ожидаемые функции полезности. Ниже мы опишем, как это происходит более детально.

Предполагается, что каждый агент получает начальное распределение продукта потребления, которое содержит сумму e_0 в момент 0, и $e_1(\omega)$ в момент 1 в состоянии ω. Элементы процесса $(e_0, e_1(\omega))$ предполагаются неотрицательными. Агенты осуществляют потребление только в моменты 0 и 1. Суммы доступные для потребления зависят от начального капитала и произведенной торговли.

Рассмотрим искусственного агента, который потребляет сумму c_0 в момент 0 и сумму $C_1(\omega)$ в момент 1 в состоянии ω. Предположим, что этот агент имеет начальный капитал e_0 в момент 0, и капитал 0 в каждом состоянии в момент 1; то есть, $e_1(\omega) = 0$ для всех ω. Если агент не участвует в торговле, то тогда его способ потребления равен $\{e_0, 0\}$. Однако, если агент покупает 1 единицу ценной бумаги

j по цене x_j способ потребления в моменты 0 и 1 становится равным

$$\{e_0 - x_j, X_j(\omega)\}$$

Настоящее потребление уменьшается на цену, уплаченную за ценную бумагу j. При такой стратегии агент способен потребить сумму $X_j(\omega)$ в состоянии ω в момент 1.

Иногда удобно использовать понятие торговой стратегии, чтобы выразить решение агента. Торговая стратегия состоит из N-мерного вектора, показывающего приобретения агентом каждой ценной бумаги. Различные торговые стратегии приводят к различным способам потребления. При нахождении оптимального потребления агента часто предпочтительнее бывает осуществлять оптимизацию по подходящему множеству торговых стратегий, а не по распределению потребления. Это объясняется тем, что структура существующих ценных бумаг может позволять агенту только определенные распределения потребления. Например, если рынок является неполным, не все способы потребления являются достижимыми. Однако, если рынок является полным, то тогда все распределения потребления будут достижимыми.

Мы предполагаем, что агенты принимают решения с целью максимизировать свои индивидуальные ожидаемые полезности. Каждый агент вычисляет математическое ожидание, используя свою собственную вероятностную меру. Удобно выделить два случая. В первом случае агенты имеют различные (гетерогенные) ожидания. Агент с номером i приписывает свои субъективные вероятности $p_i(\omega)$ состоянию ω. Во втором случае, агенты имеют одинаковые (однородные) ожидания. Каждый агент приписывает одну и ту же вероятность $p(\omega)$ состоянию ω. Мы обозначим эту вероятностную меру P, и будем называть ее естественной мерой или физической мерой.

В оставшейся части этого раздела будем полагать, что агенты имеют гетерогенные ожидания. Агент i предполагается имеющим функцию полезности

$$u_{i0}(c_{i0}) + u_{i1}(C_{i1}),$$

где u_{i0} и u_{i1} - возрастающие выпуклые вверх и дважды дифференцируемые функции. При этих предположениях, ожидаемая полезность для агента i равна

$$u_{i0}(c_{i0}) + \sum_{\omega} p_i(\omega) \cdot u_{i1}(C_{i1}(\omega)).$$

Каждый агент стремится максимизировать свою ожидаемую полезность. При фиксированных начальных капиталах и отсутствии производства в экономике, единственный путь достичь этого – это торговать ценными бумагами, имеющимися на рынке.

Рассмотрим действия агента i, который сталкивается с множеством цен x_j, $1 \le j \le N$. Это означает, что торговые действия агента i не оказывают влияния на настоящие рыночные цены существующих ценных бумаг. Агент может изменять способ потребления, покупая или продавая упомянутые ценные бумаги. Начальный капитал, безусловно, выступает в качестве ограничения в этом процессе. Доступные варианты также будут зависеть от числа и типа ценных бумаг, которыми ведется торговля. Например, если имеется только одна бумага, то число способов потребления более ограничено, чем в ситуации, когда имеется полный спектр ценных бумаг.

Мы покажем, что цены продающихся на рынке ценных бумаг могут быть выведены из равновесных предположений. Мы полагаем, что каждый агент уже сделал оптимальный выбор решений таким образом, что распределения потребления оптимальны для каждого агента. Цены, которые поддерживают это распределение, являются равновесными ценами. Когда система находится в равновесии, цены и распределение потребления являются такими, что ожидаемая полезность каждого агента максимизируется при этих ценах и распределении потребления. Это означает, что при этих ценах для агентов не имеет смысла осуществлять торговлю. Мы, опираясь на этот факт, можем получить формулу для цены для i-го агента.Во-первых, обозначим оптимальный способ потребления в равновесии через $\{c_{i0}^{\bullet}, C_{i1}^{\bullet}\}$. Далее рассмотрим ценную бумагу j с настоящей ценой x_j.

Мы будем опираться на тот факт, что агент уже принял оптимальное инвестиционное решение. По определению любое уклонение от этой позиции не является оптимальным. Если агенту предлагается купить любое количество a этой ценной бумаги в момент 0, то оптимальный выбор будет $a = 0$.

Предположим, что агент покупает a штук ценной бумаги x в момент 0. Тогда агент будет иметь потребление $c_{io}^{\bullet} - ax_j$ в момент 0 и $C_{i1}^{*} + aX_j(\omega)$ в момент 1 в состоянии ω. С учетом этих новых инвестиций и плана потребления ожидаемая полезность агента становится равной

$$u_{i0}(c_{i0}^{*}-ax_{j})+\sum p_{i}(\omega)u_{i1}(C_{i1}^{*}+aX_{j}(\omega)).$$

Взяв производную от этого выражения по a, мы получим

$$-x_{j}u_{i0}'(c_{i0}^{*}-ax_{j})+\sum_{\omega}p_{i}(\omega)u_{i1}'(C_{i1}^{*}+aX_{j}(\omega))X_{j}(\omega).$$

Это выражение должно обращаться в 0 при $a=0$. Отсюда мы находим, что

$$x_{j}=\sum_{\omega}p_{i}(\omega)\frac{u_{i1}'(C_{i1}^{*}(\omega))}{u_{i0}'(c_{i0}^{*})}X_{j}(\omega)=E^{P_{i}}\left[Z_{i}X_{j}\right],\qquad(1.3.2)$$

где $Z_{i}=\dfrac{u_{i1}'(C_{i1}^{*}(\omega))}{u_{i0}'(c_{i0}^{*})}$. Последнее равенство показывает, что настоящая стоимость ценной бумаги равна математическому ожиданию произведения будущей выплаты и случайной величины Z_{i}. Эта случайная величина равна маргинальной интенсивности замещения агента. Математическое ожидание в (1.3.2) берется по субъективной вероятностной мере отдельного агента.

Уравнение (1.3.2) представляет важный результат оценивания и формирует основу для многих современных моделей оценивания активовов. Заметим, что при выводе этого результата, мы не делали никаких предположений о полноте рынка ценных бумаг. То есть, он остается в силе для неполных рынков.

В ситуации, когда агенты имеют однородные ожидания, мы можем переписать (1.3.2) в виде

$$x_{j}=\sum_{\omega}p(\omega)\frac{u_{i1}'(C_{i1}^{*}(\omega))}{u_{i0}'(c_{i0}^{*})}X_{j}(\omega)=E^{P}\left[Z_{i}X_{j}\right].\qquad(1.3.3)$$

Уравнение (1.3.3) может быть использовано для оценки любой ценной бумаги в терминах ее выплат. Здесь нам необходимо существенно больше информации, чем понадобится при безарбитражном подходе в главе 2. При безарбитражном подходе, нам необходимы лишь цены ценных бумаг, которыми осуществляется торговля. Равновесный подход требует большей информации, но взамен он являет собой более мощное средство оценивания.

Теперь, мы используем соотношение (1.3.2), чтобы получить точное выражение для специальной ценной бумаги Арроу-Дебреу (Arrow-Debreu), которая выплачивает ровно 1 потребления в состоянии ω в момент 1, и 0 во всех других состояниях. Пусть ψ_ω - это цена ценной бумаги Арроу-Дебреу ассоциированная с состоянием ω. Тогда из (1.3.2) мы имеем

$$\psi_\omega = p_i(\omega)\frac{u'_{i1}(C^*_{i1}(\omega))}{u'_{i0}(c^*_{i0})} \qquad (1.3.4)$$

Это оценочное уравнение с точки зрения агента i. Мы можем записать аналогичное выражение для ψ_ω в терминах атрибутов любого другого агента, скажем, k. Так как левая часть (1.3.4) не зависит от индивидуальных атрибутов агента, то правые части должны равняться для всех агентов в экономике. Интерпретация этого факта очевидна в условиях определенности. Рыночная цена 1 в состоянии ω равна маргинальной интенсивности замещения между настоящим потреблением и будущим для всех агентов в экономике.

Рассмотрим портфель, состоящий из всех ценных бумаг Арроу-Дебреу. Этот портфель выплачивает точно 1 в момент 1 в каждом состоянии. Единичная облигация также выплачивает 1 в в момент 1 в каждом состоянии. Следовательно, эти две ценные бумаги, имеющие одинаковые выплаты, должны продаваться по одинаковой цене, чтобы избежать арбитража. Таким образом мы имеем следующее соотношение:

$$\frac{1}{1+i_f} = \sum_\omega \psi_\omega = \sum_\omega p_i(\omega)\frac{u'_{i1}(C^*_{i1}(\omega))}{u'_{i0}(c^*_{i0})} \qquad (1.3.5)$$

В следующем разделе мы увидим, что это соотношение играет ключевую роль в при конструировании риск-нейтральной вероятностной меры, которая будет использоваться в главе 5.

Мы можем также вывести основное уравнение оценивания путем решения оптимизационной задачи для отдельного агента. Мы предположим, что имеется полный рынок ценных бумаг Арроу-Дебреу. Предполагая, что цены даны, мы решаем задачу для агента i. Полагая его начальный капитал равный $\{e_{i0}, e_{i1}\}$. Задача агента заключается в максимизации ожидаемой полезности

$$\max_{c_{i0}, C_{i1}} \left\{ u_{i0}(c_{i0}) + \sum_{\omega\in\Omega} p_i(\omega) u_{i1}(C_{i1}(\omega)) \right\} \qquad (1.3.6)$$

при ограничениях

$$c_{i0} + \sum_{\omega\in\Omega} \psi_\omega C_{i1}(\omega) = e_{i0} + \sum_{\omega\in\Omega} \psi_\omega e_{i1}(\omega)$$

где начальный капитал $w = e_{i0} + \sum_{\omega\in\Omega} \psi_\omega e_{i1}(\omega)$. Функция Лагранжа имеет вид:

$$u_{i0}(c_{i0}) + \sum_{\omega\in\Omega} p_i(\omega) u_{i1}(C_{i1}(\omega)) + \gamma_i(-c_{i0} - \sum_{\omega\in\Omega} \psi_\omega C_{i1}(\omega) + e_{i0} + \sum_{\omega\in\Omega} \psi_\omega e_{i1}(\omega)) \qquad (1.3.7)$$

Для решения задачи мы дифференцируем эту функцию Лагранжа по переменным потребления. Мы можем использовать эти переменные как переменные выбора, если рынок является полным. В результате получим следующие необходимые и достаточные условия максимума (так как функция полезности выпукла вверх):

$u'_{i0}(c_{i0}) = \gamma_i$, для всех i,

$$p_i(\omega) u'_{i1}(C_{i1}(\omega)) = \gamma_i \psi_\omega, \quad \text{для всех } i \text{ и } \omega. \qquad (1.3.8)$$

Принимая во внимание эти два соотношения, мы снова получаем (1.3.4). Переменные γ_i являются положительными, так как функции полезности возрастающие. Заметим, что γ_i являются множителями Лагранжа для начального капитала, следовательно, они зависят от начального капитала.

Теперь мы обсудим концепцию равновесия более детально. Мы увидим, что в равновесии цены являются результатом оптимальных действий отдельных агентов экономики. Мы не предполагаем, что рынок ценных бумаг является полным. В этом случае более удобно предположить, что агенты действуют оптимальным образом через торговые стратегии. Торговые стратегии могут использоваться для изменения способа потребления агента. Мы будем использовать следующие предположения и соглашения:

- В экономике имеется I агентов. Каждый агент имеет функцию полезности вида:

$$u_{i0}(c_{i0}) + u_{i1}(C_{i1}),$$

где u_{ik} - возрастающие выпуклые вверх и дважды дифференцируемые .

- Агент i располагает капиталом $\{e_{i0}, e_{i1}\}$.
- На рынке имеется N ценных бумаг. Ценная бумага с номером i имеет выплату $X_i(\omega)$ в момент 1 в состоянии ω. В момент 0 она имеет цену x_i. Мы обозначим вектор цен в момент 0 через $\{x\}$.
- Торговая стратегия агента i представляет собой N-мерный вектор с действительными координатами $\{\theta_i^1, \theta_i^2, ..., \theta_i^N\}$. Множество торговых стратегий для группы из I агентов обозначается через $\{\Theta\}$.

Равновесие – это множество цен и торговых стратегий $\{x, \Theta\}$, таких что выполнены следующие условия:

- При данных ценах и торговых стратегиях ожидаемая полезность каждого агента максимизируется при ограничениях, связанных с начальным капиталом инвестора. Это выражается в виде $N \times I$ условий. Например, условие первого порядка для агента i в отношении в θ_i^j это

$$u_{i0}(e_{i0} - \sum_{n=1}^{N} \theta_i^n x_n) x_j = \sum_{\omega} p_i(\omega) u_{i1}\left(e_{i1} + \sum_{n=1}^{N} \theta_i^n X_n(\omega)) \right) X_j(\omega) \qquad (1.3.9)$$

- Рынок для каждой ценной бумаги очищается. Это означает, что

$$\sum_{i=1}^{I} \theta_i^n = 0 \quad \text{для} \quad n = 1,2,..., N .$$

Решение $N \times I$ уравнений первого порядка и N последних уравнений дает оптимальные торговые стратегии и равновесные цены, которые позволяют нам определить оптимальное потребление для каждого агента. Заметим, что мы не предполагали полноты рынка.

- Условия очищения рынка состоятельны с требованием равенства суммарного потребления и суммарного капитала в каждом состоянии. Суммарное потребление в момент 0 равно

$$\sum_{i=1}^{I} (e_{i0} - \sum_{n=1}^{N} \theta_i^n x_n) .$$

Из условия очищения рынка это равно суммарному капиталу

$$\sum_{i=1}^{I} e_{i0} .$$

Суммарное потребление в момент 1 в состоянии ω равно

$$\sum_{i=1}^{I} (e_{i1}(\omega) - \sum_{i=1}^{N} \theta_i^n X_n(\omega)) .$$

Из условия очищения рынка это равняется суммарному потреблению в момент 1 в состоянии ω, т.е.

$$\sum_{i=1}^{I} e_{i1}(\omega) .$$

Концепция равновесия очень важна, и поэтому стоит сказать о ней еще несколько слов. Рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Для каждого множества цен агенты определяют такие торговые стратегии, которые оптимизируют их предпочтения. Равновесные цены являются такими, для которых оптимальные торговые стратегии уравнивают спрос и предложение для каждой ценной бумаги. Другими словами, совокупный спрос на каждую ценную бумагу равен нулю. Мы будем говорить, что данное равновесие поддерживается этими ценами. В равновесии происходят два важных события. Каждый агент использует торговые стратегии, которые оптимизируют предпочтения агентов для данной структуры рынка и цен. В дополнение, рынок очищается таким образом, что покупка и продажа каждой ценной бумаги сбалансированы. Равновесие характеризуется ценами и оптимальными торговыми стратегиями. Конечно, эти стратегии формируют определенное потребление для каждого агента. Иногда удобно сосредоточить внимание на торговых стратегиях, а иногда – на распределении потребления.

Входными данными генерирующими равновесные цены и торговые стратегии (или распределение потребления) являются начальные капиталы и ожидания агентов, а также структура рынка ценных бумаг. Если эти входные данные меняются, то меняются и результирующие цены, и равновесные распределения. Например, если мы изменим начальные капиталы, то это приведет к изменению цен и равновесных распределений. Если мы добавим новую ценную бумагу, которая не может быть заменена существующими, то цены и равновесные распределения также изменятся.

Следующий пример иллюстрирует понятие равновесия. Он показывает, что равновесные цены зависят от входных данных модели и как природа продаваемых на рынке ценных бумаг может влиять на равновесные распределения и цены.

Пример 1.3.1.

Раздел 1.3.3 | Равновесный подход и риск нейтральное оценивание.

В последнем разделе мы видели, как равновесный подход может быть использован для определения цен ценных бумаг. В главе 2, мы сможем определить цену бумаги используя безарбитражный подход, если мы сможем заменить выплаты ценной бумаги выплатами ценных бумаг, которыми ведется торговля. Много подходов теории оценивания опционов сосредоточены только на безарбитражном подходе, при котором цена находится как математическое ожидание, основанное на риск-нейтральных вероятностях. Эти риск-нейтральные вероятности являются искусственными конструкциями, и не должны быть использованы для предсказания будущих потоков платежей. Это отличие не всегда в полной мере признается. Один из лучших способов понимания этого отличия состоит в анализе двух подходов к оцениванию. Сначала мы обсудим эти два подхода, а затем отметим некоторые последствия их отличий для инвестиционного моделирования и актуарных применений.

Как мы видели, равновесный подход может использоваться для определения цены ценной бумаги. Нам необходимо указать точные предположения модели и найти оптимальные распределения для того, чтобы получить цены. Уравнения для цены (1.2.2) и (1.3.3) выражают настоящую цену ценной бумаги, как математическое ожидание ее выплат, умноженных на случайную величину. Формула для цены может быть записана с точки зрения каждого агента, но это, конечно, не изменяет цену. В разделе мы рассматриваем обобщенного агента. Для удобства опустим индексы и обозначим субъективную вероятностную меру через P.

При безарбитражном подходе оценивание производится с использованием риск-нейтральной меры. Мы детально рассмотрим его в главе 2. Существенный результат состоит в том, что в условиях отсутствия арбитража любая ценная бумага, которая может быть заменена ценными бумагами имеющимися на рынке, может быть оценена путем взятия дисконтированного математического ожидания по риск- нейтральной мере. Риск- нейтральная мера представляет собой вероятностную меру, которая порождается ценами продавеаемых активов. Эта вероятностная мера обычно известна, как Q - мера. Она, вообще говоря, отлична от меры P. Мы сейчас установим прямую связь между равновесной оценочной формулой и риск-нейтральной. Это выявит вз j -той ценной бумаги аимосвяь между мерами P и Q. Равновесная цена j -той ценной бумаги с учетом (1.3.3) может быть записана в виде

$$x_j = \sum_{\omega} p(\omega) X_j(\omega) Z(\omega). \tag{1.3.11}$$

Мы опустили индекс i у случайной величины Z. Напомним, что Z является маргинальным отношением замещения между моментами 0 и 1. Мы можем найти цену из соотношения (1.3.11)

$$\frac{1}{1+i_f} = e^{-r} = \sum_{\omega} p(\omega) Z(\omega), \tag{1.3.12}$$

где r непрерывно конвертируемая безрисковая процентная ставка. Напомним, что Z всегда положительна. Для каждого состояния мы можем определить числа $q(\omega)$ следующим образом:

$$q(\omega) = (1+i_f) p(\omega) Z(\omega) \text{,для всех} \, \omega \in \Omega. \tag{1.3.13}$$

Мы видим, что $q(\omega)$ положительны. В силу (1.3.12) они дают в сумме единицу. Мы можем использовать их как вероятности. Цена j -той ценной бумаги через соответствующую вероятностную меру выражается в виде

$$x_j = \frac{1}{1+i_f} \sum_{\omega} q(\omega) X_j(\omega) = \frac{E^Q[X_j]}{1+i_f}. \tag{1.3.14}$$

Последнее уравнение соответствует безарбитражному подходу к оцениванию. В (1.3.14) мера Q является риск-нейтральной мерой. Заметим, что вероятности q выводятся из цен, и они , вообще говоря отличаются от вероятностей p. В самом деле, риск-нейтральные вероятности могут не соответствовать индивидуальным ожиданиям никакого агента в экономике. Например, в примере 1.3.1. все риск-нейтральные вероятности равны 1/3. Ни один агент не имеет таких ожиданий.

Сравним соотношения (1.3.3) и (1.3.14). В (1.3.14) выплаты ценной бумаги умножаются на оценочное ядро, и математическое ожидание берется по мере P. В соотношении (1.3.14) математическое ожидание вычисляется для не скорректированной выплаты, и оно берется по риск-нейтральной мере Q. Заметим, что в случае линейных функций полезности агент является риск-нейтральным, и обе меры совпадают. Однако они могут совпадать и в других ситуациях.

Предположим, что некоторый агент имеет риск нейтральную функцию полезности вида

$$u(c,C) = c + e^{-\rho} C ,$$

где ρ - интенсивность временного предпочтения. Член $e^{-\rho}$ измеряет вес, который агент приписывает потреблению в момент 1. Если мы положим $e^{-\rho} = e^{-r}$, то тогда меры P и Q совпадают для этого агента. При этих предположениях (1.3.13) принимает вид:

$$Z(\omega) = e^{\rho} ,$$

и поэтому

$$q(\omega) = e^{-r} e^{\rho} p(\omega) = p(\omega) .$$

Это объясняет происхождение термина “риск-нейтральная мера”.

Раздел 1.4.

Модели, основанные на репрезентативном агенте.

Равновесный подход может быть использован для определения цен продаваемых ценных бумаг путем решения соответствующих уравнений для цен и оптимального распределения потребления, которые поддерживают это равновесие. Это требует решения, возможно, достаточно большого числа уравнений, так как должны выполняться одновременно все условия первого порядка для всех агентов во всех состояниях. Сделав некоторые упрощающие предположения, мы можем сократить вычисления равновесных цен с помощью понятия репрезентативного агента. Мы сконструируем более простую параллельную экономику и найдем равновесные цены в этой экономике. Причем, новая сконструированная экономика окажется такой, что в ней равновесные цены совпадают с равновесными ценами исходной экономики. Ключевая идея упрощения состоит в том , что в новой экономике имеется только один агент. Он называется репрезентативным агентом. При некоторых условиях его функция полезности будет сконструирована из функций полезности всех агентов исходной экономики. В каждом состоянии этот агент имеет капитал, равный суммарному капиталу в каждом состоянии. Затем мы решим более простую задачу для параллельной экономики и получим те же равновесные цены, что и для исходной экономики со всеми агентами. В этом разделе мы укажем лишь основные моменты этой процедуры.

Мы начнем с конструирования функции полезности репрезентативного агента. Следующие условия достаточны для этой конструкции:

- Агенты предполагаются имеющими одинаковые вероятностные ожидания.
- Агенты имеют аддитивные по времени, не зависящие от состояний функции полезности, которые являются возрастающими, выпуклыми вверх и дифференцируемыми.
- Рынок ценных бумаг является полным.

При этих предположениях мы можем сконструировать функцию полезности репрезентативного агента в терминах функций полезности отдельных агентов. Веса, приписываемые отдельным агентам связаны с их начальными капиталами. Мы предположим, что эти веса образуют вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_I)$ и

$$\lambda_i = \frac{1}{\gamma_i},$$

где γ_i определяются в соответствии с соотношением (1.3.8). Функция полезности репрезентативного агента определяется в терминах функций полезности агента в моменты 0 и 1 следующим образом.

$$v_0(x) = \max_{x_i > 0} \sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_{i0}(x_i)$$

(1.4.1)

и

$$v_1(x) = \max_{x_i > 0} \sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_{i1}(x) \qquad (1.4.2)$$

где

$$x = \sum_{i=1}^{I} x_i \ .$$

При таком определении можно показать, что $v_0(x)$ и $v_1(x)$ строго возрастающие, выпуклые вверх и дифференцируемые.
Репрезентативный агент в каждом состоянии предполагается располагающим суммарным капиталом (который равен суммарному потреблению). Параллельная экономика устроена таким образом, что цены в соответствующих состояниях равны исходной экономики равны ценам в соответствующих состояниях параллельной экономики. Но эти цены в параллельной экономике находятся существенно проще из условий первого порядка для репрезентативного агента. Условия первого порядка для репрезентативного агента выполнены, если агент имеет суммарное потребление в каждом состоянии. Это означает, что в равновесии, для репрезентативного агента не имеет смысла торговать. Цены в различных состояниях даются соотношениями:

$$\psi_\omega = p(\omega)\frac{v_1'(C_1^a(\omega))}{v_0'(c_0^a)} \ . \qquad (1.4.3)$$

В этих уравнениях c_0^a и C_1^a - совокупное потребление в моменты 0 и 1 соответственно. Эти уравнения аналогичны уравнениям (1.3.4), которые выполняются для всех агентов и всех состояний в исходной экономике.
Напомним, что в исходной экономике, вообще говоря, равновесные цены зависят от распределения начальных капиталов. Цены, полученные в параллельной экономике, проявляют подобную чувствительность к распределению начальных капиталов. В параллельной экономике цены зависят от выбора λ, так как функция полезности репрезентативного агента зависит от относительного значения капиталов индивидуального агента через λ. Строго говоря, мы должны осознавать, что функция полезности репрезентативного агента зависит от λ.
При определенных условиях цены, имеющие место на полном конкурентном рынке, не зависят от начальных капиталов. В этих случаях мы можем изменять начальные капиталы и наблюдать те же цены. Если это происходит, то мы будем говорить о том, что экономика обладает агрегированным свойством (aggregation property). Условия для этого могут быть сформулированы в терминах функций полезности отдельных агентов.

Чтобы сформулировать эти условия, мы должны определить новое понятие расположености к риску. Оно обратное к расположенности к риску. Мы обозначим его через $\tau(\cdot)$. Следовательно

$$\tau(x) = -\frac{u'(x)}{u''(x)}.$$

Если расположенность к риску линейна, то

$$\tau(x) = a + bx. \tag{1.4.4}$$

Мы можем проверить, что степенная и экспоненциальная функции полезности обладают свойством линейной расположенности к риску. Коэффициент b в (1.4.4) известен под названием risk cautiousness. Теперь мы можем сформулировать достаточное условие для агрегированности. Рынок выражает свойство агрегированности, если каждый агент в экономике имеет функцию полезности с линейной расположенностью к риску, с одинаковыми коэффициентами b и одинаковой интенсивностью временных предпочтений.

Заметим, что вывод многих моделей оценивания в финансах основан на подходе с использованием репрезентативного агента, например, модель процентной ставки Кокса-Ингерсолла-Росса. В следующих разделах мы покажем, как в расках этого подхода можно вывести модель оценки финансовых активов и формулу Блэка-Шоулса.

Раздел 1.4.5

Вывод модели оценки финансовых активов

Подход, с использованием репрезентативного агента, дает удобный метод для вывода простой равновесной модели - модели оценки финансовых активов (САРМ). Она представляет собой мощное средство в корпоративных финансах и финансах инвестиций, так как дает нам интуитивно понятный способ выражения риска в терминах “бета”. Бета измеряет риск акции в терминах ее корреляции с рыночным портфелем всех активов в экономике .

Предположим, что у нас выполнены условия для существования репрезентативного агента. Как мы видели, цены бумаг Арроу-Дебреу могут быть выражены через маргинальную полезность репрезентативного агента и (предполагается однородность ожиданий) вероятности состояний. Рассмотрим ценную бумагу j , которая платит сумму $X_j(\omega)$ в момент 1 в состоянии ω. Настоящая цена этой ценной бумаги x_j определяется равенством:

$$x_j = \sum_{\omega} \psi_{\omega} X_j(\omega) = \sum_{\omega} p(\omega) \frac{v_1'(C_1^a(\omega))}{v_0'(c_0^a)} X_j(\omega).$$

Первое уравнение следует из условия отсутствия арбитража, второе – из равенства (1.4.3). Следовательно, мы можем записать цену в терминах математического ожидания по мере P

$$x_j = E^P\left[ZX_j\right], \tag{1.5.1}$$

где Z - отношение маргинальных полезностей репрезентативного агента. Теперь мы выразим это в терминах доходностей. Для этого обозначим доходность j-той ценной бумаги в состоянии через $R_j(\omega)$, то есть

$$\frac{X_j(\omega)}{x_j} = 1 + R_j(\omega).$$

Разделив (1.5.1) на x_j, мы имеем

$$1 = E[(1 + R_j(\omega))Z].$$

Мы можем применить ту же самую процедуру для однопериодной облигации:

$$1 = E[(1 + i_f)Z] = (1 + i_f)E\left[Z\right].$$

Используя свойства математического ожидания и ковариации, мы находим, что

$$E\left[R_j\right] - i_f = -(1 + i_f)Cov(R_j, Z). \tag{1.5.2}$$

Левая часть последнего равенства называется рисковой премией. Она может быть либо положительной, либо неотрицательной.
Уравнение (1.5.2) выражает рисковую премию через величину Z. Так как Z не наблюдается, то это затрудняет применение формулы. Чтобы преодолеть эту трудность мы введем понятие рыночного портфеля. В однопериодной модели суммарное потребление в момент 1 равно суммарному капиталу в экономике. Для простоты в

переменных потребления мы опустим верхние индексы. Мы определим рыночную доходность R_m посредством равентва

$$1+R_m = \frac{C_1}{c_0} \tag{1.5.3}$$

Доходность на рынке удовлетворяет также уравнению(1.5.2), и поэтому

$$E[R_m]-i_f = -(1+i_f)Cov(R_m, Z)\,. \tag{1.5.4}$$

Объединяя (1.5.2) и (1.5.4), мы получаем

$$E[R_j]-i_f = \frac{Cov(R_j, R_m)}{Cov(R_m, Z)}(E[R_m]-i_f)\,. \tag{1.5.5}$$

Отношение ковариаций может быть упрощено,если мы сделаем дополнительные предположения на функции полезности.
Во-первых, предположим, что репрезентативный агент имеет квадратичную функции полезности.При этом предположении случайная величина Z может быть записана, как

$$Z(\omega) = \frac{v_1'(C_1(\omega))}{v_0'(c_0)} = \frac{b-C_1(\omega)}{b-c_0}\,.$$

При такой замене, мы можем упростить член, содержащий ковариацию

$$Cov(R_j, Z) = Cov(R_j, \frac{b-C_1}{b-c_0}) =$$

$$= \frac{-1}{b-c_0}Cov(R_j, C_1) =$$

$$= \frac{-c_0}{b-c_0}Cov(R_j, 1+R_m) =$$

$$= \frac{-c_0}{b-c_0}Cov(R_j, R_m)$$

Поступая аналогично с доходностью рыночного портфеля, мы имеем

$$Cov(R_m, Z) = \frac{-c_0}{b - c_0} Var(R_m) .$$

Подставляя два последних выражения для ковариаций в (1.5.5), мы получаем, что

$$E[R_j] - i_f = \beta_j (E[R_m] - i_f , \qquad (1.5.6)$$

где

$$\beta_i = \frac{Cov(R_j, R_m)}{Var(R_m)} .$$

Модель оценки финансовых активов связывает ожидаемую доходность ценной бумаги с ожидаемой доходностью на рынке. Риск ценной бумаги измеряется через бета, β_j. Этот риск измеряется по отношению к рыночному портфелю. Заметим, что модель оценки финансовых активов является соотношением, в которое входят ожидаемые доходности. Эта модель находит много полезных применений в выборе портфеля, инвестиционном моделировании и корпоративных финансах.

Мы можем вывести также модель оценки финансовых активов в предположении, что доходности на все ценные бумаги имеют многомерное нормальное распределение. Доходность рыночного портфеля R_m, будучи линейной комбинацией доходностей на отдельные ценные бумаги, также является нормально распределенной. Нам потребуется свойство нормального распределения, известное как лемма Стейна.

Лемма1.5.1 (Лемма Стейна). Если X и Y имеют двумерное нормальное распределение, и функция g является дифференцируемой, то тогда

$$Cov[g(X), Y] = Cov(X, Y) E[g'(X)].$$

Доказательство. *Напомним, что*

$$Cov[g(X),Y] = E_X\left[E_Y[g(X) - E[g(X)])(Y - E[Y]) \;|X\right]]$$

Применяя интегрирование по частям, получаем утверждение леммы.

Мы начнем с соотношения (1.5.5).

$$\frac{Cov(R_j,Z)}{Cov(R_m,Z)} = \frac{Cov(R_j,v_1'(C_1)/v_0'(c_0))}{Cov(R_j,v_1'(C_1)/v_0'(c_0))} = \frac{Cov(R_j,v_1'(C_1))}{Cov(R_m,v_1'(C_1))}$$

Выражая C_1 через R_m, из (1.5.3) мы имеем

$$\frac{Cov(R_j,v_1'(C_1))}{Cov(R_m,v_1'(C_1))} = \frac{Cov(R_j,v_1'(c_0(1+R_m)))}{Cov(R_m,v_1'(c_0(1+R_m)))}$$

Используя лемму Стейна, мы имеем

$$\frac{Cov(R_j,v_1'(c_0(1+R_m)))}{Cov(R_m,v_1'(c_0(1+R_m)))} = \frac{E\left[\; v_1''(c_0(1+R_m)) \;\right]Cov(R_j,R_m)}{E\left[\; v_1''(c_0(1+R_m)) \;\right]Cov(R_m,R_m)))}.$$

Подставляя это выражение в (1.5.5), мы получаем уравнение оценки финансовых активов.

Привлекательность этой модели состоит в ее простоте. Она связывает премию за риск с произведением бета ценной бумаги на рисковую премию рыночного портфеля. Заметим, что входные данные для уравнения оценки финансовых активов выражаются в терминах ожидаемых доходностей ценной бумаги и рыночного портфеля, а также ковариации и дисперсии.

<u>Раздел 1.6</u>
Формула Блэка-Шоулса для оценки опциона

Мы будем предполагать существование репрезентативного агента со степенной функцией полезности. Также будем полагать, что цена ценной бумаги и совокупное потребление имеют двумерное логнормальное распределение.

Мы будем использовать обозначения предыдущего раздела. Функция полезности репрезентативного агента имеет вид:

$$v(c_0,C_1) = v_0(c_0) + v_1(C_1).$$

При таком представлении равновесная цена для ценной бумаги, которая выплачивает $S(\omega)$ в состоянии ω, равна

$$s_0 = \frac{E^P\left[v_1'(C_1)S\right]}{v_0'(c_0)} \tag{1.6.1}$$

Верхний индекс P указывает, что ожидания вычисляются по физической мере P. Цена достоверной выплаты 1 в момент 1 равна

$$e^{-r} = \frac{1}{1+i_f} = \frac{E^P\left[v_1'(C_1)\right]}{v_0'(c_0)}, \tag{1.6.2}$$

где r непрерывно конвертируемая процентная ставка. Объединяя две последние формулы, мы можем получить следующее выражение для s_0:

$$s_0 = \frac{1}{1+i_f}\frac{E^P\left[v_1'(C_1)S\right]}{E^P\left[v_1'(C_1)\right]} \tag{1.6.3}$$

Теперь рассмотрим производную ценную бумагу, выплаты которой в момент 1 даются функцией $f(S(\omega))$. Тогда настоящая цена производной ценной бумаги равна

$$V(s_0,0) = \frac{1}{1+i_f}\frac{E^P\left[v_1'(C_1)f(S)\right]}{E^P\left[v_1'(C_1)\right]}. \tag{1.6.4}$$

Если мы определим $q(\omega)$ равенством

$$q(\omega) = \frac{p(\omega)\left[v_1'(C_1)\right]}{E^P\left[v_1'(C_1)\right]},$$

то мы видим, что они положительны и дают в сумме 1. В терминах меры Q мы получаем, что

$$V(s_0,0) = e^{-r}E^Q\left[f(S)\right].$$

Полагая, что функция полезности репрезентативного агента в момент 1 имеет вид

$$v_1(C_1) = \frac{C_1^a}{a} \quad , \quad a > 0,$$

мы определим новую случайную величину Y равенством

$$e^{Y} = C_1^{a-1}. \qquad (1.6.5)$$

Тогда

$$E^{Q}[f(S)] = \frac{E^{P}\left[e^{Y} f(S)\right]}{E^{P}\left[e^{Y}\right]} \qquad (1.6.6)$$

Это уравнение (1.6.6) показывает, что ожидаемые выплаты по Q-мере пропорциональны скорректированным выплатам по мере P. Теперь нам удобно ввести X посредством равенства.

$$S = s_0 e^{X} \qquad (1.6.7)$$

Мы видим, что X соответствует непрерывно конвертируемой процентной ставке для ценной бумаги s. Предположим, что совместное распределение X и Y является двумерным нормальным с производящей функцией моментов

$$M^{P}(t_1, t_2) = E^{P}\left[e^{t_1 X + t_2 Y}\right] = \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2\right)\right],$$

где μ_1 - математическое ожидание случайной величины X, μ_2 - математическое ожидание случайной величины Y, σ_1^2 - дисперсия X , σ_2^2 - дисперсия Y и ρ - коэффициент корреляции между X и Y.

Нам будет удобно иметь выражение производящей функции моментов случайной величины X по Q мере. Мы покажем, что эта функция может быть выражена через производящие функции моментов двумерного распределения по P мере.

$$M^{Q}(t) = E^{Q}\left[e^{tX}\right] = \frac{E^{P}\left[e^{tX+Y}\right]}{E^{P}\left[e^{Y}\right]} = \frac{M^{P}(t,1)}{M^{P}(0,1)}.$$

Подставляя в это выражение производящую функцию моментов, мы получаем

$$E^{Q}\left[e^{tX}\right] = \exp\left[(\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2\right]. \qquad (1.6.8)$$

Это соотношение показывает, что по Q мере случайная величина X все еще является нормальной с модифицированным средним

$$\mu_Q = \mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2 \tag{1.6.9}$$

и дисперсией σ_1^2. Это существенное обстоятельство мы можем использовать для того, чтобы исключить μ_Q. Напомним, что

$$s_0 = \frac{1}{1+i_f} E^Q[S] = e^{-r} E^Q[S] = s_0 e^{-r} E^Q\left[e^X\right] = s_0 e^{-r} \exp\left(\mu_Q + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right).$$

Отсюда следует, что

$$\mu_Q = r - \frac{1}{2}\sigma_1^2. \tag{1.6.10}$$

Воспользовавшись этим результатом, мы можем вывести цену такой производной ценной бумаги, как европейский колл-опцион. В этом случае, выплата в момент 1 равна максимуму между $(S-K)$ и 0, то есть

$$f(S) = [S-K]^+.$$

Следовательно, настоящая цена колл-опциона есть

$$V(s_0,0) = \frac{1}{1+i_f} E^Q\left[(S-K)^+\right] = e^{-r} E^Q\left[(s_0 e^X - K)^+\right], \tag{1.6.11}$$

где X - нормально распределенная случайная величина с параметрами $r-\frac{1}{2}\sigma^2$ и σ^2. Для удобства мы опустили индекс 1. Математическое ожидание вычисляется как интеграл

$$E^Q\left[(s_0e^X - K)^+\right] = s_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_k^\infty \exp\left(x - \frac{(x-r+\frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)dx - K\int_k^\infty \exp\left(-\frac{(x-r+\frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)dx =$$

$$= s_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_k^{+\infty} \exp(r)\exp\left(-\frac{(x-r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)dx + K\int_k^\infty \exp\left(-\frac{(x-r+\frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)dx,$$

где $k = \ln(K/s_0)$. Делая замену переменных $u = \dfrac{x - r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$ в первом интеграле, и $u = \dfrac{x - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$ во втором, мы получаем

$$E^Q\left[(s_0e^X - K)^+\right] = s_0e^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{k-r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du - K\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{k-r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$$

$$= s_0e^r\left(1 - \Phi\left(\frac{k - r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\right) - K\left(1 - \Phi\left(\frac{k - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\right),$$

где $\Phi(x)$ - функция распределения стандартного нормального закона. С учетом (1.6.11) мы имеем:

$$V(s_0, 0) = s_0\Phi(d_1) - Ke^{-r}\Phi(d_1 - \sigma^2), \qquad (1.6.12)$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(s_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}.$$

Это известная формула Блэка-Шоулса для цены европейского колл-опциона. Представленный выше вывод основан на равновесном подходе. Ключевыми предположениями были предположения о степенной функции полезности репрезентативного агента и о том, что выплата ценной бумаги S и совокупное потребление C_1 имеют двумерное логнормальное распределение.

Заметим, что основная формула (1.6.6), использованная для лежащего в основе актива и для безрисковой облигации, позволила нам исключить среднее и дисперсию совокупного потребления, а также ожидаемую доходность актива и коэффициент корреляции. Эти преобразования привели к формуле Блэка-Шоулза, которая зависит от безрисковой процентной ставки. Заметим, что мы начинали в терминах P меры, а закончили в терминах Q меры.

Глава 2

Безарбитражная теория оценки

Раздел 1.1

Введение

В этой главе мы изучим основную концепцию арбитража и проанализируем ее следствия для оценивания потоков платежей. Мы будем вести рассмотрение при предположении конечного дискретного времени и конечного числа состояний.

Основным результатом этой главы является фундаментальная теорема оценки активов, которая гласит о том, что отсутствие арбитража эквивалентно существованию положительного оценочного правила.

С определенными усилиями все результаты этой главы могут быть получены и доказаны без использования понятия вероятности. Однако, использование этого понятия позволяет сократить доказательства, ввести понятия интуитивно понятные и создать основу для рассмотрения случая непрерывного времени, при котором вероятности избежать проблематично.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\theta_1 = 1$ и $\theta_2 = -1/3$ является оптимальным решением, и в этом случае $U = 1 - 1/3 = 2/3$. Подобным образом задача

Раздел 2.2**______________**

Модель для одного периода

2.1.1 Описание модели

Мы начнем с рассмотрения N ценных бумаг или активов $S_1, S_2, ..., S_N$. В этом разделе мы рассматриваем их стоимости только в моменты 0 и 1. В момент 0 инвесторы знают их стоимости, но цены в момент 1 являются случайными величинами. Эти случайные величины определены на вероятностном пространстве $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_M\}$, состоящем из конечного числа состояний мира или возможных исходов M . В момент 0 инвесторы знают перечень этих состояний, но до момента 1 они не знают, которое из этих состояний будет иметь место. Также существует вероятностная мера P , такая что $P(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Цена или стоимость ценной бумаги j в состоянии ω в момент k будет обозначаться через $S_j(k, \omega)$. Мы предполагаем, что эти величины всегда неотрицательны. Рассматриваемые ценные бумаги могут быть акциями, облигациями, колл-опционами и т.д.

Стоимости ценных бумаг в момент 0 предполагаются положительными. Так как $S_j(0, \omega)$ одинаковы для всех $\omega \in \Omega$, то мы просто обозначим их общую величину через $S_j(0)$ и рассмотрим вектор-строку

$$S(0) = [S_1(0), S_2(0), ..., S_N(0)].$$

Цены в момент 1 удобно рассматривать в виде матрицы

$$S(1,\Omega)=\begin{bmatrix} S_1(1,\omega_1)\ S_2(1,\omega_1) & \dots & S_N(1,\omega_1) \\ S_1(1,\omega_2)\ S_2(1,\omega_2) & \dots & S_N(1,\omega_2) \\ . \quad . & . & . \\ S_1(1,\omega_M)\ S_2(1,\omega_M) & \dots. & S_N(1,\omega_M) \end{bmatrix} \qquad (2.2.1)$$

Инвесторы выбирают портфель активов в момент 0. Число единиц актива j, удерживаемого на протяжении времени от момента 0 до момента 1 обозначим θ_j, $j=1,2,...,N$. Если $\theta_j>0$, то θ_j единиц актива j покупается. Если $\theta_j<0$, то $|\theta_j|$ единиц актива j коротко продается. Вектор- столбец

$$\theta=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ .\\ .\\ \theta_N\end{bmatrix}$$

мы будем иногда называть торговой стратегией. Тогда стоимость соответствующего портфеля в момент 0 равна

$$S(0)\theta=\theta_1 S_1(0)+\theta_2 S_2(0)+...+\theta_N S_N(0) \qquad (2.2.3)$$

Стоимость этого портфеля в момент 1 будет зависеть от состояния мира. Если наступит состояние ω_j, то стоимость в момент 1 равна

$$\theta_1 S_1(1,\omega_j)+\theta_2 S_2(1,\omega_j)+...+\theta_N S_N(1,\omega_j)\,,$$

что является j-той компонентой вектора-столбца

$$S(1,\Omega)\theta=\begin{bmatrix}\theta_1 S_1(1,\omega_1)+\theta_2 S_2(1,\omega_{1j})+...+\theta_N S_N(1,\omega_1)\\ \theta_1 S_1(1,\omega_2)+\theta_2 S_2(1,\omega_2)+...+\theta_N S_N(1,\omega_2)\\ \vdots\\ \theta_1 S_1(1,\omega_M)+\theta_2 S_2(1,\omega_{Mj})+...+\theta_N S_N(1,\omega_M)\end{bmatrix}. \qquad (2.2.4)$$

Таким образом с точки зрения инвестора в момент 0 стоимость портфеля в момент 1, соответствующая торговой стратегии θ является случайной величиной, значения которой образуют вектор $S(1,\Omega)\theta$.

Иногда удобно определить первую ценную бумагу, как банковский счет.

$$S_1(0)=1\ , \quad \text{и} \quad S_1(1,\omega)=1+i \quad \text{для всех } \omega\in\Omega\,.$$

В последнем равенстве неотрицательное число i может быть интерпретировано как однопериодная процентная ставка или краткосрочная ставка. Тогда $S_1(1,\omega)$ является константой как функция ω, так как i полностью известна инвесторам в момент 0.

Раздел 2.2.2

Арбитраж и фундаментальная теорема оценки активов

Арбитраж обычно определяется как одновременная покупка и продажа одних и тех же ценных бумаг, недвижимости, иностранной валюты на разных рынках с целью извлечения прибыли за счет различия цен. Наше определение арбитража выражает эту идею математически.

Определение 2.2.1 Возможностью арбитража называют такую торговую стратегию θ, для которой

$$S(0)\theta\le 0 \ \text{ и } \ S(1,\Omega)\theta>0\,. \tag{2.2.5}$$

Мы будем говорить, что модель рынка ценных бумаг свободна от арбитража, если не существует арбитражных возможностей.

Интуитивно, модель допускает арбитражную возможность, если инвестор может выбрать портфель, который ничего не стоит в настоящий момент, и который допускает некоторые выплаты инвестору в конце периода по крайней мере в одном состоянии мира.

Ясно, что арбитражные возможности являются неразумными с экономической точки зрения. Инвесторы, обнаружившие арбитражные возможности в реальном мире, пожелают установить такие большие позиции, что цены отреагировали бы таким образом, что арбитражные возможности вскоре исчезнут. Таким образом, сточки зрения экономического реализма, необходимо что наша однопериодная модель свободна от арбитража.

Пример 2.2.1 Предположим, что $M=N=2$, $S(0)=[1,1]$, и

$$S(1,\Omega) = \begin{bmatrix} 1+i & u \\ 1+i & d \end{bmatrix},$$

где u и d - это числа, такие что $d < 1 < u$. Так S_1 выражает банковский счёт с краткосрочной процентной ставкой $i > 0$, а S_2 выражает акцию, для которой конечные стоимости равны: u (“up”) или d (“down”). Рассмотрим торговую стратегию $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$, и выясним, когда она допускает арбитражную возможность. Во-первых, мы должны иметь $S(0)\theta \le 0$, то есть

$$\theta_1 + \theta_2 \le 0.$$

Во-вторых, должно выполняться неравенство $S(1,\Omega)\theta \ge 0$, то есть

$$(1+i)\theta_1 + u\theta_2 \ge 0 \qquad \text{и} \qquad (1+i)\theta_1 + d\theta_2 \ge 0.$$

Наконец, чтобы иметь $S(1,\Omega)\theta > 0$, по крайней мере, одно из этих двух неравенств должно выполняться строго.
Если $\theta_2 \ge 0$, и все три неравенства имеют место, то тогда, так как $1+i > d$, $\theta_1 \le 0$ и

$$d\theta_2 \ge -(1+i)\theta_1 \ge -d\theta_1 \ge d\theta_2.$$

Это означает, что $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Следовательно, θ не может иметь арбитражной возможности.
С другой стороны, если $\theta_2 < 0$, и все три неравенства имеют место, то тогда $\theta_1 > 0$ и

$$(1+i)\theta_1 \ge -u\theta_2 \ge u\theta_1.$$

Это влечет $1+i \ge u$. Более того, так как $-u\theta_2 > -d\theta_2$, то третье неравенство выполняется строго, что означает, что θ действительно является арбитражной возможностью.
Обратно, предположим, что $1+i \ge u$. Тогда, выбирая $\theta_1 = 1$ и $\theta_2 = -(1+i)/u \le -1$, мы добьемся выполнения двух первых неравенств. Так как $u > d$, то третье неравенство будет строгим, и таким образом θ будет арбитражной возможностью.
Из выше приведенных рассуждений мы видим, что арбитражная возможность существует тогда и только тогда, когда $1+i \ge u$. То есть банковская процентная ставка выше, чем доходность акции.

Определение 2.2.2. Вектор состояния цены ψ – строго положительный вектор $\psi = (\psi(w_1),...,\psi(w_m))$, для которого выполняется следующее соотношение:

$$S(0) = \psi \cdot S(1,\Omega) \qquad (6)$$

т.е. $\psi(\omega)$ - это случайная величина, для которой $S_j(0) = \sum_{w\in\Omega} \psi(w) S_j(1,w)$, $j = \overline{1,N}$.

Если рассмотреть (6) как систему уравнений, то это линейная система уравнений, и количество решений будет зависеть от ранга матрицы $S(1,\omega)$.

Если рассмотреть ценную бумагу Арроу-Дебреу ω_m, то ее выплаты представляют собой вектор $e_m = [0,...,0,1,0,...,0]^T$, где «1» стоит на m-ом месте.

Если существует такая торговая стратегия стратегия θ, для которой выполняется $e_m = S(1,\Omega)\theta$, то будем говорить, что такая стратегия воспроизводит платежи e_m. Если это соотношение имеет место для всех $m = \overline{1,M}$, то любой вектор платежей может быть получен с помощью некоторой торговой стратегии, так как $\{e_m\}$ образует базис в R^m.

Теорема 2.2.3.(Фундаментальная теорема оценки активов)

Однопериодный рынок ценных бумаг свободен от арбитража тогда и только тогда, когда существует вектор состояния цены.

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Пусть существует ψ - вектор состояния цены. Если вектор $S(1,\Omega)\theta > 0$, то с учетом (6) имеем:

$$S(0)\theta = \psi \cdot S(1,\Omega)\theta > 0$$

Следовательно, все портфели с положительными выплатами в момент времени $t = 1$ имеют положительные цены в момент $t = 0$, что и означает, что модель свободна от арбитража.

Докажем необходимость. Предположим сначала, что $N \geq M$, и существует M активов с линейно-независимыми выплатами в момент t=1.

Предположим, что это первые M выплат, т.е. первые M столбцов линейно независимые. Представим матрицу в виде:

$$S(0) = [L(0), R(0)],$$

где мы обозначили

$$L(0) = [S_1(0), ..., S_M(0)],$$

и

$$R(0) = [S_{M+1}(0), ..., S_N].$$

Представим матрицу $S(1,\Omega)$ в виде

$$S(1,w) = [L(1) \vdots R(1)].$$

где

$$L(1) = \begin{bmatrix} S_1(1,w_1) & ... & S_M(1,w_1) \\ ... & ... & ... \\ S_1(1,w_M) & ... & S_M(1,w_M) \end{bmatrix} \qquad R(1) = \begin{bmatrix} S_{M+1}(1,w_1) & ... & S_N(1,w_1) \\ ... & ... & ... \\ S_{M+1}(1,w_M) & ... & S_M(1,w_M) \end{bmatrix}$$

Так как существует $L_1^{-1}(1)$, то мы можем ввести вектор $\psi = L(0)L^{-1}(1)$. Для произвольной ценной бумаги Арроу-Дебреу с выплатами e_m в момент 1 рассмотрим торговую стратегию

$$\theta = \left[(L^{-1}(1)e^m)^T, 0, ..., 0\right],$$

которая обеспечивает нетривиальную позицию по M первым ценным бумагам, и нулевую позицию по оставшимся $N - M$ бумагам. Заметим, что

$$S(1,\Omega) \cdot \theta = L(1)L(1)^{-1} e_m = e_m,$$

то θ воспроизводит выплаты e_m. Так как $e_m > 0$, и нет арбитражных возможностей, то цена воспроизводящего портфеля положительна

$$S(0)\theta = L^{-1}(0)L(1)e_m = \psi \cdot e_m > 0.$$

То есть m-ая компонента ветора ψ положительна. В силу того, что m произвольное, мы заключаем, что все координаты вектора ψ положительны.
Рассмотрим $\psi \cdot S(1,\Omega) = L(0)L^{-1}(1)[L(1)\vdots R(1)] = [L(0)\vdots L(0)L^{-1}(1)R(1)]$. Если $M = N$, то $S(0) = L(0)$ и теорема доказана. Если $N > M$, то тогда столбцы $L(1)$ образуют базис в R^M, и существует матрица K размерности M на $(N\text{-}M)$ такая, что $R(1)=L(1)K$. Так как модель свободна от арбитража, то стоимость ценных бумаг должна быть равна стоимости воспроизводимого портфеля $R(1)K$. Это означает, что

$$R(0) = L(0)K = \psi L(1)K = \psi R(1).$$

Окончательно мы получаем

$$\psi S(1,\Omega) = \psi[L(1)\vdots R(1)] = [\psi L(1)\vdots \psi R(1)] = [L(0), R(0)] = S(0).$$

Пусть теперь менее M активов имеет линейно независимые выплаты ($N<M$). Отсутствие арбитража означает, что существует стратегия θ такая, что

$$\begin{bmatrix} S(1) \\ -S(0) \end{bmatrix} \theta > 0, (S(1) \equiv S(1,\Omega))$$

То есть арбитраж имеет место тогда и только тогда, когда существует θ, такое что либо

$$\begin{aligned} & S(1)\theta > 0 \\ & -S(0)\theta \geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

либо

$$\begin{aligned} & S(1)\theta \geq 0 \\ & -S(0)\theta > 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Таким образом, не существует арбитража тогдо и только тогда, когда как только
$S(1)\theta > 0$ мы не можем иметь $-S(0) \cdot \theta \geq 0$

или как только

$-S(0) \cdot \theta > 0$ мы не можем иметь $S(1)\theta \geq 0$.

Это означает, что если $S(1)\theta > 0$, то $S(0) \cdot \theta > 0$ или если $-S(0) \cdot \theta > 0$, то по крайней мере одна координата $S(1)\theta$ отрицательна.

Для простоты предположим, что активы имеют строго положительные выплаты. Добавим к модели вектор e_j как дополнительный актив причем $e_j \notin L\{S(1)\}, (rank S(1) < M)$.Обозначим стоимость этого актива в момент 0 через α. Тогда условие отсутствия арбитража примет вид:

$$\begin{cases} S(1)\theta + e_i > 0 \Rightarrow S(0)\theta + \alpha > 0 \\ S(1)\theta - e_i > 0 \Rightarrow S(0)\theta - \alpha > 0 \end{cases}$$

Так как $\{S(1)\theta \mid \theta \in R^N\} = \{-S(1)\theta \mid \theta \in R^N\}$, то эти неравенства можно переписать в виде

$$\begin{cases} S(1)\theta < e_i \Rightarrow S(0)\theta < \alpha \\ S(1)\theta > e_i \Rightarrow S(0)\theta > \alpha \end{cases} \qquad (3)$$

Поэтому стоимость, которая приписывается новой ценной бумаге должна быть больше, чем стоимость всех портфелей, которые она доминирует, и меньше чем стоимость портфелей, которые ее доминируют. Рассмотрим две величины L и U, которые определим как решения следующих задач линейного программирования:

$L = \max S(0)\theta$ при ограничениях $S(1)\theta \le e_i$, (4)

и

$U = \min S(0)\theta$ при ограничениях $S(1)\theta \ge e_i$. (5)

Заметим, что мы заменили строгие неравенства нестрогими, так как мы предполагаем, что $e_i \notin span\{S(1)\}$. Также $L \ge 0$, так как $\theta = 0$ удовлетворяет ограничению $S(1)\theta \le e_i$. Из (3-4) следует, что отсутствие арбитража означает, что $L \le U$. Также величина U всегда конечна для строго положительных активов. Если b - i-ая компонента строго положительного актива, то тогда покупая $1/b$ единиц актива будет доминировать e_i. Тогда конечная стоимость этого актива будет верхней границей для U. Следовательно $0 \le L \le U < \infty$.

Теперь проанализируем соотношение между L и U. Мы знаем, что $\{S(1)\theta \ge e_i\}$ и $\{S(1)\theta \le e_i\}$ - выпуклые множества, каждое из которых представляет собой пересечение конечного числа полупространств. Поэтому каждое множество имеет конечное число экстремальных точек. Так как L - конечно, решение задач линейного программирования достигается в экстремальных точках соответствующих множеств планов. Пусть решением (4)является θ_1^*, а (5)–в точке θ_2^*. Так как $e_i \notin span\{S(1)\}$, то мы имеем

$$S(1)\theta_1^* < e_i < S(1)\theta_2^*,$$

что означает

$$S(1)(\theta_2^* - \theta_1^*) > 0.$$

В силу отсутствия арбитражных возможностей, это означает, что и

$$S(0)(\theta_2^* - \theta_1^*) > 0.$$

Отсюда

$$L = S(0)\theta_1^* < S(0)\theta_2^* = U .$$

Следовательно, ы получаем, что $L < U$, как только $e_i \notin span\{S(1)\}$. Поэтому существует возможность выбрать α такое, что

$$L < \alpha < U,$$

и при этом выполняются (3). То есть мы смогли добавить в модель актив и она осталась безарбитражной. Продолжая добавлять активы мы можем свести проблему к рассмотренной, когда матрица $S(1,\Omega)$ имеет полный ранг.
Теорема доказана.

Пример 2.1. (продолжение)
Пусть существует $\psi = (\psi_1, \psi_2)$

$$\begin{cases} 1 = (1+i)\psi_1 + (1+i)\psi_2 \\ 1 = u\psi_1 + d\psi_2 \end{cases} \qquad i \ge 0, u > 1 > d > 0$$

$$\psi_1 = \frac{1+i-d}{(1+i)(u-d)}, \qquad \psi_2 = \frac{u-(1+i)}{(1+i)(u-d)}.$$

Так как мы уже предполагали, что $i \geq 0$, и $u > 1 > d > 0$, то вектор состояний цены существует тогда и только тогда, когда $u > 1 + i$. Заметим, что это то же условие отсутствия арбитража, которое мы получили ранее.

Раздел 2.2.8. Пример расширения однопериодной модели

Рассмотрим случай, когда мы имеем менее M линейно независимых активов.

Предположим, что

$$S(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $e_1 \notin span\{S(1)\}$, так как линейная оболочка параметризуется следующим образом

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} s \\ s+t \\ s \\ s+3t \end{bmatrix}$$

Таким образом, мы начинаем процесс расширения с добавления актива с вектором выплат в момент 1 равным e_1. Чтобы определить цену этого вектора мы должны решить следующую задачу:

$$L = \max S(0)\theta \text{ при ограничениях } S(1)\theta \leq e_1, \quad \text{и}$$

$$U = \min S(0)\theta \text{ при ограничениях } S(1)\theta \geq e_1.$$

Чтобы найти U, мы решаем следующую задачу линейного программирования:

$$\min \theta_1 + \theta_2$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&\theta_1 \ge 1\\&\theta_1+\theta_2 \ge 0\\&\theta_1 \ge 0\\&\theta_1+3\theta_2 \ge 0\end{aligned}$$

$$\max \theta_1+\theta_2$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&\theta_1 \le 1\\&\theta_1+\theta_2 \le 0\\&\theta_1 \le 0\\&\theta_1+3\theta_2 \le 0\end{aligned}$$

имеет оптимальное решение $\theta_1=\theta_2=0$, и приэтом $L=0$. Поэтому мы можем добавить в модель актив с вектором платежей в момент 1 равным e_1 по начальной цене $\alpha\in(0,\,2/3)$. Мы положим $\alpha=1/4$. Следовательно, расширенная модель свободна от арбитража и

$$S(0)=\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{1}{4}\end{bmatrix},\; S(1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}.$$

Заметим, что $e_2\notin span\{S(1)\}$, так как линейная оболочка параметризуется следующим образом

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}s+г\\s+t\\s\\s+3t\end{bmatrix}.$$

Мы продолжаем процесс расширения модели путем добавления актива с выплатами e_2 в момент 1. Чтобы определить начальную цену этого нового актива мы должны вычислить

$$L=\max S(0)\theta \text{ при ограничениях } S(1)\theta\le e_2, \quad \text{и}$$

$$U=\min S(0)\theta \text{ при ограничениях } S(1)\theta\ge e_2.$$

Для этого необходимо решить следующие задачи линейного программирования

$$\min \theta_1 + \theta_2 + \frac{1}{4}\theta_3$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\theta_1 + \theta_3 \geq 1 \\ &\theta_1 + \theta_2 \geq 0 \\ &\theta_1 \geq 0 \\ &\theta_1 + 3\theta_2 \geq 0 \end{aligned}$$

и

$$\max \theta_1 + \theta_2 + \frac{1}{4}\theta_3$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\theta_1 + \theta_3 \leq 1 \\ &\theta_1 + \theta_2 \leq 0 \\ &\theta_1 \leq 0 \\ &\theta_1 + 3\theta_2 \leq 0 \end{aligned} .$$

Решая с помощью компьютера мы получаем для первой задачи решение
$\theta_1 = 3/2,\ \ \theta_2 = -1/2,\ \ \theta_3 = -3/2$. Это дает $U = 5/8$. Для второй - $\theta_1 = 0,\ \ \theta_2 = 0,\ \ \theta_3 = 0$ и $L = 0$. Поэтому мы можем добавить актив с выплатой в момент 1 e_1 по цене $\alpha \in (0, 5/8)$ и при этом модель останется без арбитража. Мы положим $\alpha = 1/4$. Таким образом расширенная модель имеет вид

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},\ S(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Мы получили свободную от арбитража модель с $M = 4$ линейно независимыми активами. Вектором состояний цены для этой модели является вектор

$$\psi = S(0)\cdot S(1)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Этот вектор является вектором состояний цены и для исходной модели.

Раздел 2.2.3. Риск-нейтральные вероятностные меры

В этом разделе мы будем предполагать, что S_1 – банковский счет. Другими словами $S_1(0)=1,\ \ S_1(1,\omega)=1+i,$ для всех $\omega\in\Omega$, где i - однопериодная процентная ставка.
При данном векторе состояний цены определим

$$Q(\omega)=(1+i)\psi(\omega)>0 \qquad ,\omega\in\Omega$$
(1)

Заметич, что все эти величины положительны для всех ω.Учитывая определение вектора состояний цены, мы получаем

$$S_j(0)=\sum_w \psi(\omega)S_j(1,\omega)=\sum_\omega \frac{Q(\omega)}{1+i}S_j(1,\omega).$$
(2)

В частности, при $j=1$ мы имеем

$$S_1(0)=1=\sum_\omega Q(\omega). \qquad (3)$$

Правая часть (2) может рассматриваться как ожидаемая дисконтированная цена ценной бумаги j по мере Q.

Определение 2.2.4. Риск-нейтральная вероятностная мера – это такая вероятностная мера Q на Ω, для которой выполняются условия:

а) $Q(\omega)>0$ для всех $w\in\Omega$,

б) $S_j(0)=\sum_\omega \frac{Q(\omega)}{1+i}S_j(1,\omega)$, для $j=\overline{2,N}$.

Риск-нейтральная мера- это положительная мера, по которой ожидаемая дисконтированная цена любой ценной бумаги равна начальной цене этой ценной бумаги.
Начиная с риск-нейтральной меры, мы можем определить вектор состояний цены ψ. Так как сумма вероятностей равна 1, то

$$1=\sum_{\omega}Q(\omega)=\sum_{\omega}\psi(\omega)(1+i)=\sum_{\omega}\psi(\omega)S_1(1,\omega).$$

Это первая строка из определения вектора состояний цены.
Остальные строки (6) получаются из соотношения (2).
Следовательно, при наличии банковского счета существование вектора состояний цены эквивалентно существованию риск-нейтральной вероятностной меры.

Теорема 2.2.5. *Пусть ценная бумага 1 – это банковский счет, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *однопериодная модель свободна от арбитража,*
2. *существует вектор состояния цены ψ,*
3. *существует риск – нейтральная мера.*

Пример 2.1. (продолжение). В этом примере первая ценная бумага была банковским счетом. Учитывая вид вектора состояний цены для этого случая мы находим, что

$$q_1=\frac{1+i-d}{u-d} \text{ и } q_2=\frac{u-(1+i)}{u-d}.$$

Заметим, что $q_1+q_2=1$. Более того, эти величины положительны тогда и только тогда, когда $u>1+i$. Это условие отсутствия арбитража, которое было получено ранее. Заметим, что ожидаемая дисконтированная цена для второй ценной бумаги равна в этом случае

$$q_1\cdot\frac{S_2(1,\omega_1)}{1+i}+q_2\cdot\frac{S_2(1,\omega_2)}{1+i}=\frac{1+i-d}{u-d}\frac{u}{1+i}+\frac{u-(1+i)}{u-d}\frac{d}{1+i}=\frac{u-d}{u-d}=1=S_2(0).$$

Раздел 2.2.4. Оценивание потоков платежей.

Главной целью моделей рынка ценных бумаг является получение стоимости будущих потоков платежей с неопределенностью в момент 0. В случае однопериодной модели такие потоки платежей могут быть описаны с помощью случайной величины X, которая

выражает выплаты в момент 1.Другими словами, $X(\omega)$ - это выплата, которая происходит, если реализуется состояние мира $\omega \in \Omega$.
Первым важным принципом является идея воспроизведения потока платежей (cash- flow replication). Мы будем говорить, что торговая стратегия θ воспроизводит вектор потока платежей X , если

$$S(1,\Omega)\theta = X,$$

то есть

$$X(\omega) = \sum_j S_J(1,\omega)\theta_j$$

для всех $\omega \in \Omega$.

Мы будем говорить, что платеж X достижим, если он может быть воспроизведен некоторой стратегией.
Вторым важным принципом является идея арбитражного оценивания: если платеж X достижим, то его стоимость в момент 0 должна равняться стоимости воспроизводящего этот платеж портфеля в момент 0. покажем это. Введение платежа X - это то же самое, что и добавление в модель новой ценной бумаги, имеющей в момент 1 цену, скажем, π. Если π не равно в момент 0 стоимости воспроизводящего портфеля, то либо $\pi > S(0)\theta$, либо $\pi < S(0)\theta$. В первой ситуации вы можете купить или продать позицию платежа по цене, которая больше начальной стоимости воспроизводящего портфеля. В этом случае арбитражер продал бы платеж в момент 0 и получил бы π долларов, обещая доставить $X(\omega)$ в момент 1, если наступит $\omega \in \Omega$. Арбитражер также может занять длинную позицию по воспроизводящему портфелю, который стоит $S(0)\theta$ долларов. При этом остается чистый доход $\pi - S(0)\theta > 0$ долларов. В момент 1 арбитражер имеет обязательство заплатить X , но это будет как раз равно $S(1,\Omega)\theta$, то есть стоимости в момент 1 его портфеля. Значит, чистое обязательство будет равно 0. Таким образом, арбитражер получил сумму $\pi - S(0)\theta > 0$ без необходимости начального капитала и без риска потерять деньги. Случай $\pi < S(0)\theta$ рассматривается подобным образом.
Справедлива
Теорема 2.2.6. *В однопериодной модели свободной от арбитража стоимость в момент достижимого платежа X равна стоимости воспроизводящего портфеля в момент 0.*

Существует еще одно замечательное следствие фундаментальной теоремы оценки активов. Рассмотрим вектор состояний цены ψ. Так как $S(1,\Omega)\theta = X$, то $\psi \cdot S(1,\Omega)\theta = \psi \cdot X$. Однако $S(0)\theta = \psi \cdot S(1.\Omega)\theta$, и следовательно

$$S(0)\theta = \psi \cdot X .$$

Последнее равенство говорит нам о том, что цена в момент 0 воспроизводящего портфеля и платежа X равна $\psi \cdot X$. Это означает, что эта величина может быть вычислена без знания торговой стратегии θ с помощью вектора состояний цены.
Если первая ценная бумага – это банковский счет с процентной ставкой $i \geq 0$, то стоимость в момент 0 платежа X равна

$$\psi \cdot X = \sum_{\omega} \psi(\omega) X(\omega) = \sum_{\omega} \frac{Q(\omega)}{1+i} X(\omega) .$$

Стоимость платежа X равна ожидаемой дисконтированной стоимости X, где математическое ожидание берется по риск-нейтральной вероятностной мере.
Теорема 2.2.7. *В свободной от арбитража однопериодной модели стоимость в момент 0 достижимого потока платежей X равна $\psi \cdot X$, где ψ - вектор состояний цены. Если при этом первая ценная бумага – банковский счет с процентной ставкой $i \geq 0$, то*

$$\psi \cdot X = \sum_{\omega} \frac{Q(\omega) X(\omega)}{1+i} ,$$

где Q - риск-нейтральная мера.

2.2.5. Полнота в однопериодной модели.

Определение 2.2.8. *Свободная от арбитража однопериодная модель называется полной, если для всякого потока платежей $X \in R^M$ существует торговая стратегия $\theta \in R^N$ такая, что*

$$S(1,\Omega)\theta = X .$$

Таким образом, на полном рынке мы можем сформировать портфель, который воспроизводит любой поток платежей.

Следующая теорема дает нам необходимое и достаточное условие полноты модели.

Теорема 2.2.9. *Предположим, что однопериодная модель свободна от арбитража. Тогда модель полная тогда и только тогда, когда существует единственный вектор состояний цены.*

Доказательство. Предположим, что модель полная, но существуют два различных вектора состояний цены, скажем ψ и $\tilde{\psi}$. Так как любой поток платежей достижим, то найдется такой платеж X, что $\psi \cdot X \neq \tilde{\psi} \cdot X$. Но это противоречит теореме 2.2.6., ибо X не может иметь две различных стоимости в момент 0.
Теперь предположим, что модель не является полной. Тогда для некоторого
$X \in R^M$ не существует $\theta \in R^N$ такого, что $S(1,\Omega)\theta = X$.Таким образом, ранг $S(1,\Omega)$ строго меньше, чем M. Это означает, что M строк этой матрицы линейно зависимы. Это значит, что найдется ненулевой вектор $\phi \in R^M$, для которого $\phi S(1,\Omega) = 0$. Так как модель свободна от арбитража, то существует по крайней мере один вектор состояний цены ψ. Для любого положительного ε, настолько малого, что $\psi + \varepsilon\phi >> 0$, мы имеем

$$(\psi + \varepsilon\phi)S(1,\Omega) = \psi S(1,\Omega) + \varepsilon S(1,\Omega) = \psi S(1,\Omega) = S(0).$$

Это говорит о том, что мы имеем бесконечно много векторов состояний цены, что противоречит предположению. Теорема доказана.
Из приведенного доказательства видно, что в полной однопериодной модели стоимость ценной бумаги Арроу-Дебреу для исхода ω равна $\psi(\omega)$. Объединяя фундаментальную теорему оценки активов с последней теоремой ,мы можем сформулировать следующий результат: *Однопериодная модель свободна от арбитража и полная тогда и только тогда, когда существует единственный вектор состояний цены.*
Если ценная бумага номер 1 – это банковский счет, то справедливо
Следствие 2.2.10. *Предположим, что ценная бумага 1 – это банковский счет. Тогда однопериодная модель свободна от арбитража иявляется полной тогда и только тогда, когда существует единственная риск-нейтральная мера.*

Раздел 2.2.6. Применение фундаментальной теоремы оценки активов

Для данной модели рынка ценных бумаг мы можем вычислить все векторы состояний цены, определив все строго положительные решения системы уравнений:

$$S(0) = \psi \cdot S(1, \Omega).$$

Если рынок без арбитража, то в соответствии с фундаментальной теоремой оценки активов, по крайней мере один строго положительный вектор есть. Мы можем попытаться найти все такие векторы.

Пример 2.2.3. Найдем все векторы состояний цены для следующей модели

$$S(0) = [1,\ 1], \qquad S(1, \Omega) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Этот рынок содержит два актива, начальная цена каждого из которых равна 1. Имеется четыре возможных состояний мира, каждому из которых соответствует строка матрицы $S(1, \Omega)$. Пусть $\psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4]$- решение. Тогда

$$2\psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_3 + 2\psi_4 = 1$$

$$4\psi_3 + 4\psi_4 = 1.$$

Семейство решений является двухпараметрическим.

$$\psi_4 = t,$$
$$\psi_3 = \frac{1}{4} - t,$$
$$\psi_2 = s,$$
$$\psi_1 = \frac{1}{4} - s.$$

Условие строгой положительности этого вектора приводит к ограгичениям
$0 < t < 1/4$ и $0 < s < 1/4$. Все векторы состояний цены мы можем записать в виде

$$H = \left\{ \left[\frac{1-4s}{4}, s, \frac{1-4t}{4}, t, \right] \mid (s,t) \in W \right\},$$

где $W = \left\{ (s,t) \middle| \; 0 < s < \frac{1}{4}, \;\; 0 < t < \frac{1}{4} \right\}$ - область допустимых значений параметров.

Пример2.2.4. Рассмотрим модель рынка, слегка отличающуюся от предыдущей

$$S(0) = [1, \; 1], \qquad S(1,\Omega) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Аналогично предыдущему примеру мы можем найти,

$$H = \left\{ \left[\frac{1-4s-t}{4}, s, \frac{1-3t}{4}, t, \right] \mid (s,t) \in W \right\},$$

где $W = \left\{ (s,t) \middle| \; 0 < s, \;\; 0 < t < \frac{1}{3}, \; \frac{4s+t}{4} < \frac{1}{4} \right\}$ - область допустимых значений параметров.

Предположим, что мы хотим ввести новую ценную бумагу в данную неполную модель. Так как модель рынка должна остаться свободной от арбитража, то мы знаем из фундаментальной теоремы оценки активов, что вектор состояний цены должен существовать. Он должен принадлежать семейству H. Следовательно, новая ценная бумага, имеющая вектор цен c, может быть введена с условием, что ее цена в момент 0 равна $\psi \cdot c$ для некоторого $\psi \in H$. Например, для вектора цен в момент 1 $c = [1\ 0\ 0\ 1]^T$

$$\psi \cdot c = 1 \cdot \frac{1-4s-t}{4} + 0 \cdot s + 0 \cdot \frac{1-3t}{4} + 1 \cdot t = \frac{1}{4} - s + \frac{3}{4} t .$$

Тогда область возможных цен для новой бумаги в момент 0

$$\left\{ \frac{1}{4} - s + \frac{3}{4} t \middle| (s,t) \in W \right\}.$$

Несложно проверить, что $\left\{ \frac{1}{4} - s + \frac{3}{4} t \middle| (s,t) \in W \right\} = \left(0, \frac{1}{2} \right)$. Это означает, что вектор c может быть введен по любой начальной цене из этого интервала, и рынок останется при этом свободным от арбитража.

Подход Марковица

Среди практиков подход Марковица, предложенный в 1952 году, является наиболее популярным. Он положил начало развитию теории портфелей в различных направлениях. В то время крупным достижением было то, что в модели стали учитываться ковариации между доходностями активов. Более того, математическая структура предложенной модели позволила получить модель определения цен основных активов.

В модели Марковица не проводится различия между доходом от капитала и изменением цены активов. Предположим, что существуют N рисковых активов со случайными доходностями $R_1,...,R_N$. Мы предполагаем, что доходности имеют конечные вторые моменты. Положим $\mu_i = \overline{R}_i = E(R_i)$, i = 1,…,N;

$$\mu^T = (\mu_1,...,\mu_N),\ \Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,...,N} \text{, где } \sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j).$$

Как отмечалось выше, тогда доходность портфеля $X^T = (X_1,...,X_N)$ определяется равенством

$$R_X = \sum_{i=1}^{N} X_i R_i .$$

Отсюда

$$\mu_X = E(R_X) = \mu^T X ,$$

и

$$\sigma_X^2 = Var(R_X) = X^T \sum X .$$

Портфель X^* называется *эффективным*, если не существует портфеля X, для которого $\mu_X \geq \mu_{X^*}$ и $\sigma_X^2 < \sigma_{X^*}^2$.

Метод Марковица предназначен для вычисления эффективных портфелей. Здесь мы рассмотрим один из наиболее распространенных на практике вариантов. В соответствии с этим подходом максимизируется функция

$$2\tau\overline{R}_X - \sigma_X^2 \ , \ \ \tau \geq 0 , \qquad (1)$$

где параметр τ называется толерантностью (расположенностью) к риску данного инвестора. Этот параметр тесно связан с так называемой мерой риска Пратта- Арроу

$$R_R(w) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}.$$

При данном начальном капитале w_0 и выбранном портфеле X капитал на конец периода равен $w_0(1+R_X)$. Разлагая функцию полезности в ряд Тейлора и оставляя только три члена, мы имеем

$$u(w_0(1+R_X)) \approx u(w_0) + w_0 \cdot u'(w_0) \cdot R_X + \frac{1}{2} w_0^2 \cdot u''(w_0) \cdot R_X^2 .$$

Тогда ожидаемая полезность аппроксимируется следующим образом

$$E\big[\ u(w_0(1+R_X))\ \big] \approx u(w_0) + w_0 \cdot u'(w_0) \cdot \mu_X + \frac{1}{2} w_0^2 \cdot u''(w_0) \cdot \big[\sigma_X^2 + \mu_X^2\ \big] \approx$$

$$\approx u(w_0) - \frac{w_0^2}{2} \cdot u''(w_0) \cdot \left[-\frac{2u'(w_0)}{w_0 u''(w_0)} \mu_X - (\sigma_X^2 + \mu_X^2)\ \right].$$

При такой аппроксимации, максимизация ожидаемой полезности приблизительно эквивалентна максимизации

$$\frac{2}{R_R} \mu_X - (\sigma_X^2 + \mu_X^2) .$$

Обычно член μ_X^2 - достаточно мал, и поэтому целевая функция превращается в

$$\frac{2}{R_R}\mu_X - \sigma_X^2,$$

которая эквивалентна целевой функции из (1). Конечно, игнорирование μ_X^2 и моментов выше второго порядка оправдано лишь для непродолжительных инвестиционных периодов.

Следовательно, для инвестора с толерантностью к риску τ мы должны решать следующую оптимизационную задачу

$$\begin{aligned}&\max_{X\in R^N}\left\{2\tau\mu_X - \sigma_X^2\right\}\\ &\sum_{i=1}^{N} X_i = 1\end{aligned},$$

или

$$\begin{aligned}&\max_{X\in R^N}\left\{2\tau\mu^T X - X^T \Sigma X\right\}\\ &e^T X = 1\end{aligned}, \qquad (2)$$

где $e^T = (1,1,\ldots,1) \in R^N$. Решение (2) для всех $\tau \in [0,+\infty)$ дает множество эффективных портфелей. Множество точек, которые соответствуют эффективным портфелям на графике в координатах (μ_X, σ_X^2), называется *эффективной фронтирой*. Эффективный портфель, соответствующий $\tau = 0$ является портфелем с минимальной дисперсией и обозначается $X^{\min}$.

Заметим, что, так как Σ неотрицательно определенная матрица, то целевая функция в (2) является выпуклой. Следовательно, (2) представляет собой задачу выпуклой квадратичной оптимизации. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(X,\lambda) = 2\tau\mu^T X - X^T \Sigma X + \lambda(e^T X - 1).$$

По теореме Куна-Таккера необходимое и достаточное условие глобального оптимума имеет вид

$$2\tau\mu - 2\Sigma X + \lambda e = 0, \qquad (3)$$

$$e^T X = 1. \qquad (4)$$

Заметим, что эти условия линейны по весам портфеля X и множителю Лагранжа λ. Далее предположим, что

- Σ - положительно определенная матрица;
- e и μ линейно независимы .

Множество эффективных портфелей

Полагая в равенстве (3) $\tau = 0$, мы получаем портфель с минимальной дисперсией.

$$X^{\min} = \frac{1}{e^T \sum^{-1} e} \sum^{-1} e. \qquad (5)$$

Действительно, выражая X из (3) и подставляя в (4), мы имеем

$$e^T \frac{1}{2} \sum^{-1} \lambda e = 1.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{2}{e^T \sum^{-1} e}.$$

Тогда из (3) мы находим, что

$$X = \frac{1}{e^T \sum^{-1} e} \sum^{-1} e.$$

Это совпадает с (5).

Поступая аналогичным образом при $\tau > 0$, мы находим что

$$X = \frac{1}{2} \lambda \sum^{-1} e + \tau \sum^{-1} \mu \qquad (5^*)$$

Подставляя в (4) находим, что

$$\frac{1}{2} \lambda e^T \sum^{-1} e + \tau e^T \sum^{-1} \mu = 1$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{1 - 2\tau e^T \sum^{-1} \mu}{e^T \sum^{-1} e}$$

С учетом (5*), имеем

$$X^* = \frac{1}{e^T \sum^{-1} e} \sum^{-1} e + \tau \left(\sum^{-1} \mu - \frac{e^T \sum^{-1} \mu}{e^T \sum^{-1} e} \sum^{-1} e \right),$$

Или

$$X^* = X^{\min} + \tau Z^*, \qquad (6)$$

где

$$Z^* = \left(\sum^{-1} \mu - \frac{e^T \sum^{-1} \mu}{e^T \sum^{-1} e} \sum^{-1} e \right).$$

Таким образом, эффективный портфель имеет вид (6), где $X^{\min}$ - портфель с минимальной дисперсией, зависящей лишь от $\sum$, а Z^* - самофинансируемый портфель, зависящий от $\sum$ и μ, и удовлетворяющий условию

$$\sum_{i=1}^{N} Z^*{}_i = 0. \qquad (7)$$

Соотношение (7) получается подстановкой (6) в (4) с учетом условия $e^T X^{\min} = 1$. Действительно:

$$\sum_{i=1}^{N} Z^*{}_i = e^T Z^* = e^T \sum^{-1} \mu - \frac{e^T \sum^{-1} \mu}{e^T \sum^{-1} e} e^T \sum^{-1} e = 0$$

Самофинансируемость портфеля Z^* означает, что в этом портфеле длинные позиции финансируются соответствующими короткими позициями. Формула (6) может быть интерпретирована следующим образом: портфель $X^{\min}$ приводит к позиции с минимальным риском, которая корректируется самофинансируемым портфелем Z^*.

Эффективная граница.

Формула (6) позволяет легко вычислить эффективную границу (фронтиру). Справедливо равенство

$$Var(R_{X^*}) = X^{*T} \sum X = (X^{\min} + \tau Z^*)^T \sum (X^{\min} + \tau Z^*) =$$
$$= (X^{\min})^T \sum X^{\min} + \tau^2 (Z^*)^T \sum Z + 2\tau (Z^*)^T \sum X^{\min}.$$

С другой стороны

$$Var(R_{X^*}) = Var(R_{X^{\min}} + \tau R_{Z^*}) = Var(R_{X^{\min}}) + \tau^2 Var(R_{Z^*}) + 2\tau Cov(R_{X^{\min}}, R_{Z^*})$$
$$=$$

$$= (X^{\min})^T \sum X^{\min} + \tau^2 (Z^*)^T \sum Z + 2\tau Cov(R_{X^{\min}}, Z^*). \qquad (8)$$

Отсюда

$$Cov(R_{X^{\min}}, R_{Z^*}) = (Z^*)^T \sum X^{\min} =$$

$$= (\mu^T \sum^{-1} - \frac{e^T \sum^{-1} \mu}{e^T \sum^{-1} e} e^T \sum^{-1}) \sum \frac{1}{e^T \sum^{-1} e} \sum^{-1} e =$$

$$= (\mu^T \sum^{-1} \sum \frac{1}{e^T \sum^{-1} e} \sum^{-1} e - \frac{e^T \sum^{-1} \mu}{e^T \sum^{-1} e} e^T \sum^{-1} \sum \frac{1}{e^T \sum^{-1} e} \sum^{-1} e =$$

$$=(\mu^T \frac{1}{e^T \sum^{-1} e} \sum^{-1} e - \frac{e^T \sum^{-1} \mu}{e^T \sum^{-1} e}) = 0 . \qquad (9)$$

Для портфеля X^* мы имеем

$$\mu_{X^*} = \mu_{X^{\min}} + \tau\mu_{Z^*} , \qquad (10)$$

и, с учетом (8-9)

$$\sigma^2_{X^*} = \sigma^2_{X^{\min}} + \tau^2\sigma^2_{Z^*} \qquad (11).$$

Выражая τ из (11) и подставляя в (10) мы получаем уравнение эффективной границы

$$\mu_{X^*} = \mu_{X^{\min}} + \frac{\mu_{Z^*}}{\sigma_{Z^*}} \sqrt{\sigma^2_{X^*} - \sigma^2_{X^{*\min}}}$$

Это уравнение параболы в координатах (μ_X, σ^2_X), и гиперболы в координатах (μ_X, σ_X).

Модель Марковица с безрисковым активом

Выше полученные результаты претерпевают небольшие изменения при добавлении безрискового актива. Мы предположим, что в дополнение к N рисковым активам с ковариационной матрицей $\sum = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ и ожидаемыми доходностями $\tilde{\mu} = (\mu_i)_{i=1,\dots,N}$, существует безрисковый актив с фиксированной доходностью $R_0 = r$. Тогда портфель

$$X^T = (X_0, X_1, \dots, X_N), \sum_{i=0}^{N} X_i = 1$$

имеет доходность

$$R_X = \sum_{i=0}^{N} X_i R_i .$$

Учитывая, что $\mathrm{cov}(R_0, R_i) = 0$ при $i = 0,1,\dots,N$,ковариационная матрицавектора $(R_0,\dots,R_N)$ Σ_1 имеет вид:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0\,0\ldots\ldots 0 \\ 0\sigma_{11}\ldots\sigma_{1N} \\ . \\ . \\ 0\sigma_{N1}\ldots\sigma_{NN} \end{pmatrix},$$

а $X_0 = 1 - \sum_{i=1}^{N} X_i$,то подлежащий максимизации функционал принимает вид

$$F_X = 2\cdot\tau\cdot\mu_X - X^T \cdot \Sigma_1 \cdot X = 2\cdot\tau\cdot(1-\tilde{X}^T\tilde{e})\cdot r + \tilde{X}^T\tilde{\mu} - \tilde{X}^T\Sigma\tilde{X} \quad .$$
(12)

В этом равенстве мы положили $\tilde{X}^T = (X_1,..., X_N)$, $\Sigma = (\sigma_{ij})$, $\tilde{e}$ -вектор из N единиц. Находим градиент правой части (12)

$$gradF_X = -2\tau r\tilde{e} + 2\tau\tilde{\mu} - 2\Sigma\tilde{X} \,. \qquad (13)$$

Если

- $\sum$ - положительно определенная матрица, и
- $r \neq \mu_i$ для некоторого $i \in \{1,...,N\}$, то

Приравнивая к нулю правую часть соотношения (13), находим что

$$\tilde{X}^* = \tau\Sigma^{-1}(\tilde{\mu} - r\tilde{e}), \qquad (14)$$

где $\tilde{e}^T = (1,...,1)$ - N -мерный вектор из единиц. Тогда эффективный портфель имеет вид

$$X^* = (1 - \tilde{X}^{*T}\tilde{e}, \tilde{X}^*).$$

Учитывая это, находим, что

$$\mu_{X^*} = r(1 - \tilde{X}^{*T}\tilde{e}) + \tilde{X}^{*T}\tilde{\mu}$$

С учетом (14) мы находим, что

$$\mu_{X^*} = r + \tau(\tilde{\mu} - r\tilde{e})^T \Sigma^{-1}(\tilde{\mu} - r\tilde{e})$$
(15)

Найдем дисперсию эффективного портфеля.

$$\sigma_{X^*}^2 = Var((1-\tilde{X}^{*T}\tilde{e})r + \sum_{i=1}^{N} X_i R_i) = \tilde{X}^{*T}\Sigma\tilde{X}^* = \tau^2(\tilde{\mu} - r\tilde{e})^T \Sigma^{-1}(\tilde{\mu} - r\tilde{e})$$

(16)

Выражая τ из (16) и подставляя в (15), получаем уравнение эффективной фронтиры

$$\mu_{X^*} = r + \sqrt{(\tilde{\mu} - r\tilde{e})^T \Sigma^{-1}(\tilde{\mu} - r\tilde{e})}\ \ \sigma_{X^*}.$$

Эффективная граница является параболической в координатах (μ_X, σ_X^2) и линейной в координатах (μ_X, σ_X).

Заметим, что эффективный портфель можно представить в виде

$$X^* = X^{\min} + \tau Z^*,$$

где

$$X^{\min} = (1,0,\ldots,0) \in R^{N+1},$$

и

$$\sum_{i=0}^{N} Z_i^* = 0.$$

Из условий оптимальности может быть выведено несколько полезных для практики соотношений.

Обратная оптимизация

Подход Марковица используется для решения проблемы выбора портфеля, когда имеются сотни инвестиционных возможностей. Однако, в некоторых важных применениях инвестиционные возможности представляют собой такие категории активов, как внутренняя валюта, внутренние акции или индексы облигаций, зарубежные индексы. В рамках этих категорий число активов редко превышает 20 $(N \le 20)$.

Для практического применения метода Марковица необходимо знание оценки ковариационной матрицы $\sum$ и вектора ожидаемых доходностей $\tilde{\mu}$. В большинстве случаев для оценки матрицы $\sum$ используются прошлые значения доходностей. Очень часто оценка основывается на ежемесячных данных за последние пять лет (60 наблюдений). Результаты обычно являются более или менее удовлетворительными.

Одной из главных задач в теории управления портфелем является оценка $\tilde{\mu}$. Обычно оптимальный портфель X^* является очень чувствительным по отношению к $\tilde{\mu}$. Поэтому точное оценивание $\tilde{\mu}$ представляется важным. Кажется правильным вычислить арифметическое или геометрическое среднее за последние несколько лет. Однако, при таком методе длительные периоды увеличения цен акций или их резкие скачки будут наивно экстраполироваться в будущее. Не прямой метод является более многообещающим. Из условий оптимальности (1-2) мы получаем

$$2\tau(\tilde{\mu} - re) = 2\sum \tilde{X}^*$$

или

$$\begin{pmatrix} E[R_1] - r \\ E[R_2] - r \\ \dots \\ E[R_N] - r. \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau} \sum \tilde{X}^*$$

Последняя формула применяется следующим образом .Сначала $\sum$ оценивается по имеющимся данным. Доходность r обычно известна. Для $\tilde{X}^*$ используют портфель представляющий среднего инвестора. Подходящий выбор τ гарантирует, что премия за риск $E[R_i - r]$ соответствует очень длительному историческому уровню (например 5% для обычных акций).

Этот метод называется *обратной оптимизацией*, а соответствующие значения для $\tilde{\mu}$ - нейтральными доходностями. Для тактического распределения активов эти нейтральные доходности корректируются в соответствиями с прогнозами отдела исследования инвестиций.

Оценивание расположенности к риску

Порой нам достаточно хорошо известен тип портфеля, который мог бы быть подходящим для данного инвестора (скажем, 40% акций и 60% фиксированного дохода). Однако, для стратегических целей распределения инвестиций (например, инвестиций в зарубежные облигации и рынки акций) необходимо знание τ. В самом деле, при данном эффективном портфеле X^* вычисление соответствующего τ достаточно просто.

$$F_X = 2 \cdot \tau \cdot \mu_X - X^T \cdot \Sigma_1 \cdot X = 2 \cdot \tau \cdot (1 - \tilde{X}^T \tilde{e}) \cdot r + \tilde{X}^T \tilde{\mu} - \tilde{X}^T \Sigma \tilde{X} =$$

$$= 2 \cdot \tau \cdot X_0 r + 2 \cdot \tau \cdot \tilde{X}^T \tilde{\mu} - \tilde{X}^T \Sigma \tilde{X}$$

Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$L(X,\lambda\ ) = 2\cdot\tau\cdot X_0 r + 2\cdot\tau\cdot\widetilde{X}^T\widetilde{\mu} - \widetilde{X}^T\Sigma\widetilde{X}\quad + \lambda(\sum_{i=0}^{N} X_i - 1)$$

Взяв промзводные, имеем

$$2\cdot\tau\cdot r + \lambda = 0$$

$$2\tau\widetilde{\mu} - 2\Sigma\widetilde{X}^* + \lambda\widetilde{e} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{N} X_i = 1$$

Тогда второе из выше приведенных соотношений с учетом первого примет вид

$$2\tau(\widetilde{\mu} - r\widetilde{e}) - 2\Sigma\widetilde{X}^* = 0$$

Умножим его слева на X^{*T}. Тогда получим

$$2\tau\widetilde{X}^{*T}(\widetilde{\mu} - r\widetilde{e}) - 2X^{*T}\Sigma\widetilde{X}^* = 0$$

Но $rX^{*T}\widetilde{e} = r(1 - X_0)$, и

$$2\tau\widetilde{X}^{*T}(\widetilde{\mu} - r\widetilde{e}) - 2X^{*T}\Sigma\widetilde{X}^* = 2\tau(ER_{X*} - r) - 2Var(R_{X*}) = 0$$

Отсюда

$$\tau = \frac{Var(R_{X^*})}{E\left[R_{X^*}\right] - r}\quad . \qquad (6)$$

Маргинальные полезности изменений портфеля

Обычно инвестор начинает с неэффективного портфеля X. Очень часто решение задачи

$$\max_X \left\{2\tau(rX_0 + \widetilde{\mu}^T\widetilde{X}) - \widetilde{X}^T\Sigma\widetilde{X}\right\},$$

$$\sum_{i=0}^{N} X_i = 1,$$

не может быть использовано по ряду установленных законодательно причин и в силу высоких стоимостей сделок. В такой ситуации маргинальные полезности являются весьма удобным инструментом.

Выражая X_0 из последнего равенства и подставляя в целевую функцию, мы получаем

$$F(\widetilde{X}) = 2\tau(r + (\widetilde{\mu} - r\widetilde{e})^T \widetilde{X}) - \widetilde{X}^T \sum \widetilde{X}.$$

Компоненты $\dfrac{\partial F(\widetilde{X})}{\partial X_i}$ градиента

$$gradF(\widetilde{X}) = 2\tau(\widetilde{\mu} - r\widetilde{e}) - 2\sum \widetilde{X} = (2\tau(E[R_i] - r) - 2Cov(R_{\widetilde{X}}, R_i))_{i=1,\dots,N}$$

называются *маргинальными полезностями*. В самом деле, увеличение dX_i доли актива i и соответствующее уменьшение доли безрискового актива приводит к маргинальному изменению $\dfrac{\partial F(\widetilde{X})}{\partial X_i} dX_i$ целевой функции. Путем увеличения (уменьшения) долей активов с высокими (низкими0 маргинальными полезностями неэффективный портфель X может быть существенно улучшен.

Модель оценивания основных активов

Шарп и Линтнер разработали равновесную модель для цен активов. Кроме общего предположения рынков без трения (frictionless), их модель описывается следующим образом:

1. Существует безрисковый актив ($i = 0$)и N рисковых активов i = 1,…,N.
2. Существует K инвесторов, k = 1,…,K, со следующими характеристиками:
   - Все инвесторы считают одинаковыми первые и вторые моменты доходностей активов, то есть $\widetilde{\mu}^{(k)} = \widetilde{\mu}$, $\sum^{(k)} = \sum$, k=1,…,K.
   - Матрица $\sum$ положительно определена .
   - Все инвесторы имеют горизонт планирования длительностью один период.
   - Инвестор k инвестирует начальный капитал $w_k > 0$.
   - Инвестор k имеет коэффициент расположенности к риску $\tau_k > 0$ и выбирает эффективный портфель в соответствии с подходом Марковица.

Из выше изложенного мы знаем, что каждый инвестор выбирает портфель

$$X^{(k)} = X^{\min} + \tau_k Z^*, \quad k = 1,\dots,K.$$

Суммарный спрос образует портфель

$$X^{M.d} = \frac{1}{w}\sum_{k=1}^{K} w_k X^{(k)},$$

с $w = \sum_{k=1}^{K} w_k$. Это можно переписать в виде

$$X^{M.d} = X^{\min} + \tau_M Z^*,$$

где

$$\tau_M = \frac{1}{w}\sum_{k=!}^{K} w_k \tau_k .$$

Следовательно, $X^{M.d}$ - эффективный портфель и удовлетворяет условиям оптимальности (1-3). Также как и ранее мы получаем

$$\begin{pmatrix} E[R_1] - r \\ E[R_2] - r \\ \dots \\ E[R_N] - r. \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_M}\sum X^{M.d} = \frac{1}{\tau_M}\begin{pmatrix} Cov(R_1, R_{X^{M.d}}) \\ \\ . \\ Cov(R_N, R_{X^{M.d}}) \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

и

$$Var(R_{X^{M.d}}) = \tau_M (E\lfloor R_{X^{M.d}} \rfloor - r) \qquad (8)$$

<u>Умножив (7) на (8). Мы имеем</u>

$$E[R_i] - r = \frac{Cov(R_i, R_{X^{M.d}})}{Var(R_{X^{M.d}})}(E[R_{X^{M.d}}] - r), \; i = 1, \dots, N . \qquad (9)$$

Мы использовали только эффективность портфеля $X^{M.d}$. В условиях равновесия совокупный спрос равен совокупному предложению. Совокупное предложение дается рыночным портфелем X^M, в котором все активы содержатся в пропорции к их рыночным стоимостям. В силу равновесия

$$X^{M.d} = X^M,$$

и, следовательно рыночный портфель X^M должен удовлетворять соотношению (9). Обозначая $R^M = R_{X^M}$, мы получаем соотношение модели оценивания основных активов

$$E[R_i] - r = \frac{Cov(R_i, R^M)}{Var(R^M)}(E[R^M] - r) = \beta_i (E[R^M] - r), \; i = 1, \dots, N . \quad (10)$$

Некоторые комментарии

1. В практических приложениях доходность индекса акций или комбинации индексов акций и облигаций используется как приближение для R^M .

2. Коэффициент $\beta_i = \dfrac{Cov(R_i, R^M)}{Var(R^M)}$ называется *«бета» коэффициентом* актива i.
3. Разность $E[R_i] - r$ называется *рисковой премией* на актив i.
4. Разность $E[R^M] - r$ называется *рисковой премией* на рыночный портфель.
5. Соотношение (10) говорит нам о том, что $Cov(R_i, R^M)$ а не дисперсия R_i имеет отношение к рисковой премии на актив i. Это имело важные последствия для экономического моделирования.
6. В условиях стационарности и нормальности распределений, мы можем оценить бета коэффициент, используя обычный метод наименьших квадратов для модели

$$R_i - r = \alpha_i + \beta_i (R^M - r) + \varepsilon_i .$$

Член $\beta_i (R^M - r)$ соответствует систематическому риску, который не может быть диверсифицирован. Ошибка ε_i, удовлетворяющая условию $Cov(\varepsilon_i, R^M) = 0$, соответствует несистематическому риску. Следовательно, возможна следующая декомпозиция суммарного риска, измеряемого с помощью дисперсии:

$$Var(R_i) = \beta_i^2 Var(R^M) + Var(\varepsilon_i) .$$

Обычно для оценки «бета» используются месячные данные за пятилетний период. Однако, общего соглашения на этот счет не существует.

7. Обычно, наблюдаемые «бета» положительны. Они отрицательны, если $Cov(R_i, R^M)$ отрицательны. Другими словами, рисковая премия $E[R_i] - r$ может быть отрицательной, если актив i представляет собой частичное страхование против рыночного риска.
8. В соответствии с соотношением (10) модели оценивания активов каждый актив может быть представлен точкой $(\beta_i, E[R_i])$, которая лежит на теоретической линии рынка

$$E[R_i] = r + (E[R^M] - r)\beta_i .$$

Теоретическая и эмпирическая линии рынка (построенная на оценках $\beta_i, E[R_i], E[R^M]$ могут существенно отличаться.

Получим оценки для «бета»

Модель Марковица с дополнительными линейными ограничениями.

В большинстве практических приложений портфель X должен удовлетворять нескольким типам линейных ограничений. Так, для некоторых активов невозможна короткая продажа, то есть

$$X_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,N.$$

Это типично для недвижимости. Также многие инвесторы не могут осуществлять короткую продажу акций и облигаций.

В силу законодательных актов или по другим причинам во многих ситуациях существует ограничение сверху на владение зарубежными активами. Порой ограничены суммарные инвестиции в акции и облигации. Для многих инвесторов перечень ограничений может быть достаточно длинным. Наличие многих ограничений приводит к тому, что множество допустимых портфелей становится небольшим, и подход Марковица теряет свою силу.

Риск портфеля может быть существенно уменьшен за счет международной диверсификации. Однако существует сомнение, что убытки от валютных рисков компенсируются рисковыми премиями. Поэтому многие инвесторы стремятся владеть зарубежными активами избегая соответствующих валютных рисков. На практике они хеджируют валютные риски продажей фьючерсов или форвардов на иностранную валюту. Для таких стратегий возможна их декомпозиция на короткую позицию $X_{f.cash} \leq 0$ в иностранной валюте и длинной позицией ($X_{d.cash} \geq 0$) в отечественной валюте. Следовательно, полное валютное хеджирование позиции по зарубежным акциям ($X_{f.equity} \geq 0$) и позиции по зарубежным облигациям достигается ограничением

$$X_{f.equity} + X_{f.bond} + X_{f.cash} = 0.$$

При замене равенства на требование неотрицательности последней суммы, мы получаем *частичное валютное хеджирование*.

Построение модели.

Чтобы упростить анализ, мы предположим, что все активы $i = 1,\ldots,N$, являются рисковыми. Так как каждое ограничение в виде равенства может быть заменено на два ограничения в виде неравенств, то модель Марковица с линейными ограничениями имеет вид

$$\max_{X \in R^N} \left\{ 2\tau\mu^T X - X^T \sum X \right\}, \quad (2)$$

$$AX \le b. \quad (3)$$

Задача (2-3) представляет собой проблему выпуклой оптимизации с квадратичной целевой функцией в некотором многограннике. Если ковариационная матрица $\sum$ является положительно определенной, то решение задачи (2-3) единственно, и для ее решения могут быть применены численные методы. Детальное обсуждение можно найти в работах Беста и Грауэра (Best,Grauer) [7].

Функция Лагранжа для (2-3) имеет вид

$$L(X,\lambda) = \left\{ 2\tau\mu^T X - X^T \sum X - \lambda^T (AX - b) \right\}.$$

В силу теоремы Куна –Такера, условия оптимальности

$$2\tau\mu - 2\sum X - A^T \lambda = 0, \quad (4)$$

$$AX \le b, \quad (5)$$

$$\lambda^T (AX - b) = 0, \; \lambda \ge 0 \quad (6)$$

необходимы и достаточны для глобального максимума. Уравнение (4) и ограничения (5) образуют систему линейных уравнений для оптимальных весов портфеля X^* и соответствующих множителей Лагранжа.

Условия (4-6) могут быть использованы для анализа чувствительности. При условиях регулярности для фиксированного множества ограничений веса оптимального портфеля линейны по коэффициенту расположенности к риску τ. При некоторых критических значениях $\tau_1, \tau_2, ...$, множество определяющих ограничений может изменяться. Следовательно, веса оптимального портфеля являются кусочно-линейными функциями $X^*(\tau)$ с возможными изгибами в точках $\tau_1, \tau_2, ...,$.

Используя рассуждения аналогичные рассуждениям при выводе вида оптимального портфеля для случая без дополнительных ограничений, мы можем заметить, что эффективная граница в рассматриваемом случае является кусочно-гиперболической в координатах (μ_X, σ_X).

Раздел 3.4. Модель активы-пассивы

В этом разделе мы рассмотрим модель активы-пассивы как расширение подхода Марковица. Для дидактических целей модель будет получена в контесте пенсионных финансов. Позже мы увидим, что она может использоваться в более широкой сфере.

Пассивы пенсионного фонда являются разностью между будущими выплатами и вкладами. Мы рассмотрим определенные правила для вычмсления начальной величины L_0 будущих нетто обязательств. Если такой же метод применяется на период позже, то соответствующую величину обозначим L_1. Следовательно, с настоящей точки зрения скорость роста пассивов дается случайной величиной

$$R_L = \frac{L_1 - L_0}{L_0}.$$

Обычно R_L зависит от изменений в структре процентных ставок, инфляции и заработных плат. С другой стороны активы оцениваются в соответствии с рыночными ценами, и их начальное значение мы обозначим через A_0. Для простоты мы предпопложим, что все инвестиционные возможности $i = 1,...,N$ являются рисковыми . Инвестиционная стратегия пенсионного фонда дается портфелем X. Поэтому рыночная стоимость активов через один период будет равна

$$A_1 = A_0(1 + R_X).$$

Оптимизация сюрпляса.

При выборе портфеля X пенсионный фонд с начальным сюрплясом $S_0 = A_0 - L_0$ получает сюрпляс после одного периода

$$S_1 = A_1 - L_1 = A_0(1 + R_X) - L_0(1 + R_L).$$

Наша цель состоит в применении подхода «среднее-дисперсия» к увеличению сюрпляса

$$S_1 - S_0 = A_0 \cdot R_X - L_0 \cdot R_L.$$

Следуя Шарпу и Тинту мы используем следующую нормировку

$$R_S = \frac{S_1 - S_0}{A_0} = R_X - \frac{1}{f_0} R_L, \qquad (1)$$

где $f_0 = A_0 / L_0$ означает начальное отношение фондов.

Методология Марковица приводит к оптимизационной задаче

$$\max_{X \in R^N} \left\{ 2\tau E\left[R_X - \frac{1}{f_0} R_L \right] - Var\left[R_X - \frac{1}{f_0} R_L \right] \right\} \qquad (2)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

Заметим, что R_L не зпвисит от X .

Используя векторные обозначения, с учетом того, что

$$Var(R_X + \frac{1}{f_0} R_L) = Var(R_X) + \frac{1}{f_0^2} Var(R_L) + \frac{2}{f_0} \operatorname{cov}(R_X, R_L)$$

И

$$\frac{2}{f_0} \operatorname{cov}(R_X, R_L) = \frac{2}{f_0} \operatorname{cov}(X_1 R_1 + ... + X_N R_N, R_L) = \frac{2}{f_0} \sum_{i=1}^{N} X_i Cov(R_i, R_L) = 2\gamma^T X$$

(2) переписывается в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} &\max_{X \in R^N} \left\{ 2\tau\mu^T X + 2\gamma^T X - X^T \Sigma X \right\} \\ &e^T X = 1 \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,...,N}$, $\qquad \sigma_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j)$,

$\mu^T = (\mu_1, ..., \mu_N)$, $\qquad \mu_i = R_i$,

$\gamma^T = (\gamma_1, ..., \gamma_N)$ $\qquad \gamma_i = \frac{1}{f_0} \operatorname{cov}(R_i, R_j)$

$e^T = (1,1,...,1) \in R^N$.

Сравнение (3) с обычной задачей Марковица показывает, что в (3) содержится дополнительный член $2\gamma^T X$. Другими словами, μ^T

заменяется на $\mu^T + \frac{1}{\tau}\gamma^T = \left(E[R_i] + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{f_0}\mathrm{cov}(R_i, R_j) \right)_{i=1,\dots,N}$

.Корректирующие члены $\frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{f_0}\mathrm{cov}(R_i, R_j)$ называются *кредитами хеджирующими пассивы*.

Функция Лагранжа для (3) имеет вид

$$L(X,\lambda) = 2\tau\mu^T X + 2\gamma^T X - X^T\Sigma X + \lambda(e^T X - 1).$$

Условия оптимальности даются соотношениями

$$2\tau\mu + 2\gamma - 2\Sigma X + \lambda e = 0 \qquad (4)$$

$$e^T X = 1 \qquad (5)$$

Это необходимые и достаточные условия глобального максимума при предпопложениях о положительной определенности ковариационной иматрицы и линейной независимости векторов e и μ .

Полагая $\tau = 0$ в (4) мы получаем портфель с минимальной дисперсией

$$X^{\min.L} = \Sigma^{-1}\gamma + \frac{\lambda}{2}\Sigma^{-1}e.$$

Принимая во внимание (5), мы получаем

$$\left[e^T\Sigma^{-1}\gamma + \frac{\lambda}{2}e^T\Sigma^{-1}e = 1 \right]$$

$$\lambda = \frac{2(1 - e^T\Sigma^{-1}\gamma)}{e^T\Sigma^{-1}e}$$

$$X^{\min L} = \frac{1}{e^T\Sigma e}\Sigma^{-1}e + \left[\Sigma^{-1}\gamma - \frac{e^T\Sigma^{-1}\gamma}{e^T\Sigma^{-1}e}\Sigma^{-1}e \right]. \qquad (6)$$

Первый член в (6) это портфель с минимальной дисперсией.Второй член

$$z^L = \left[\Sigma^{-1}\gamma - \frac{e^T\Sigma^{-1}\gamma}{e^T\Sigma^{-1}e}\Sigma^{-1}e \right], \qquad (7)$$

с $\sum_{i=1}^{N} z_i = 0$, корректирующий для пассивов. Действительно

$$e^T z^L = \left[e^T \Sigma^{-1} \gamma - \frac{e^T \Sigma^{-1} \gamma}{e^T \Sigma^{-1} e} e^T \Sigma^{-1} e \right] = 0$$

Следовательно, портфель с минимальной дисперсией при пассивах имеет вид

$$X^{\min L} = X^{\min} + Z^L$$

(8)

Полагая $\tau > 0$ в(4) мы получаем

$$X = \tau \Sigma^{-1} \mu + \Sigma^{-1} \gamma + \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} e \qquad (8^*)$$

$$\tau e^T \Sigma^{-1} \mu + e^T \Sigma^{-1} \gamma + \frac{\lambda}{2} e^T \Sigma^{-1} e = 1$$

Отсюда

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1 - \tau e^T \Sigma^{-1} \mu - e^T \Sigma^{-1} \gamma}{e^T \Sigma^{-1} e}$$

Подставляя в (8*)

$$X = \tau \Sigma^{-1} \mu + \Sigma^{-1} \gamma + \frac{1 - \tau e^T \Sigma^{-1} \mu - e^T \Sigma^{-1} \gamma}{e^T \Sigma^{-1} e} \Sigma^{-1} e$$

или

$$X = \frac{1}{e^T \Sigma^{-1} e} \Sigma^{-1} e - \frac{e^T \Sigma^{-1} \gamma}{e^T \Sigma^{-1} e} \Sigma^{-1} e + \Sigma^{-1} \gamma + \tau \Sigma^{=1} \mu - \frac{\tau e^T \Sigma^{-1} \mu}{e^T \Sigma^{-1} e} \Sigma^{-1} e$$

$$X^* = X^{\min L} + \tau Z^* \qquad (9)$$

с $Z^* = \Sigma^{-1} \mu - \dfrac{e^T \Sigma^{-1} \mu}{e^T \Sigma^{-1} e} \Sigma^{-1} e$, и $\sum_{i=1}^{N} z_i^* = 0$ (10)

Учитывая (8-10), мы видим, что оптимальные портфели имеют вид

$$X^{\min L} = X^{\min} + Z^L + \tau Z^*, \qquad \tau \geq 0. \qquad (11)$$

Заметим, что коэффициент расположенности к риску и вектор ожидаемых доходностей входят только в последнее слагаемое. Пассивы целиком принимаются во внимание вторым членом Z^L.

Значит, учет пассивов приводит к параллельному сдвигу множества эффективных портфелей. Эффективная граница является гиперболической в координатах $(E[R_X], \sigma[R_X])$.

Раздел 3.3. Пример: Выбор портфеля швейцарским пенсионным фондом.

Обычно обязательства пенсионного фонда достигаются в отдаленном будущем. Более того, мы будем предполагать, что швейцарский пенсионный фонд намеревается компенсировать пенсии в соответствии с индексом потребительских цен. В этой ситуации мы применим модель активы-пассивы с

$$f_0 = 1$$
$$R_L = c_0 + R_{bond} - E[R_{bond}] + R_{\inf lation} - E\,[R_{\inf lation}],$$

где R_{bond} - доходность на индекс облигаций и $R_{\inf lation}$ - темп инфляции. Следовательно, задача оптимизации имеет вид

$$\max_{X \in R^N} \{2\tau E[R_X] - Var[R_X] + 2\operatorname{cov}(R_X, R_L)\}$$
$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \quad .$$

В соответствии с (11), эффективные портфели даются соотношением

$$X^{\min L} = X^{\min} + Z^L + \tau Z^*, \qquad \tau \geq 0 .$$

В таблице 3.1 приводится решение.

Таблица 3.1.

Вид актива	$X^{\min}$	Z^L	Z^*	$X^*(\tau = 0{,}163)$
Наличные	96,2%	-91,3%	-277.0%	-40,5%
Швейцарские облигации	-0,1	90,0	88,3	105,3
Швейцарские акции	-0.5	-0.3	28,6	3,9
Еврооблигации	3,0	3,8	43,1	13,9
Евроакции	0,9	-4,3	116,6	15,7
Облигации США	-0,7	2,0	-64,5	-9,3

Акции США	-0,2	1,7	32,1	6,8
Японские облигации	-0,4	-0,9	36,2	4,7
Японские акции	1,8	-1,7	-3,4	-0,5

С первого взгляда портфель X^* не выглядит очень убедительным. Однако доля швейцарской наличности (-40,5%) и швейцарских облигаций (105,3%) должны быть интерпретированы в том смысле, что 64,8% должны быть инвестированы в швейцарский подпортфель со свойством увеличивающейся дюрацией. Тем не менее, необходимо тщательно проверить отрицательный вес облигаций США (-9,3%).

Раздел 3.5
Ограничения на краткосрочные падения доходности

Раздел 3.5.1. Введение

Очень часто инвестор, который имеет обязательства, желает избежать краткосрочных потерь в портфеле. Это заключается в установлении верхнего предела δ на вероятность падения доходности ниже определенного уровня

$$P\{R_X < c\} \le \delta \qquad (3.5.1).$$

Мы снова предполагаем, что все активы $i = 1,2,...,N$ являются рисковыми. Предположим, что

- Распределение вектора $(R_1,...,R_N)$ является многомерным нормальным .

Тогда ограничение (3.5.1) принимает вид

$$P\{R_X < c\} = P\left\{\frac{R_X - E[R_X]}{\sigma(R_X)} < \frac{c - E[R_X]}{\sigma(R_X)}\right\} = \Phi\left\{\frac{c - E[R_X]}{\sigma(R_X)}\right\} \le \delta,$$

или $\frac{c - E[R_X]}{\sigma(R_X)} \le z_\delta$, где z_δ определяется из равенства

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_\delta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \delta .$$

Следовательно, мы приходим к следующей оптимизационной задаче:

$$\max_{x\in R^N}\left\{2\tau E\left[R_X-\frac{1}{f_0}R_L\right]-Var\left(R_X-\frac{1}{f_0}R_L\right)\right\}, \qquad (3.5.3)$$

при ограничениях

$$E[R_X]-z_\delta\sigma(R_X)\geq c,$$

$$\sum_{i=1}^{N}X_i=1$$

Раздел 3.5.2. Решение оптимизационной задачи

Используя предыдущие обозначения, задача (3.5.3) может быть переписана в виде:

$$\max_{x\in R^N}\left\{2\tau\mu^T X+2\gamma^T X-X^T\Sigma X\right\} \qquad (3.5.4)$$

$$e^T X=1,$$

$$\mu^T X-z_\delta(X^T\Sigma X)^{\frac{1}{2}}\geq c.$$

Так как $h(x)=(X^T\Sigma X)^{\frac{1}{2}}$ выпуклая функция, то множество планов является выпуклым. Функция Лагранжа для (3.5.4) имеет вид

$$L(X,\lambda,v)=\left\{2\tau\mu^T X+2\gamma^T X-X^T\Sigma X\right\}+\lambda\left[\mu^T X-z_\delta(X^T\Sigma X)^{\frac{1}{2}}-c\right]+v\left[e^T X-1\right].$$

При достаточно малых c теорема Куна-Такера имеет место и необходимые и достаточные условия для максимума имеют вид:

$$(2\tau+\lambda)\mu+2\gamma-\left[2+\frac{\lambda z_\delta}{(X^T\Sigma X)^{1/2}}\right]\Sigma X+ve=0, \qquad (3.5.5)$$

$$e^T X=1, \qquad (3.5.6)$$

$$\mu^T X-z_\delta(X^T\Sigma X)^{\frac{1}{2}}\geq c,\ \lambda\geq 0,$$

$$\lambda\left[\mu^T X-z_\delta(X^T\Sigma X)^{\frac{1}{2}}-c\right]=0 \qquad (3.5.7)$$

Используя обозначения предыдущих разделов, мы можем показать, что оптимальный портфель имеет вид

$$X^* = X^{\min} + \alpha Z^L + \beta Z^*, \qquad 0 < \alpha \le 1, \quad \beta \ge 0. \tag{3.5.8}$$

Формула (3.5.8) показывает, что ограничение (3.5.1) уменьшает влияние обязательств в оптимальном портфеле. Возможно, это объясняет тот факт, что пассивы не берутся целиком в расчет многими институциональными инвесторами.

Раздел 3.6.

Факторные модели.

Обычно доходности активов являются положительно коррелированными. Факторные модели объясняют эту корреляционную структуру несколькими общими факторами. Другими словами, доходности активов R_i, $i = 1,...,N$ имеют вид:

$$R_i = E[R_i] + c_{i1}F_1 + ... + c_{iK}F_K + \varepsilon_i, \tag{3.6.1}$$

где F_k, $k = 1,...,K$, означает стохастическую доходность фактора с $E[F_k] = 0$ и ε_i означает остаток с $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_J) = 0$ для $i \neq j$ и $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, F_k) = 0$ для $k = 1,...,K$ $\mathrm{cov}(F_i, F_k) = 0$.

В этом разделе мы рассмотрим два основных приложения факторных моделей: арбитражную теорию оценивания (APT) и контроля риска. Арбитражная теория была предложена Россом [163]. Факторы предполагаются удовлетворяющими условию $\mathrm{cov}(F_h, F_k) = 0$ для $h \neq k$ и могут не иметь прямой экономической интерпретации. При предположении отсутствия арбитража факторные рисковые премии $\lambda_1,...,\lambda_K$ могут быть определены. В практических приложениях факторы определяются методом главных компонент или мектодом максимального правдоподобия. В сравнении с CAPM APT имеет по крайней мере два преимущества:

1. APT основана только на отсутствии арбитража. Поэтому мы можем применять ее на подрынках (например, рынок акции в континентальной Европе).
2. В соответствии с эмпирическими тестами, прведенными Леманом и Модестом [119], APT способна объяснить некоторые аномалии CAPM.

Несколько иные факторные модели используются для контроля риска. Формула (3.6.1) все еще справедлива, но вместо статистических факторов обычно используют экономические факторы (процентные ставки, обменные курсы, инфляцию, экономический рост) и характеристики активов (дивиденды, размер фирмы, вид промышленности которой принадлежат фирмы). При контроле риска факторная чувствительность портфеля сравнивается с соответствующей чувствительностью эталонного портфеля. Факторная модель также может быть использована для вычисления ковариационной матрицы.

Раздел 3.6.1 Арбитражная теория оценивания

Как уже отмечалось, арбитражная теория оценивания базируется на формуле (3.6.1). Используя векторные обозначения, мы получаем

$$R = \mu + \sum_{i=1}^{K} c_k F_k + \varepsilon \quad , \qquad (3.6.2)$$

где

$$\mu^T = (\mu_1, ..., \mu_N), \qquad \mu_i = E[R_i], \qquad i = 1, ..., N,$$

$$c_k^T = (c_{1k}, ..., c_{Nk}), \qquad k = 1, ..., K.$$

В начале мы рассмотрим слегка упрощенную модель. В этой модели мы предполагаем, что R_i полностью объясняются факторами $F_1, ..., F_K$, $\varepsilon_i = 0,\ \ i = 1, ..., N$, и отсутствует арбитраж. При таких предположениях доходность портфеля $w \in R^N$ определяется равенством

$$R^T w = \mu^T w + \sum_{k=1}^{K} c_k^T w F_k \qquad (3.6.3)$$

Портфель $w \in R^N$ является самофинансируемым, если

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 0,$$

или

$$e^T w = 0, \text{ с } e^T = (1, ..., 1) \in R^N.$$

Самофинансируемые портфели с факторным представлением характеризуются равенствами

$$e^T w = 0, \tag{3.6.4}$$

$$c_k^T w = 0, \qquad k = 1,...,K\ . \tag{3.6.5}$$

Так как портфели, удовлетворяющие (3.6.4) и (3.6,5) безрисковые, то отсутствие арбитража влечет

$$\mu^T w = 0\ , \tag{3.6.6}$$

Другими словами, каждое решение (3.6.4)и (3.6.5) является решением (3.6.6). Следовательно, в соответствии с теоремой из алгебры, существуют такие $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_K$, что

$$\mu = \lambda_0 e + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k c_k\ , \tag{3.6.7}$$

или

$$E[R_i] = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k c_{ik}, \qquad i = 1,..., N\ . \tag{3.6.8}$$

Для частного случая, когда имеется безрисковый актив с доходностью $R_0 = r$ мы находим, что $\lambda_0 = r$. В этом случае рисковая премия на актив i

$$E[R_i] - r = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k c_{ik}, \qquad i = 1,..., N\ .$$

получается путем умножения факторных рисковых премий λ_k на соответствующие факторные коэффициенты.

Общая модель

Вместо предположения $\varepsilon_i = 0, \quad i = 1,..., N$ предположим, что существует такое $a > 0$, $Var[\varepsilon_i] < a, \quad i = 1,.., N$. Нам понадобится понятие асимптотических арбитражных возможностей.

Определение 3.6.1. Асимптотические арбитражные возможности доступны, если существует последовательность самофинансируемых портфелей $w^2,\dots,w^N,\dots$, таких, что $w^N \in R^N$, $\sum_{i=1}^{N} w_i^N = 0$ и число $d > 0$, такое, что

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} w_i^N R_i\right] \geq d, \qquad N = 2,3,\dots..,$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{N} w_i^N R_i\right] \to 0$$

при $N \to \infty$.

В общей модели предположение отсутствия арбитража заменяется на отсутствие асимптотических арбитражных возможностей. Можно получить следующий результат (См. Ингерсолл [99],)

Теорема 3.6.1. *В предположениях* $Var[\varepsilon_i] < a$, $i = 1,..,N$ *и отсутствии асимптотических арбитражных возможностей существуют такие* $\lambda_0, \lambda_1,\dots,\lambda_K$, *что*

$$E[R_i] = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k c_{ik} + v_i, \qquad i = 1,2,\dots$$

с

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} v_i^2 = 0.$$

Раздел 3.6.2. Контроль риска с помощью факторных моделей.

Ранее указывалось, что большинство менеджеров должны оптимизировать свой портфель по отношению к эталонному портфелю

$$b^T = (b_1,\dots,b_N), \qquad \sum_{i=1}^{N} b_i = 1.$$

В этом случае ошибка $\sigma(R_X - R_b)$ играет ключевую роль при контроле риска. Тем не менее факторная модель позволяет взглянуть на проблему глубже. Мы можем сравнить X и b по отношению к ихфакторному представлению. Используя (3.6.1), представление по фактору k дается выражением

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ik}(X_i - b_i), \qquad i = 1,\ldots,K.$$

Заметим, что статистические факторы без экономической интерпретации редко используются для этой цели. Использование макроэкономических факторов, таких как процентные ставки и обменные курсы позволяет контролировать соответствующие величины. Недостатком таких моделей считают их неустойчивость. Некоторые предлагают использовать факторные модели основанные на таких характеристиках активов как дивиденды и размер фирмы.

Раздел 3.7
Максимизация ожидаемой полезности в однорпериодной модели

В предыдущих разделах мы рассмотрели подход Марковица. С теоретической точки зрения максимизация ожидаемой полезности более желательна. Мы рассмотрим однопериодную модель инвестиций без потребления. Эта модель характеризуется следующим образом:

- W_0 означает начальный капитал инвестора.
- Существует $N+1$ активов с доходностями R_i. Актив $i=0$ является безрисковым, а остальные N активов рисковые.
- Выбор портфеля $X^T = (X_0,\ldots,X_N)$ с $\sum_{i=0}^{N} X_i = 1$ приводит к конечному капиталу $W_1 = W_0(1+R_X)$ с $R_X = \sum_{i=0}^{N} X_i R_i$.
- Оптимальный портфель X^* является решением оптимизационной задачи

$$\max_{X \in R^{N+1}} E\left[u\left[W_0(1+R_X)\right]\right] \qquad (3.7.1)$$

при ограничении $\sum_{i=0}^{N} X_i = 1$. В (3.7.1) $u(.)$ означает функцию полезности (Neumann-Mongenrstern) инвестора. Выражая X_0 из ограничения задачи, мы приходим к задаче без ограничений

$$\max_{(X_1,\ldots,X_N)\in R^N} E\left[u\left[W_0(1+r+\sum_{i=1}^{N} X_i(R_i-r)\right]\right]$$
(3.7.2)

В предположениях, что

1. Функция полезности $u(.)$ является возрастающей, строго выпукой и непрерывно дифференцируемой.

2. Случайные величины ограничены.

портфель X^* является решением (3.7.2) и (3.7.1) тогда и только тогда, когда

$$E\left[u'\left[W_0(1+R_{X^*})\right](R_i-r)\right]=0 \qquad (3.7.3)$$

Максимизация ожидаемой полезности
для многопериодной модели

Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega,\Im,P)$ с горизонтом T и фильтрацией $F=\{F_t,t=1,2,...,T\}$. Мы также предполагаем существование N рисковых активов с процессами доходности $R_i=\{R_i(t),t=1,2,...,T\},i=1,2,...,N$. Таким образом под $R_i(t)$ понимается однопериодная доходность на актив i с момента $t-1$ до момента t. Мы предполагаем, что процесс R_i адаптирорван к фильтрации, то есть информация F_t, доступная инвесторам в каждый момент t *вк*лючает полное знание прошлых и настоящих значений всех N процессов доходности. Математически это означает, что $R_i(t)$ - F_t-измеримо.

Существует также безрисклвый актив с постоянной процентной ставкой $r\ge 0$. Обозначим его $R_0(t)=r,t=1,2,...,T$.

Инвесторы могут изменять свои портфельные позиции каждый период. Чтобы описать торговую стратегию инвестора введем векторный случайный процесс $X=\{X_0(t),...,X_{N,}\ t=1,2,...,T\},i=0,1,2,...,N$. Этот процесс должен удовлетворять условию

$$\sum_{i=0}^{N} X_i(t)=1,\quad t=1,...,T, \qquad (1)$$

так как $X_i(t)$ означает пропорцию портфеля инвестированного в актив i с момента *t-1* до момента *t.* Так как мы предполагаем рациональных , но не ясновидящих инвесторов, то торговые стратегии должны быть предсказуемыми стохастическими процессами. Математиески это означает, что $X\ (t)$ должно быть измеримо относительно сигма алгебры F_{t-1}. Вместе с условием (1) это определяет понятие допустимой торговой стратегии.

ОбозначимW_t -капитал инвестора в момент t при портфельной стратегии *X*. Тогда $W_{t-1}X_i(t)$ - это сумма, инвестированная в актив i в момент *t-1* . Она становится равной $W_{t-1}X_i(t)[1+R_i(t)]$ в момент *t*. Следовательно,

$$W_t = \sum_{i=0}^{N} W_{t-1}X_i(t)[1+R_i(t)] = W_{t-1}\left[1+\sum_{i=0}^{N} X_i(t)[R_i(t)]\right]$$

$$= W_{t-1}[1+R_X(t)],$$

где $R_X(t) = \sum_{i=0}^{N} X_i(t)R_i(t)$. Отсюда находим, что

$$W_t = W_0 \prod_{s=1}^{t} [1+R_X(s)], \quad t = 1,\dots,T.$$

Предположим , что существует инвестор с начальным капиталом $W_0 > 0$ и он желает выбрать торговую стратегию, которая максимизмрует ожидаемую полезность в момент *T*. Мы предполагаем, что функция аолезности инвестора выпукла, возрастающая с областью определения как минимум $(0,\infty)$ (напрмер, $u(W) = \ln W, u(W) = 1 - e^{-aW}$.)С математической точки зрения имеем следующую задачу:

$$E[u(W_T]\to \max$$

При условии, что *X* – допустимая торговая стратегия.

Пример. Рассмотрим экономику с двумя рисковыми активами одним N=2 безрисковым с доходностью $R_0 = r = 0{,}10$ за период. На протяжении каждого периода экономика может находиться в одном из трех состояний: бум с вероятностью 0,25, нормальном с вероятностью 0,5 и рецессии с вероятностью 0,25 независимо от предыдуших состояний.

Доходности на рисковые активы предполагаются независимыми и одинаково распределенными в каждом периоде в соответствии с таблицей

Таблица

Состояние экономики	$R_1(t)$	$R_2(t)$	Вероятность
Бум	0,25	0,20	0,25
Нормальное	0,15	0,10	0,5
Рецессия	-0,10	0,00	0,25

Предположим, что мы интересуемся двухпериодной задачей. То сть T=2. Для некоторой функции полезности $u(t)$ и начального капитала W_0 мы хотим максимизировать $E\left[u(W_2)\right]$. Эту модель можно представить в виде дерева.

Максимизация эжидаемой полезности в многопериодной модели. Динамическое программирование.

При выборе стратегии нужно учитывать , что она должна быть предсказуемым случайным процессом. Другими словами выбор $X(t)$ в момент $t-1$ не может зависеть от будущих доходностей активов. В то же время $X(t)$ может зависеть от W_{t-1} и вообще текущей информации F_{t-1}. Т.е. $X(t)$ должна быть F_{t-1} измерима. Вообще говоря, позиция $X(t)$, выбираемая в момент $t-1$должна зависеть от истории доходностей. Однако в ситуации, когда доходности за последовательные периоды являются независимыми случайными величинами, оптмальный выбор $X(t)$будет зависеть только отt и настоящего капиталаW_{t-1}.

Одним из способов решения такой задачи является метод динамичского программирования. Идея состоит в решении ряда однопериодных задач, двигаясь в обратном направлении времени. На каждом шаге вычисляется максимальная ожидаемая полезность капитала в момент T как функция настоящей информации (включающей настоящий капитал). Оптимальная стратегия $X(t)$, которая зависит от текущей информации, также определяется. Двигаясь обратно во времени рекуррентным образом, получается оптимальное решение исходной задачи.

Более детально, пусть случайная величина U_t обозначает максимум ожидаемой полезности в момент T капитала W_T при условии информации F_t, т.е.

$U_t(W_t) = \max E\left[u(W_T) \middle| F_t\right],$

где максимум берется по всем портфелям $X(t+1)$ измеримым относительно F_t,..., $X(T)$-измеримым относительно F_{T-1} и мы имеем получили точную зависимость на момент t капитала W_t.

Полагая $U_T(W) = u(W)$, мы имеем для t=T-1

$$U_{T-1}(W_{T-1}) = \max_{X(T)} E\left[U_T(W_T) \middle| F_{T-1}\right]$$

Заметим, что $U_{T-1}(W_{T-1})$ является случайной величиной, (хотя мы и не определили ее зависимость от ω) и функцией скалярного параметра W_{T-1}. Заменим этот параметр на скаляр W. Тогда предыдущее уравнение перепишется в виде

$$U_{T-1}(W) = \max_{X(T)} E\left[U_T(W\ (1+\sum_{i=0}^{N} X_i(T)R_i(T)) \middle| F_{T-1}\right]$$

Это уравнение для однопериодной оптимизации. Решение этой проблемы дает оптимальные значения для $X(T)$ как функцию информации F_{T-1} и капитала $W = W_{T-1}$. Заметим, что $X(T)$ автоматически F_{T-1}-измерима.

Предположим, что мы нашли случайные величины $U_{T-1},...,U_t$ рекуррентно и мы готовы вычислять U_{t-1}. Мы делаем это, используя функциональное уравнение динамического программирования:

$$U_{t-1}(W) = \max_{X(t)} E\left[U_t\left[W(1+\sum_{i=0}^{N} X_i(t)R_i(t)\right] \middle| F_{t-1}\right]$$

Это опять однопериодная оптимизация. Продолжая, мы получим $U_0(.)$, обеспечивая решение исходной задачи.

Заметим, что метод динамического программирования дает больше, чем решение исходной задачи. Он дает решение для любых начальных капиталов W, а не только W_0.

Если доходности независимы от периода к периоду, то решение упрощается.Распределение $R(t)$ не зависит от F_{t-1} и условное математичское ожидание становится безусловным. Другими словами уравнение динамического программирования принимают вид

$$U_{t-1}(W)=\max_{X(t)} E\left[U_t\left[W(1+\sum_{i=0}^{N} X_i(t)R_i(t)\right]\right]$$

Это означает, что веса портфеля будут детерминированными функциями времени и капитала.

Продолжение примера. Пусть $u(W)=\ln(W)$. Решим задачу методом динамического программирования.Сначала положим $U_2(W)=\ln(W)$ и первое уравнение принимает вид

$$U_1(W)=\max_{X(2)} E\ln(W(1+\sum_{i=0}^{2} X_i(2)R_i(2)))$$

Стратегия $X(2)$ должна удовлетворять условию $X_0(2)+X_1(2)+X_2(2)=1$. Упростим обозначения, положив $X_i(2)=x_i$. Выражая $x_0=1-x_1-x_2$, имеем

$$U_1(W)=\max E\left[\ln\left[W(1+r(1-x_1-x_2)+R_1(2)x_1+R_2(2)x_2\right]\right]=$$

$$=\max E\left[\ln\left[W(1+r+(R_1(2)-r)x_1+(R_2(2)-r)x_2\right]\right]=$$

$$=\ln W+\max E\left[\ln\left[(1+r+(R_1(2)-r)x_1+(R_2(2)-r)x_2\right]\right]=$$

$$=\ln W+\max\left[\frac{1}{4}\ln\left[(1{,}1+0{,}15x_1+0{,}10x_2\right]\right]+\frac{1}{2}\ln(1{,}1+0{,}05x_1)+\frac{1}{4}\ln(1{,}1-0{,}20x_1-0{,}10x_2).$$

Взяв частные производные по x_i и приравняв их к нулю, имеем

$$0=\frac{1}{4}\frac{0{,}15}{1{,}1+0{,}15x_1+0{,}1x_2}+\frac{1}{2}\frac{0{,}05}{1{,}1+0{,}05x_1}+\frac{1}{4}\frac{-0{,}20}{1{,}1-0{,}2x_1-0{,}1x_2}$$

$$0=\frac{1}{4}\frac{0{,}1}{1{,}1+0{,}15x_1+0{,}1x_2}+\frac{1}{2}\frac{0}{1{,}1+0{,}05x_1}+\frac{1}{4}\frac{-0{,}10}{1{,}1-0{,}2x_1-0{,}1x_2}$$

Решая эти два уравнения находим, что $x_1=11,\ x_2=-77/4,\ x_0=37/4$. Подставляя эти величины в выражение для $U_1(W)$, имеем

$$U_1(W)=\ln W+\frac{1}{4}\ln(1{,}1+0{,}15\cdot 11+0{,}1\cdot(-\frac{77}{4}))+$$

$$\frac{1}{2}\ln(1{,}1+0{,}05\cdot 11)+\frac{1}{4}\ln(1{,}1-0{,}2\cdot 11-0{,}10(-\frac{77}{4}))=$$

$$=\ln W+0{,}1542$$

Это завершает первую итерацию алгоритма. Далее положим $X_i(1)=x_i$. Мы имеем

$$U_0(W) = \max E\left[U_1\left[W(1 + r(1 - x_1 - x_2) + R_1(1)x_1 + R_2(1)x_2\right]\right] =$$

$$= 0{,}1542 + \max E\left[\ln\left[W(1 + r + (R_1(1) - r)x_1 + (R_2(1) - r)x_2\right]\right] =$$

$$= 0{,}1542 + \ln W +$$

$$+ \max\left[\frac{1}{4}\ln\left[(1{,}1 + 0{,}15x_1 + 0{,}10x_2\right]\right] + \frac{1}{2}\ln(1{,}1 + 0{,}05x_1) + \frac{1}{4}\ln(1{,}1 - 0{,}20x_1 - 0{,}10x_2).$$

Но максимум последнего слагаемого равен 0,1542 при
$x_1 = 11,\ x_2 = -77/4,\ \ x_0 = 37/4$. Таким образом оптимальное значение целевой функции равно
$U_0(W) = 0{,}3084 + \ln W$

Оптимальная стратегия $X_0(1) = \dfrac{37}{4},\ X_1(1) = 11,\ X_2(1) = -\dfrac{77}{4}$ не зависит от начального капитала.

Эталонный подход в дискретном времени для страхования и финансов

1.Введение

В литературе существует целое направление, которое рассматривает концепцию портфелей с оптимальным приростом (GOP). При определенных предположениях GOP совпадает с численным портфелем, который переводит цены, выраженные в единицах данного портфеля в мартингалы с данной вероятностной мерой.

2. Рынок с дискретным временем

Дано вероятностное пространство (Ω, F, P). Цены изменяются в моменты времени $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$. Информация доступная в момент времени t_i описывается величиной A_{t_i}. Имеется $d+1$ первичных ЦБ $d = 1,2,\ldots$. $S_i^{(j)}$ -- неотрицательное значение j-ой ЦБ в момент времени t_i. Если j-ая ЦБ является акцией, то $S_i^{(j)}$ -- это значение такой акции в момент времени t_i, включая дивиденды. Предполагаем, что

$$S_i^{(j)} > 0,\ j = \overline{0,d} \qquad (2.1)$$

$h_{i+1}^{(j)}$ -- отношение прироста j-ой ЦБ в момент времени t_{i+1}.

$$h_{i+1}^{(j)} = \begin{cases} \dfrac{S_{i+1}^{(j)}}{S_i^{(j)}}, S_i^{(j)} > 0 \\ 0, иначе \end{cases}, \begin{matrix} i = \overline{0,n-1} \\ j = \overline{0,d} \end{matrix} \qquad (2.2)$$

Заметим, что доходность $S^{(j)}$ в момент времени t_{i+1} равна $h_{i+1}^{(j)} - 1$.

Предполагается, что $h_{i+1}^{(j)}$ является $A_{t_{i+1}}$-измеримой и ограниченной величиной.

$$h_{i+1}^{(0)} > 0,\ i = \overline{0,n-1}\ \ S_0^{(0)} = 1 \qquad (2.3)$$

Можем представить цену j-ой ЦБ в момент времени t_i в виде:

$$S_i^{(j)} = S_0^{(j)} \prod_{l=1}^{i} h_l^{(j)},\ \begin{matrix} i = \overline{0,n} \\ j = \overline{0,d} \end{matrix} \qquad (2.4)$$

Согласно предположениям (2.1) и (2.3) для сберегательного счета имеем:

$$S_i^{(0)} > 0,\ i = \overline{0,n} \qquad (2.5)$$

Чтобы охарактеризовать строго положительный портфель в момент времени t_i естественным является описание пропорции $\pi_i^{(j)} \in (-\infty,+\infty)$ его значения в это время, инвестированного в j-ую первичную ЦБ.

$$\sum_{j=0}^{d} \pi_i^{(j)} = 1,\ i = \overline{0,d} \qquad (2.6)$$

Вектор-процесс $\pi = \left\{\pi_i = \left(\pi_i^{(0)}, \pi_i^{(1)}, ..., \pi_i^{(d)}\right), i = \overline{0,n}\right\}$ обозначает соответствующее состояние пропорции.

Предполагается, что π_i является A_{t_i}-измеримой величиной, это значит, что пропорции в данный момент времени не зависят от будущих событий.

$S_i^{(\pi)}$ -- стоимость соответствующего портфеля в момент времени t_i

$$S^{(\pi)} = \left\{S_i^{(\pi)}, i = \overline{0,n}\right\}$$

Отношение прироста $h_l^{(\pi)}$ этого портфеля в момент времени t_l выражается следующим образом:

$$h_l^{(\pi)} = \sum_{j=0}^{d} \pi_{l-1}^{(j)} h_l^{(j)},\ l = \overline{1,n} \qquad (2.7)$$

где стоимость этого портфеля в момент времени t_i выражается так:

$$S_i^{(\pi)} = S_0^{(\pi)} \prod_{l=1}^{i} h_l^{(\pi)},\ i = \overline{0,n} \qquad (2.8)$$

3.Рынок с дискретным временем с ограниченным приростом

V -- множество всех строго положительных процессов портфеля $S^{(\pi)}$. Это значит, что для процесса портфеля $S^{(\pi)} \in V$ $h_{i+1}^{(\pi)} \in (0,+\infty)$ $i = \overline{0, n-1}$. Согласно (2.5) V не пусто.

$g_i^{(\pi)}$ -- норма прироста в момент времени t_i для данного процесса портфеля $S^{(\pi)} \in V$ с соответствующим процессом пропорции π.

$$g_i^{(\pi)} = E[\ln(h_{i+1}^{(\pi)}) | A_{t_i}], \; i = \overline{0, n-1} \tag{3.1}$$

$\underline{g_i}$ -- оптимальная норма прироста

$$\underline{g_i} = \sup_{S^{(\pi)} \in V} g_i^{(\pi)}, \; i = \overline{0, n-1} \tag{3.2}$$

Предположение 3.1.

$$\max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} \underline{g_i} < \infty \tag{3.3}$$

Это значит, что наш рынок в дискретном времени имеет конечный прирост.

Предположение 3.2.

Существует портфель $S^{(\underline{\pi})} \in V$ с соответствующим процессом пропорции $\underline{\pi}$ и

$$S_o^{(\pi)} = 1 \tag{3.4}$$

такой, что

$$g_i^{(\underline{\pi})} = \underline{g_i} \tag{3.5}$$

и

$$E\left[\frac{h_{i+1}^{(\pi)}}{h_{i+1}^{(\underline{\pi})}} \middle| A_{t_i} \right] < \infty, \; i = \overline{0, n-1}, \; S^{(\pi)} \in V \tag{3.6}$$

Такой портфель называется портфелем с оптимальным приростом (GOP).

Представим ситуацию, когда инвестор вкладывает почти все свои средства в GOP $S^{(\underline{\pi})}$ и инвестирует незначительно малую пропорцию $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ в альтернативный портфель $S^{(\pi)} \in V$. В результате получается интерполированный портфель $V^{\theta,\pi,\underline{\pi}} \in V$.

Отношение прироста:

$$h_{i+1}^{\theta,\pi,\underline{\pi}} = \frac{v_{i+1}^{\theta,\pi,\underline{\pi}}}{v_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}}} = \theta h_{i+1}^{(\pi)} + (1-\theta) h_{i+1}^{(\underline{\pi})} \tag{3.7}$$

Норма прироста:

$$g_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}} = E[\ln(h_{i+1}^{\theta,\pi,\underline{\pi}}) | A_{t_i}], \; i = \overline{0, n-1} \tag{3.8}$$

Чтобы изучить степень изменения нормы прироста интерполированного портфеля, определим производную в направлении альтернативного портфеля $S^{(\pi)} \in V$

$$\left.\frac{\partial g_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}}}{\partial\theta}\right|_{\theta=0+}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{\theta}\left(g_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}}-g_i^{(\underline{\pi})}\right),\ i=\overline{0,n-1} \tag{3.9}$$

Теорема 3.3. Для портфеля $S^{(\pi)}\in V$, $i\in\{0,1,...,n-1\}$ верно равенство:

$$\left.\frac{\partial g_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}}}{\partial\theta}\right|_{\theta=0+}=E\left[\left.\frac{h_{i+1}^{(\pi)}}{h_{i+1}^{(\underline{\pi})}}\right|A_{t_i}\right]-1 \tag{3.10}$$

По оптимальному свойству GOP из (3.9), (3.5) и (3.2) должно получится, что

$$\left.\frac{\partial g_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}}}{\partial\theta}\right|_{\theta=0+}\le 0 \tag{3.11}$$

Следствие 3.4. Процесс портфеля $S^{(\underline{\pi})}\in V$ будет иметь оптимальный прирост тогда и только тогда, когда все портфели $S^{(\pi)}\in V$ (выраженные в единицах $S^{(\underline{\pi})}$) являются $(\underline{A},P)$-супермартингалом, то есть:

$$E\left[\left.\frac{h_{i+1}^{(\pi)}}{h_{i+1}^{(\underline{\pi})}}\right|A_{t_i}\right]\le 1,\ i=\overline{0,n-1} \tag{3.12}$$

Рассмотрим два неотрицательных портфеля, которые имеют оптимальный прирост (смотри 3.5). Согласно следствию 3.4 первый портфель, выраженный в единицах второго, должен быть супермартингалом. Вдобавок к этому, с тем же аргументом второй, выраженный в единицах первого, также должен быть супермартингалом. Это достигается только в случае, если оба процесса идентичны и удовлетворяют следующему результату:

Следствие 3.5. Значение процесса GOP единственно.

Замечание: единственность GOP не предполагает того, чтобы $\underline{\pi}$ были единственны.

4. Чистые (справедливые) портфели.

Назовем цены, которые выражены в единицах GOP эталонными ценами и их отношения прироста – эталонными отношениями прироста.

Условие (3.6) гарантирует интегрируемость эталонных отношений прироста и цен.

$\hat{S}_i^{(\pi)}$ -- эталонная цена портфеля $S^{(\pi)}$ в момент времени t_i

$$\hat{S}_i^{(\pi)}=\frac{S_i^{(\pi)}}{S_i^{(\underline{\pi})}},\ i=\overline{0,n} \tag{4.1}$$

Из следствия 3.4 получаем, что эталонная цена строго положительного портфеля $S^{(\pi)}\in V$ является супермартингалом, что из (3.12), (4.1) и (2.8) означает

$$\hat{S}_i^{(\pi)} > E[\hat{S}_k^{(\pi)} \big| A_{t_i}], \ k=\overline{0,n}, \ i=\overline{0,k} \qquad (4.2)$$

В обычной актуарной или финансовой оценке в соревновательном, ликвидном рынке цены выбираются так, чтобы ни покупатель, ни продавец не имели систематической выгоды или невыгоды.

Единственной возможностью, когда покупатели и продавцы находятся в одинаковом положении является та, при которой эталонная цена $\hat{S}_i^{(\pi)}$ является $(\underline{A}, P)$-мартингалом, что значит:

$$\hat{S}_i^{(\pi)} = E[\hat{S}_k^{(\pi)} \big| A_{t_i}], \ k=\overline{0,n}, \ i=\overline{0,k} \qquad (4.3)$$

Равенство (4.3) означает, что актуальная эталонная цена $\hat{S}_i^{(\pi)}$ является наилучшим прогнозом будущих эталонных значений.

Аналогично (4.3), из (2.8) для соответствующего процесса портфеля $S^{(\pi)}$ мы получаем, что:

$$E\left[\frac{h_{i+1}^{(\pi)}}{h_{i+1}^{(\underline{\pi})}} \middle| A_{t_i}\right] = 1, \ i=\overline{0,n-1} \qquad (4.4)$$

Таким образом, приходим к понятию справедливой цены.

Определение 4.1. Значение процесса $V = \{V_k, k \in \{0,1,...,n\}\}$ справедливое, если его эталонное значение $\hat{V}_k = \dfrac{V_k}{S_k^{(\underline{\pi})}}$ образует $(\underline{A}, P)$-мартингал.

Следствие 4.2. Данный процесс портфеля $S^{(\pi)}$ справедлив тогда и только тогда, когда

$$\left.\frac{\partial g_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}}}{\partial \theta}\right|_{\theta=0+} = 0, \ i=\overline{0,n-1} \qquad (4.2)$$

5. Пример с двумя активами.

Чтобы проиллюстрировать ключевые моменты эталонного приближения в дискретном времени, рассмотрим пример рынка с двумя первичными ЦБ.

Сберегательный счет в момент времени t_i является константой: $S_i^{(0)} = 1, \ i=\overline{0,n}$.

Биржевая цена $S_i^{(1)}$ в момент времени t_i определяется выражением:

$$S_i^{(1)} = S_0^{(1)} \prod_{l=1}^{i} h_l^{(1)}, \ i=\overline{0,n} \qquad (5.1)$$

Здесь отношение прироста $h_l^{(1)} \in (0,+\infty)$ в момент времени t_l является СВ.

Так как, GOP должен быть всегда строго положительным, то у нас должно быть:

$$\underline{\pi}_i^{(0)} \in [0,1], \; i = \overline{0,n} \tag{5.2}$$

Из (2.6) имеем, что $\underline{\pi}_i^{(0)}$ и $\underline{\pi}_i^{(1)}$ такие, что

$$\underline{\pi}_i^{(0)} = 1 - \underline{\pi}_i^{(1)}, \; i = \overline{0,n} \tag{5.3}$$

Норма прироста $g_i^{(\pi)}$ в момент времени t_i для портфеля $S^{(\pi)} \in V$ согласно (3.1) определяется выражением:

$$g_i^{(\pi)} = E[\ln(1 + \pi_i^{(1)}(h_{i+1}^{(1)} - 1)) \big| A_{t_i}], \; i = \overline{0, n-1} \tag{5.4}$$

Посчитаем оптимальное отношение прироста этого рынка (смотри (3.1)):

$$\frac{\partial g_i^{(\pi)}}{\partial \pi_i^{(1)}} = E\left[\frac{h_{i+1}^{(1)} - 1}{1 + \pi_i^{(1)}(h_{i+1}^{(1)} - 1)} \bigg| A_{t_i}\right] \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial^2 g_i^{(\pi)}}{\left(\partial \pi_i^{(1)}\right)^2} = -E\left[\frac{\left(h_{i+1}^{(1)} - 1\right)^2}{\left(1 + \pi_i^{(1)}(h_{i+1}^{(1)} - 1)\right)^2} \bigg| A_{t_i}\right], \; i = \overline{0, n-1} \tag{5.6}$$

Заметим, что вторая производная всегда отрицательна, что говорит о том, что норма прироста имеет единственный максимум. Этот максимум может достигаться в пропорции, которая не принадлежит $[0,1]$.

Чтобы прояснить эту ситуацию подсчитаем:

$$\left.\frac{\partial g_i^{(\pi)}}{\partial \pi_i^{(1)}}\right|_{\pi_i^{(1)}=0} = E\left[h_{i+1}^{(1)} \big| A_{t_i}\right] - 1 \tag{5.7}$$

и

$$\left.\frac{\partial g_i^{(\pi)}}{\partial \pi_i^{(1)}}\right|_{\pi_i^{(1)}=1} = 1 - E\left[\frac{1}{h_{i+1}^{(1)}} \bigg| A_{t_i}\right], \; i = \overline{0, n-1} \tag{5.8}$$

Согласно (5.6) первая производная $\dfrac{\partial g_i^{(\pi)}}{\partial \pi_i^{(1)}}$ уменьшается с увеличением $\pi_i^{(1)}$. Если

$$E\left[\left(h_{i+1}^{(1)}\right)^{\lambda} \big| A_{t_i}\right] = 1 \tag{5.9}$$

для $\lambda = \pm 1$, то (5.7) и (5.8) имеют противоположные знаки и следовательно существует такое $\underline{\pi}_i^{(1)} \in [0,1]$, что:

$$\left.\frac{\partial g_i^{(\pi)}}{\partial \pi_i^{(1)}}\right|_{\pi_i^{(1)}=\underline{\pi}_i^{(1)}} = 0, \; i = \overline{0, n-1} \tag{5.10}$$

Иначе, если соотношение (5.9) нарушается, то оптимальная пропорция должна быть равной одному из граничных значений. В этом случае производная (5.5) не равна 0 в оптимальной пропорции и мы получим не подлинный максимум для оптимальной пропорции.

Чтобы проверить является ли данная ЦБ и портфель справедливыми, определяем в нашем примере распределение отношений прироста.

Предположим ситуацию, когда отношение прироста $h_i^{(1)}$ не зависит от предыдущих значений и логнормально распределено:

$$\ln(h_i^{(1)}) \sim N(\mu\Delta, \sigma^2\Delta) \tag{5.11}$$

где $\mu\Delta$ -- математическое ожидание, $\sigma^2\Delta$ -- дисперсия, $\Delta = t_{i+1} - t_i > 0$

1. Сначала определим, когда $\frac{\partial g_i^{(\pi)}}{\partial \pi_i^{(1)}}$ может принимать значение 0 для $\pi_i^{(1)} \in [0,1]$. Так как

$$E\left[\left(h_{i+1}^{(1)}\right)^{\lambda} \middle| A_{t_i}\right] = \exp\left\{(\lambda\mu + \frac{\sigma^2}{2})\Delta\right\} \tag{5.12}$$

для $\lambda = \pm 1$ (5.10) может быть верно только для $|\mu| \le \frac{\sigma^2}{2}$.

В этом случае возможно показать, что при $\Delta \to 0$

$$\lim_{\Delta\to 0} \underline{\pi}_i^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\sigma^2}$$

$$\lim_{\Delta\to 0} E\left[\frac{h_{i+1}^{(0)}}{h_{i+1}^{(\underline{\pi})}} \middle| A_{t_i}\right] = 1$$

$$\lim_{\Delta\to 0} E\left[\frac{h_{i+1}^{(1)}}{h_{i+1}^{(\underline{\pi})}} \middle| A_{t_i}\right] = 1$$

Отсюда следует, что для всех строго положительных портфелей $S^{(\pi)} \in V$ верно

$$\left.\frac{\partial g_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}}}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0, \; i = \overline{0, n-1}$$

Таким образом, по следствию 4.2 все портфели $S^{(\pi)} \in V$ справедливые, если $\frac{|\mu|}{\sigma^2} \le \frac{1}{2}$.

2. В случае, если $\frac{\mu}{\sigma^2} < -\frac{1}{2}$, то оптимальная пропорция следующая:

$$\underline{\pi}_i^{(1)} = 0, \; i = \overline{0, n-1}$$

Для GOP это требует держать все инвестиции в сберегательном счете. Получаем:

$$E\left[\frac{h_{i+1}^{(1)}}{h_{i+1}^{(\underline{\pi})}} \middle| A_{t_i}\right] = \exp\left\{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})\Delta\right\} < 1$$

Что показывает, что эталонный процесс биржевой цены $\hat{S}_i^{(1)} = \dfrac{S_i^{(1)}}{S_i^{(\underline{\pi})}}$ является строгим супермартингалом. Таким образом, $S^{(1)}$ не является справедливой в соответствии с определением 4.1.

По следствию 4.2 можно проверить является ли $S^{(1)}$ справедливой для портфеля π со всем состоянием, инвестированным в биржу, $\pi_i = (\pi_i^{(0)}, \pi_i^{(1)}) = (0,1)$, получаем:

$$\left.\frac{\partial g_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}}}{\partial\theta}\right|_{\theta=0+} = \exp\left\{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})\Delta\right\} - 1 < 0$$

Что по следствию 4.1 говорит о том, что $S^{(1)}$ не является справедливой. С другой стороны $\hat{S}^{(0)}$ является в точности мартингалом и таким образом справедливой.

3. Для $\dfrac{\mu}{\sigma^2} > \dfrac{1}{2}$ оптимальная пропорция:

$$\underline{\pi}_i^{(1)} = 1,\ i = \overline{0, n-1}$$

В этом случае получаем

$$E\left[\left.\frac{h_{i+1}^{(0)}}{h_{i+1}^{(\underline{\pi})}}\right| A_{t_i}\right] = \exp\left\{(-\mu + \frac{\sigma^2}{2})\Delta\right\} < 1$$

Это говорит о том, что $\hat{S}_i^{(0)} = \dfrac{S_i^{(0)}}{S_i^{(\underline{\pi})}}$ является строгим супермартингалом. Это значит, что $\hat{S}_i^{(0)}$ не мартингал и таким образом по определению 4.1 не является справедливой.

Заметим, что $\hat{S}^{(1)} = 1$ -- мартингал. Для $\pi_i = (\pi_i^{(0)}, \pi_i^{(1)}) = (1,0)$ получим:

$$\left.\frac{\partial g_i^{\theta,\pi,\underline{\pi}}}{\partial\theta}\right|_{\theta=0+} = \exp\left\{(-\mu + \frac{\sigma^2}{2})\Delta\right\} - 1 < 0$$

По следствию 4.2 это подтверждает также, что $S^{(0)}$ не является справедливой.

Этот пример демонстрирует то, что эталонные цены не всегда являются мартингалами.

6. Справедливые цены случайных платежей.

H_i -- случайный платеж, A_{t_i}-измеримый, возможны отрицательные выплаты, выраженные в единицах национальной валюты, они должны быть выполнены в данный момент времени t_i, $i = \overline{1, n}$.

Следствие 6.1. Справедливая цена $U_k^{(H_i)}$ в момент времени t_k для случайного платежа H_i удовлетворяет формуле:

$$U_k^{(H_i)} = S_k^{(\pi)} E\left[\frac{H_i}{S_i^{(\pi)}} \middle| A_{t_k} \right], \ k = \overline{0,i} \tag{6.1}$$

Очевидно, по формуле (4.10) все справедливые цены случайных платежей имеют соответствующий эталонный платеж типа:

$$\hat{U}_k^{(H_i)} = \frac{U_k^{(H_i)}}{S_k^{(\pi)}}, \ k = \overline{0,i}, \ i = \overline{0,n} \tag{6.2}$$

где процесс $\hat{U}_k^{(H_i)} = \left\{ U_k^{(H_i)}, k \in \{0,1,...,i\} \right\}$ формирует $(\underline{A}, P)$-мартингал в соответствии с определением 4.1.

Заметим, что все справедливые портфели и справедливые стоимости случайных платежей формируют ценовую систему, где эталонные цены являются $(\underline{A}, P)$-мартингалами.

Если существует только одна эквивалентная рискнейтральная мартингальная мера, то формула (6.1) является стандартной рискнейтральной ценовой формулой используемой в финансировании.

Формально, можно расширить (6.1) и для оценивания накопленного значения потоков платежей, которые возникали в прошлом $k \in \{i+1, i+2, ...\}$.

Получаем:

$$U_k^{(H_i)} = E\left[H_i \middle| A_{t_k} \right] P_k^i \tag{6.4}$$

где

$$P_k^i = E\left[\frac{S_k^{(\pi)}}{S_i^{(\pi)}} \middle| A_{t_k} \right] \tag{6.5}$$

P_k^i -- справедливое значение нулевой купонной облигации в момент времени t_k с датой истечения t_i, $k = \overline{0,i}$ $i = \overline{0,n}$.

Формула (6.4) отражает классическую актуарную ценовую формулу.

7. Справедливое оценивание последовательности потоков платежей.

Для оценивания страховых полисов актуарной задачей является оценка последовательности потоков платежей $X_0, X_1, ..., X_n$, с выплатами в моменты времени $t_0, t_1, ..., t_n$ соответственно. После каждого платежа, его значение инвестируется страховой компанией в строго положительный портфель, характеризуемый процессом пропорции π. Эталонная справедливая цена $\hat{Q}_0$ в момент времени t_0 для вышеописанной последовательности потоков платежей в соответствии с (6.2) определяется выражением:

$$\hat{Q}_0 = E\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{X_k}{S_k^{(\pi)}} \middle| A_{t_0}\right] \tag{7.1}$$

Это значит, что эталонное справедливое значение $\hat{Q}_i$ в момент времени t_i, $i = \overline{0, n-1}$ этой последовательности потоков платежей равно сумме:

$$\hat{Q}_i = \hat{C}_i + \hat{R}_i \ (7.2),\ i = \overline{0, n}$$

где

$$\hat{C}_i = \frac{1}{S_i^{(\pi)}} \sum_{k=0}^{i} X_k \prod_{l=k}^{i-1} h_{l+1}^{(\pi)} \tag{7.3}$$

$\hat{C}_i$ означает эталонное значение уже накопленных платежей.

$$\hat{R}_i = E\left[\sum_{k=i+1}^{n} \frac{X_k}{S_k^{(\pi)}} \middle| A_{t_i}\right] \tag{7.4}$$

$\hat{R}_i$ -- эталонная справедливая цена в момент времени t_i для оставшихся платежей, которые называются справедливыми резервами.

$\hat{Q} = \{\hat{Q}_i, i \in \{0,1,...,n\}\}$ формирует $(\underline{A}, P)$-мартингал для всех выбранных π.

При выражении в единицах национальной валюты, мы получаем в момент времени t_i справедливое значение:

$$Q_i = S_i^{(\pi)} \hat{Q}_i \ (7.5),\ i = \overline{0, n}$$

Полученный выше результат важен для страхования, для справедливого оценивания страхования жизни.

8. Модульно связанные страховые контракты.

В контексте страхования снова рассмотрим потоки платежей $X_0, X_1, ..., X_n$, но предположим специфическую форму X_i:

$$X_i = D_i S_i^{(\pi)},\ i = \overline{1, n} \tag{8.1}$$

Стандартное актуарное значение $W_i^{(\pi)}$ потока платежей в момент времени t_i является детерминированным накопленными платежами $C_i^{(\pi)}$ и точно определено перспективным резервом r_i.

Стандартная актуарная методология предполагает, что страхователь инвестирует все накопленные платежи в портфель $S^{(\pi)}$.

$$W_i^{(\pi)} = C_i^{(\pi)} + r_i \tag{8.2}$$

с накопленными платежами:

$$C_i^{(\pi)} = S_i^{(\pi)} \sum_{k=1}^{i} D_k \tag{8.3}$$

и актуарным будущим резервом:

$$r_i = S_i^{(\pi)} E\left[\sum_{k=i+1}^{n} D_k \middle| A_{t_i}\right],\ i = \overline{0,n} \tag{8.4}$$

Рассмотрим разницу между $W_i^{(\pi)}$ и Q_i, определенным в (7.5).

Эталонное значение $\hat{W}_i^{(\pi)} = \dfrac{W_i^{(\pi)}}{S_i^{(\underline{\pi})}}$ в момент времени t_i для потоков платежей этого страхового контракта из (8.2):

$$\hat{W}_i^{(\pi)} = \frac{C_i^{(\pi)} + r_i}{S_i^{(\underline{\pi})}} \tag{8.5}$$

С другой стороны, эталонное справедливое значение $\hat{Q}_i^{(\pi)}$ в момент времени t_i потоков платежей этого контракта согласно (7.1)-(7.5) определено выражением:

$$\hat{Q}_i^{(\pi)} = \frac{C_i^{(\pi)} + R_i}{S_i^{(\underline{\pi})}} \tag{8.6}$$

со справедливым будущим резервом:

$$R_i = S_i^{(\pi)} E\left[\sum_{k=i+1}^{n} \frac{D_k S_k^{(\pi)}}{S_k^{(\underline{\pi})}} \middle| A_{t_i}\right],\ i = \overline{0,n} \tag{8.7}$$

Лемма 8.1. Если

$$E\left[\sum_{k=m+1}^{n} D_k \middle| A_{t_m}\right] \ge 0,\ m = \overline{0,n-1} \tag{8.8}$$

то

$$R_i \le r_i,\ i = \overline{0,m-1} \tag{8.9}$$

Так как, по (8.4) имеем

$$r_m = S_m^{(\pi)} E\left[\sum_{k=m+1}^{n} D_k \middle| A_{t_m}\right]$$

Условие (8.8) означает, что страховой контракт определяет поток платежей, чей актуарный будущий резерв никогда не принимает отрицательные значения.

Из (8.5) и (8.6) под условием (8.8) получаем неравенство:

$$\hat{Q}_i^{(\pi)} \le \hat{W}_i^{(\pi)},\ i = \overline{0,n}$$

Из (8.9) получаем

$$r_i - R_i \ge 0 \tag{8.10}$$

Заключение.

Мы показали, что портфель с оптимальным приростом играет центральную роль для оценивания в финансах и страховании. Была представлена концепция справедливой цены случайных платежей. Справедливые цены портфелей, измеряемых в единицах портфеля с оптимальным приростом, формируют мартингалы.