МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФРМАТИКИ
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ПОЛУЗЁРОВ Тимофей Дмитриевич

МОДЕЛИ ДОХОДНОСТЕЙ АКТИВОВ В СРЕДНЕ-ДИСПЕРСИОННОМ АНАЛИЗЕ МАРКОВИЦА НА КРИПТОВАЛЮТНЫХ РЫНКАХ

Магистерска диссертация
специальность 1-31 80 09 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель
Харин Алексей Юрьевич
заведующий кафедрой, доктор
физико-математических наук,
профессор

Допущена к защите
«___» ______________ 2025 г.
Зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики
____________ А. Ю. Харин
доктор физико-математических наук, профессор

Минск, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Ключевые слова: кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g

Задачи исследования:

1. пункт 1
2. пункт 2

Цель работы: тут цель

Объект исследования является

Предмет исследования является

Методы исследования: методы методы

Результаты работы

Области применения

АГУЛЬНАЯ ХАРАКТЫРЫСТЫКА РАБОТЫ

Ключавыя словы: кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g

Мэта работы: тут цель

Задачи исследования:

1. пункт 1
2. пункт 2

Аб'ектам даследавання является

Метады даследавання методы методы

Вынікі работы

Вобласць ўжывання

GENERAL DESCRIPTION OF WORK

Keywords: кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g кейвордс dct ghbdt ndctgfd mfjgm jdfgm jmfg mjdjf gmjldfmjl gmdfl g

The object: тут цель

The objective:

1. item one
2. item two

Research methods: методы методы

The results

Application

ВВЕДЕНИЕ

Тут введение будет

1. ВВЕДЕНИЕ В ПОРТФЕЛЬНУЮ ТЕОРИЮ

1.1. Основные понятия

Портфельный анализ берет свое начало с выхода статьи Гарри Марковица в 1952 г [4]. Подход Марковица начинается с предположения что инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег для инвестирования. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени, который называется **периодом инвестирования**. В конце периода инвестор продает активы купленные в ранее. Набор приобретенных активов иначе называют **инвестиционным портфелем**. Поэтому проблема выбора и распределения средств по активам имеет название **проблемой выбора инвестиционного портфеля**.

Пусть цены актива на начало и конец периода инвестирования равны S^0 и S^1 соотвественно. Определим **доходность актива** (Return) r за период инвестирования как

$$r = \frac{S^1 - S^0}{S^0}$$

При формировании портфеля в начальный момент времени, инвестор должен иметь в виду что доходность активов за будущий период владения заранее неизвестна. То есть он вынужден принимает решение о выборе портфеля исходя из своих ожидаемых доходностей активов.

Если инвестор ставит задачей максимизировать доходность портфеля, то в этом случае его портфель должен состоять из единственного актива с наибольшей ожидаемой доходностью. Марковиц отмечает, что такой подход является неразумны, потому что типичный инвестор хоть и желает чтобы «доходность была высокой», но одновременно требует чтобы «доходность была настолько определенной насколько это возможно». Это означает, что инвестор, стремясь одновременно максимизировать доходность и минимизировать риск (неопределенность), имеет две противоречащие друг другу цели. Подход Марковиа к принятию решения дает возможность адекватно учесть обе эти цели.

Имея N доступных активов можно сформировать бесконечно много портфелей. Это множество называют **достижимым**. Как инвестору в этих условиях выбрать портфель? Логичными являются следующие принципы при формировании портфеля:

- Из двух портфелей с одинаковым риском, инвестор выберет порфтель с большей ожидаемой доходностью
- Из двух портфелей с одинаковой доходностью, инвестор выберет портфель с меньшим риском

Другими словами, из достижимого множества портфелей инвестор склонен выбирать парето-оптимальные портфели. Множество оптимальных портфелей иначе называют **эффективным множеством**. Достижимые портфели не из эффективного множества называют **неэффективными портфелями**.

Вопрос выбора конкретного портфеля из эффективного множества остается на стороне инвестора. Здесь он уже руководствуется своей внутренней толерантностью к риску. Обычно достаточно зафиксировать приемлимый уровень риска внутри достижимого множества и выбрать портфель с соответсвующей доходностью.

Рис. 1.1. Множество портфелей

2. СРЕДНЕ-ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ПОРТФЕЛЯ

В этой главе приводится строгая математическая постановка задачи формирования порфтеля.

2.1. Основные понятия

Будем рассматривать одношаговую задачу инвестирования. Инвестор собирает портфель по рыночным ценам активов S^0 стоимостью x в момент времени $n = 0$, а момент времени $n = 1$ этот портфель продается по рыночным ценам S^1.

Пусть инветору доступно инвестирование в N активов и начальный капитал x. Цены активов в начальный момент времени $n = 0$ равны $S_1^0, \dots, S_N^0$

Обзначим

$$b = (b_1, \dots, b_N), b_i \geq 0 \tag{2.1}$$

$i = \overline{1, N}$ число активов которые преобрел инвестор.

Тогда стоимость портфеля в начальный момент времени равна

$$X^0 = b_1 S_1^0 + \dots + B_N S_N^0 \tag{2.2}$$

Иначе говоря, b есть портфель ценных бумаг, где b_i – число i-х акций, приобретенных по цене S_i^0.

Будущие цены акций в момент времени $n = 1$ равны $S_1^1, \dots, S_N^1$. Их можно представить в терминах доходностей r_i используя начальные цены

$$S_i^1 = (1 + r_i) S_i^0, i = \overline{1, N} \tag{2.3}$$

Здесь r_i являются случайными величинами.

Если инвестор сформировал портфель $b = (b_1, \dots, b_N)$, то его начальный капитал $X^0 = x$ превратится в

$$X^1 = b_1 S_1^1 + \dots + b_N S_N^1, \tag{2.4}$$

Таким образом, стоимость портфеля на конец периода инвестирования является случайной величиной. Она определяется набором случайных величин — будущими доходностями активов, и тем как инвестор распеделил капитал по доступным актвам. Если на первое повлиять невозможно, то второе полностью определяется инвестором. В его интересах собрать такой портфель, цена которого будет «побольше» и с высокой уверенностью. Это стремление максимизировать прибыть и минимизировать риск (неопределенность), Марковиц формулирует в терминах математического ожидания $\mathbb{E}\left[X^1\right]$ и дисперсии $\mathbb{D}\left[X^1\right]$ случайной величины X^1.

Имея эти две характеристики, можно по-разному формулировать оптимизационную задачу выбора наилучшего портфеля в зависимости от критерия оптимальности.

Можно, например, задаться вопросом о том, на каком портфеле b^* достигается максимум некоторой целевой функции $f = f(\mathbb{E}\left[X^1\right], \mathbb{D}\left[X^1\right])$ при «бюджетном ограничении» на класс допустимых портфелей:

$$B(x) = \{b = (b_1, \ldots, b_N) : b_i \geq 0, X_0(b) = x\}, x > 0 \tag{2.5}$$

Задача, сформулированная в этом разделе, допускает записи в более удобном виде. А именно, перейти от абсолютных цен к доходностям.

2.2. Сведение к доходностям

Сформулированная задача позволяет рабоать не с будущими ценами активов $S_1^1, \ldots, S_N^1$, а с доходностями $r_1, \ldots, r_N$.

Перейдем от величин $b = (b_1, \ldots, b_N)$ к величинам $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$, которые определим как

$$\omega_i = \frac{b_i S_i^0}{x} \tag{2.6}$$

причем $\omega_i \geq 0, i = \overline{1, N}$ и

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i S_i^0}{x} = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{N} b_i S_i^0 = \frac{X^0}{x} = 1 \tag{2.7}$$

Таким образом, ω есть не что иное как доли капитала инвестируемые в соответсвующие активы.

Рассмотрим цену портфеля в момент времени $n = 1$. Доходность всего портфеля обозначим через R. Тогда

$$X^1 = (1 + R)X^0 \tag{2.8}$$

$$R = \frac{X^1}{X^0} - 1 = \frac{X^1}{x} - 1 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} b_i S_i^0}{x} \right) - 1 = \left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i \frac{S_i^1}{S_i^0} \right) - 1 = \tag{2.9}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i \frac{S_i^1}{S_i^0} \right) - \sum_{i=1}^{N} \omega_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \frac{S_i^1}{S_i^0} - \omega_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(\frac{S_i^1}{S_i^0} - 1 \right) = \tag{2.10}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i \tag{2.11}$$

Тоесть доходность всего портфеля определяется как смесь случайных величин — доходностей активов входящих в портфель.

$$\mathbb{E}\left[R\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i \right] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mathbb{E}\left[r_i\right] \tag{2.12}$$

$$\mathbb{D}\left[R\right] = \mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i \right] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \mathbb{D}\left[r_i\right] + \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^{N} \omega_i \omega_j \mathbf{Cov}\left(r_i, r_j\right) \tag{2.13}$$

Уравнения 2.12 и 2.13 удобно переписать в матричном виде.

Пусть

$$r = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbb{R}^N \tag{2.14}$$

— вектор-столбец доходностей активов (случайный вектор).

Математическое ожидание доходностей

$$\mu = \mathbb{E}\left[r\right] = \left(\mathbb{E}\left[r_1\right], \ldots, \mathbb{E}\left[r_N\right]\right) \tag{2.15}$$

и матрица ковариаций

$$\Sigma = \{\sigma_{ij} = \mathbf{Cov}\,(r_i, r_j)\}_{i=1,j=1}^{N,N} \in \mathbb{R}^{N\times N} \tag{2.16}$$

распределение капитала по активам

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N \tag{2.17}$$

Доходность портфеля (случайная величина) есть

$$R = \omega^T r \tag{2.18}$$

Математическое ожидание доходности портфеля обозначим μ_X

$$\mu_X = \mathbb{E}\,[R] = \mathbb{E}\left[\omega^T r\right] = \omega^T \mu \tag{2.19}$$

а дисперсию σ_X^2

$$\sigma_X^2 = \mathbb{D}\,[R] = \mathbb{D}\left[\omega^T r\right] = \omega^T \Sigma \omega \tag{2.20}$$

Полученные матричные обозначения позволяют удобно сформулировать задачу оптимизации. Причем эту задачу можно ставить в различных постановках.

2.3. Оптимизационная задача

Предположим что нам известны математическое ожидание μ и ковариации Σ доходностей активов за период инвестирования. На практике конечно же эти величины не известны и их приходится оценивать. Но в этом пункте сфокусируемся на постановке и решении оптимизационной задачи при известных входных данных.

Для удобства матричных записей используется обозначение $e = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^N$ — единичный вектор-столбец.

В качестве целевой функции возьмем линейную комбинацию доходности и риска портфеля. Для этого введем риск-параметр τ.

$$f\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) = \tau\omega^T\Sigma\omega - \omega^T\mu \to \min_{\omega} \tag{2.21}$$

Используя риск-параметр $\tau \in [0, +\infty]$ оптимизационную задачу можно сформулировать в следующем виде

$$\begin{cases} \tau\omega^T\Sigma\omega - \omega^T\mu \to \min_{\omega} \\ \omega^T e = 1 \\ \omega \geq 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Множество решений при различных значениях τ образуют эффективное множество портфелей. При $\tau = 0$ имеем портфель минимального риска.

Альтернативно можно записать оптимизационную задачу когда риск портфеля нужно зафиксировать на определенном уровне

$$\begin{cases} -\omega^T\mu \to \min_{\omega} \\ \omega^T\Sigma\omega \leq \sigma_X^2 \\ \omega^T e = 1 \\ \omega \geq 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Аналогично если требуется зафиксировать определенную доходность

$$\begin{cases} \omega^T\Sigma\omega \to \min_{\omega} \\ \omega^T\mu \geq \mu_X \\ \omega^T e = 1 \\ \omega \geq 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Полученные задачи решаются с помощью хорошо изученных методов квадратичного программирования.

Конечно, на практике распределения будущих доходностей, или хотябы их характрестики неизвестны. Поэтому для применения портфельной теории требуется оценить среднее и коварицию будущих доходностей. На основани истории наблюдений за доходностями активов можно построить прогноз необходимых характеристик и решать оптимизационную задачу.

Еще одним важным понятием в портфельной теории является диверсификация. Прежде чем переходить к рассмотрению методов оценки будущих доходностей, рассмотрим как с помощью диверсификации можно редуцировать риск портфеля.

2.4. Диверсификация портфеля

Обратимся теперь к вопросу о том, как диверсификацией можно добится сколь угодно малого (несистематического) риска, измеряемого дисперсией или стандарным отклонением величины R.

С этой целью рассмотрим для начала пару случайных величин ξ_1 и ξ_2 с конечными вторыми моментами. Тогда если c_1 и c_2 – константы, $\sigma_i = \sqrt{\mathbb{D}[\xi_i]}, i = 1, 2$, то

$$\mathbb{D}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = (c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2)^2 + 2c_1c_2\sigma_1\sigma_2(1 + \sigma_{12}), \tag{2.25}$$

где $\sigma_{12} = \frac{\mathbf{Cov}(\xi_1,\xi_2)}{\sigma_1\sigma_2}, \mathbf{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}[\xi_1\xi_2] - \mathbb{E}[\xi_1] \cdot \mathbb{E}[\xi_2]$. Отсюда ясно, что если $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$ и $\sigma_{12} = -1$, то $\mathbb{D}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = 0$. ак Таким образом, если величины ξ_1 и ξ_2 отрицательно коррелированы с коэффициентом корреляции $\sigma_{12} = -1$, то таким подбором констант c_1 и c_2, что $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$, получаем комбинацию $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ с нулевой дисперсией. Но, конечно, при этом среднее значение $\mathbb{E}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2]$ может оказаться достаточно малым. (Случай $c_1 = c_2 = 0$ для задачи оптимизации не интересен в силу условия $b \in B(X)$).

Из этих элементарных рассуждений ясно, что при заданных ограничениях на (c_1, c_2) и класс величин (ξ_1, ξ_2) при решении задачи о том, чтобы сделать $\mathbb{E}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2]$ «побольше», а $\mathbb{D}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2]$ «поменьше», надо стремиться к выбору таких пар (ξ_1, ξ_2), для которыз их ковариация была бы как можно ближе к минус единице.

Изложенный эффект отрицательной коррелированности, называемый эффектом Марковитца, является одной из основных идей диверсификации при инвестировании — при составлении портфеля ценных бумаг надо стремиться к тому, чтобы вложения делались в бумаги, среди которых по возможности много отрицательно коррелированных.

Другая идея, лежащая в основе диверсификации, основана на следующем соображении.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — последоватльность некоррелированных случайных величин с дисперсиями $\mathbb{D}[\xi_i] \leq C, i = 1, \ldots, N$, где C — некоторая константа. Тогда

$$\mathbb{D}[\omega_1\xi_1 + \cdots + \omega_N\xi_N] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \mathbb{D}[\xi_i] \leq C \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2. \tag{2.26}$$

Поэтому, взяв, например, $\omega_i = \frac{1}{N}$, находим, что

$$\mathbb{D}[\omega_1\xi_1 + \cdots + \omega_N\xi_N] \leq \frac{C}{N} \to 0, N \to \infty \tag{2.27}$$

Этот эффект некоррелиованности говорит о том, что если инвестирование производится в некоррелированные ценные бумаги, то для уменьшения риска, т. е. дисперсии $\mathbb{D}[\omega_1\xi_1 + \cdots + \omega_N\xi_N]$, надо по возможности брать их число N как можно большим.

Вернемся к вопросу о дисперсии $\mathbb{D}[R]$ величины

$$R = \omega_1 r_1 + \cdots + \omega_N r_N \tag{2.28}$$

Имеем

$$\mathbb{D}[R] = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \mathbb{D}[r_i] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N} \omega_i \omega_j \mathbf{Cov}(r_i, r_j) \tag{2.29}$$

Возьмем здесь $\omega_i = \frac{1}{N}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \mathbb{D}[r_i] = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} \mathbb{D}[r_i] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{D}[r_i] = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{D}[r_i] = \tag{2.30}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \overline{\sigma}_N^2, \tag{2.31}$$

где $\bar{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{D}[r_i]$ — средняя дисперсия.

Далее,

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} \omega_i\omega_j \mathbf{Cov}\left(r_i, r_j\right) = \frac{1}{N^2}\cdot \sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} \mathbf{Cov}\left(r_i, r_j\right) = \tag{2.32}$$

$$= \frac{1}{N^2}\cdot N(N-1)\cdot \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} \mathbf{Cov}\left(r_i, r_j\right) = \tag{2.33}$$

$$= \frac{N-1}{N}\cdot \overline{\mathbf{Cov}}_N \tag{2.34}$$

где $\overline{\mathbf{Cov}}_N$ есть средняя ковариация

$$\overline{\mathbf{Cov}}_N = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} \mathbf{Cov}\left(r_i, r_j\right). \tag{2.35}$$

Таким образом,

$$\mathbb{D}\left[R\right] = \frac{1}{N}\cdot \overline{\sigma}_N^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\cdot \overline{\mathbf{Cov}}_N, \tag{2.36}$$

и ясно, что если $\overline{\sigma}_N^2 \leq C$ и $\overline{\mathbf{Cov}}_N \to \overline{\mathbf{Cov}}$ при $N \to \infty$, то

$$\mathbb{D}\left[R\right] \to \overline{\mathbf{Cov}}, N \to \infty. \tag{2.37}$$

Из этой формулы мы видим, что если $\overline{\mathbf{Cov}}$ равна нулю, то диверсификацией с достаточно большим N риск инвестирования, т.е. $\mathbb{D}\left[R\right]$, может быть сделан сколь угодно малым. К сожалению, на практике, как правило, имеется положительная корреляция в ценах (они движутся довольно-таки согласованно в одном направлении), что приводит к тому, что $\overline{\mathbf{Cov}}_N$ не стремится к нулю при $N \to \infty$. Предельное значение $\overline{\mathbf{Cov}}$ и есть тот систематический, иначе — рыночный — риск, который присущ рассматриваемому рынку и диверсификацией не может быть редуцирован. Первый же член в формуле 2.36 определяет несистематический риск, который может быть редуцирован, как мы видели, выбором большого числа акций.

3. МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В этой главе будут рассмотрены некоторые модели временных рядов с помощью которых можно решать задачу оценки ожидаемой доходности активов.

3.1. Общий подход к прогнозированию рядов

Процесс прогнозирования заключается в предсказании будущего значения временного ряда либо путем моделирования ряда исключительно на основе его прошлого поведения (авторегрессия), либо путем включения других внешних переменных.

Чтобы применить модели машинного обучения к задачам прогнозирования, временной ряд необходимо преобразовать в матрицу, где каждое значение связано с определенным прерыдущим значением ряда (лагом). В контексте временного ряда лаг относительно момента времени t определяется как значение ряда на предыдущих временных шагах. Например, лаг 1 представляет значение на временном шаге $t-1$, тогда как лаг m представляет значение на временном шаге $t-m$.

Это преобразование необходимо для моделей машинного обучения для захвата зависимостей и закономерностей, которые существуют между прошлыми и будущими значениями во временном ряду. Используя лаги в качестве входных признаков, модели машинного обучения могут учиться на прошлом и делать прогнозы относительно будущих значений. Количество лагов, используемых в качестве входных признаков в матрице, является важным гиперпараметром, который необходимо тщательно настраивать для получения наилучшей производительности модели.

Модели машинного обучения в основном заточены на решение табличных задач. Однако, они несложным образом адаптируются для пронозирования временных рядов. Признаки формируются как лаги временного ряда. Процесс формирования матрицы объекты-признаки схематично показан на рисунке 3.1.

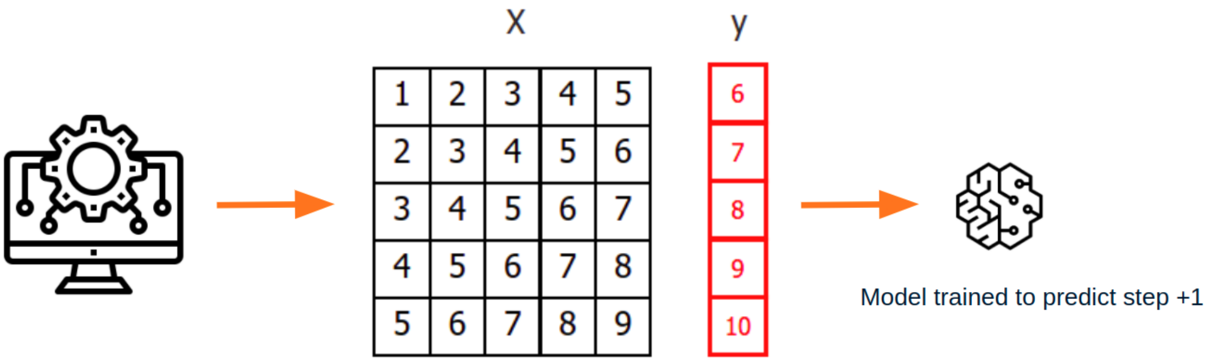

Рис. 3.1. Матрица объекты-признаки

После того, как данные были перестроены в новую форму, любая регрессионная модель может быть обучена прогнозировать следующее значение (шаг) ряда. Во время обучения модели каждая строка считается отдельным экземпляром данных, где значения на лагах $1, 2, \ldots p$ считаются предикторами для целевого количества временного ряда на временном шаге $p + 1$.

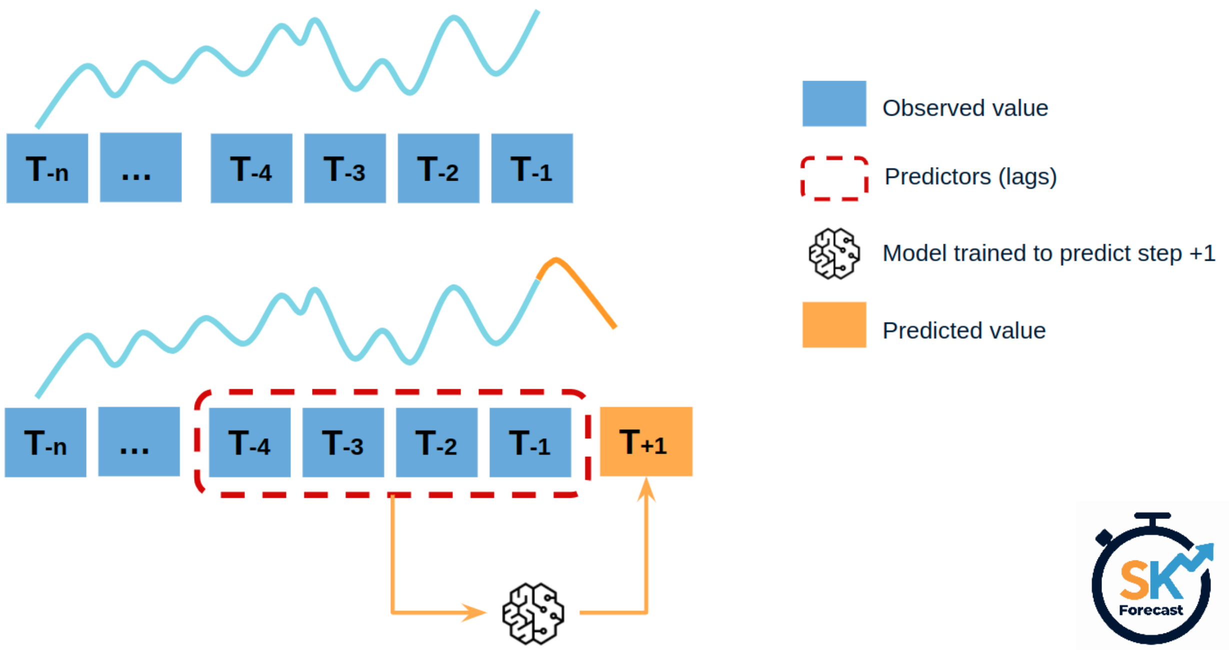

Рис. 3.2. Формирование признаков как временных лагов ряда

В прогнозировании временных рядов процесс бэктестинга заключается в оценке производительности предсказательной модели путем ее ретроспективного применения к историческим данным. Таким образом, это особый тип перекрестной проверки, применяемый к предыдущим периодам.

Цель бэктестинга — оценить точность и эффективность модели . Проверяя модель на исторических данных, можно оценить насколько хорошо она работает на данных, которые она ранее не видела. Это важный шаг в процессе моделирования, поскольку он помогает гарантировать, что модель является надежной и устойчивой.

Бэктестинг можно проводить с использованием различных методов, таких как простые разделения обучения и тестирования или более сложные методы, такие как скользящие окна или расширяющиеся окна. Выбор метода зависит от конкретных потребностей анализа и характеристик данных временных рядов.

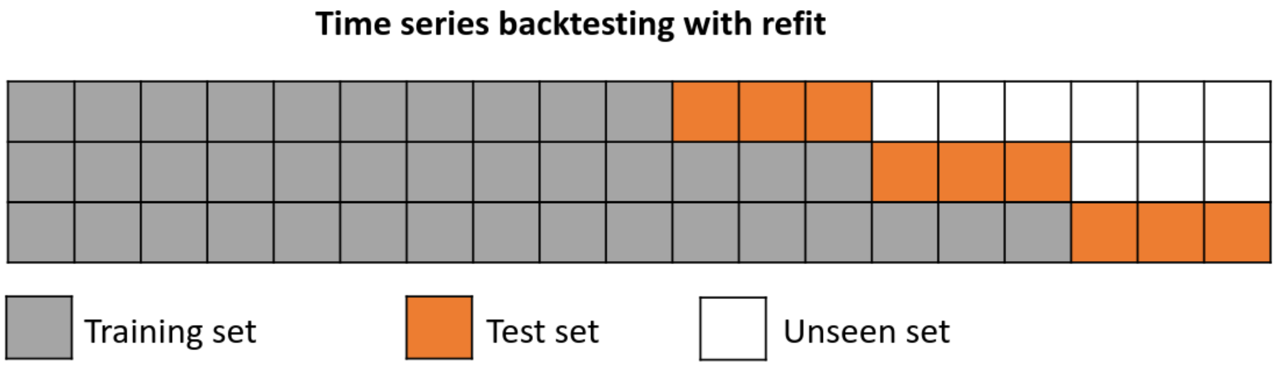

Рис. 3.3. Формирование выборок при бектестинге

Будем использовать подход с расширением обучающего множества и переобучением на каждом шаге. При таком подходе модель обучается перед каждым прогнозированием, и все доступные данные на тот момент используются в процессе обучения. Это отличается от стандартной перекрестной проверки, где данные случайным образом распределяются между обучающими и проверочными наборами.

Вместо рандомизации данных этот бэктестинг последовательно увеличивает размер обучающего набора, сохраняя временной порядок данных. Благодаря этому модель можно тестировать на все больших объемах исторических данных, что обеспечивает более точную оценку ее прогностических возможностей.

3.2. Линейная регрессия

Пусть X и Y матрица обектов-признаков и вектор целевых значений построенные по историческим данным так как описано выше. Задача восстановления регрессии сводится к тому чтобы по выборочным данным аппроксимировать целевую зависимость $y^* : X \to Y$.

Линейная регрессия есть линейная комбинация признаков (лагов) x и весов w.

$$a(x) = w_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n = \langle x, w \rangle \tag{3.1}$$

Решение w^* находится методом наименьших квадратов. Определим функционал потель как средний квадрат ошибки модели на всех элементах выборки.

$$Q(a) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (y_i - a(x_i))^2 = ||Xw - y||^2 \tag{3.2}$$

Необходимое условие минимума

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = 2X^T(Xw - y) = 0 \tag{3.3}$$

Решая систему уравнений получим аналитический вид решения оптимизационной задачи

$$w^* = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y \tag{3.4}$$

3.3. Случайный лес

Одним из сильнейших алгоритмов считется Алгоритм случайного леса есть простое голосование над решающими деревьями.

Дерево решений есть бинарное дерво. Определены вершины двух типов:

- внутренние — содержит предикат $b_v : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$
- листовые — хранит выходное значение $c_v \in \mathbb{Y}$

Алгоритм работы дерева на объекте x

1. Стартуем из корня
2. Вычисляем текущий предикат $b_v(x)$

3. Если $b_v(x) = 0$ то делаем шаг в левое поддерево, иначе — в правое

4. Пока не дошли до листовой вершины, повторяем шаги 2 и 3

5. Возвращаем значение c_v в листе

В качестве базовых алгоритмов выберем набор решающих деревьев $b_1, \dots, b_k$. Объеденим результаты работы базовых алгоритмов с помощью простого голосования

$$a(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} b_i(x) \tag{3.5}$$

Ошибку работы ансамбля можно разложить на 3 компоненты

$$Q(a) = bias(a) + variance(a) + noise \tag{3.6}$$

где

$$bias(a) = f(x) - \mathbb{E}\left[a(x, X)\right]_X \tag{3.7}$$

$$\tag{3.8}$$

— смещение алгоритма,

$$variance(a) = \mathbb{E}\left[a(x, X)\right]_X - \mathbb{E}\left[a(x, X)\right]_x^2 \tag{3.9}$$

$$\tag{3.10}$$

— разброс алгоритма,

$$noise = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(y(x, \varepsilon) - f(x)\right)^2\right]_\varepsilon\right]_x \tag{3.11}$$

— неустранимый шум.

Смещение ансамбля определяется смещением базового алгоритма. Поэтому разумно строить неглубокие деревья.

$$\begin{aligned} bias(a) &= f(x) - \mathbb{E}\left[a(x,X)\right]_X = && (3.12) \\ &= f(x) - \mathbb{E}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b(x, X^i)\right]_X = && (3.13) \\ &= f(x) - \mathbb{E}\left[b(x,X)\right]_X = && (3.14) \\ &= bias_X(b) && (3.15) \end{aligned}$$

Разброс ансамбля определяется числом базовыхалгоритмов в нем и корреляциями между получившимися алгоритмами. Постараемся добится некоррелированности или по крайней мере непохожести базовых алгоритмов за счет обучения каждого из нах на разных данных. С этим помогает идея бутстрапирования.

$$\begin{aligned} variance(a) &= \mathbb{E}\left[a(x,X) - \mathbb{E}\left[a(x,X)\right]_X\right]_X^2 = && (3.16) \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b_i - \mathbb{E}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b_i\right]_X\right]_X^2 = && (3.17) \\ &= \frac{1}{k^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} \left(b_i - \mathbb{E}\left[b_i\right)\right]_X\right]_X^2 = && (3.18) \\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} variance_X(b_i) + \frac{1}{k^2}\sum_{i \neq j} \mathbf{Cov}\left(b_i, b_j\right) && (3.19) \end{aligned}$$

Помимо алгоритмов машинного обучения для прогнозирования временных рядом можно воспользоваться моделями случайных процессов. Одним из них является модель ARIMA.

3.4. ARIMA

Модель $ARMA(p,q)$ сочетает в себе моедли авторегрессии $AR(p)$ и скользящего среднего $MA(q)$.

Пусть задано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), P)$ Будем считать что $\mathscr{F}_n = \sigma(\ldots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ с белым шумом $\varepsilon = (\varepsilon_n)$.

По определению, последовательность $x = (x_n)$ является ARMA-моделью, если

$$x_n = \mu_n + \sigma\varepsilon_n \tag{3.20}$$

где

$$\mu_n = (a_0 + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p}) + (b_1\varepsilon_{n-1} + b_2\varepsilon_{n-2} + \cdots + b_q \varepsilon n - q) \tag{3.21}$$

Эта модель допускает обобщение на случай когда исходный ряд не стационарен. А именно, расммотрим разности процесса x

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} \tag{3.22}$$

Повторяя операцию взятия разности d раз, получим процесс $\Delta^d x = (\Delta^d x_n)$. Если полученный процесс «более стационарный» чем исходный, то построим уже для него $ARMA(p, q)$ модель.

Описанная модель есть трехпараметрическая модель временного ряда $ARIMA(p, d, q)$. Символически это можно записать

$$\Delta^d ARIMA(p, d, q) = ARMA(p, q) \tag{3.23}$$

В этой главе были рассмотрены некоторые алгоритмы построения моделей временных рядов позволяющие строить прогноз будущих значений на основании истории ряда.

4. ПРОВЕРКА СТРАТЕГИЙ НА РЫНОЧНЫХ ДАННЫХ

В этой главе оценивается доходность стратегий инвестирования, основанных на построении оптимального портфеля Марковица, где для прогнозирования будущих ожидаемых значений используются алгоитмы машинного обучения и модели временных рядов.

4.1. Подготовка данных

Рыночные данные были выгружены с помощью API с криптовалютной биржи OKX [7]. В качестве доступных для торговли активов рассматриваются 8 наиболее популярных крюптовалют. Временной период с 1 января 2022 по 1 января 2025. Был выбран дневной таймфрейм. Период инвестирования 1 неделя.

На графике 4.1 изображены динамики цен активов

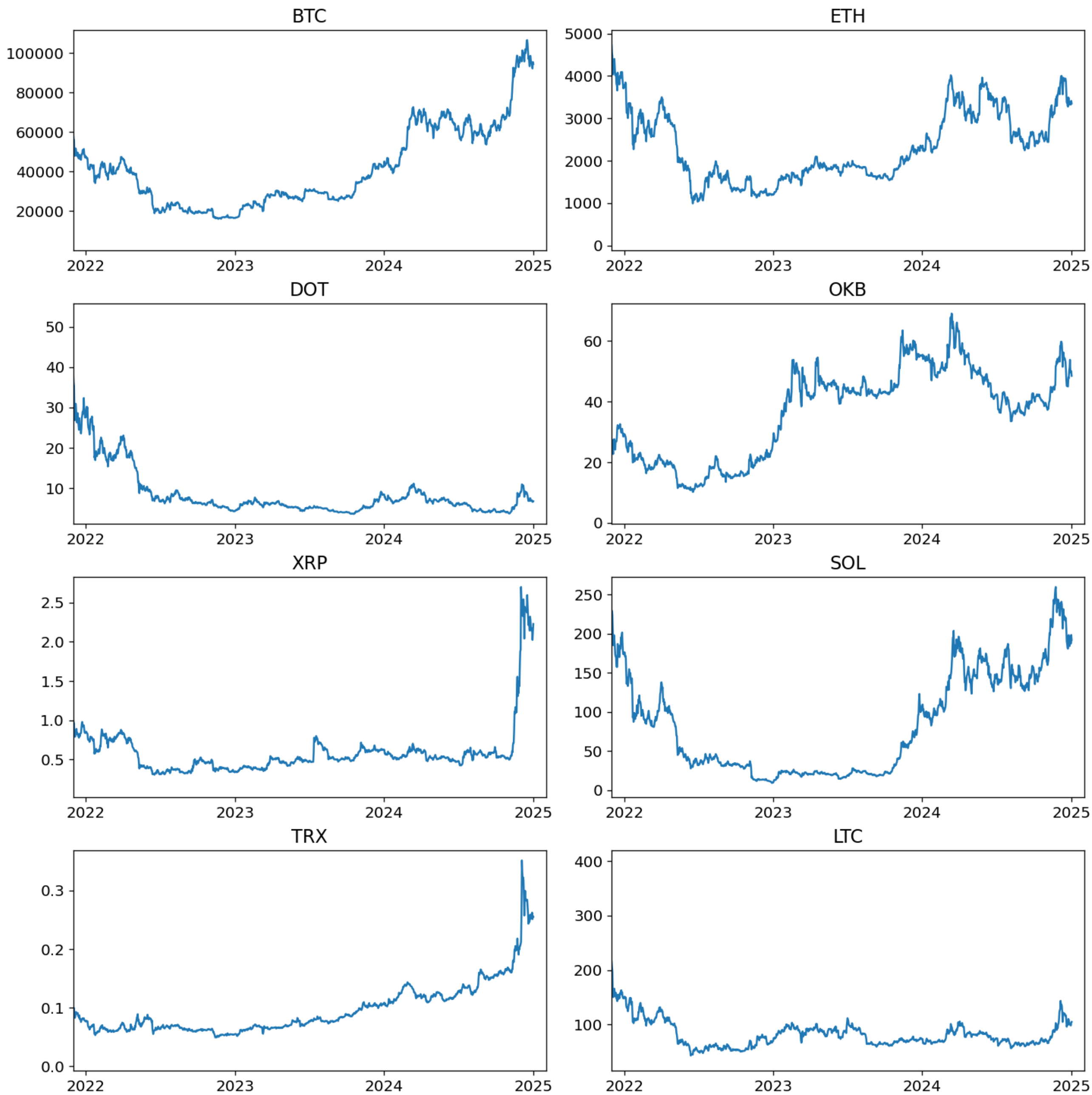

Рис. 4.1. Цены активов

Перейдем от цен к недельным доходностям. Временные ряды соответсвующие доходностям представлены на графике 4.2, а некоторые статистики относительно распределений доходностей в таблице 4.1

Таблица 4.1. Доходности активов

	BTC	ETH	DOT	OKB	XRP	SOL	TRX	LTC
mean	0.0073	0.0038	-0.0031	0.0077	0.0132	0.0114	0.0105	0.0025
std	0.0779	0.0961	0.1110	0.0936	0.1328	0.1482	0.0800	0.1001
min	-0.3328	-0.3830	-0.3925	-0.3591	-0.3596	-0.6018	-0.3162	-0.3392
25%	-0.0358	-0.0477	-0.0724	-0.0401	-0.0506	-0.0765	-0.0236	-0.0513
50%	0.0026	-0.0013	-0.0084	-0.0016	-0.0003	-0.0034	0.0106	0.0001
75%	0.0446	0.0555	0.0573	0.0494	0.0430	0.0906	0.0373	0.0546
max	0.3566	0.5056	0.6188	0.4003	1.0235	0.7409	0.7407	0.5294

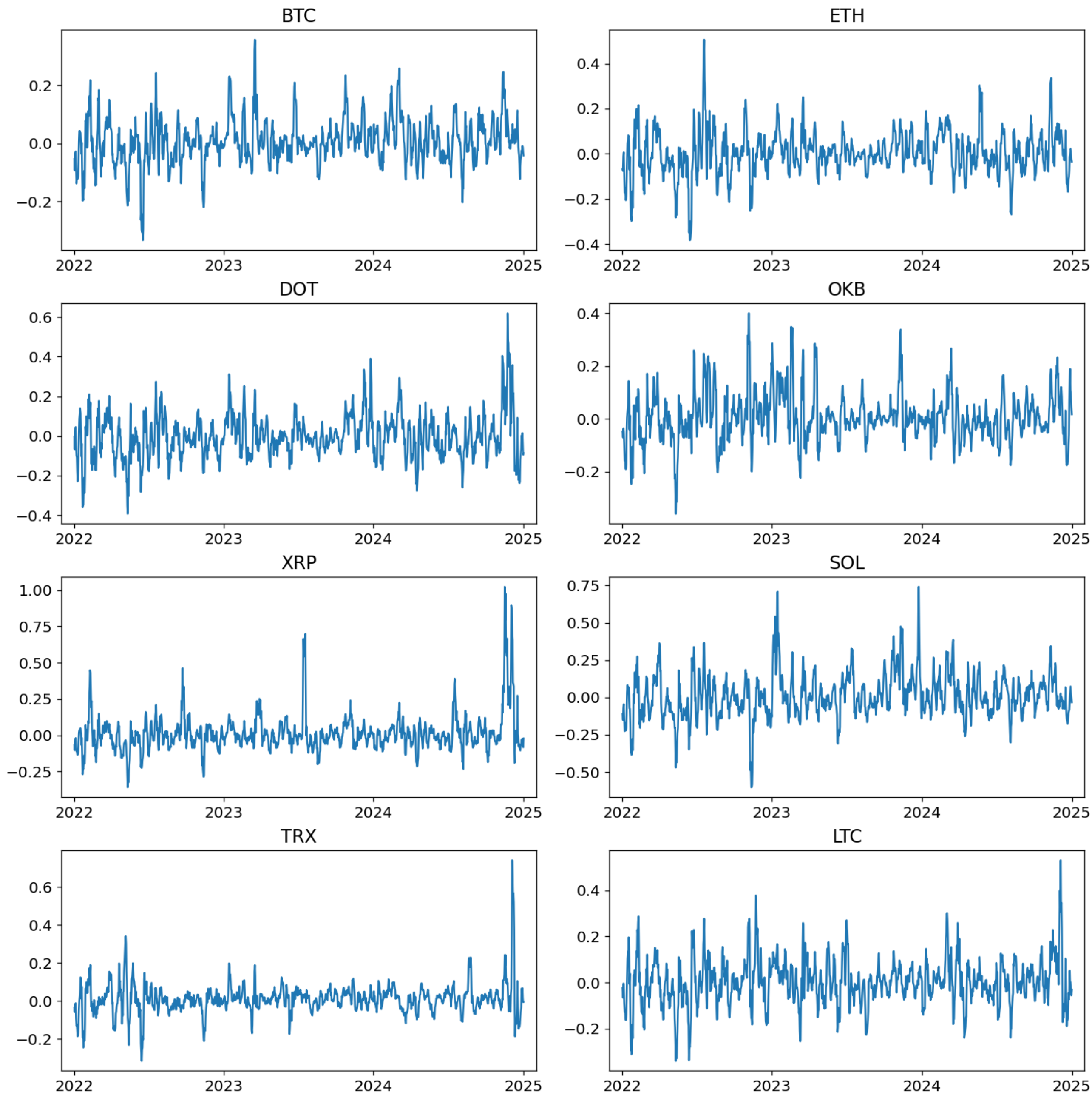

Рис. 4.2. Доходности активов

Можно видеть редкие но достаточно сильные скачки.

Распределение доходностей активов представлено на гистограммах на рисунке 4.3

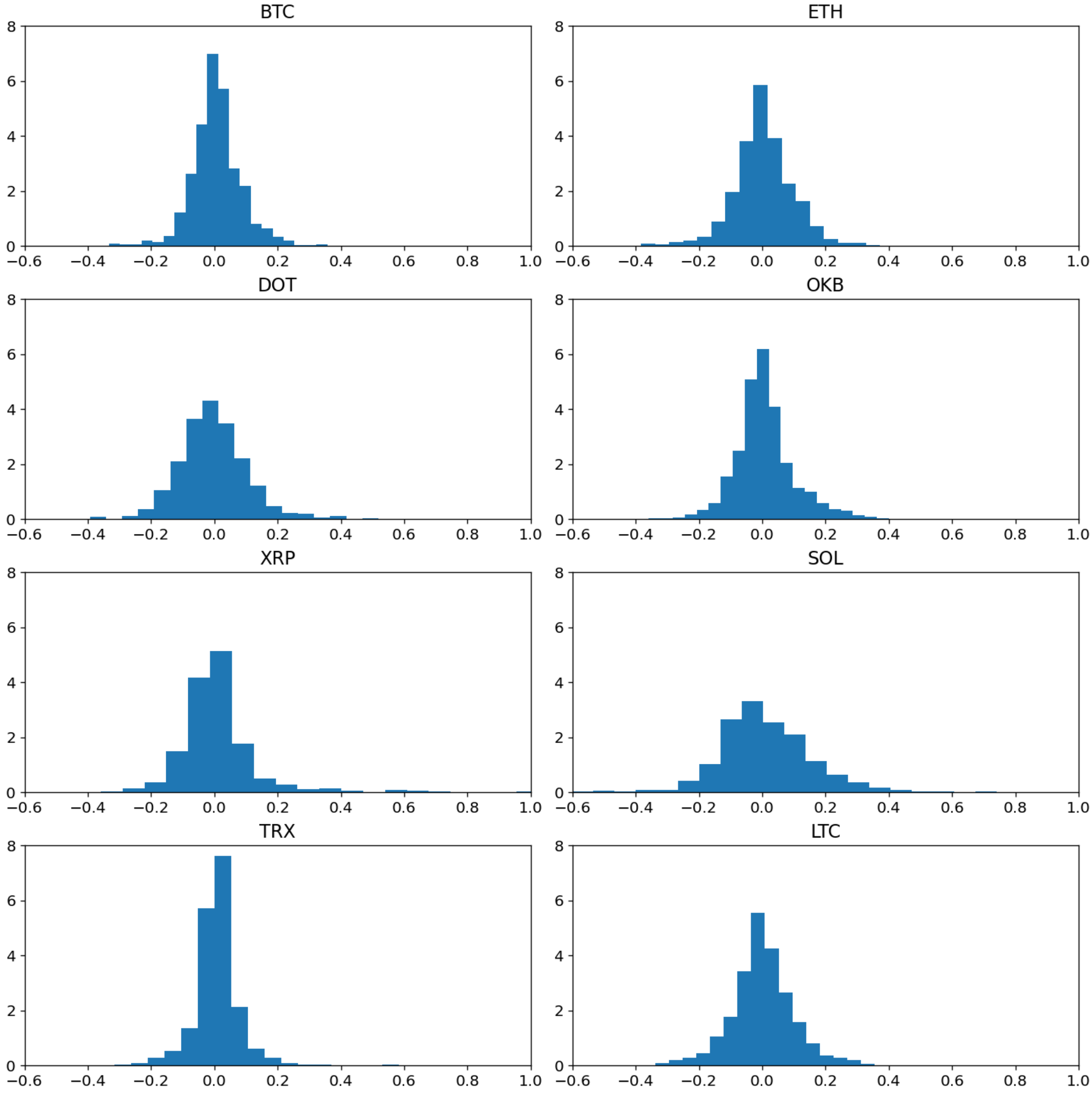

Рис. 4.3. Гистограммы доходностей активов

Из гистограмм видно, что распределение доходностей унимодально и имеет тяжелый правый хвост.

На графике 4.4 сравниваются активы с точки зрения среднего и стандартного отклонения доходности.

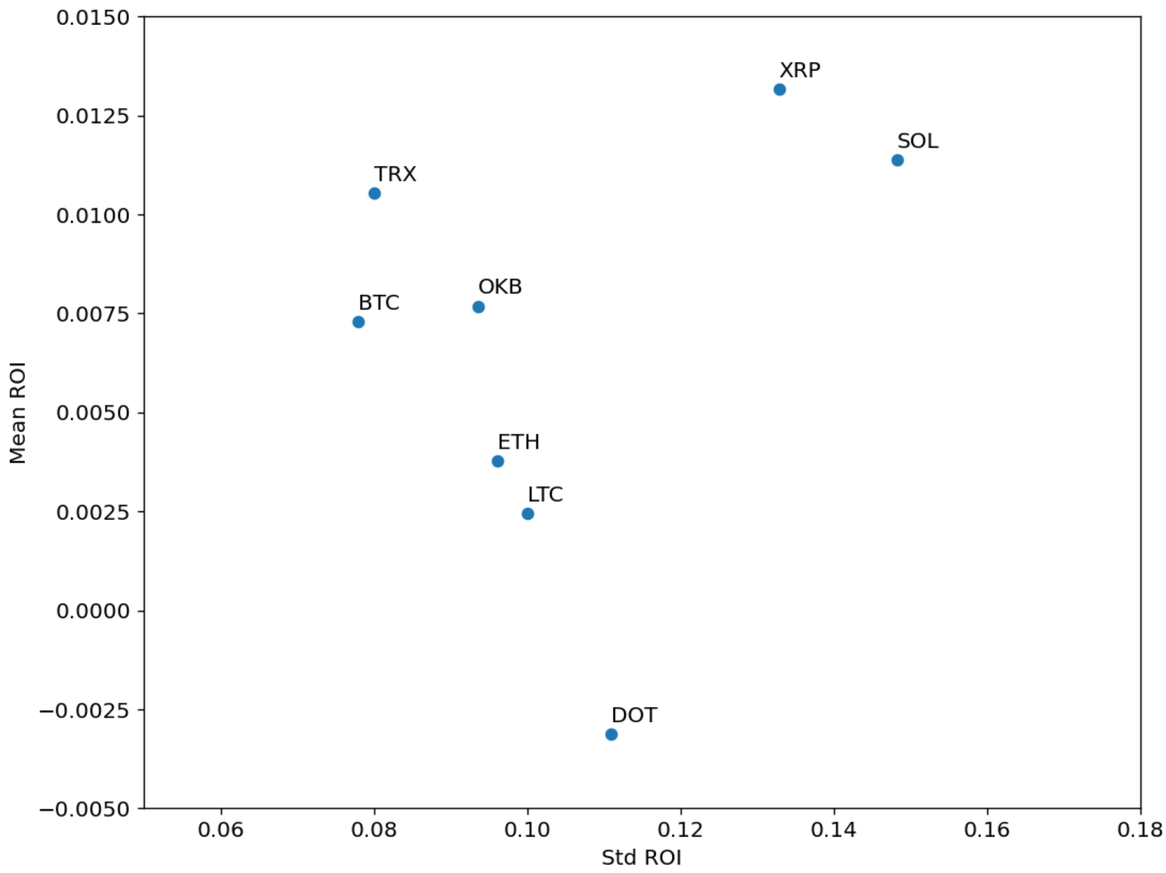

Рис. 4.4. Среднее и стандартное отклонение доходностей

Разделим имеющиеся данные на валидационную и тестовую выборки. В качестве тестовых данных возьмем 2024 год. По валидационной выборке подберем гиперпараметры для модели из каждого рассматриваемого класса.

В дальнейшем тестовые данные будут использоваться для:

1. оценки качества прогнозирования средней ожидаемой доходности

2. тестирования портфельных стратегий

Из тестовых днных формируется набор тест-кейсов на которых и оценивается качество. Процесс формирования тест-кейсов схематично проилюстрирован на рисунке 4.5.

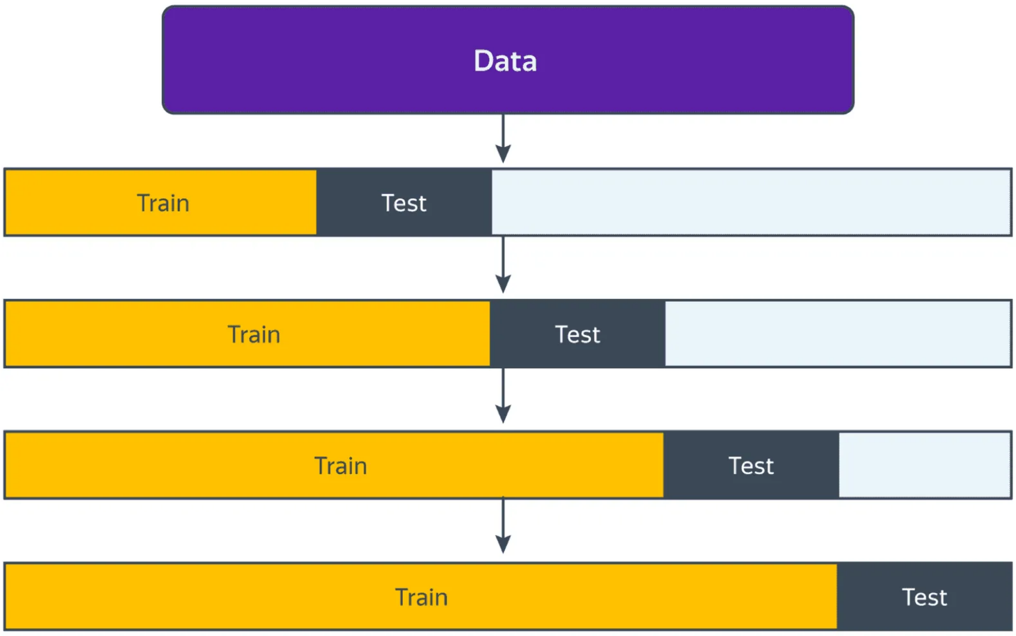

Рис. 4.5. Формирование тест-кейсов из тестовых данных

Следующим этапом идет расчет необходимых параметров для оптимизации портфеля — оценка ковариаций и прогноз средних значений доходности.

4.2. Оценка ковариации между активами

Особую сложность представляет задача прогноза будущей ковариации временных рядов. Вполне естественным вляется предположение стационарности ковариации во времени. Поэтому воспользуемся выборочной оценкой ковариации по историческим данным.

Имея r_t - вектор-столбец доходностей в момент времени t, по истории наблюдений $r_1, \cdots r_n$ выборочная ковариация Σ рассчитывается как

$$\Sigma = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \overline{r}) \cdot (r_t - \overline{r})^T \tag{4.1}$$

где $\overline{r} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t$.

Корреляция Пирсона между доступными активами представлена на рисунке 4.6.

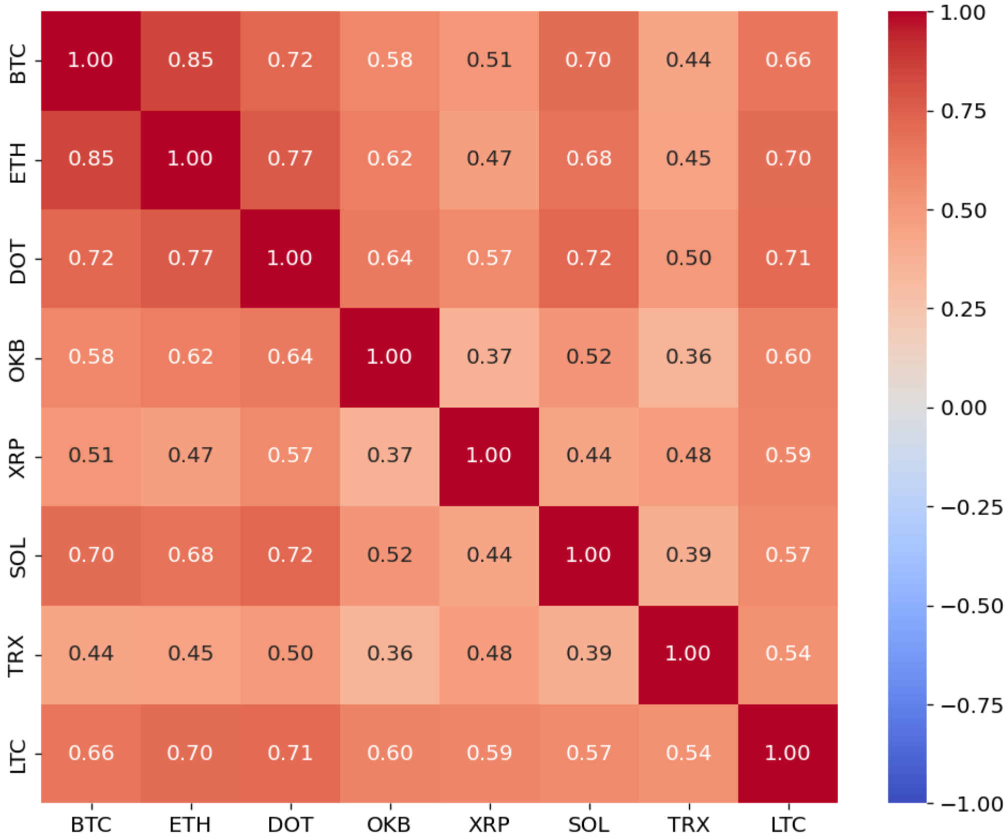

Рис. 4.6. Корреляции доходностей активов

Активы имею сильную положительную корреляцию.

4.3. Модели оценки средней доходности

Задача оценки средней ожидаемой доходности сводиться к умению прогнозировать значение основываясь на стории наблюдений. Для этого подходят классические статистические модели, модел имашинного обучения и нейросети в адаптации для прогнозирования временных рядов.

Ограничемся рассмотрением следующих моеделей:

1. NAIVE - выборочное среднее
2. MARTINGAL - прогноз последним наблюдаемым значением
3. ARIMA - модель авторегрессии и скользящего среднего

4. LR - линейная регрессия

5. RF - случайный лес

Для каждого актива будем строить отдельную модель не принимающую в расчет историю других активов. Таким образом, для прогноза будующих доходностей активов необходимо построить моделей по числу активов.

Некоторые модели (ARIMA, RF) — допускают свободу в выборе гиперпараметров. Подбор гиперпараметров моделей осуществлялся по тренировочной выборке.

Качество прогнозирования моделей оценивается с помощью среднеквадратичной ошибки MSE (Mean Squared Error):

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \hat{r}_i)^2 \tag{4.2}$$

где r_i - истинное значение доходности, а $\hat{r}_i$ - прогнозное значение модели на i-м объекте тестовой выборки.

Результаты оценки качества прогнозирования на тестовых данных представлены в таблице 4.2

Таблица 4.2. Качество прогнозирования MSE$\cdot 10^4$

	NAIVE	MARTINGAL	LR	ARIMA	RF
BTC	5.63	1.20	1.58	1.62	2.07
ETH	8.00	1.99	4.47	3.70	5.05
DOT	16.51	3.89	4.09	3.98	5.28
OKB	6.06	1.56	1.77	1.95	2.05
XRP	24.33	5.04	6.98	5.71	6.53
SOL	21.19	4.47	11.86	6.16	5.31
TRX	7.96	1.85	4.19	5.30	6.04
LTC	8.53	2.66	2.24	3.22	5.11

Наихудшее значениие показывает подход NAIVE. Это обусловлено резким ростом цен в 2024 году после относительно спокойной динамики. MARTINGAL показывает хорошие результаты в случае рядов с затяжным трендов. Остальные модели показывают сопоставимое качество.

4.4. Проверка стратегий на тестовых данных

Под стратегией будем понимать некоторый принцип или алгоритм по которому в каждый момент времени формируется портфель. Будем рассматривать стратегии двух видов:

- тривиальные
- основанные на идеи Марковица

Среди тривиальных стратегий выберем следующие:

1. UNIFORM - равномерное инвестированиие во все доступные активы
2. MOST RISKY - актив с наибольней дисперсией доходности
3. LESS RISKY - актив с наименьшей дисперсией доходности
4. BEST RETURN - актив с наибольшей средней доходностью
5. WORST RETURN - актив с наименьшей средней доходностью

Стратегии Марковица определяются риск-параметром и моделью оценки средней ожидаемой доходностью. Риск-параметр будем воспринимать как параметризацию класса стратегий с определенной моделью оценки средней ожидаемой доходности. Таким образом, одной стратегии Марковица соответсвует множество стратегий с разным риск-параметром. Это множество стратегий будет называть фронтирой.

На каждом тест-кейсе с помощью стратегии формируется инвестиционный портфель в расчете на единичную сумму инвестирования и оценивается доходность ROI (Return On Investment) полученного портфеля.

На графике 4.7 представлены фронтиры соответсвующие торговым стратегиям. Серым цветом отмечены тривиальные портфели. По оси абсцисс отложены стандартые отклонения ROI, а по оси ординат — средние значение ROI.

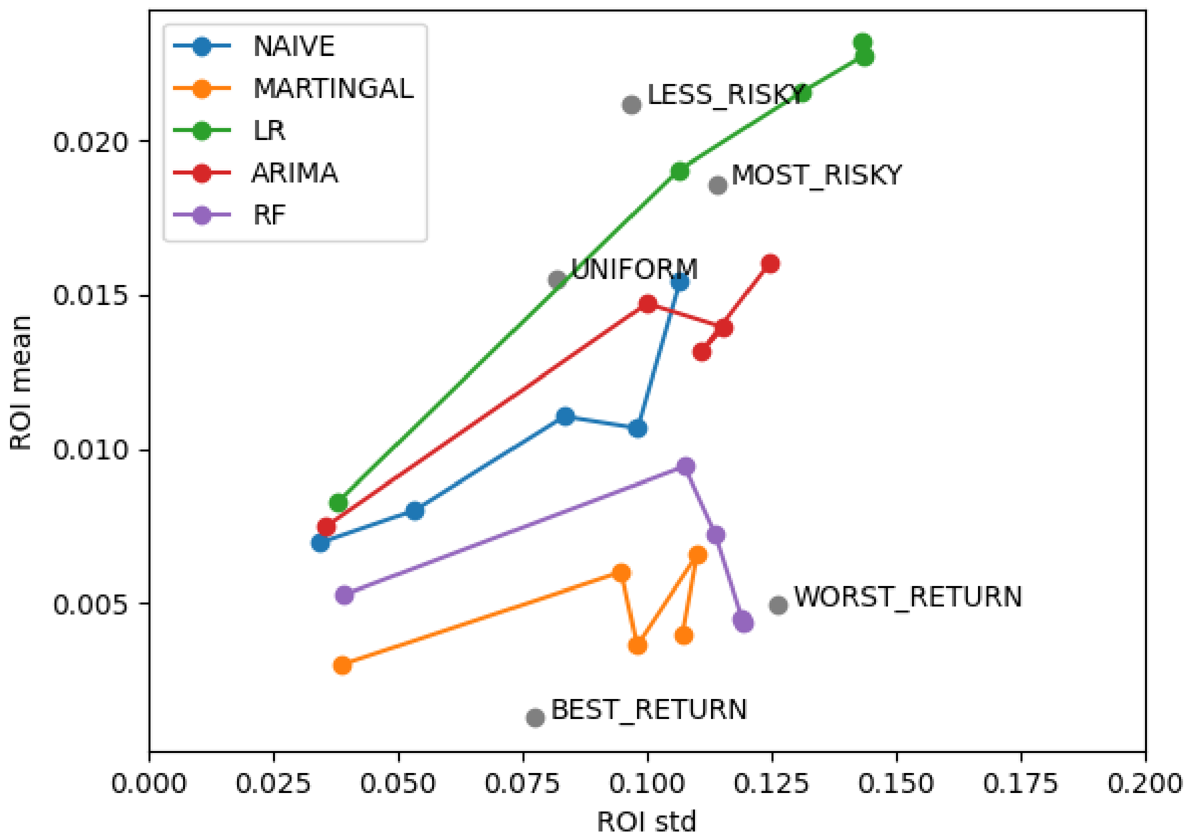

Рис. 4.7. Результаты тестирования стратегий

Более детально средние значения и стандартные отклонения ROI стратегий представлены в таблицах 4.3 и 4.4 соответственно.

Метрики тривиальных портфелей представлены в таблице 4.5

Таблица 4.3. Средние ROI $\cdot 10^3$

	0.01	0.26	0.51	0.75	1.00
NAIVE	6.9451	8.0025	11.0462	10.6657	15.4227
MARTINGAL	2.9859	6.0019	3.6178	6.5656	3.9942
LR	8.2600	19.0185	21.5537	22.7442	23.1668
ARIMA	7.4648	14.7066	13.9296	13.1520	15.9971
RF	5.2633	9.4236	7.2398	4.3777	4.5050

Таблица 4.4. Стандартное отклонение ROI $\cdot 10^2$

	0.01	0.26	0.51	0.75	1.00
NAIVE	3.4328	5.3375	8.3427	9.8131	10.6650
MARTINGAL	3.8577	9.4886	9.8051	11.0111	10.7128
LR	3.7892	10.6314	13.1000	14.3570	14.3071
ARIMA	3.5454	10.0037	11.5506	11.1001	12.4518
RF	3.9215	10.7564	11.3710	11.9397	11.9118

Таблица 4.5. Тривиальные портфели

	mean ROI $\cdot 10^3$	std ROI $\cdot 10^2$
UNIFORM	15.5372	8.1775
MOST RISKY	18.5904	11.3970
LESS RISKY	21.1635	9.6881
BEST RETURN	1.2790	7.7329
WORST RETURN	4.9217	12.6324

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была рассмотрена проблема формирования оптимального портфеля с точки зрения ожидаемой доходности и принимаемого риска. Были предложены и протестированы модели ожидаемой средней доходности активов внутри подхода формирования оптимального портфеля по Марковицу. На основании прогнозов этих моделей и исторической ковариации между активами, формируется множество парето-оптмальных портфелей, соответсвующих заданному уровню риску.

Полученные портфели были протестированы на реальных данных за 2024 год. Результаты проверки стратегий:

1. Активы имеют сильную положительную корреляцию
2. С помощью диверсификации можно добиться снижения рисков
3. Эмпирические фронтиры стратегий имеют выпуклую вверх форму, что согласуется с теорией
4. Сформированные портфели оптимальнее инвестирования в отдельные активы

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики: Т.1: Факты, модели / А. Н. Ширяев – МЦНМО, 2016. – 440 с.
2. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики: Т.2: Теория / А. Н. Ширяев – МЦНМО, 2016. – 464 с.
3. Шарп, У.Ф. Инвестиции : учебник : пер. с англ. / У.Ф. Шарп, Г.Д. Александер, Д.В. Бэйли. – Москва : ИНФРА-М,, 2022. – 1028 с.
4. Markowitz, H. Portfolio selection / H. Markowitz – The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.
5. https://skforecast.org/0.15.1/
6. https://scikit-learn.org/stable/
7. https://www.okx.com/