

А. Н. Ширяев

# Основы стохастической финансовой математики

Том 1

Факты. Модели

Электронное издание

МЦНМО 2016

УДК 519.2  
ББК 22.171  
Ш64

Работа выполнена при поддержке гранта РФ  
№ 14-21-00162 «Оптимальные статистические  
процедуры в классических и квантовых инфор-  
мационных системах».

*Ширяев А. Н.*

Основы стохастической финансовой математики : В 2 т.

Т. 1 : Факты, модели

Электронное издание

М. : МЦНМО, 2016.

440 с.

ISBN 978-5-4439-2391-5

Подготовлено на основе книги: *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финан-  
совой математики : В 2 т. Т. 1 : Факты, модели. М. : МЦНМО, 2016. 440 с.

ISBN 978-5-4439-0394-1; 978-5-4439-0395-8 (том 1)

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Тел. (495) 241-74-83

[www.mcsme.ru](http://www.mcsme.ru)

ISBN 978-5-4439-2391-5

© Ширяев А. Н., 2004, 2016.

© МЦНМО, 2016.

# Оглавление

Предисловие к новому изданию . . . . .	6
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава I. Основные понятия, структуры, инструменты, цели и задачи финансовой теории и финансовой инженерии</b>	<b>12</b>
1. Финансовые структуры и инструменты . . . . .	13
§ 1a. Ключевые объекты и структуры, 13. — § 1b. Финансовый рынок, 16. — § 1c. Рынок производных ценных бумаг. Финансовые инструменты, 32.	
2. Финансовый рынок в условиях неопределенности. Классические теории динамики финансовых индексов, их критика и пересмотр. Неоклассические теории . . . . .	47
§ 2a. Гипотеза случайного блуждания и концепция эффективного рынка, 49. — § 2b. Портфель ценных бумаг. Диверсификация Марковитца, 59. — § 2c. Модель ценообразования финансовых активов (CAPM — Capital Asset Pricing Model), 64. — § 2d. Арбитражная теория расчетов (APT — Arbitrage Pricing Theory), 68. — § 2e. Анализ, интерпретация и пересмотр классической концепции эффективно функционирующего рынка. I, 73. — § 2f. Анализ, интерпретация и пересмотр концепций эффективно функционирующего рынка. II, 78.	
3. Цели и задачи финансовой теории, инженерии и финансово-актуарных расчетов . . . . .	83
§ 3a. Роль финансовой теории и финансовой инженерии. Финансовый риск, 83. — § 3b. Страховой бизнес как социальный механизм компенсации экономических потерь, 86. — § 3c. Классический пример актуарных расчетов. Теорема Лундберга—Крамёра, 95.	
<b>Глава II. Стохастические модели. Дискретное время</b>	<b>100</b>
1. Необходимые вероятностные понятия и некоторые модели динамики рыночных цен . . . . .	101
§ 1a. Неопределенность и нерегулярность поведения цен, вероятностное их описание и представление, 101. — § 1b. Разложение Дуба. Канонические представления, 108. — § 1c. Локальные мартингалы, мартингальные преобразования, обобщенные мартингалы, 114. — § 1d. Гауссовские и условно-гауссовские модели, 123. — § 1e. Биномиальная модель эволюции цен, 129. — § 1f. Модели с дискретным вмешательством случая, 132.	

2. Линейные стохастические модели . . . . .	138
§ 2а. Модель скользящего среднего $MA(q)$ , 140. — § 2б. Авторегрессионная модель $AR(p)$ , 146. — § 2с. Модель авторегрессии и скользящего среднего $ARMA(p, q)$ и интегральная модель $ARIMA(p, d, q)$ , 158. — § 2д. Прогнозирование в линейных моделях, 162.	
3. Нелинейные стохастические условно-гауссовские модели . . . . .	173
§ 3а. Модели $ARCH$ и $GARCH$ , 174. — § 3б. Модели $EGARCH$ , $TGARCH$ , $HARCH$ и др., 183. — § 3с. Модели стохастической волатильности, 189.	
4. Приложение: модели динамического хаоса . . . . .	196
§ 4а. Нелинейные хаотические модели, 196. — § 4б. Проблематика различимости «хаотических» и «стохастических» последовательностей, 202.	
<b>Глава III. Стохастические модели. Непрерывное время</b>	<b>208</b>
1. Негауссовские модели распределений и процессов . . . . .	209
§ 1а. Устойчивые и безгранично делимые распределения, 209. — § 1б. Процессы Леви, 220. — § 1с. Устойчивые процессы, 226. — § 1д. Гиперболические распределения и процессы, 234.	
2. Модели со свойствами самоподобия (автомодельности). Фрактальность	242
§ 2а. Статистический феномен автомодельности Харста, 242. — § 2б. Экскурсы во фрактальную геометрию, 245. — § 2с. Статистическая автомодельность. Фрактальное броуновское движение, 248. — § 2д. Фрактальный гауссовский шум как процесс с сильным последствием, 254.	
3. Модели, основанные на броуновском движении . . . . .	258
§ 3а. Броуновское движение и его роль как базисного процесса, 258. — § 3б. Броуновское движение: сводка классических результатов, 262. — § 3с. Стохастический интеграл по броуновскому движению, 273. — § 3д. Процессы и формула Ито, 279. — § 3е. Стохастические дифференциальные уравнения, 285. — § 3ф. Прямые и обратные уравнения Колмогорова. Вероятностное представление решений, 293.	
4. Диффузионные модели эволюции процентных ставок, стоимостей акций и облигаций . . . . .	300
§ 4а. Стохастические процентные ставки, 300. — § 4б. Стандартная диффузионная модель стоимости акций (геометрическое броуновское движение) и ее обобщения, 306. — § 4с. Диффузионные модели временной структуры стоимостей семейства облигаций, 312.	
5. Семимартингальные модели . . . . .	317
§ 5а. Семимартингалы и стохастические интегралы, 317. — § 5б. Разложение Дуба–Мейера. Компенсаторы. Квадратическая вариация, 325. — § 5с. Формула Ито для семимартингалов. Некоторые обобщения, 331.	

<b>Глава IV. Статистический анализ финансовых данных</b>	<b>336</b>
1. Эмпирические данные. Вероятностно-статистические модели их описания. Статистика «тиков» . . . . .	337
§ 1a. Структурные изменения в сборе и анализе финансовых данных, 337. — § 1b. О «географических» особенностях статистических данных обменных курсов, 341. — § 1c. Описание эволюции финансовых индексов как стохастических процессов с дискретным вмешательством случая, 344. — § 1d. К статистике «тиков», 347.	
2. Статистика одномерных распределений . . . . .	349
§ 2a. Дискретизация статистических данных, 349. — § 2b. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. I. Отклонение от гауссовости. «Вытянутость» эмпирических плотностей, 351. — § 2c. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. II. «Тяжелые хвосты» и их статистика, 355. — § 2d. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. III. Структура распределений в центральной области, 362.	
3. Статистика волатильности, корреляционной зависимости и последнего действия в ценах . . . . .	367
§ 3a. Волатильность. Определение и примеры, 367. — § 3b. Периодичность и фрактальная структура волатильности в обменных курсах, 373. — § 3c. Корреляционные свойства, 376. — § 3d. «Деволатилизация». Операционное время, 380. — § 3e. Эффекты «кластерности» и последствия в ценах, 387.	
4. Статистический $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ . . . . .	390
§ 4a. Истоки и методология $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа, 390. — § 4b. $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ некоторых финансовых временных рядов, 399.	
<b>Литература</b>	<b>404</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>430</b>
<b>Указатель обозначений</b>	<b>438</b>

## Предисловие к новому изданию

Символ вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , вынесенный на обложку настоящей книги, подчеркивает, что ее «математика» носит вероятностный, статистический характер. Именно вероятностный подход позволил Л. Башелье (1900 г., [12]) сделать тот важный шаг, который явился, в сущности, началом стохастической финансовой математики и теории случайных процессов (как это отмечено в [280]). С момента публикации диссертации Л. Башелье (1900 г.) прошло много лет, за это время в финансовой математике появились новые теории, методы и подходы, стала яснее ее связь с экономикой и современным стохастическим исчислением, дающим возможность глубже проникать в динамику финансовых данных и ставить вопрос о предсказании их будущего поведения.

Именно это исчисление сделало понятным тот факт, что такое важное экономическое понятие, как арбитраж, допускает чисто мартингальное толкование, явившееся, по существу, основой всей стохастической финансовой математики.

Настоящая книга призвана дать весьма широкое представление о предмете финансовой математики, ее истории, основных этапах становления ее теорий, теории арбитража и расчетов в стохастических финансовых моделях.

В книге уделяется значительное внимание не только моделям с дискретным временем, но и моделям в непрерывном времени, включая нужные в финансовой математике теорему Гирсанова, преобразование Эшера, формулы Башелье и Блэка—Шоулса для расчетов опционов европейского типа, ...

О современном состоянии стохастической финансовой математики читатель может получить информацию из статей в ведущих журналах «Finance and Stochastics», «Journal of Finance» и др. Публикуется большое число журналов, посвященных анализу стохастических данных. К числу таких журналов можно отнести, например, «Quantitative Finance», «Journal of Portfolio Management».

Мы надеемся, что книга будет полезна и студентам, и всем тем, кто в своей деятельности связан с финансовой теорией и практикой.

## Предисловие

Замысел автора состоял в том, чтобы

- отобрать и изложить материал, который необходим и может оказаться полезным тем, кто имеет дело со стохастическим анализом и расчетами в моделях финансовых рынков, функционирующих в условиях неопределенности;
- привести основные понятия, концепции и результаты стохастической финансовой математики;
- дать применения к разнообразным расчетам в стохастической финансовой инженерии.

Не в последнюю очередь имелись в виду и запросы преподавания по специальности «Финансовая математика и финансовая инженерия» с акцентом на вероятностно-статистические идеи и методы стохастического исчисления при анализе *рыночного риска*.

Подзаголовок «Факты. Модели. Теория» как нельзя лучше отражает характер и стиль изложения, сложившийся у автора во многом в результате «обратной связи» со слушателями ряда курсов его лекций (Москва, Цюрих, Орхус, ...).

Так, математическая аудитория неизменно проявляла большой интерес не только к чисто математическим вопросам «Теории», но и к «Фактам» относительно реалий финансовых рынков и их функционирования. Именно это обстоятельство и побудило автора посвятить первую главу описанию ключевых объектов и структур таких рынков, определить цели и задачи финансовой теории и финансовой инженерии, а также изложить некоторые вопросы истории и становления вероятностно-статистической идеологии при анализе финансовых рынков.

С другой стороны, слушатели, знакомые, скажем, с рынком ценных бумаг и оперированием с ними, проявляли большую заинтересованность в том, чтобы ознакомиться с разными классами стохастических процессов, применяемыми или могущими быть полезными при построении моделей динамики финансовых показателей (цен, индексов, обменных курсов, ...) и при

проведении тех или иных расчетов (рисков, хеджирующих стратегий, рациональных стоимостей опционов, ...).

Этим целям служат вторая и третья главы, посвященные разнообразным стохастическим моделям как в случае дискретного, так и непрерывного времени.

Автору представляется, что материал этих глав, относящийся к теории случайных процессов, будет полезен широкому кругу читателей и не только в связи с финансовой математикой.

Хотелось бы здесь особо подчеркнуть, что в случае дискретного времени при описании эволюции стохастических последовательностей мы, как правило, отправляемся от их *разложения Дуба на предсказуемую и мартингальную составляющие*. Это объясняет, почему рассматриваемый подход часто называют «мартингальным» и почему «теория мартингалов» становится естественным и полезным математическим аппаратом в финансовой математике и инженерии.

Понятия «предсказуемости» и «мартингальности», пронизывающие все последующее изложение, в то же самое время оказываются весьма естественными и с экономической точки зрения. Так, например, такие экономические понятия, как *портфель ценных бумаг* и *хеджирование*, математически просто определяются именно с привлечением понятия предсказуемости. А такие понятия, как *эффективность* и *безарбитражность* финансового рынка, находят свое математическое воплощение с привлечением понятий мартингала и мартингальных мер (первая фундаментальная теорема теории расчетов финансовых активов; § 2b гл. V).

Подход к описанию стохастических последовательностей, основанный на разложении Дуба, делает вполне понятным и логичным обращение в случае *непрерывного времени* к (весьма широкому) классу *семимартингалов* (§ 5a гл. III). Будучи процессами, представимыми в виде суммы процесса ограниченной вариации («медленно меняющаяся» компонента) и локального мартингала (многие из которых, как, например, броуновское движение, являются «быстро меняющимися»), семимартингалы обладают тем замечательным свойством, что для них определен стохастический интеграл, что, в свою очередь, открывает широкие возможности применения стохастического исчисления при моделировании финансовых показателей такими процессами.

Четвертая глава («статистическая») призвана дать представление о том реальном статистическом «сырье», с которым приходится сталкиваться при эмпирическом анализе финансовых данных.

На статистическом материале, относящемся преимущественно к обменным курсам валют (финансовый рынок которых носит интернациональный характер и является одним из самых больших среди финансовых рынков, имея дневной оборот в несколько сотен миллиардов долларов), показывается, что величины «возврата» (см. формулу (3) в § 1a гл. II) имеют плотность распределения с «тяжелыми хвостами» и с сильной «вытянутостью» в центральной области. Во временном поведении этих величин наблюдаются



свойства «кластерности» и «сильной зависимости» (образно — «цены помнят прошлое»). Выявляется фрактальная структура ряда характеристик волатильности (изменчивости) величин «возврата».

Все это, разумеется, надо учитывать при построении моделей, адекватно отражающих реальную динамику финансовых показателей, что становится особенно существенным, если преследовать цель *прогноза* их будущего движения.

Собственно «Теории» и, в частности, *теории арбитража* отводятся пятая глава (дискретное время) и седьмая глава (непрерывное время).

Центральными здесь являются *первая и вторая фундаментальные теоремы теории расчетов финансовых активов*.

Первая теорема утверждает (с некоторыми оговорками), что финансовый рынок является *безарбитражным* в том и только том случае, когда существует так называемая мартингальная (риск-нейтральная) вероятностная мера, относительно которой (дисконтированные) цены образуют мартингал. Вторая теорема описывает те безарбитражные рынки, для которых выполнено свойство *полноты*, гарантирующее возможность построения портфеля ценных бумаг, капитал которого воспроизводит платежные поручения.

Обе эти теоремы действительно заслуживают того, чтобы их называть фундаментальными, поскольку они дают возможность придать экономическому понятию «безарбитражности» точный математический смысл в рамках (хорошо развитой) *теории мартингалов*.

Шестая и восьмая главы посвящены расчетам, опирающимся на первую и вторую фундаментальные теоремы. При этом традиционно много места отводится расчетам рациональных стоимостей и хеджирующих стратегий разного рода *опционов* (европейского и американского типов), являющихся теми *производными* финансовыми инструментами, для которых наиболее развита теория расчетов и на примере которых лучше всего понимать общие принципы и приемы расчетов на безарбитражных рынках.

Перед автором, естественно, стояла проблема не только отбора «репрезентативного» материала для изложения, но и выбора формы изложения.

Читатель заметит, что автор часто следует лекционному стилю, приводя пояснения типа «что-где-когда». В случае дискретного времени приводятся, по существу, все доказательства основных результатов. В случае же непрерывного времени довольно-таки часто многие результаты (теории мартингалов, стохастического исчисления, ...) приводятся лишь своими формулировками с указанием соответствующей литературы, где могут быть найдены доказательства.

Предложение о написании книги по финансовой математике для издательства World Scientific было сделано профессором Оле Е. Барндорфф-Нильсеном в начале 1995 года. Дав свое согласие, автор смог приступить к первым наброскам текста лишь в середине 1995 года, планируя вначале излагать весь материал только для случая *дискретного времени*. Однако по мере работы над текстом автор все больше убеждался в том, что без случая *непрерывного*

времени представление о финансовой математике и финансовой инженерии будет далеко не полным. В результате в книге дается изложение и для дискретного, и для непрерывного времени.

Книга состоит из двух томов. Первый том («Факты. Модели») включает главы I—IV. Второй том («Теория») состоит из глав V—VIII.

На само написание основного текста автору понадобилось примерно два года. Несколько месяцев ушло на компьютерный набор текста, редактирование и подготовку оригинал-макета книги, осуществленные И. Л. Легостаевой, Т. Б. Толозовой и А. Д. Изааком на базе информационно-издательского сектора Отделения математики Российской академии наук. Автор приносит им свою искреннюю признательность прежде всего за их высококвалифицированную и самоотверженную помощь, а также за ту терпимость, которую они к нему проявляли всякий раз, когда он менял уже набранный и отредактированный текст, представляя свою очередную «последнюю» версию.

Автор благодарен своим друзьям и коллегам, российским и зарубежным, а также АФЦ (Актуарно-финансовый центр, Москва), VW-project (the Volkswagen-project, Germany), MCAA и CAF (the Mathematical Research Center and the Centre for Analytical Finance, Aarhus, Denmark), INRIA-МГУ (институт им. А. М. Ляпунова, Paris-Москва) за поддержку и гостеприимство.

Москва  
1995—1997

А. Ширяев  
Математический институт  
им. В. А. Стеклова РАН  
и  
Московский государственный  
университет им. М. В. Ломоносова



# Глава I

## Основные понятия, структуры, инструменты, цели и задачи финансовой теории и финансовой инженерии

1. Финансовые структуры и инструменты . . . . .	13
§ 1а. Ключевые объекты и структуры, 13. — § 1б. Финансовый рынок, 16. — § 1с. Рынок производных ценных бумаг. Финансовые инструменты, 32.	
2. Финансовый рынок в условиях неопределенности. Классические теории динамики финансовых индексов, их критика и пересмотр. Нео-классические теории . . . . .	47
§ 2а. Гипотеза случайного блуждания и концепция эффективного рынка, 49. — § 2б. Портфель ценных бумаг. Диверсификация Марковитца, 59. — § 2с. Модель ценообразования финансовых активов (CAPM — Capital Asset Pricing Model), 64. — § 2д. Арбитражная теория расчетов (APT — Arbitrage Pricing Theory), 68. — § 2е. Анализ, интерпретация и пересмотр классической концепции эффективно функционирующего рынка. I, 73. — § 2ф. Анализ, интерпретация и пересмотр концепций эффективно функционирующего рынка. II, 78.	
3. Цели и задачи финансовой теории, инженерии и финансово-актуарных расчетов . . . . .	83
§ 3а. Роль финансовой теории и финансовой инженерии. Финансовый риск, 83. — § 3б. Страховой бизнес как социальный механизм компенсации экономических потерь, 86. — § 3с. Классический пример актуарных расчетов. Теорема Лундберга—Крамёра, 95.	

## 1. Финансовые структуры и инструменты

Согласно современным воззрениям (см., например, [79], [334] и [345]), *теория финансов* и *финансовая инженерия* призваны исследовать свойства финансовых структур и заниматься тем, как наиболее *рациональным* образом распоряжаться финансовыми ресурсами с учетом факторов *времени, риска, характера* (как правило, случайного) *окружающей среды*, используя разнообразные финансовые инструменты и операции.

*Время, динамика, неопределенность, стохастика* — вот компоненты, определяющие то, что такие «вероятностно-статистические» теории, как, например,

- стохастические процессы,
- стохастическое исчисление,
- статистика случайных процессов,
- стохастическая оптимизация,

образуют используемый в настоящей книге математический аппарат, адекватный нуждам финансовой теории и инженерии.

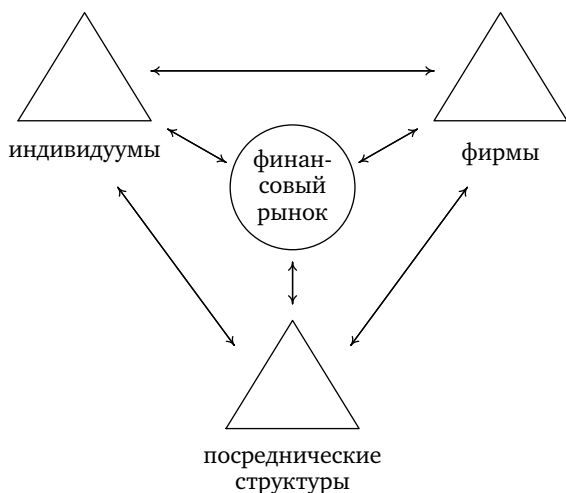
### § 1а. Ключевые объекты и структуры

1. Можно выделить следующие *ключевые объекты и структуры*, с которыми имеет дело теория финансов и которые определяют и объясняют специфику финансовой проблематики, цели и средства финансовой математики и инженерии:

- *индивидуумы*,
- *фирмы*,
- *посреднические структуры*,
- *финансовый рынок*.

Представленная на с. 14 диаграмма показывает, что в теории и практике финансов среди выделенных четырех структур *финансовому рынку* отводится

центральное место и именно он-то и представляет основной интерес для математической теории финансов в последующем изложении.



**2. Индивидуумы** — их финансовая деятельность подчинена решению проблемы *потребление — инвестирование*. Дуализм в поведении индивидуумов как потребителей («побольше потреблять сейчас») и как инвесторов («инвестировать сейчас так, чтобы иметь побольше в будущем») приводит к рассмотрению оптимизационных проблем, которые в математической экономике формулируются как *потребление — сбережение* (consumption — saving) и *размещение* (portfolio decision making). В рамках *теории полезности и предпочтения* первая проблема опирается на аксиомы (фон Неймана—Моргенштерна) *рационального* поведения индивидуумов в условиях неопределенности, дающие подход и способ определять *предпочтительность* того или иного типа поведения посредством количественного сравнения, например, средних значений *функций полезности* (utility functions). Проблема «размещения», стоящая перед индивидуумами, может быть в общих чертах описана как задача наилучшего размещения (инвестирования) финансовых средств (с учетом возможного риска), скажем, в недвижимость, золото, в ценные бумаги (облигации, акции, опционы, фьючерсы и т. п.) и т. д. Идеи диверсификации (см. § 2b) при составлении портфелей находят свое воплощение в таких известных выражениях, как «Don't put all your eggs in one basket», «Nothing ventured, nothing gained». В дальнейшем будут описаны те возможности, которые открываются перед индивидуумами (в зависимости от величины начального капитала) на рынке ценных бумаг.

**Фирмы** (компании, корпорации и т. д.), обладая такими физически осязаемыми ценностями, как «земля», «заводы», «машины», а также ценностями типа «организационные структуры», «рынки», «патенты», осуществляют деловую организацию, деловое партнерство, управление технологическим

производством. Для увеличения капиталовложений в развитие производства фирмы время от времени выпускают акции, а иногда (как и государство) — облигации. Управление деятельностью фирмы должно быть ориентировано на наилучшее удовлетворение интересов держателей акций и обладателей облигаций.

**Посреднические структуры** (финансовые посреднические структуры) — это банки, инвестиционные компании (типа mutual funds — фондов взаимных вложений), пенсионные фонды, страховые компании и т. д. К посредническим структурам можно отнести биржи (exchanges) по торговле опционами, фьючерсными контрактами.

Всемирно известны такие биржи, как NYSE (New York Stock Exchange), AMEX (American Stock Exchange), NASDAQ (The NASDAQ Stock Market), NYFE (New York Futures Exchange), CBOT (Chicago Board of Trade), находящиеся в США.<sup>1</sup>

**3. Финансовый рынок** представляет собой совокупность денежных и валютных рынков, рынков ценных (благородных) металлов, рынков финансовых инструментов, включая ценные бумаги.

На рынке *финансовых инструментов* принято различать:

- **основные** (первичные) инструменты,
- **производные** (вторичные) инструменты;

последние являются *сложными* финансовыми инструментами, построенными на базе основных (более элементарных) инструментов.

К числу *основных* финансовых инструментов относят *ценные бумаги*:

- банковский счет,
- облигации,
- акции.

К *производным* финансовым инструментам относят:

- опционы,
- фьючерсные контракты,
- варранты,
- свопы,
- комбинации,

---

<sup>1</sup> Обращение к финансовым структурам и финансовой активности в США будет далее происходить довольно часто. Вызвано это в основном тем, что финансовый рынок США имеет богатые традиции («Wall Street»!); именно с этим рынком связаны многочисленные финансовые инновации. К тому же по этому рынку имеется обширная литература и в виде многочисленных журнальных изданий, и в виде монографий, учебных пособий, справочных изданий и т. п. В этом читатель легко убедится, обратившись к списку литературы в конце книги.

- спрэды,
- сочетания,
- ...

Отметим, что весьма часто *финансовая инженерия* определяется именно как оперирование с *производными финансовыми инструментами* (и с целью *увеличения капитала*, и с целью *редуцирования риска*, обусловленного неопределенностью будущего состояния рынка).

Дадим описание некоторых основных ингредиентов финансового рынка.

## § 1b. Финансовый рынок

**1. Деньги** ведут свое начало с того времени, когда люди научились торговать «тем, что они имели» в обмен на «то, что они хотели иметь». Эта система взаимоотношений работает и поныне — мы используем *деньги* в обмен на товар (который мы желаем иметь, а продавец, в свою очередь, использует полученные деньги для покупки чего-то другого), а также как средство оплаты услуг.

Современная технология революционизировала способы, которыми циркулируют деньги. Так, в настоящее время в США лишь только 8 % всей массы долларов, находящихся в обороте, оплачиваются посредством денежных купюр и монет. Основная же денежная оплата производится чеками и пластиковыми карточками с помощью электронной связи.

Помимо функции «средства обращения» деньгам принадлежит важная роль «меры стоимости» и «средства накопления» [108].

**2. Валюта** — как *деньги других государств* (количество ее, состояние обменных курсов и т. д.) — является важным показателем экономического благосостояния и развития страны, представляя собой *инструмент расчетов* в международных экономических связях, для осуществления которых требуется «иностранная валюта».

Интернационализация экономики привела к образованию *валютных блоков* разных стран, заключающих соглашения относительно согласования денежно-кредитной политики и соотношений между обменными курсами валют.

Примером может служить известная Бреттон-Вудская валютно-кредитная система. В 1944 году в местечке Бреттон-Вудс, штат Нью-Гэмпшир, США, состоялась конференция основных участников процесса международной торговли. На этой конференции была принята валютная система, получившая название «Бреттон-Вудской системы», которая устанавливала, что обменные курсы валют могут отклоняться от официально заявленных паритетов в очень узких пределах — не более 1 % в каждую сторону. При этом паритетные обменные курсы исчислялись в долларах США, а для внедрения и руководства этой системой был создан Международный валютный фонд (МВФ).



Однако, когда в 1973 году валютно-финансовый кризис затронул основные валюты (доллар США, немецкую марку и японскую иену), Бреттон-Вудсская система была признана исчерпавшей свою роль, и на ее смену пришли «плавающие» обменные курсы валют.

В марте 1979 года была образована Европейская монетарная система, охватывающая большинство стран-членов «Общего рынка» (Европейского экономического сообщества, ЕЭС). Эта система устанавливала, что колебания курсов валют стран-участниц должны быть, как правило, в пределах  $\pm 2,25\%$  от официальных центральных паритетов. При этом центральные банки стран, обменный курс которых имеет опасность выхода из установленного «коридора», должны своими взаимными *интервенциями* препятствовать этому выходу, обеспечивая тем самым *стабильность* соотношений между их валютами. (Это обстоятельство объясняет, почему системы подобного типа называют также «*скорректированными* системами плавающих курсов».)

Другими примерами валютных блоков могут служить соглашения между разными группами стран Карибского бассейна, Центральной и Южной Америки, Восточной Азии и др., которые фиксируют обменные курсы своих валют относительно какой-либо мощной «валюты-лидера». (Подробнее см. [108, с. 459–468].)

**3. Ценные металлы** (в слитках) — золото, серебро, платина, другие благородные металлы (к их числу относят также элементы платиновой группы: иридий, осмий, палладий, родий, рутений) — играли ранее (особенно в XIX веке и части XX века) и продолжают играть сейчас важную роль в международной валютно-кредитной системе.

В работе [108] в разделе «Золотой стандарт», с. 459–460, по поводу роли золота говорится следующее: «Почти весь девятнадцатый век и часть века двадцатого золото играло центральную роль в международной валютно-кредитной системе. Эра золотого стандарта началась в 1821 году, когда вскоре после окончания наполеоновских войн Британская империя сделала фунт стерлингов конвертируемым в золото. Вскоре и Соединенные Штаты сделали то же самое с американским долларом. Наибольшей силы золотой стандарт достиг в период с 1880 до 1914 года, но никогда больше не возродил свой прежний статус после Первой мировой войны. Его последние следы исчезли в 1971 году, когда Государственное казначейство США окончательно отменило практику купли-продажи золота по фиксированной цене».

Золото, конечно, продолжает играть важную роль в международной валютной системе. Так, например, золотые резервы широко используются центральными банками для погашения внешних долгов.

Из сказанного выше следует, что на данный момент в международной валютно-кредитной системе, регулирующей деятельность центральных эмиссионных банков на внешних валютных рынках, четко прослеживаются три периода: «золотой стандарт», «Бреттон-Вудсская система» и «система скорректированных плавающих курсов».

**4. Банковский счет** может рассматриваться как ценная бумага, относящаяся к облигациям (см. далее п. 5), суть которой состоит в том, что банк обязуется выплачивать по вашему счету определенный процент от суммы счета. В последующих рассмотрении *банковский счет* будет возникать не раз, что объясняется во многом тем, что он является удобной «единицей измерения» цен разнообразных ценных бумаг.

Принято различать два основных способа начисления процентов:

- $m$  раз в год (*простые проценты*),
- непрерывно (*сложные проценты*).

Если вы открываете банковский счет с *процентной ставкой*  $r(m)$  начисления процентов  $m$  раз в год, то внесенный вами начальный капитал  $B_0$  через  $N$  лет станет равным

$$B_N(m) = B_0 \left( 1 + \frac{r(m)}{m} \right)^{mN}, \quad (1)$$

а через дробное число лет,  $N + k/m$ , где  $0 \leq k \leq m$ , ваш капитал будет равен

$$B_{N+k/m}(m) = B_0 \left( 1 + \frac{r(m)}{m} \right)^{m(N+k/m)}.$$

В случае *непрерывно* начисляемых процентов с «*процентной ставкой*  $r(\infty)$ » начальный капитал  $B_0$  через  $N$  лет будет равен

$$B_N(\infty) = B_0 e^{r(\infty)N}. \quad (2)$$

Понятно, что

$$B_N(m) \rightarrow B_N(\infty),$$

когда  $r(m) \rightarrow r(\infty)$ ,  $m \rightarrow \infty$ .

Если  $r(\infty) = r$  — непрерывно начисляемый процент, то соответствующий ему « $m$  раз начисляемый процент»  $r(m)$  определяется формулой

$$r(m) = m(e^{r/m} - 1), \quad (3)$$

откуда следует, что по  $r(m)$  соответствующий эквивалентный непрерывный процент  $r = r(\infty)$  находится по формуле

$$r = m \ln \left( 1 + \frac{r(m)}{m} \right). \quad (4)$$

В том частном случае, когда  $m = 1$ , для  $\hat{r} = r(1)$  и  $r = r(\infty)$  получаем следующие формулы их взаимного пересчета:

$$\hat{r} = e^r - 1, \quad r = \ln(1 + \hat{r}). \quad (5)$$

Наряду с объявлением «годовой процентной ставки  $\hat{r}$ » банк может объявлять также и величину «годовой учетной ставки  $\hat{q}$ », говорящей о том, что для получения через год капитала в размере  $B_1 = B_1(1)$  надо в начальный момент

иметь на счете  $B_0 = B_1(1 - \hat{q})$ . Понятна связь между  $\hat{r}$  и  $\hat{q}$ :

$$(1 - \hat{q})(1 + \hat{r}) = 1,$$

следовательно,

$$\hat{q} = \frac{\hat{r}}{1 + \hat{r}}.$$

Можно задаться таким вопросом: через какое количество  $N$  лет ваш капитал (при непрерывно начисляемой процентной ставке  $r = a/100$ ) увеличится в 2 раза? Ясно, что  $N$  определяется из соотношения

$$2 = e^{aN/100},$$

т. е.

$$N = \frac{\ln 2 \cdot 100}{a} \approx \frac{70}{a}.$$

На практике (при начислении процентов, скажем, дважды в год) широко распространено так называемое **правило 72**: *если процентная ставка есть  $a/100$ , то удвоение капитала произойдет через  $72/a$  лет.*

Чтобы дать представление о том, как растет капитал при разных способах начисления процентов ( $m = 1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty$ ), приведем таблицу соответствующих значений  $B_t(m)$  для  $t = 0, 1, \dots, 10$ ,  $B_0 = 10000$  и  $r(m) = 0,1$  для всех  $m$ :

$t$	$m$						
	1	2	3	4	6	12	$\infty$
0	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
1	11000	11025	11034	11038	11043	11047	11052
2	12100	12155	12174	12184	12194	12204	12214
3	13310	13401	13433	13449	13465	13482	13499
4	14641	14775	14821	14845	14869	14894	14918
5	16105	16289	16353	16386	16419	16453	16487
6	17716	17959	18044	18087	18131	18176	18221
7	19487	19799	19909	19965	20022	20079	20138
8	21436	21829	21967	22038	22109	22182	22255
9	23579	24066	24238	24325	24414	24504	24596
10	25937	26533	26743	26851	26960	27070	27183

**5. Облигации, или бонь,** — это *долговые* обязательства, выпускаемые государством или банками, корпорациями, акционерными компаниями, другими финансовыми институтами с целью аккумуляирования капитала.

Облигации весьма популярны в разных странах, и в абсолютном выражении вклады в них превышают инвестирование в акции и другие виды ценных бумаг. Основная их привлекательность (особенно для консервативных инвесторов) состоит в том, что по ним выплачиваются на регулярной основе

оговоренные проценты и гарантирована полная выплата ссудного капитала в установленное время. Нельзя, конечно, с достоверностью утверждать, что облигации, выпускаемые государством или корпорациями, являются *безрисковыми* финансовыми инструментами. Доля риска, связанная с разорением, скажем, той или иной корпорации, с нарушением обязательств по выплате процентов, разумеется, всегда присутствует. В этом смысле государственные облигации менее рискованны, чем облигации корпораций, но зато и купонные проценты, выплачиваемые корпорациями, больше государственных.

Покупателю облигаций, естественно, интересно знать степень *риска* различных корпораций, рассматриваемых на предмет покупки выпускаемых ими облигаций. Существует ряд изданий (например, Standard & Poor's Bond Guide), в которых печатаются рейтинги различных финансовых институтов, выпускающих облигации. Менее рискованные корпорации (т. е. с высоким рейтингом) выплачивают более низкий купонный процент. И соответственно, корпорации с низким рейтингом для привлечения покупателей выпускают облигации с высоким процентом выплат по купонам.

Каждую облигацию, выпускаемую в момент  $t = 0$ , характеризует ряд числовых параметров:

- *номинальная стоимость* (par value, face value)  $P(T, T)$ , т. е. та сумма, которая выплачивается обладателю облигации в
- *момент погашения* (the year the bond matures)  $T$ , где  $T$  — срок жизни (maturity) облигации (для *краткосрочных* облигаций это обычно срок до года и меньше; для *среднесрочных* — от 1 до 10 лет; для *долгосрочных* —  $T \geq 10$  лет);
- *купонная процентная ставка облигации* (bond's interest rate, coupon yield)  $r_c$ , определяющая *дивиденды* — величину годовых купонных платежей, выплачиваемых эмитентом облигации ее обладателю и равных  $r_c \times$  (номинальная стоимость);
- *начальная цена облигации* (the original price of bond)  $P(0, T)$ , выпускаемой в свет в момент  $t = 0$  со сроком жизни в  $T$  лет.

Если, скажем, в момент  $t = 0$  выпускается облигация со сроком действия  $T = 10$  лет, номинальной стоимостью в 1000 \$ и процентной купонной ставкой  $r_c = 6/100$  ( $= 6\%$ ), то покупатель, купивший ее по (начальной, покупной) цене в 1000 \$, по истечении десяти лет получит доход в 600 \$, слагающийся следующим образом:

номинальная стоимость	1000 \$
+	
купонные платежи за 10 лет	$1000 \times 6\% \times 10 = 600$ \$
—	
покупная цена	1000 \$
.....	
=	+600 \$

Обладатель облигации сроком действия в  $T$  лет, купивший ее в момент  $t = 0$ , естественно, может ее держать все эти  $T$  лет, получая купонные платежи и (в момент  $T$ ) номинальную стоимость облигации. Однако ему на самом деле может оказаться невыгодным держать ее до момента погашения  $T$ , если, например, инфляционная процентная ставка  $r_{\text{inf}}$  не меньше  $r_c$ . В этом случае обладатели облигаций пользуются правом ее продажи (вообще говоря, в любой момент  $0 \leq t \leq T$ ) по ее

- рыночной цене  $P(t, T)$

в момент времени  $t$  (со сроком погашения в момент  $T$ ).

Понятно, что  $P(0, T)$  — это (начальная) цена облигации в момент ее выпуска, а  $P(T, T)$  — ее номинальная стоимость. (В приведенном примере эти значения были равны 1000 \$.) Хотя, в принципе, и возможен случай, когда рыночная цена  $P(t, T)$  больше номинальной стоимости  $P(T, T)$ , типичной является ситуация, когда  $P(t, T) \leq P(T, T)$ .

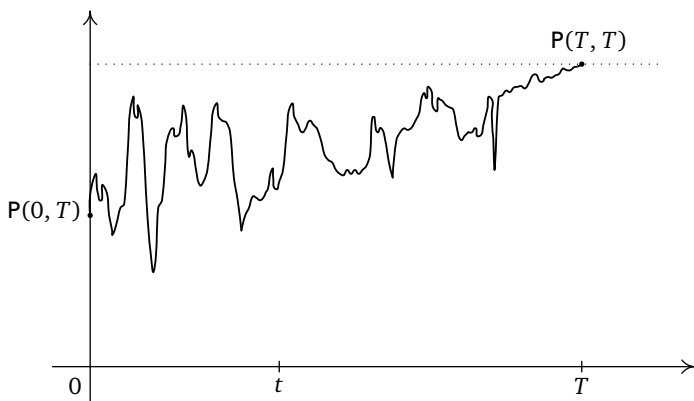
Представим себе, что обладатель облигации решил ее продать спустя два года, когда рыночная цена облигации  $P(2, 10)$  для  $t = 2$ ,  $T = 10$  стала равной 800 \$. Тогда его доход от покупки и обладания облигацией в течение двух лет будет следующий:

рыночная цена	800 \$
+	
купонные платежи	$1000 \times 6 \% \times 2 = 120 \$$
—	
покупная стоимость	1000 \$
.....	
=	—80 \$

Тем самым, доход на самом деле *отрицателен*, т. е. потери составляют в этом случае 80 \$. Тот же, кто купит эту облигацию по рыночной цене  $P(2, 10) = 800 \$$ , по прошествии 8 лет будет иметь следующий доход:

номинальная стоимость	1000 \$
+	
купонные платежи	$1000 \times 6 \% \times 8 = 480 \$$
—	
покупная стоимость	800 \$
.....	
=	+680 \$

Подчеркнем, что величина купонной процентной ставки облигации  $r_c$ , определяющей величину купонных платежей, *неизменна* на протяжении всего периода жизни облигации. Однако рыночная стоимость облигации  $P(t, T)$  *флуктуирует* во времени. Это значение складывается в результате действия многочисленных экономических факторов: спроса и предложения, величины процентных ставок других ценных бумаг, спекулятивных действий и т. п.

Рис. 1. Эволюция рыночной цены  $P(t, T)$  облигаций

Рассматривая  $\{P(t, T)\}$  как случайный процесс, развивающийся в моменты времени  $0 \leq t \leq T$ , видим, что он является условным в том смысле, что фиксировано его значение  $P(T, T)$ , являющееся номинальной стоимостью облигации.

Рис. 1 дает представление о том, как может флуктуировать рыночная цена  $P(t, T)$  во времени  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , «приходя» в момент погашения  $T$  в заранее фиксированное значение номинальной стоимости  $P(T, T)$ .

Еще одной часто употребляемой характеристикой облигации является

- текущая процентная ставка (the current yield)  $r_c(t, T)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , определяемая как отношение «годовых купонных выплат» к (текущей) рыночной цене:

$$r_c(t, T) = \frac{r_c \cdot P(T, T)}{P(t, T)},$$

что дает возможность сравнения различных облигаций. (В приведенном выше примере  $r_c(0, 10) = r_c = 6\%$ ,  $r_c(2, 10) = 6\% \cdot 1000/800 = 7,5\%$ .)

Существует другая и, пожалуй, наиболее важная характеристика облигации, позволяющая судить о доходе (за оставшийся период ее действия) как за счет купонных выплат, так и за счет выплаты в момент погашения, что дает еще одну возможность сравнивать разные облигации:

- доход (в процентах) до момента погашения (the yield to maturity), или доходность

$$\rho(T-t, T)$$

(где  $T-t$  — оставшееся время жизни облигации), для которой сумма дисконтируемых величин купонных платежей и номинальной стоимости на интервале  $(t, T]$  равна текущей рыночной цене облигации; доходность,

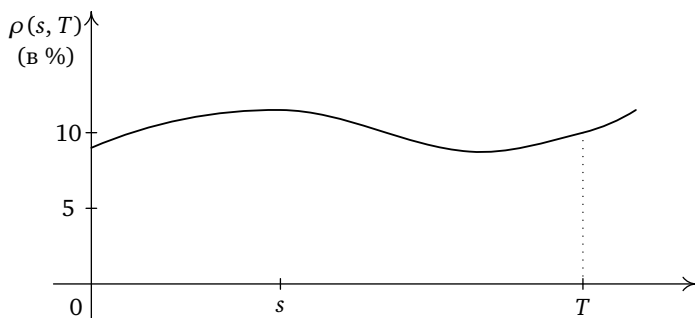


Рис. 2. Кривая доходности  $\rho = \rho(s, T)$  как функция от  $s = T - t$

таким образом, определяется как корень  $\rho = \rho(T - t, T)$  уравнения

$$P(t, T) = \sum_{k=1}^{T-t} \frac{r_c P(T, T)}{(1 + \rho)^k} + \frac{P(T, T)}{(1 + \rho)^{T-t}}. \quad (6)$$

(Единицей измерения считается один год,  $t = 1, 2, \dots, T$ .)

В том случае, когда рыночная цена  $P(t, T)$  совпадает с номинальной ценой  $P(T, T)$ , из данного определения следует, что  $\rho(T - t, T) \equiv r_c$ .

Типичная (схематическая) картина поведения кривой доходности  $\rho(s, T)$  как функции оставшегося времени  $s = T - t$  представлена на рис. 2.

В приведенном описании мы не затрагивали вопрос о структуре рыночных цен  $\{P(t, T)\}$ , рассматриваемых, скажем, в рамках вероятностного подхода. К этому довольно-таки непростому вопросу мы обратимся далее в гл. III.

Сейчас же лишь отметим, что при вероятностном описании структуры и динамики цен  $\{P(t, T)\}$  обычно используются следующие два способа:

- а) непосредственное (прямое) задание временной эволюции цен  $P(t, T)$  (а price-based approach);
- б) опосредованное задание, в котором изначально задаются не цены  $P(t, T)$ , а временная структура: доходности  $\{\rho(T - t, T)\}$  или сходные характеристики типа «процентных ставок» (а term structure approach).

Заметим также, что формула (6), являющаяся связующей при взаимном пересчете цен и доходности, построена по схеме «простых процентов» (ср. с формулой (1) при  $m = 1$ ). Нетрудно дать соответствующую формулу и в схеме «сложных процентов» (ср. с (2)), т. е. в случае непрерывного начисления процентов.

Как уже отмечалось, облигации выпускаются различными финансовыми учреждениями и с разными целями.

- Облигации корпораций (corporate bonds) — с целью накопления капитала для расширения производства, модернизации, покрытия операционных расходов и т. д.

- *Государственные облигации* (government bonds) — для разных правительственных программ, выплаты национального долга и т. д. В США это U. S. Treasury bills, notes, bonds, которые можно приобрести через один из федеральных резервных банков или через брокеров.
- *Муниципальные облигации* (municipal bonds), выпускаемые штатами, городами, — для оплаты разных проектов (строительство дорог, школ, мостов), пополнения бюджета и т. д.

Информация об облигациях корпораций, их характеристиках может быть найдена во многих изданиях (например, см. в «New York Stock Exchange» раздел «New York Exchange Bonds» или «American Stock Exchange»).

Представление о том, в каком виде дается информация об облигациях, можно получить из следующего описания:

IBM-JJ15-7 % of '01,

означающего, что речь идет об облигациях корпораций IBM с купонной выплатой<sup>2</sup> 15 января и 15 июля, со ставкой  $r_c = 7\%$  и моментом погашения в 2001 году.

Разумеется, также дается информация о номинальной стоимости облигаций и их текущей стоимости. (Подробнее см., например, книгу [469].)

**6. Акции** (stock, stocks) — это *долевые* ценные бумаги, выпускаемые корпорациями, компаниями, фирмами также (как и в случае облигаций) для увеличения капитала. Акции в основном бывают двух видов — *обыкновенная акция* (common stock) и *привилегированная акция* (preferred stock), различающиеся по выплате *дивидендов* по ним и степени риска обладания ими.

Обладатели обыкновенной акции получают дивиденды как соответствующую часть профита (дохода) компании, величина которого зависит от успеха ее деятельности. В случае разорения компании инвестор теряет все свои инвестиции. Привилегированная же акция обеспечивает инвестору меньший риск потери всех своих инвестиций, гарантированную выплату дивидендов, размер которых, вообще говоря, не растет с увеличением дохода компании.

Существуют и другие виды акций, оговаривающие долю участия, специальный способ выплаты дивидендов и т. п.

Многих инвесторов покупка акций привлекает не дивидендами (соответственно — купонными выплатами в случае облигаций), а возможностью «делать» деньги на колебаниях цен акций, покупая их по низкой цене перед тем, как остальные начнут это делать, и продавая их по высокой цене перед тем, как другие будут это делать.

По некоторым оценкам более 50 млн американцев владеют акциями. (В конце 1992 г. акциями компании AT&T обладали 2418 447 инвесторов при общем числе акций 1 339 916 615; см. [357].)

2 В Европе купонные выплаты осуществляются обычно раз в год, а в США — через 6 месяцев два раза в год.



Чтобы купить или продать акцию, надо обращаться в *брокерскую контору* (brokerage house) — инвестиционную фирму, являющуюся членом биржи по обмену акциями (stock exchange). Следует отметить, что, хотя число индивидуальных инвесторов (в акции) растет, реальная доля обладателей акций падает, поскольку инвесторы обычно участвуют на рынке ценных бумаг не непосредственно, а через «инвестиционные учреждения» (institutional investors), к которым относятся фонды взаимных вложений (mutual funds), пенсионные системы, страховые компании, банки и др., являющиеся основными «игроками» на рынке ценных бумаг, в том числе и на рынке акций.

Торговля акциями происходит на биржах в разных странах. Видимо, одной из самых первых бирж, возникших еще в XVII веке, явилась Амстердамская фондовая биржа (1602 г.), предметом торговли которой были акции акционерных компаний. Традиционно (фондовые) биржи в Европе находились под сильным контролем банков. В то же время американские фондовые биржи существуют автономно от банковской системы [482, с. 10].

Крупнейшей биржей в США является NYSE (New York Stock Exchange, название существует с 1817 года; число «мест» (seats) — 1366 в 1987 году) и AMEX (American Stock Exchange, образована в 1921 году на базе New York Curb Exchange, основанной в 1842 году). Чтобы компания могла торговать своими акциями на бирже, она должна удовлетворять некоторым требованиям (на ее размеры, доход и т. п.). На NYSE требования к компаниям таковы: претаксовый заработок (прибыль до вычета налога; pre-tax earnings, pre-tax profit) должен быть больше или равен 2,5 млн \$; необходимо обладать не менее 1,1 млн акций с минимальной рыночной ценой, не меньшей 18 млн \$. Тем самым, торговлей на этой бирже занимаются старейшие, хорошо известные компании (к 1993 году их зарегистрировано 2089). На AMEX торгуют акциями в основном компании средних размеров; зарегистрирована 841 компания.

Биржа NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automatic Quotations) — другая крупная организация в США по торговле акциями; зарегистрировано 4700 компаний разных размеров — больших, средних, развивающихся малых.

Внушительен по числу участников (порядка 40 тысяч, [357]) рынок ценных бумаг ОТС (over-the-counter). Этот рынок, также как и NASDAQ, не имеет централизованного места, подобно, скажем, NYSE, AMEX и др. Торговля производится посредством компьютерно-телефонной связи через дилеров, которые покупают и продают ценные бумаги на свои счета. Эта торговля включает в себя самые разнообразные ценные бумаги — обыкновенные и привилегированные акции, облигации корпораций, ценные бумаги, выпускаемые правительством США, муниципальные облигации, опционы, варранты, иностранные ценные бумаги.

Основная причина, почему малые или новые компании или компании с небольшим числом акций обращаются к ОТС, — это то, что практически нет никаких требований (или они минимальны) на размер капитала компании и т. п.

С другой стороны, те компании, которые удовлетворяют требованиям других бирж, часто обращаются к ОТС, если «торгово-переговорный» стиль ОТС более предпочтителен, нежели система «хорошо организованных бирж». Есть и другие причины обращения к ОТС, скажем, нежелание обнародовать свое финансовое состояние, что требуется для торговли на «больших» биржах.

Естественно, что и для «больших», и для «малых» инвесторов важна информация о состоянии компаний, торгующих своими акциями, курсах акций и их эволюции. Важна также и информация о «глобальном» состоянии экономики, состоянии рынка ценных бумаг, выражаемая в виде некоторых «суммарных», «обобщенных» индексов.

С точки зрения информации о «глобальном» состоянии экономики наиболее известными являются *средние и индексы Доу-Джонса (Dow Jones)*. Имеются четыре средних:

- DJIA — *Dow Jones Industrial Average* (по 30 индустриальным компаниям);
- *Dow Jones Transportation Average* (по 20 авиакомпаниям, железнодорожным компаниям и компаниям, занимающимся перевозками);
- *Dow Jones Utility Average* (по 15 газовым, электрическим и энергетическим компаниям);
- *Dow Jones 65 Composite Average* (по 65 компаниям в трех вышеприведенных средних).

Отметим, что, скажем, (суммарный) индекс DJIA, обычно называемый *Dow*, составленный по тридцати крупным («blue-chip») компаниям, не является простым средним арифметическим. Он формируется так, что акции с высокой стоимостью вносят в суммарный индекс и больший вес. Таким образом, значительное изменение в ценах акций небольшого числа компаний может сильно изменить значение индекса (как показателя состояния «индустриальной» экономики) в целом [310].

(*К истории Dow*. В 1883 г. Чарльз Доу (Charles H. Dow) начал составлять списки средних значений «цен закрытия» акций девяти железнодорожных и двух производственных фирм. Эти списки, пользовавшиеся большой популярностью, и стали предшественниками «The Wall Street Journal», основанного в 1889 г. Чарльзом Доу вместе с его партнером Эдвардом Джонсом (Edward H. Jones). См., например, [310].)

Помимо индексов Dow Jones широкое распространение имеют:

- Standard & Poor's 500 (S&P 500) index,
- the NYSE Composite index,
- the NASDAQ Composite index,
- the AMEX Market Value index,
- Value-Line,
- the Russel 2000,

- the Wilshire 5000,

...

Индекс Standard & Poor's 500 в настоящее время составлен (в отличие от Dow Jones) с учетом большего числа компаний (500 = 400 индустриальных + 20 транспортных + 40 коммунальных + 40 финансовых); индекс NYSE включает акции всех компаний, торгующих на «New York Stock Exchange».

(К истории Standard & Poor's. Генри Варнум Пур (Henry Varnum Poor) начал публикацию его годовых «Poor's Manual of Corporate Statistics» в 1860 году — за двадцать с лишним лет до того, как компания Dow Jones & Company начала публиковать дневные средние значения «цен закрытия». В 1941 году компания Poor's Finance Services слилась со Standard Statistic Company — другим лидером в составлении и публикации финансовых данных. Созданная в результате этого слияния Standard & Poor's Corporation стала одним из крупнейших информационных служб и издателей финансовой статистики. См., например, [310].)

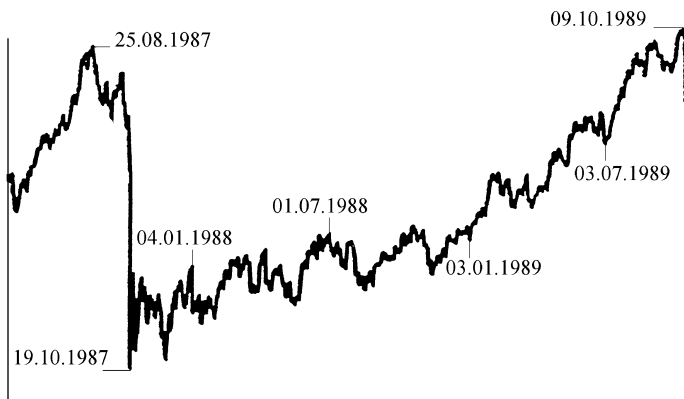
Кроме печатных изданий типа упомянутых выше, текущую информацию о ценах «покупки» и «продажи» («bid price» и «ask price») дает электронная система NASDAQ, включающая акции порядка 5 тыс. компаний, принимающих участие в ОТС. Через дилеров брокеры могут в любой момент узнать цены покупки и продажи, предлагаемые другими дилерами. После этого брокер может вступать непосредственно в «торговый контакт» с тем дилером, чья предлагаемая цена его больше устраивает.

Интернационализация экономики привела к необходимости знания состояния не только компаний собственной страны, но и других стран. Соответствующие издания также существуют (в США принята такая терминология: термины «World», или «Worldwide», или «Global» относятся ко всем рынкам, включая и рынок США; термин же «International» относится к иностранным рынкам, не включая США).

О состоянии 16 основных мировых (International) бирж можно узнать из ежедневно публикуемой газеты «The Wall Street Journal», печатающей в разделе «Stock Market Indices» дневное состояние индексов закрытия вместе с процентным и абсолютным его изменениями в *сравнении* с прошлым днем.

Каждый хорошо знает по многочисленным публикациям, даже в обычных газетах, что цены акций, значения всевозможных финансовых индексов меняются весьма замысловатым, хаотическим образом. Например, график, показывающий изменение индекса DJIA, приведен на рис. 3.

На следующем рис. 4 представлен график изменений *дневных* значений  $S = (S_n)$  индекса S&P 500 в период 1982–88 гг. Из дальнейшего станет ясно, что с точки зрения изучения поведения «стохастической» составляющей в индексах удобнее иметь дело не с величинами  $S = (S_n)$ , а с величинами  $h_n = \ln(S_n/S_{n-1})$ , интерпретируемыми как «возврат», «отдача», «логарифмическая прибыль» (см. § 1а гл. II) и ведущими себя более «однородно», нежели  $S = (S_n)$ . Соответствующий график значений  $h = (h_n)$  приведен на рис. 5.



**Рис. 3.** Эволюция индекса DJIA (Dow Jones Industrial Average). В день краха, 19.10.1987, индекс DJIA упал на 508 пунктов

Резкий спад в конце 1987 г., четко выраженный на рис. 3 и 4, относится к известному *октябрьскому краху*, когда цены акций резко упали и инвесторы, опасаясь «потерять все», бросились продавать акции. Массовый характер начавшегося избавления от акций вызвал все нарастающий эмоциональный и психологический хаос и привел к обвальному выбросу акций на рынок для продажи. Так, например, на бирже NYSE в январе 1987 г. в дневном обороте участвовало примерно 300 млн акций. В день же краха, 19 октября 1987 г., для продажи было выброшено 604 млн акций, а 20 октября эта цифра поднялась до 608 млн.

В день краха «цена открытия» акции AT&T была равна 30, а «цена закрытия» равна  $23\frac{5}{8}$ . Тем самым, в процентном отношении потери этой компании составили 21,2 %.

Глобальным же образом, индекс DJIA 19 октября 1987 г. по сравнению с состоянием на 31 декабря 1986 г. упал на 22,6%, что в абсолютном выражении составило 500 миллиардов долларов (1 миллиард =  $10^9$ ).

Другой известный экономический кризис, 1929 года, также происшедший в октябре, характеризуется тем, что в дневном обороте биржи NYSE 24 октября (до кризиса) участвовало 12,9 млн акций, а в день краха, 29 октября — уже 16,4 млн акций. Соответственно, индекс DJIA по сравнению с 31 декабря 1928 г. упал на 12,8%, что в абсолютном выражении составило 14 миллиардов долларов.

В дополнение к рис. 3–5, хорошо иллюстрирующим флуктуационный характер изменений индексов DJIA и S&P 500 в течение ряда лет, укажем также на рис. 6, наглядно показывающий, как менялся обменный курс DEM/USD в течение одного бизнес-дня (четверг, 19.08.1993).

Первая попытка математического описания эволюции стоимостей  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  акций (на парижском рынке), опирающегося на концепции теории



Рис. 4. Индекс S&P 500 в период 1982–88 гг.

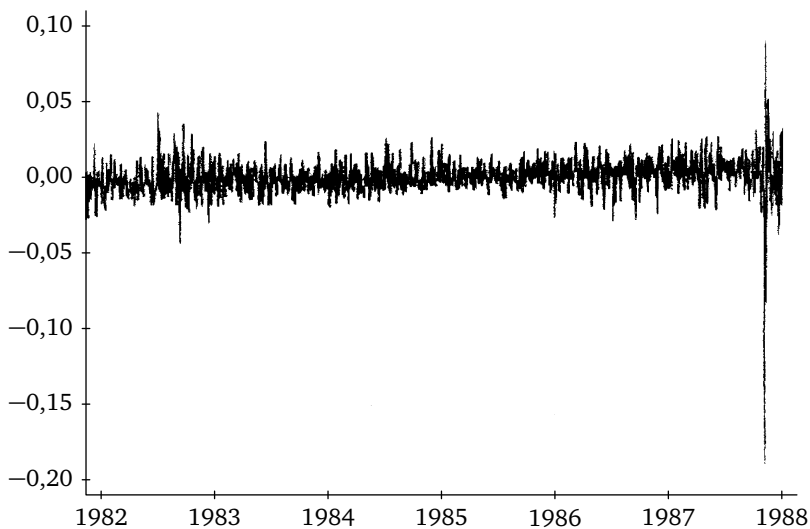
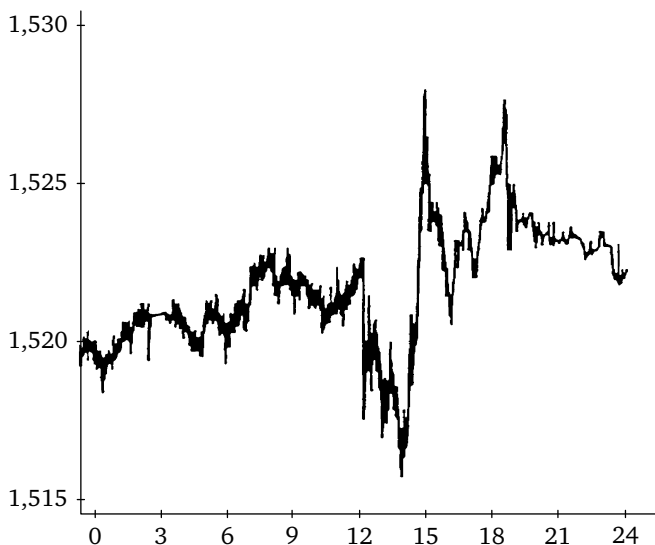


Рис. 5. Дневные значения  $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$  для индекса S&P 500, построенные по данным рис. 4



**Рис. 6.** Динамика средних значений (между ценами покупки и продажи) в обменном курсе DEM/USD в течение 24 часов 19.08.1993 года (точка 0 соответствует 0:00 по Гринвичу)

вероятностей, была предпринята Л. Башелье (Louis Bachelier; 11.03.1870–28.04.1946) в его диссертации «Théorie de la spéculation» [12], опубликованной в 1900 г. в «Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure», где он предложил рассматривать  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  как случайный процесс.

Анализируя экспериментальные данные цен  $S_t^{(\Delta)}$ ,  $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$  (с интервалом времени  $\Delta$ ), он замечает, что  $S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}$  имеют (в статистическом смысле) нулевое среднее и флуктуации  $|S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}|$  порядка  $\sqrt{\Delta}$ .

Таким свойством обладает, например, случайное блуждание  $S_t^{(\Delta)}$ ,  $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ , с

$$S_t^{(\Delta)} = S_0 + \sum_{k \leq [t/\Delta]} \xi_k^{(\Delta)},$$

где независимые одинаково распределенные случайные величины  $\xi_k^{(\Delta)}$  принимают два значения  $\pm \sigma \sqrt{\Delta}$  с вероятностями  $1/2$ .

Предельный переход по  $\Delta \rightarrow 0$  приводит (в соответствующем вероятностном смысле) к случайному процессу

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \quad t \geq 0,$$

где  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  есть не что иное, как рассмотренное Л. Башелье броуновское движение (или винеровский процесс — в честь Н. Винера (N. Wiener [476]), построившего этот процесс в 1923 году и развившего для него строгую математическую теорию; см. также далее § 3а гл. III).

Отправляясь от броуновского движения, Л. Башелье дал формулу для математического ожидания  $\mathbb{C}_T = E f_T$  с  $f_T = (S_T - K)^+$ , что с современной точки зрения есть (в предположении, что процентная ставка банковского счета  $r = 0$ ) значение *рациональной (справедливой) стоимости* (премии), которую покупатель стандартного опциона-колл (call option) должен заплатить продавцу опциона, обязавшемуся продать покупателю акции в момент исполнения (maturity time)  $T$  по цене исполнения (strike price, exercise price)  $K$  (см. далее § 1с). (Если  $S_T > K$ , то покупатель опциона имеет суммарный выигрыш, равный  $S_T - K = \mathbb{C}_T$ , поскольку он может купить акции по цене  $K$  и тут же их продать по более дорогой цене  $S_T$ ; если же  $S_T < K$ , то покупатель просто не предъявляет опцион к исполнению, и его потери равны выплаченной им премии  $\mathbb{C}_T$ .)

Найденная Л. Башелье формула (см. § 1а гл. VIII)

$$\mathbb{C}_T = (S_0 - K) \Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T} \varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad (7)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy,$$

явилась предвестником знаменитой формулы Блэка и Шоулса (см. § 1b гл. VIII) для рациональной стоимости стандартного опциона-колл в случае, когда  $S = (S_t)$  описывается *геометрическим*, или *экономическим*, броуновским движением

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}, \quad (8)$$

где  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  — броуновское движение.

В предположении, что процентная ставка  $r$  банковского счета равна нулю, формула Блэка и Шоулса дает следующее выражение для рациональной стоимости  $\mathbb{C}_T = E(S_T - K)^+$  стандартного опциона-колл:

$$\mathbb{C}_T = S_0 \Phi(y_+) - K \Phi(y_-), \quad (9)$$

где

$$y_{\pm} = \left[ \ln \frac{S_0}{K} \pm \frac{\sigma^2 T}{2} \right] / \sigma\sqrt{T}. \quad (10)$$

(По поводу общей формулы Блэка и Шоулса в случае  $r \neq 0$  см. гл. VIII.)

Интересно отметить, что согласно (7) при  $K = S_0$

$$\mathbb{C}_T = \sigma \sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

что дает представление о росте величины рациональной стоимости опциона-колл с ростом «времени исполнения»  $T$ .

Проблема «правильного» описания динамики тех или иных финансовых индексов  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  типа цен акций далека от своего завершения и является предметом многочисленных исследований теоретико-вероятностного и статистического характера. (Далее этим вопросам посвящаются гл. II, III и IV.) Как уже объяснялось ранее (п. 4), аналогичная (и, пожалуй, более трудная)

проблема возникает также в связи с описанием стохастической эволюции рыночных цен облигаций  $\mathcal{P} = \{P(t, T)\}$  как случайных процессов ( $0 \leq t \leq T < \infty$ ) с фиксированными условиями на «правом конце», т. е. при  $t = T$ . (Эти вопросы рассматриваются далее в гл. III.)

### § 1с. Рынок производных ценных бумаг. Финансовые инструменты

1. Резкое повышение интереса к рынку ценных бумаг во всех странах мира относят к началу *семидесятых* годов XX в. Естественно попытаться понять, что же произошло к началу семидесятых годов, что послужило толчком к новым сдвигам в экономике и, в частности, на рынке ценных бумаг.

Финансовый рынок (включая и рынок капитала — долгосрочных бумаг, и денежный рынок — краткосрочных бумаг) в шестидесятые годы отличался очень низкой *волатильностью* (изменчивостью), процентные ставки стали очень устойчивыми, обменный курс валют был фиксированным. С 1934 года по 1971 год США придерживались политики покупки и продажи золота по фиксированной цене 35 долларов на унцию (= 28,25 г). Доллар США рассматривался как эквивалент золота, был «так же хорош, как и золото». Тем самым, истинная цена золота определялась не рыночными силами, а искусственным образом.

Такое общее состояние рынка ограничивало инициативу инвесторов, сдерживало введение новой финансовой технологии.

С другой стороны, в 70-х годах произошло несколько событий, способствовавших значительным структурным изменениям и возрастанию волатильности на финансовых рынках. Перечислим наиболее важные среди них (см. [345], [108], а также п. 2 в § 1b).

1. Отказ (1973 г.) от фиксированного обменного курса валют (для ряда групп стран) и переход к «плавающему» курсу (для некоторых видов валют в определенном «коридоре»), что поставило, в частности, интересную и важную задачу об оптимальных *интервенциях* центральных банков.

2. Обесценивание доллара (по отношению к золоту): в 1971 году администрация Р. Никсона отказалась от фиксированной цены в 35 долларов за унцию золота. Это привело к тому, что в семидесятых годах цена золота в долларовом исчислении резко взлетела вверх: в 1980 году она была равна 570 долларов за унцию, в 1984 году упала до 308 долларов; с 1984 года эта цена флуктуирует преимущественно в интервале 300–400 долларов.

3. Всемирный нефтяной кризис, возникший в связи с политикой нефтяного картеля ОПЕК (ОПЕС), ставшего одним из основных законодателей цен на нефть на международном рынке. (ОПЕС — Organization of the Petroleum Exporting Countries — создана в 1960 году для унификации и координации нефтяной политики членов этой организации с целью защиты их интересов; в настоящее время ее членами являются Алжир, Ангола, Венесуэла, Ирак, Иран, Катар, Кувейт, Ливия, Нигерия, Объединенные Арабские Эмираты, Саудовская Аравия и Эквадор.)



4. Упадок активности в реализации акций. (В США этот упадок в реальных терминах более значителен, нежели в период Великой депрессии 30-х годов.)

5. Разные страны оказались (особенно с учетом разрушительности Второй Мировой войны) в разном экономическом состоянии.

В таких условиях традиционные «правила большого пальца» (the old «rules of thumb») и простые модели регрессии стали полностью не соответствовать состоянию экономики и, в том числе, финансового бизнеса.

И действительно, рынок быстро среагировал на новые возможности для инвесторов, получивших значительный простор для спекуляций (не в худшем понимании этого слова, а в его первоначальном: «speculation» — предположение, умозрительное построение, размышление). В разных местах стали создаваться биржи по опционам, фьючерсам на облигации (бонды). В 1973 году была открыта CBOE (Chicago Board Options Exchange) — биржа по заключению стандартных контрактов с опционами. Вот как инвесторы реагировали на новые, более динамичные возможности. В день открытия, 26 апреля, было заключено 911 контрактов на опционы-колл на 16 видов акций; через год заключалось более 20 тысяч контрактов в день; три года спустя — 100 тысяч в день; в 1987 году — 700 тысяч контрактов. Если учесть, что каждый единичный контракт — это сделка на куплю или продажу партии из 100 акций, то, следовательно, в дневном обороте 1987 года было задействовано 70 млн акций. (См. подробнее [353].)

В этом же 1987 году на Нью-Йоркской бирже NYSE (New York Stock Exchange) в дневном обороте участвовало 190 млн акций.

1973 год был знаменателен не только созданием первой организованной биржи по заключению стандартных контрактов с опционами. В этом же году были опубликованы две работы: F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities [44] и R. C. Merton. The theory of rational option pricing [346], совершившие, можно сказать без преувеличения, революцию в методологии финансовых расчетов. Трудно, пожалуй, указать другие теоретические публикации в финансовой литературе, которые бы с такой быстротой нашли применение в практике финансовых расчетов и стали к тому же источником многочисленных исследований как более сложных опционов, так и других видов производных ценных бумаг.

2. Среди производных ценных бумаг как инструментов финансовой инженерии наиболее заметное место занимают *опционы* и *фьючерсные контракты*. Общеизвестно, что и те, и другие имеют очень высокий риск, но в то же самое время они и их разнообразные комбинации с успехом используются не только с целью получения (спекулятивного) дохода, но и как *средство защиты* от драматического изменения цен.

- **Опцион** (option; выбор) — это ценная бумага (контракт), выпускаемая фирмами, корпорациями, банками и другими финансовыми институтами и дающая покупателю *право* купить или продать определенную ценность

(например, акцию, облигацию, валюту) в установленный период или момент времени на заранее оговариваемых условиях.

В отличие от опционов, дающих *право* на покупку или продажу,

- **Фьючерс**, или **фьючерсный контракт** (futures; заблаговременный, будущий контракт) — это *соглашение-обязательство* купить или продать определенную ценность (например, зерно, золото, валюту) в определенный момент в будущем по (*фьючерсной*) цене, оговариваемой в момент заключения соглашения.

А. *Фьючерсы* представляют практический интерес и для продавцов, и для покупателей самых разнообразных товаров и ценностей.

Так, например, разумный фермер, беспокоящийся о продаже будущего урожая по «хорошей» цене и боящийся драматического скачка цен «вниз», предпочтет лучше заключить «подходящий» контракт с мельником (пекарем) о поставке (еще и не выращенного-то) урожая, вместо того, чтобы дожидаться потом его созревания и продажи по той цене, которая (кто знает как!) сложится на рынке в будущем.

Соответственно и мельник (пекарь) заинтересован в покупке зерна по «подходящей» цене, также думая о том, чтобы избежать возможного значительного подорожания зерна в будущем.

В конечном счете цель и одного, и другого одна — *минимизировать риск*, обусловленный неопределенностью будущих значений цен на рынке. В этом смысле фьючерсные контракты являются формой взаимного соглашения, которая может устроить обе заинтересованные стороны.

Прежде чем переходить к содержательной стороне фьючерсных контрактов, уместно сначала остановиться на родственной им форме соглашений — так называемых форвардных контрактах.

В. Как и в случае фьючерсных контрактов,

- **Форвардный контракт**, или **форвард**, также есть соглашение о поставке-покупке некоторой ценности или товара в будущем по заранее оговариваемой (*форвардной*) цене.

Разница между фьючерсным и форвардным контрактами состоит в том, что форварды обычно заключаются между двумя сторонами без каких-либо посредников. Фьючерсные же контракты заключаются на *организованных биржах*, причем задействованные «покупатель» и «продавец» могут вовсе и не знать друг друга, а специальная система текущих перерасчетов делает отказ той или иной стороны от контракта делом убыточным.

Обычно о том, кто хочет что-то купить, говорят, что он «занимает *длинную* (long) позицию». Тот же, кто обязуется осуществить поставку, «занимает *короткую* (short) позицию».

Кардинальный вопрос и форвардных, и фьючерсных контрактов — это вопрос о договорной цене, называемой соответственно «форвардной» и «фьючерсной» ценой, которая на самом деле (в момент расчета) может оказаться отличной от рыночной цены поставляемого товара.

Схематично операции с форвардами выглядят следующим образом:



Здесь товар понимается в широком смысле. Например, им может быть валюта. При этом если вы хотите, скажем, за американские доллары (USD) купить швейцарские франки (CHF), то гипотетически информация о форвардах может выглядеть следующим образом:

сегодняшняя цена 1 USD = 1,20 CHF,

(т. е. за 1 USD можно купить 1,20 CHF);

30-дневный форвард 1 USD = 1,19 CHF;

90-дневный форвард 1 USD = 1,18 CHF;

180-дневный форвард 1 USD = 1,17 CHF.

Представленная здесь ситуация является типичной в том смысле, что с увеличением интервала времени (срока поставки) за 1 доллар вы будете получать меньше и, значит, если вам через 6 месяцев надо иметь 10 000 швейцарских франков, то за это надо будет заплатить

$$\frac{10\,000}{1,17} = 8\,547 \text{ (долларов).}$$

Но если бы вы сейчас нуждались в 10 000 швейцарских франков, то это обошлось бы в

$$\frac{10\,000}{1,20} = 8\,333 \text{ (доллара).}$$

Понятно, что реальная, рыночная стоимость 10 000 CHF через 6 месяцев может оказаться отличной от 8 547 USD. Она может быть и меньше, но может быть и больше, что определяется состоянием курса CHF/USD через 6 месяцев.

Форвардное соглашение — это, как уже отмечалось, соглашение между двумя сторонами, и в принципе существует потенциальная опасность его нереализации. К тому же часто бывает трудно найти поставщика требующегося вам товара и, соответственно, наоборот — найти заинтересованного покупателя.

С. Видимо, именно эти обстоятельства привели к возникновению *фьючерсных контрактов*, торгуемых на биржах со специальным механизмом перерасчета, который в общих чертах может быть описан следующим образом.

Представим, что 1 марта вы даете своему брокеру указание купить на торговой бирже, скажем, 1 октября определенное количество пшеницы (с указанием ориентировочной цены). Брокер передает этот заказ на биржу, которая в свою очередь передает этот заказ одному из трейдеров биржи. Трейдер подыскивает подходящую цену и в случае ее нахождения дает сигнал другим трейдерам о том, что он желает купить контракт по этой цене. Если какой-то трейдер соглашается, то дело сделано. Если же этого не происходит, то трейдер уведомляет брокера, а он — вас о наличии товара по более высокой цене, и вы должны принимать то или иное решение.

Допустим, что в конце концов контракт заключен, и вы — покупатель — занимаете *длинную* позицию, а продавец — *короткую*.

Далее, пусть  $\Phi_0$  есть (фьючерсная) цена, относительно которой обе стороны договорились, что пшеница будет поставлена 1 октября (по цене  $\Phi_0$ ). Теперь, чтобы контракт был действительно заключен, каждая из сторон должна внести на специальный счет биржи определенную сумму (порядка 2%–10% от  $\Phi_0$  в зависимости от авторитета клиентуры), называемую *начальной маржой* (initial margin). В дальнейшем в дело вступает определенная система перерасчета, осуществляемая в конце каждого дня и состоящая в следующем.

Допустим, что в момент (исполнения)  $t = 0$   $\Phi_0 = 10\,000$  \$ есть (фьючерсная) цена поставки пшеницы в момент  $T = 3$ , т. е. через три дня, и пусть к концу следующего дня ( $t = 1$ ) рыночная фьючерсная цена поставки пшеницы в момент  $T = 3$  стала равной 9 900 \$. В этом случае клиринговая палата биржи перечисляет на счет поставщика (т. е. фермера) 100 \$ ( $= 10\,000 - 9\,900$ ). Таким образом, фермер получил прибыль и начинает как бы оперировать с контрактом, фьючерсная цена которого теперь равна 9 900 \$, а не 10 000 \$.

Заметим, что если бы в конце первого дня осуществлялась поставка по этой новой фьючерсной цене 9 900 \$, то суммарная величина, полученная фермером, была бы в точности равна фьючерсной цене  $\Phi_0$ , поскольку  $100 \$ + 9\,900 \$ = 10\,000 \$ = \Phi_0$ .

Естественно, что эти 100 \$ клиринговой палатой снимаются со счета покупателя, и он должен внести дополнительно 100 \$ на счет маржи. Возможна, впрочем, и ситуация, когда требование о дополнительном взносе поступает только тогда, когда маржовый счет падает ниже некоторого определенного уровня (maintenance margin).

Пусть аналогичное происходит и в момент  $t = 2$  (см. рис. 7). Тогда фермер получает на свой счет поступление в 200 \$ и столько же будет снято со счета покупателя.

Но если в момент  $t = 3$  фьючерсная цена поставки ( $=$  реальная цена) станет равной 10 100 \$, то со счета фермера будет снято 300 \$ ( $= 10\,100 - 9\,800$ ) и, следовательно, суммарно он потеряет 100 \$ ( $= 300 - 200$ ), а покупатель получит эти 100 \$.

Заметим, что если бы в момент  $T = 3$  покупатель решил купить пшеницу (с мгновенной поставкой) в момент  $T = 3$ , то он должен был бы заплатить 10 100 \$ ( $=$  реальная цена в этот момент). Но с учетом того, что покупатель

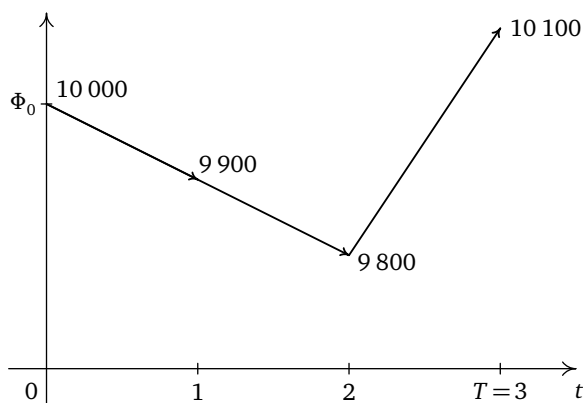


Рис. 7. Эволюция фьючерсной цены

уже получил на свой счет 100\$, фактическая цена поставки для него равна  $10\,100 - 100 = 10\,000$  (\$), т. е. в точности совпадает с договорной ценой  $\Phi_0$ .

Аналогично и для фермера: фактически полученная плата за поставку в точности равна 10 000\$, поскольку в момент  $T = 3$  он получает реальную цену 10 100\$, но с учетом снятых у него со счета 100\$ это в точности равно 10 000\$.

Из приведенного изложения становится понятной роль клиринговой палаты как «сторожевого пса» (watchdog), следящего за всем осуществлением перерасчетов, состоянием маржи, что, в конечном счете, направлено на то, чтобы контракт действительно «работал».

Как уже отмечалось выше, один из кардинальных вопросов теории расчетов форвардных и фьючерсных контрактов состоит в отыскании «справедливых» значений соответствующих цен.

Далее, в §1е гл. VI будет показано, как соображения «безарбитражности» в соединении с мартингальными методами позволяют дать формулы для форвардных и фьючерсных цен контрактов, заключенных в момент времени  $t$  с исполнением поставок в момент  $T > t$ .

**Д. Опционы.** В теории и практике опционов как производных финансовых инструментов есть свои понятия, определенная специфическая терминология, с которыми имеет смысл ознакомиться уже на раннем этапе обращения к ним. Это тем более важно, что большая часть математического анализа производных ценных бумаг далее будет относиться именно к опционам, что вызвано несколькими обстоятельствами.

Во-первых, математическая теория опционов наиболее продвинута, и на ее примере удобно изучать основные принципы оперирования с ценными бумагами, в частности принципы расчетов справедливых цен и *хеджирующих* (т. е. защищающих) стратегий.

Во-вторых, реальный объем опционов, торгуемых на рынках, исчисляется миллионами штук, и, следовательно, для них имеется «хорошая статистика»,

дающая возможность проверки качества вероятностно-статистических моделей эволюции цен опционов.

Хотя опционы известны как финансовые инструменты с давних пор (см., например, книгу [312]), пожалуй, Л. Башелье был первым, кто в своей ставшей теперь знаменитой диссертации «*Théorie de la spéculation*» [12] в 1900 году дал первый математический анализ стоимости опционов и обосновал целесообразность инвестирования в опционы. А организованным образом опционы стали продаваться, как уже отмечалось выше, не так уж давно — с 1973 года (см. § 1с).

Е. Для определенности последующего изложения, относящегося к опционам, предположим, что финансовая активность происходит в моменты времени

$$n = 0, 1, \dots, N$$

с завершением всякой деятельности в момент времени  $N$ .

Будем предполагать, что речь идет об опционах, построенных на акциях, стоимость которых описывается случайной последовательностью

$$S = (S_n)_{0 \leq n \leq N}.$$

Согласно общепринятой терминологии, опционы делятся на два класса:

- опционы *покупателя* (*call option*, отсюда происходит название опцион-колл);
- опционы *продавца* (*put option* — опцион-пут).

Опцион-колл дает *право покупки*.

Опцион-пут дает *право продажи*.

С точки зрения финансовой инженерии важно то, что эти финансовые инструменты «работают в разных направлениях»: когда доход от одного растет, доход от другого уменьшается. Именно это обстоятельство объясняет широко распространенную практику *диверсификации* при оперировании с опционами разных классов, быть может, и в комбинации с другими ценными бумагами.

По времени исполнения опционы классифицируются на два типа: *европейские* и *американские*.

Если опцион предъявляется к исполнению только в *заранее* определенный момент времени  $N$ , то говорят, что  $N$  — момент исполнения, а опцион является опционом *европейского типа*.

Если же опцион может быть предъявлен к исполнению в *любой* (случайный) момент времени  $\tau \leq N$ , то говорят, что это опцион *американского типа*.

На практике большинство торгуемых опционов являются опционами Американского типа, которые дают больше свободы покупателю, допуская *выбор* момента исполнения  $\tau$ . В случае же опционов европейского типа этот

момент заранее определен ( $\tau \equiv N$ ). Отметим, что имеются случаи, когда опционы американского и европейского типов «совпадают» (в том смысле, что «оптимальный» момент  $\tau$  для опциона американского типа равен  $N$ ). Подробнее см. гл. VI (§ 5b) и VIII (§ 3c).

Рассмотрим теперь для определенности *стандартный опцион покупателя* (call option, опцион-колл) *европейского типа* со временем исполнения  $N$ . Такой опцион характеризуется *фиксированной* в момент его покупки ценой  $K$ , по которой покупатель может купить, скажем, акции, фактическая стоимость которых  $S_N$  в момент  $N$  может, и существенным образом, отличаться от  $K$ .

Если  $S_N > K$ , то эта ситуация окажется благоприятной для покупателя, поскольку ему по условиям контракта дано право купить акции по цене  $K$ , что он может и сделать с немедленной их последующей продажей по рыночной цене  $S_N$ . В этом случае получаемый им от этой операции доход равен  $S_N - K$ .

Если же окажется, что  $S_N < K$ , то данное покупателю право покупки (по цене  $K$ ) ему ничего не дает, поскольку он может купить акции и по более низкой цене ( $S_N$ ).

Объединяя эти два случая, можно сказать, что в момент  $N$  доход покупателя  $f_N$  определяется формулой

$$f_N = (S_N - K)^+,$$

где  $a^+ = \max(a, 0)$ .

Разумеется, за покупку такого финансового инструмента надо заплатить некоторую премию  $C_N$ . Таким образом, *чистый доход покупателя опциона-колл* будет равен

$$(S_N - K)^+ - C_N,$$

т. е.

$$\begin{aligned} (S_N - K) - C_N, & \text{ если } S_N > K, \\ -C_N, & \text{ если } S_N \leq K. \end{aligned}$$

Соответственно, *доход продавца* будет равен

$$\begin{aligned} C_N - (S_N - K), & \text{ если } S_N > K, \\ C_N, & \text{ если } S_N \leq K. \end{aligned}$$

Из этих рассмотрений ясно, что покупка опциона-колл связана с надеждой на *повышение* стоимости акций. Подчеркнем также, что стоимость опциона  $C_N$ , конечно, зависит не только от  $N$ , но и от  $K$ . При этом понятно, что чем меньше  $K$ , тем больше стоимость  $C_N$ .

**Замечание.** Существует специальная терминология для тех, кто играет на *повышение* и на *понижение*. Согласно [65]:

«Бык» (bull) — «дилер на фондовой бирже, валютном или товарном рынке, ожидающий, что цены поднимутся. Рынок „быков“ — это такой рынок, на котором дилер с большей вероятностью будет покупать, а не продавать, причем он может покупать даже за свой собственный счет, открывая позицию

„быка“. „Бык“ с открытой „длинной“ позицией надеется продать по более высокой цене то, что он купил, после повышения конъюнктуры на рынке».

«Медведь» (bear) — «дилер на фондовой бирже, валютном или товарном рынке, ожидающий падения цен. „Медвежий рынок“ — это рынок, на котором дилер с большей вероятностью будет продавать ценные бумаги, валюту или товары, нежели покупать их. Он может даже продавать ценные бумаги, валюту или товары, которых у него нет. Такие операции носят название „короткие продажи“ или „установление медвежьей позиции“. „Медведь“ надеется закрыть (или покрыть) свою короткую позицию путем покупки ценных бумаг, валюты или товаров по ценам, более низким по сравнению с теми, по которым он их продал. Разница между ценой покупки и первоначальной ценой продажи представляет собой прибыль „медведя“».

В зависимости от соотношений между начальной ценой  $S_0$  и величиной  $K$  опционы подразделяются на три категории: с *выигрышем* (in-the-money), с *нулевым выигрышем* (at-the-money) и с *проигрышем* (out-of-the-money). В случае опциона-колл этим категориям отвечают соответственно соотношения  $S_0 > K$ ,  $S_0 = K$  и  $S_0 < K$ .

Следует сразу отметить, что в положениях продавца и покупателя имеется огромная разница.

Покупатель, купив опцион, просто ожидает наступления момента  $N$  его предъявления, созерцая, быть может, как наблюдатель, характер изменения цен  $S_n$ ,  $n \geq 0$ .

Роль же продавца намного сложнее, поскольку он должен думать о необходимости исполнения контракта, что заставляет его не созерцательно относиться к движению цен  $S_n$ ,  $n \geq 0$ , а использовать все имеющиеся в его распоряжении финансовые средства для составления такого портфеля ценных бумаг, который бы обеспечил выплату  $(S_N - K)^+$ .

Ключевыми здесь являются следующие два вопроса — какова «справедливая» цена  $C_N$  продажи-покупки опциона и как должен действовать продавец опциона, чтобы выполнить условия контракта.

В случае *стандартного опциона продавца* (put option, опцион-пут) *европейского типа* со временем исполнения  $N$  фиксируется величина  $K$ , по которой покупатель опциона имеет право *продать* (в момент  $N$ ) акции. Поэтому если истинная цена акции в момент  $N$  равна  $S_N$  и  $S_N < K$ , то ее продажа по цене  $K$  даст доход  $K - S_N$ . Чистый же доход, с учетом премии  $\mathbb{P}_N$  за покупку такого опциона, будет равен

$$(K - S_N) - \mathbb{P}_N.$$

Если же  $S_N > K$ , то предъявлять опцион к исполнению нет смысла, поскольку обусловленная контрактом продажная цена  $K$  меньше рыночной цены  $S_N$ .

Таким образом, чистый доход покупателя опциона-пут будет равен  $(K - S_N)^+ - \mathbb{P}_N$ .



Как и в случае опциона-колл, здесь также возникает вопрос о значении «справедливой» цены  $\mathbb{P}_N$ , которая бы устроила и продавца, и покупателя.

Рассмотрим иллюстративный пример на опцион-колл.

Пусть вы покупаете 10 контрактов на акции. Каждый контракт обычно заключается на 100 акций. Таким образом, реально речь идет о покупке 1000 акций. Предположим, что рыночная цена  $S_0$  каждой акции равна 30 (скажем, \$),  $K = 35$ ,  $N = 2$ , премия за все 10 контрактов равна 250 \$.

Пусть, далее, рыночная цена  $S_2$  в момент  $n = 2$  стала равной 40 \$. В этом случае опцион предъявляется к исполнению, и отвечающий этой ситуации чистый доход будет *положительным*:

$$(40 - 35) \times 1\,000 - 250 = 4\,750 \text{ ($)}.$$

Если же рыночная цена  $S_2 = 35,1$  \$, то, поскольку  $S_2 > K = 35$  \$, опцион снова будет предъявляться к исполнению, но соответствующий этой ситуации чистый доход будет *отрицательным*:

$$(35,1 - 35) \times 1\,000 - 250 = -150 \text{ ($)}.$$

Ясно, конечно, что доход будет *нулевым*, если

$$(S_2 - K) \cdot 1\,000 = 250 \text{ ($)},$$

т. е. тогда, когда  $S_2 = 35,25$  \$, поскольку  $K = 35$  \$.

Таким образом, всякий раз, когда цена акции  $S_2$  падает ниже отметки 35,25 \$, покупатель такого опциона-колл оказывается в проигрыше.

Предположим теперь, что рассматривается опцион-колл американского типа с возможными моментами предъявления опциона к исполнению  $n = 1$  и  $n = 2$ . Если вообразить, что в момент  $n = 1$  произошло резкое повышение цен акций, скажем,  $S_1 = 50$  \$, то покупатель этого опциона-колл имеет право предъявить его к исполнению в момент  $n = 1$ , получив большой чистый доход:

$$(50 - 35) \cdot 1\,000 - 250 = 15\,000 - 250 = 14\,750 \text{ ($)}.$$

Но понятно, однако, что премия за такие опционы должна быть не 250 \$, а значительно выше, поскольку «за большие возможности надо и больше платить». И действительно, *реальная* стоимость опционов американского типа выше, нежели опционов европейского типа. См. далее гл. VI и VIII.

Предыдущий пример рассматривался с позиции покупателя. Обратимся теперь к продавцу.

Для него, в принципе, имеются две возможности — это продавать акции, которыми он уже владеет (этот случай называется «writing covered stock»), или же продать акции, которыми он не владеет (этот случай называется «writing naked call»).

Последняя возможность является очень рискованной и может оказаться просто разорительной, поскольку если опцион предъявляется к исполнению

(когда  $S_2 > K$ ), то продавец должен реально купить акции, чтобы их продать покупателю по цене  $K$  для выполнения условий контракта опциона-колл.

Если, скажем,  $S_2 = 40$  \$, то надо будет заплатить 40 000 \$ за покупку 1 000 акций.

Премия же составляет всего лишь 250 \$, и, следовательно, суммарный убыток равен  $40\,000 - 35\,000 - 250 = 4\,750$  (\$).

Следует отметить, что в обоих рассматриваемых случаях чистый доход продавца не превышает 250 \$. И если он его действительно получает, то это чисто спекулятивный доход «на колебаниях цен акций», и к тому же в случае «writing naked stocks» способ его получения весьма рискованный. Тем самым можно сказать, что возможный здесь «доход продавца — это компенсация за его риск».

3. В реальном мире с целью редуцирования риска «большие» инвесторы, имеющие большие финансовые возможности, широко прибегают к методам *диверсификации, хеджирования*, инвестируя средства в самые *разнообразные* ценные бумаги (акции, облигации, опционы, ...), сырье и т. д. В этом отношении весьма интересна и поучительна книга Дж. Сороса [451], в которой он в ряде мест (см., к примеру, таблицы в [451, § 11, 13]) описывает по дням *эволюцию* структуры портфеля ценных бумаг (состоящего из разнообразных видов финансовых активов) руководимой им компании «Quantum Fund» (с 1968 по 1993 гг.). Так, например, 4 августа 1986 г. портфель включал в себя акции, облигации, товарно-сырьевую продукцию (см. [451, с. 243 в англ. изд. и с. 283 в русском изд.]).

Можно с уверенностью сказать, что с точки зрения финансовой инженерии книга Дж. Сороса является блестящим руководством для практической деятельности на рынке ценных бумаг.

4. Если говорить об **опционах покупателя** европейского типа, то, как мы уже видели, они характеризуются

- 1) временем исполнения  $N$ ,
- 2) функцией выплаты  $f_N$ .

- Для *стандартного опциона-колл*

$$f_N = (S_N - K)^+.$$

- Для *стандартного опциона-колл с последствием*

$$f_N = (S_N - K_N)^+,$$

где  $K_N = \min(S_0, S_1, \dots, S_N)$ .

- Для *арифметического азиатского опциона-колл*

$$f_N = (\bar{S}_N - K)^+, \quad \bar{S}_N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k.$$

Следует отметить, что величина  $K$ , входящая, скажем, в функцию выплаты  $f_N = (S_N - K)^+$  стандартного опциона и называемая *ценой исполнения* (strike price), обычно близка к значению  $S_0$ . Как правило, опционы с большой разницей в значениях  $S_0$  и  $K$  не торгуются.

В случае **опционов продавца**:

- для *стандартного опциона-пут*

$$f_N = (K - S_N)^+;$$

- для *стандартного опциона-пут с последствием*

$$f_N = (K_N - S_N)^+, \quad K_N = \max(S_0, S_1, \dots, S_N);$$

- для *арифметического азиатского опциона-пут*

$$f_N = (K - \bar{S}_N)^+, \quad \bar{S}_N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k.$$

Существует огромное количество опционов, многие из которых имеют весьма экзотические названия (см., например, [414] и далее § 4а, 4б гл. VIII). В § 4е гл. VI приведены также некоторые виды стратегий, основанные на опционах (комбинации, спрэды, сочетания).

Для покупателя опционы привлекательны тем, что они стоят не так дорого, хотя комиссионные могут быть и значительными. Чтобы дать представление о том, как рассчитывается *стоимость опционов* (иначе — *премия*, или невозвращаемая плата за их покупку), рассмотрим следующую несколько идеализированную ситуацию.

Пусть стоимость акций  $S_n$ ,  $0 \leq n \leq N$ , такова, что

$$S_n = S_0 + (\xi_1 + \dots + \xi_n),$$

где целое  $S_0 > N$  и  $(\xi_k)$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с вероятностью

$$P(\xi_k = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

Тогда заведомо  $S_n > 0$ ,  $0 \leq n \leq N$ .

Предположим, что в нашем распоряжении находится также банковский счет  $B = (B_n)_{0 \leq n \leq N}$  с  $B_n \equiv 1$ , т. е. с процентной ставкой  $r = 0$ . Будем рассматривать стандартный опцион-колл европейского типа с функцией выплаты  $f_N = (S_N - K)^+$ .

Мы хотим показать, что *рациональная* (иначе — *справедливая, взаимоприемлемая*) цена  $C_N$  за покупку такого опциона определяется следующей формулой:

$$C_N = E(S_N - K)^+,$$

т. е. величина премии равна значению среднего выигрыша покупателя.

Формальному определению цены  $\mathbb{C}_N$ , методам ее расчета в дальнейшем будет уделено много места (см. гл. V). В рассматриваемом же случае формулу  $\mathbb{C}_N = E(S_N - K)^+$  можно обосновать следующим образом.

Предположим, что назначенная продавцом цена  $\tilde{\mathbb{C}}_N > E(S_N - K)^+$  и покупатель опциона согласился его купить по этой цене. Покажем, что в этом случае продавец заведомо имеет *безрисковый доход*, равный  $\tilde{\mathbb{C}}_N - \mathbb{C}_N$ .

В самом деле, покупатель опциона понимает, что он должен соглашаться с той ценой, которая дает продавцу возможность выполнить условия, заложенные в контракт при покупке опциона. И понятно, конечно, что эта цена не может быть «малой». Но покупатель также понимает, что он не должен переплачивать, а должен платить ту *минимальную* цену, которая будет еще достаточна для того, чтобы продавец выполнил условия контракта.

Так что надо показать, что, получив премию  $\mathbb{C}_N = E(S_N - K)^+$ , продавец опциона может так ею распорядиться (под этим здесь понимается ее *инвестирование*), чтобы условия контракта были выполнены.

Для простоты положим  $N = 1$  и  $K = S_0$ . Тогда  $\mathbb{C}_1 = E \xi_1^+ = \frac{1}{2}$ . Покажем, как продавец (эмитент) опциона может распорядиться этой премией, с тем чтобы обеспечить выполнение условий контракта.

Представим  $\frac{1}{2}$  в виде

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{S_0}{2}\right) + \frac{S_0}{2} \quad (= \beta_0 \cdot 1 + \gamma_0 \cdot S_0).$$

Если обозначить  $X_0 = \beta_0 \cdot 1 + \gamma_0 \cdot S_0 (= \frac{1}{2})$ , то можно сказать, что полученная премия  $\frac{1}{2}$  образует (начальный) капитал эмитента, помещенный на банковский счет (величиной  $\beta_0$ ) и в акции (числом  $\gamma_0$ ). То, что в рассматриваемом случае  $\beta_0$  отрицательно, просто означает *заем* (взятие в долг) с банковского счета, который, разумеется, должен быть возвращен.

Пара  $(\beta_0, \gamma_0)$  образует, как говорят, *портфель ценных бумаг* продавца в момент  $n = 0$ .

Какой капитал этот портфель даст в момент  $n = 1$ ? Если этот капитал обозначить  $X_1$ , то мы получим

$$\begin{aligned} X_1 &= \beta_0 \cdot B_1 + \gamma_0 \cdot S_1 = \beta_0 + \gamma_0(S_0 + \xi_1) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{S_0}{2}\right) + \frac{1}{2}(S_0 + \xi_1) = \frac{1 + \xi_1}{2} = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_1 = 1, \\ 0, & \text{если } \xi_1 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку

$$\xi_1^+ = \frac{1 + \xi_1}{2},$$

мы видим, что

$$X_1 = f_1 \quad (= (S_1 - K)^+).$$

Иначе говоря, портфель  $(\beta_0, \gamma_0)$  обеспечивает получение капитала  $X_1$ , в точности равного функции выплаты  $f_1$ , что дает продавцу возможность выполнить условия контракта и при этом возвратить взятый долг.

Действительно, если  $\xi_1 = 1$ , то акции дадут  $\frac{1}{2}(S_0 + 1)$ . Поскольку

$$\frac{1}{2}(S_0 + 1) = 1 + \left(\frac{S_0}{2} - \frac{1}{2}\right),$$

мы видим, что средств, полученных от акций, достаточно, чтобы вернуть долг  $\left(\frac{S_0}{2} - \frac{1}{2}\right)$  и выплатить покупателю  $(S_1 - K)^+ = (S_1 - S_0)^+ = \xi_1^+ = 1$ .

Если же  $\xi_1 = -1$ , то акции дадут  $\frac{1}{2}(S_0 - 1)$ . В этом случае покупатель не предъявляет опцион к исполнению (ведь  $S_1 = S_0 + \xi_1 = S_0 - 1 < S_0 = K$ ), и, следовательно, все, что должен выплатить эмитент, — это вернуть долг, который равен  $\frac{1}{2}(S_0 - 1)$ , т. е. в точности то, что получено в этом случае ( $\xi_1 = -1$ ) от акций.

Итак, если назначенная продавцом цена опциона есть  $\tilde{C}_1 > C_1 = E(S_1 - K)^+$ , то он будет иметь безрисковый доход  $\tilde{C}_1 - C_1$ , выполняя при этом все условия опционного контракта.

Покажем теперь, что назначение премии  $\tilde{C}_1 < C_1 (= \frac{1}{2})$  не даст эмитенту возможности выполнить (без потерь) условия опционных выплат.

Действительно, при выборе портфеля  $(\beta_0, \gamma_0)$  получаем

$$X_0 = \beta_0 + \gamma_0 S_0$$

и

$$X_1 = \beta_0 + \gamma_0(S_0 + \xi_1) = X_0 + \gamma_0 \xi_1.$$

Если  $\xi_1 = 1$ , то по условиям опциона эмитенту надо выплатить покупателю 1 и еще  $-\beta_0$ , т. е. в этом случае от акции надо иметь

$$\gamma_0(S_0 + 1) = 1 - \beta_0.$$

В случае же  $\xi_1 = -1$  от акции надо иметь

$$\gamma_0(S_0 - 1) = -\beta_0.$$

Таким образом, мы должны иметь

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}, \quad \beta_0 = \frac{1}{2} - \frac{S_0}{2}.$$

Но при этих значениях  $\beta_0 + \gamma_0 S_0 = \frac{1}{2}$ , и, следовательно, равенство  $X_0 = \beta_0 + \gamma_0 S_0$  с  $X_0 < \frac{1}{2}$  невозможно.

Итак, формула  $C_N = E(S_N - K)^+$  установлена для  $N = 1$  и  $S_0 = K$ . В общем случае она может быть доказана с помощью аналогичных аргументов. Мы не будем сейчас это делать, поскольку далее (в гл. V) эта формула будет следовать из общих рассуждений.

Отметим, что если  $S_0 = K$ , то

$$\mathbb{C}_N = \mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_N)^+,$$

и из центральной предельной теоремы нетрудно заключить, что

$$\mathbb{C}_N \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \sqrt{N}.$$

Таким образом, с ростом времени  $N$  стоимость опциона растет как  $\sqrt{N}$ . Этот результат полностью согласуется с тем, который получается (при  $S_0 = K$ ) из формулы Башелье для  $\mathbb{C}_T$ , приведенной в конце § 1b, согласно которой

$$\mathbb{C}_T = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \sqrt{T}$$

(при  $\sigma = 1$  и  $S_0 = K$ ).

5. Как уже отмечалось, торгуемые опционы весьма разнообразны.

Например, в США весьма распространены *опционы на индексы*, к числу которых относятся опционы на индексы S&P 100 и S&P 500, торгуемые на СВОЕ. (Опционы на S&P 100 являются опционами американского типа, а на S&P 500 — европейского.) В силу большой волатильности срок действия этих опционов весьма короток.

В случае *опционов на фьючерсы* роль цен  $(S_n)$  играют фьючерсные цены  $(\Phi_n)$ . В случае *опционов на облигации* ценами  $(S_t)$  служат цены облигации  $P(t, T)$ . По поводу других видов опционов см. § 4а гл. VIII.

## 2. Финансовый рынок в условиях неопределенности. Классические теории динамики финансовых индексов, их критика и пересмотр. Неоклассические теории

Вот лишь некоторые из вопросов, которые естественно возникают при соприкосновении с теорией и практикой финансового рынка:

- как функционирует финансовый рынок в условиях неопределенности,
- как складываются и описываются цены и какова их динамика во времени,
- на какие концепции и теории следует опираться при расчетах,
- предсказуемо ли будущее движение цен,
- каков риск тех или иных финансовых инструментов.

При описании динамики цен и расчетах, например, стоимостей производных финансовых инструментов мы будем придерживаться той точки зрения, что рынок ведет себя так, что на нем отсутствуют *арбитражные возможности*. С математической точки зрения эта экономически понятная концепция приводит, по существу, к тому, что существует так называемая *мартингальная (риск-нейтральная)* вероятностная мера, относительно которой (нормированные) цены оказываются *мартингалами*, что дает, в свою очередь, возможность использования хорошо развитого аппарата «стохастического исчисления» для изучения их эволюции и для разного рода расчетов.

Не преследуя здесь цель подробного изложения имеющихся теорий и разных концепций *финансового рынка*, мы остановимся далее лишь на тех из них, которые ближе всего по духу к изложению, принятому в данной книге, где основной (вероятностный) акцент сделан на «стохастическое исчисление» и «статистику» в финансовой математике и финансовой инженерии. (Укажем на некоторые учебные пособия и монографии: [79], [83], [112], [117], [151], [240], [268], [284], [332]–[334], [387], [460], в которых можно найти отражение самых разнообразных аспектов финансового рынка — экономические идеи, концепции, теории в условиях определенности и неопределенности, модели равновесия, оптимальность, полезность, портфель, риск, финансовые решения, дивиденды, производные ценные бумаги и т. д.)

Вкратце отметим, что в двадцатых годах прошлого столетия, к которым относят зарождение *теории финансов*, основной ее интерес был связан, главным образом, с вопросами администрирования и увеличения фондов, а ее «высшая математика» сводилась, в сущности, к подсчету сложных процентов.

Последующее развитие шло в двух направлениях — в предположении *полной определенности* (в ценах, спросе, предложении и т. д.) и предположении условий *неопределенности*.

В первом случае определяющую роль сыграли работы И. Фишера (I. Fisher [159]) и Ф. Модильяни и М. Миллера (F. Modigliani, M. Miller [356], [350]), рассматривавших вопросы *оптимальных* решений для индивидуумов и фирм соответственно. С математической точки зрения дело сводилось к задачам максимизации функций многих переменных при наличии ограничений.

Во втором случае нужно прежде всего отметить работу Г. Марковитца (H. Markovitz [332]) 1952 г. и работу М. Кендалла (M. Kendall [269]) 1953 г.

Работа Г. Марковитца, заложившая основы *теории портфеля* (*portfolio ценных бумаг*), была посвящена проблеме *оптимизации инвестиционных решений в условиях неопределенности*. Соответствующий вероятностный анализ, именуемый *mean-variance analysis* (средне-дисперсионный анализ), выявил исключительно важную роль *ковариаций* между ценами как того ключевого ингредиента, от которого зависит степень (несистематического) *риска* создаваемого портфеля (набора) ценных бумаг. Именно в работе Г. Марковитца была в полной мере осознана роль идеи *диверсификации* при составлении портфеля для редуцирования несистематического риска, оказавшей свое влияние на создание в 1964 году В. Шарпом (W. Sharpe [433]) и в 1976 году С. Россом (S. Ross [412]) двух *классических теорий*:

- *CAPM — Capital Asset Pricing Model* (модель ценообразования основных фондов) [433],
- *APT — Arbitrage Pricing Theory* (арбитражная теория расчетов) [412],

дающих объяснение того, как складывается и чем определяется доход той или иной ценной бумаги (скажем, акции) в зависимости от состояния «глобального рынка», на котором эта ценная бумага функционирует (*CAPM-теория*), от каких факторов этот доход зависит (*APT-теория*) и из каких концепций следует исходить при финансовых расчетах. Основные положения теории Г. Марковитца, теорий *CAPM* и *APT* будут изложены ниже в § 2b—2d.

Уже из этого краткого изложения становится понятным, что и теория Марковитца, и теории *CAPM*, *APT* относятся к проблематике *редуцирования риска* на финансовом рынке.

Говоря о *риске*<sup>3</sup>, следует иметь в виду, что в финансовой теории обычно различают два его вида:

3 О риске вообще, в том числе и в страховании, см. далее § 3а, 3б.



- *несистематический риск*, который можно редуцировать диверсификацией (diversifiable risk, unsystematic risk, residual risk, specific, idiosyncratic), т. е. тот, на который инвестор может повлиять своими действиями,
- *систематический*, или собственно рыночный *риск* (market risk, undiversifiable risk, systematic risk).

Примером систематического риска может служить риск, связанный, скажем, со стохастической природой процентных ставок, индексов акций, и на который («малый») инвестор не может оказать влияния своими действиями. Это не означает, конечно, что с этим риском нельзя «бороться». По существу, именно с целью *контролирования* возможного систематического риска, с целью выработки рекомендаций для рациональных финансовых решений, с целью защиты от больших и катастрофических рисков (как, например, в страховании) и создаются, притом довольно сложные, системы по сбору статистических данных, их обработке, предсказанию возможного движения цен на рынке. Именно этой цели служат производные финансовые инструменты, такие как фьючерсные контракты, опционы, комбинации, спреды, сочетания и т. д. Именно этой цели служит и развитая для них техника *хеджирования* (более сложная, нежели диверсификация), учитывающая вероятностные изменения в будущем движении цен и преследующая цель редуцировать риск от возможных неблагоприятных последствий этих изменений. («Хеджирование» и соответствующая теория расчетов подробно рассматриваются в шестой главе.)

Работа М. Кендалла 1953 года [269], доложенная им на заседании Королевского статистического общества (Royal Statistical Society) Великобритании, относится к другому, в определенном смысле более начальному вопросу о том, *как ведут себя цены на рынке*, какими стохастическими процессами описывается динамика этих цен. Эта работа важна тем, что поставленные в ней вопросы привели, в конечном счете, как к созданию *теории эффективного рынка* (Efficient Capital Market Theory — ECM-theory), излагаемой в следующем параграфе, так и к созданию разнообразных ее уточнений и обобщений.

## § 2а. Гипотеза случайного блуждания и концепция эффективного рынка

1. В тридцатых годах XX в. появилось несколько работ, в которых проводился эмпирический анализ различных финансовых характеристик с целью получения ответа на сакраментальный вопрос: *предсказуемо ли движение цен, стоимостей* и т. п.? Среди этих работ, написанных статистиками, надо назвать прежде всего работы А. Каулеса (А. Cowles [84], 1933 г., и впоследствии [85], 1944 г.), Г. Воркинга (Н. Working [480], 1934 г.), А. Каулеса и Г. Джонса (А. Cowles, Н. Jones [86], 1937 г.). А. Каулес оперировал с данными рынка акций, Г. Воркинг — с ценами товаров.

Хотя эти работы содержали богатый статистический материал и интересные неожиданные выводы о том, что, скорее всего, приращения  $h_k = \ln(S_k/S_{k-1})$  логарифмов цен  $S_k$ ,  $k \geq 1$ , являются независимыми, ни экономисты, ни практики не обратили на них должного внимания.

Как отмечается в работе [35, с. 93], происходило это, видимо, потому, что, с одной стороны, экономисты рассматривали вопросы динамики цен как нечто второстепенное (sideshow) в экономической системе, а с другой стороны, не так много экономистов в то время имело соответствующую математическую подготовку и владело статистической техникой.

Что касается практической стороны дела, то выводы этих работ о том, что последовательность  $(H_k)_{k \geq 1}$ ,  $H_k = h_1 + \dots + h_k$ , носит характер «случайного блуждания» (иначе говоря, есть сумма независимых случайных величин), не согласовывались с бытующим среди практиков мнением, что цены следуют некоторым ритмам, циклам, трендам, ..., выявление которых вроде бы только и могло дать основу для предсказания движения цен.

После этих работ и до 1953 года, когда появилась упомянутая выше работа М. Кендалла [269], с которой начался современный период исследований эволюции финансовых характеристик, никаких принципиальных работ на эту тему, по существу, не было.

Отправной точкой в работе М. Кендалла послужило желание выявить цикличность в поведении цен акций (stocks) и товаров (commodities). Анализируя реальные статистические данные (недельные данные для девятнадцати акций в период с 1928 по 1938 год, месячные средние цены на пшеницу на Чикагском рынке с 1883 по 1934 годы и на хлопок на Нью-Йоркской торговой бирже (New York Mercantile Exchange) с 1816 по 1951 годы), он, к своему удивлению, не смог обнаружить ни ритмов, ни трендов, ни циклов и, более того, пришел к заключению, что ряд наблюдаемых данных выглядит так, как если бы «...the Demon of Chance drew a random number ... and added it to the current price to determine the next ... price»<sup>4</sup>. Иначе говоря, представляется, что логарифмы цен  $S = (S_n)$  ведут себя как случайное блуждание, т. е. если  $h_n = \ln(S_n/S_{n-1})$ , то

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \quad n \geq 1,$$

где  $H_n$  есть сумма независимых случайных величин  $h_1, \dots, h_n$ .

Здесь уместно опять напомнить (ср. с § 1b), что на самом деле идея использования «случайного блуждания» для описания эволюции цен была впервые (до упомянутых работ А. Каулеса и Г. Воркинга) высказана Л. Башелье в его диссертации 1900 года «Théorie de la spéculation» [12]. Башелье считал, что цены  $S^{(\Delta)} = (S_{k\Delta}^{(\Delta)})$  (а не логарифмы цен, между прочим) меняют свои значения в моменты времени  $\Delta, 2\Delta, \dots$ , причем так, что

$$S_{k\Delta}^{(\Delta)} = S_0 + \xi_\Delta + \xi_{2\Delta} + \dots + \xi_{k\Delta},$$

4 «...Демон Случая извлекал случайным образом число ... и добавлял его к текущему значению для определения ... цены в следующий момент».

где  $(\xi_{i\Delta})$  — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения  $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$  с вероятностями  $\frac{1}{2}$ . Тем самым

$$E S_{k\Delta}^{(\Delta)} = S_0, \quad D S_{k\Delta}^{(\Delta)} = \sigma \cdot (k\Delta).$$

Как уже отмечалось выше, полагая  $k = \left[ \frac{t}{\Delta} \right]$ ,  $t > 0$ , Л. Башелье формальным предельным переходом получает, что предельный процесс  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ , где  $S_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_{[t/\Delta]\Delta}^{(\Delta)}$  (предел должен пониматься в некотором подходящем вероятностном смысле), имеет вид (см. п. 6, § 1b)

$$S_t = S_0 + \sigma W_t,$$

где  $W = (W_t)$  есть то, что теперь принято называть *стандартным* ( $W_0 = 0$ ,  $E W_t = 0$ ,  $E W_t^2 = t$ ) *броуновским движением*, или *винеровским процессом*, т. е. случайным процессом с независимыми гауссовскими (нормальными) приращениями и непрерывными траекториями. Подробнее см. § 3а, 3б в гл. III.

2. После работы М. Кендалла резко увеличился интерес к более углубленному изучению динамики финансовых показателей и построению различных вероятностных моделей, объясняющих наблюдаемые эффекты, такие как, например, кластерность. Отметим в этой связи две работы конца пятидесятых годов XX в. — работу Г. Робертса (H. Roberts [405], 1959 г.) и М. Осборна (M. F. M. Osborne [371], 1959 г.).

Работа Г. Робертса, следующая идеям Г. Воркингса и М. Кендалла, была адресована непосредственно практикам финансового бизнеса и содержала эвристические аргументы в пользу *гипотезы случайного блуждания*. Работа астрофизика М. Осборна, названная «Brownian Motion in the Stock Market», возникла, по его же словам (см. [35, с. 103]), как желание апробировать его физическую и статистическую технику на реальных данных, каковыми являлись цены акций. Не будучи знакомым с работами Л. Башелье, Г. Воркингса и М. Кендалла, М. Осборн пришел, по существу, к тем же самым выводам, отмечая, правда (и это оказалось важным для дальнейшего), что не сами цены  $S_t$  (с которыми оперировал Л. Башелье), а их логарифмы подчиняются броуновскому движению (со сносом). Эта же мысль получила затем свое развитие в работе П. Самуэльсона (P. Samuelson [420]), введшего в финансовую теорию и практику *геометрическое* (или, как он говорил, *экономическое*) *броуновское движение*

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}, \quad t \geq 0,$$

где  $W = (W_t)$  — стандартное броуновское движение.

3. Нельзя сказать, что *гипотеза случайного блуждания* для описания эволюции цен была сразу принята экономистами, но именно она-то и привела к классической концепции *рационально функционирующего* (или, как обычно принято говорить, *эффективного*) *рынка*, основная начальная цель которой

в том и состояла, чтобы найти аргументацию в защиту применения *вероятностной идеологии*, и, в ее рамках, к естественности *гипотезы случайного блуждания* и более общей *гипотезы мартингальности*.

С *наглядной точки зрения* «эффективность» здесь означает то, что рынок *рационально* реагирует на обновление «информации» — под этим подразумевается, что на рынке:

- 1) *мгновенно производится коррекция цен*, которые устанавливаются так, что оказываются в состоянии «равновесия», становятся «справедливыми», не оставляя места участникам рынка для арбитражных возможностей — получения прибыли за счет разницы в ценах;
- 2) *участники рынка* (трейдеры, инвесторы и т. д.) *однородно* интерпретируют поступающую информацию, при этом *мгновенно корректируют свои решения* при обновлении этой информации;
- 3) *участники рынка однородны* в своих целевых установках, их действия носят «коллективно-рациональный» характер.

С *формальной* же точки зрения понятие эффективности должно рассматриваться в зависимости от характера *информации*, получаемой рынком и его участниками.

Принято различать следующие три вида доступной информации:

- информация, содержащаяся в *прошлых* значениях цен;
- информация, содержащаяся не только в прошлых значениях цен, но и в *публично доступных источниках* (газеты, бюллетени, телевидение, ...);
- *вся мыслимая* информация.

Для уточнения используемого здесь понятия «информация» будем исходить из того, что «неопределенность», возникающая на рынке, может быть описана (несколько подробнее об этом см. § 1а гл. II) как «случайность» в рамках *некоторого вероятностного пространства*  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Как обычно, здесь

$\Omega = \{\omega\}$  — *пространство исходов*, или *пространство элементарных событий*,

$\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ ,

$P$  — *вероятностная мера* на  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Полезно дополнить вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  *поток*ом (фильтрацией)  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , состоящим из таких  $\sigma$ -подалгебр  $\mathcal{F}_n$ , что  $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ , если  $m \leq n$ .

События из  $\mathcal{F}_n$  мы интерпретируем как «*информацию*», доступную наблюдению до момента времени  $n$  (включительно).

**4. Замечание.** В связи с понятием «события», наблюдаемого до момента времени  $n$  и формально являющегося множеством из  $\mathcal{F}_n$ , отметим следующее обстоятельство.

В экспериментальной деятельности (в том числе и при наблюдении за ценами) мы обычно интересуемся не столько тем, какой *конкретный* исход имеет место, а тем, принадлежит ли исход тому или иному *подмножеству* всех исходов.

Те множества  $A \subseteq \Omega$ , для которых по условиям эксперимента (по состоянию рынка, применительно к рассматриваемой ситуации) возможен ответ одного из двух типов: «исход  $\omega$  принадлежит  $A$ » или «исход  $\omega$  не принадлежит  $A$ », объявляются (наблюдаемыми) событиями. Так, если  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , где значение  $\omega_i = +1$  интерпретируется как «поднятие» цены в момент  $i$ , а  $\omega_i = -1$  — как «опускание» цены в этот момент, то пространство всех мыслимых исходов (в этой трехшаговой модели) состоит из восьми точек:

$$\Omega = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, +1), \dots, (+1, +1, +1)\}.$$

Если у нас имеется возможность регистрации *всех* значений  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , то, скажем, множество

$$A = \{(-1, +1, -1), (+1, -1, +1)\}$$

будет «событием», поскольку, имея у  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  все три зарегистрированных значения  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , мы можем достоверным образом сказать « $\omega \in A$ » или « $\omega \notin A$ ».

Если же, однако, мы не имеем возможности фиксировать в момент  $i = 2$  результат  $\omega_2$ , т. е. нет «информации» об этом значении, то тогда множество  $A$  уже не будет «событием», поскольку мы, имея только  $\omega_1$  и  $\omega_3$ , не можем ответить на вопрос о том, будет ли  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  принадлежать или не принадлежать множеству  $A$ .

5. Пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$  с выделенными потоками  $\sigma$ -алгебр  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$  в стохастическом исчислении принято называть *фильтрованными* вероятностными пространствами. В контексте финансовой математики мы будем называть  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$  также *поток информации*. С помощью этого понятия разные формы *эффективности* рынков можно определить так.

Пусть на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  выделены три потока  $\sigma$ -алгебр

$$\mathbb{F}^1 = (\mathcal{F}_n^1), \quad \mathbb{F}^2 = (\mathcal{F}_n^2), \quad \mathbb{F}^3 = (\mathcal{F}_n^3),$$

где  $\mathcal{F}_n^1 \subseteq \mathcal{F}_n^2 \subseteq \mathcal{F}_n^3$  и каждая из  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_n^i$  интерпретируется как информация вида  $(i)$  в момент времени  $n$ .

Следуя Е. Фама (Е. Fama [150], 1965 г.), будем говорить, что рынок является *слабо эффективным* (*weakly efficient*), если каждая из цен  $S = (S_n)$  (финансового инструмента на этом рынке) такова, что для всех них найдутся некоторая нормирующая цена  $B = (B_n)_{n \geq 0}$  (обычно это безрисковый банковский счет) и вероятностная мера  $\hat{\mathbb{P}}$ , локально эквивалентная  $\mathbb{P}$  (т. е. такая, что ее сужения  $\hat{\mathbb{P}}_n = \hat{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_n^1}$  на  $\mathcal{F}_n^1$  эквивалентны  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}$  для каждого  $n \geq 0$ ), для

которых

$$\frac{S}{B} = \left( \frac{S_n}{B_n} \right)_{n \geq 0}$$

являются  $\hat{P}$ -мартингалами:  $\frac{S_n}{B_n} - \mathcal{F}_n^1$ -измеримы и

$$\widehat{E} \left| \frac{S_n}{B_n} \right| < \infty, \quad \widehat{E} \left( \frac{S_{n+1}}{B_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n \right) = \frac{S_n}{B_n}, \quad n \geq 0.$$

В случае «мартингалности»  $S/B$  относительно потока информации  $\mathbb{F}^3 = (\mathcal{F}_n^3)$  говорят о *строгой эффективности* рынка (strongly efficient market), а в случае потока  $\mathbb{F}^2 = (\mathcal{F}_n^2)$  — о *полустрогой эффективности* (semi-strongly efficient market).

Для простоты последующего в этом пункте изложения будем считать, что  $B_n \equiv 1$  и  $\hat{P} = P$ .

Прежде чем обсуждать данные определения, заметим, что между классами мартингалов  $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M}(\mathbb{F}^1)$ ,  $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}(\mathbb{F}^2)$  и  $\mathcal{M}^3 = \mathcal{M}(\mathbb{F}^3)$  относительно потоков  $\mathbb{F}^1$ ,  $\mathbb{F}^2$  и  $\mathbb{F}^3$  соответственно имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{M}^3 \subseteq \mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{M}^1.$$

Действительно, если цена  $S = (S_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{M}^2$ , то это означает, что  $S_n$  являются  $\mathcal{F}_n^2$ -измеримыми и  $E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^2) = S_n$ . Отсюда, используя «телескопическое» свойство условных математических ожиданий

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^1) = E(E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^2) \mid \mathcal{F}_n^1)$$

и учитывая, что  $S_n$  являются  $\mathcal{F}_n^1$ -измеримыми (напомним, что  $\mathcal{F}_n^1$  порождается значениями всех цен до момента  $n$ , включая и значения  $S_k, k \leq n$ ), находим, что  $E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^1) = S_n$ , т. е.  $S \in \mathcal{M}^1$ .

Если  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательность *независимых* случайных величин,  $E|\xi_k| < \infty$ ,  $E\xi_k = 0$ ,  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\mathcal{F}_0^\xi = \{\emptyset, \Omega\}$  и  $\mathcal{F}_n^\xi \subseteq \mathcal{F}_n^1$ , то последовательность  $S = (S_n)_{n \geq 0}$ ,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $S_0 = 0$ , будет, очевидно, мартингалом относительно  $\mathcal{F}^\xi = (\mathcal{F}_n^\xi)_{n \geq 0}$  и

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^i) = S_n + E(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда ясно, что последовательность  $S = (S_n)_{n \geq 0}$  является мартингалом класса  $\mathcal{M}^i$ , если для каждого  $n$  величины  $\xi_{n+1}$  не зависят от  $\mathcal{F}_n^i$  (в том смысле, что для любого борелевского множества  $A$  событие  $\{\xi_{n+1} \in A\}$  не зависит от любого из событий из  $\mathcal{F}_n^i$ ). Так что если  $\xi_{n+1}$  рассматривается как «полностью новая информация» по отношению к  $\mathcal{F}_n^3$ , то  $S$  будет принадлежать классу  $\mathcal{M}^3$ .

Для дальнейшего важно отметить, что если  $X = (X_n)$  является мартингалом относительно потока  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ ,  $X_n = x_1 + \dots + x_n$ ,  $x_0 = 0$ , то  $x = (x_n)$

является *мартингал-разностью*:

$$\begin{aligned}x_n &\text{ являются } \mathcal{F}_n\text{-измеримыми,} \\ E |x_n| &< \infty, \\ E(x_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= 0.\end{aligned}$$

Из последнего свойства следует, что в предположении, что  $E |x_n|^2 < \infty$ ,  $n \geq 1$ , для любых  $n \geq 0$  и  $k \geq 1$  выполняется равенство

$$E x_n x_{n+k} = 0,$$

т. е. величины  $x = (x_n)$  являются *некоррелированными*. Иначе говоря, *квадратично интегрируемые* мартингалы принадлежат классу случайных последовательностей с *ортogonalными приращениями*:

$$E \Delta X_n \Delta X_{n+k} = 0,$$

где  $\Delta X_n \equiv X_n - X_{n-1} = x_n$ ,  $\Delta X_{n+k} = x_{n+k}$ . Обозначая класс таких последовательностей через  $OI_2$  (orthogonal increments, нижний индекс «2» отвечает «квадратичной интегрируемости»), получаем

$$\mathcal{M}_2^3 \subseteq \mathcal{M}_2^3 \subseteq \mathcal{M}_2^1 \subseteq OI_2.$$

Из всего сказанного следует, что, в конечном счете, *эффективность* рынка надо понимать просто как *мартингалность* цен его активов. Частным случаем такого рынка является рынок, где цены ведут себя как *случайное блуждание*<sup>5</sup>.

6. Почему гипотеза «мартингалности», обобщающая гипотезу «случайного блуждания» и заложенная в концепцию «эффективного рынка», является вполне естественной? На этот счет имеется несколько причин, и, пожалуй, наилучшее объяснение дается в рамках *теории безарбитражных рынков*, в которой *эффективность* рынка, или, более определенно, его *рациональность*, просто ассоциируется с отсутствием арбитражных возможностей, что, как будет видно из дальнейшего, самым непосредственным образом приводит к появлению мартингалов. (См. об этом подробнее далее в § 2а гл. V.)

Сейчас же, чтобы дать некоторое представление о том, как в рассматриваемом контексте возникают мартингалы, приведем следующие элементарные рассуждения.

Пусть  $S = (S_n)_{n \geq 1}$ ,  $S_n$  — цена, скажем, акции в момент времени  $n$ . Обозначим через

$$\rho_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad \Delta S_n \equiv S_n - S_{n-1},$$

5 В вероятностно-статистической литературе «случайным блужданием» обычно принято называть блуждание, описываемое суммой *независимых* случайных величин. В экономической же литературе этот термин иногда используется и в другом смысле — просто тогда, когда надо подчеркнуть *случайный* характер, скажем, движения цен.

относительное изменение цен, называемое также *процентной ставкой*, и предположим, что рынок функционирует так, что относительно потока доступной информации  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$  величины  $S_n$  являются  $\mathcal{F}_n$ -измеримыми и (Р-п. н.)

$$\mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) = r, \quad (1)$$

где  $r$  — некоторая константа. Из двух последних формул находим, что

$$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1} \quad (2)$$

и (в предположении, что  $1 + r \neq 0$ )

$$S_{n-1} = \frac{\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_{n-1})}{1 + r}. \quad (3)$$

Мы предположили, что цены акций  $S = (S_n)_{n \geq 0}$  эволюционируют так, что

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Будем считать, что наряду с акцией имеется также *банковский счет*  $B = (B_n)_{n \geq 0}$ , удовлетворяющий условию

$$\Delta B_n = r B_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (4)$$

где  $r$  — процентная ставка,  $r \geq 0$ ,  $B_0 > 0$ .

Поскольку  $B_n = B_0(1 + r)^n$ , то из формулы (3) найдем, что

$$\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{B_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right).$$

А это и означает, что последовательность  $(S_n/B_n)_{n \geq 1}$  относительно потока  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  является *мартингалом*.

Сделанное выше допущение  $\mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) = r$  (Р-п. н.) представляется с «экономической точки зрения» весьма естественным — если бы оно нарушалось, скажем, в том смысле, что  $\mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) > r$  (Р-п. н.) или  $\mathbb{E}(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) < r$  (Р-п. н.),  $n \geq 1$ , то инвесторы быстро бы обнаружили, что более выгодно только инвестирование в акции в первом случае и только размещение средств на банковском счете во втором случае. По-другому можно сказать, что в том случае, когда одна ценная бумага «доминирует» над другой, то менее ценная бумага должна быстро исчезнуть с рынка, что и отвечает представлению о «правильно», «эффективно» устроенном рынке.

7. Теперь несколько усложним рассмотренную модель (2) эволюции цен акций.

Если считать, что в момент  $n - 1$  вы *покупаете* акцию стоимостью  $S_{n-1}$  и в момент  $n$  ее *продаете* (по цене  $S_n$ ), то ваш (абсолютный) «доход», который может быть как положительным, так и отрицательным, будет равен  $\Delta S_n \equiv S_n - S_{n-1}$ . Конечно, более реалистично измерять «доход» не в абсолютных величинах  $\Delta S_n$ , а (как это уже было сделано) в относительных  $(\Delta S_n/S_{n-1})$ , т. е. соизмерять  $\Delta S_n$  с затратами  $S_{n-1}$  на покупку акции.



Если, скажем,  $S_{n-1} = 20$ , а  $S_n = 29$ , то  $\Delta S_n = 9$ , и это по отношению к 20 не так уж и мало. Но если  $S_{n-1} = 200$ , а  $S_n = 209$ , то приращение  $\Delta S_n = 9$ , и по отношению к 200 — это не так уж и много.

Тем самым в первом случае  $\rho_n = 9/20$  ( $= 45\%$ ), а во втором  $\rho_n = 9/200$  ( $= 4,5\%$ ).

Для простоты выражений эту величину *относительного дохода* (наряду с уже использованным наименованием «процентная ставка» или «случайная процентная ставка») часто называют *возвратом* (return) или *коэффициентом прироста*. Этой терминологии мы также будем в дальнейшем придерживаться.

В соответствии с данной интерпретацией приращения  $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$  как дохода от покупки (в момент  $n - 1$ ) и продажи (в момент  $n$ ) предположим также, что есть *дополнительный источник дохода*, например дивиденды от обладания акциями, которые в момент  $n$  будем считать  $\mathcal{F}_n$ -измеримыми и равными  $\delta_n$ .

Тогда суммарный «абсолютный» доход будет равен  $\Delta S_n + \delta_n$ , а относительная величина дохода равна

$$\rho_n = \frac{\Delta S_n + \delta_n}{S_{n-1}}. \quad (5)$$

Интересно, конечно, было бы получить некоторые представления о том, как могут вести себя цены ( $S_n$ ) «глобально», если их «локальное» поведение описывается моделью (5). Понятно, что для решения этого вопроса надо сделать определенные допущения относительно величин  $(\rho_n)$  и  $(\delta_n)$ .

Имея это в виду, допустим, например, что при всех  $n \geq 1$

$$E(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) \equiv r \geq 0.$$

Тогда из формулы (5), предполагая, что  $E|S_n| < \infty$ ,  $E|\delta_n| < \infty$ , и беря условное математическое ожидание  $E(\cdot | \mathcal{F}_{n-1})$ , находим, что

$$S_{n-1} = \frac{1}{1+r} E(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) + \frac{1}{1+r} E(\delta_n | \mathcal{F}_{n-1}). \quad (6)$$

Аналогичным образом,

$$S_n = \frac{1}{1+r} E(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) + \frac{1}{1+r} E(\delta_{n+1} | \mathcal{F}_n),$$

что с учетом формулы (6) приводит к равенству

$$S_{n-1} = \frac{1}{(1+r)^2} E(S_{n+1} | \mathcal{F}_{n-1}) + \frac{1}{(1+r)^2} E(\delta_{n+1} | \mathcal{F}_{n-1}) + \frac{1}{1+r} E(\delta_n | \mathcal{F}_{n-1}).$$

Продолжая эту процедуру, находим, что для любого  $k \geq 1$  и любого  $n \geq 1$  выполняется равенство

$$S_n = \frac{1}{(1+r)^k} E(S_{n+k} | \mathcal{F}_n) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{(1+r)^i} E(\delta_{n+i} | \mathcal{F}_n). \quad (7)$$

Отсюда становится понятным, что всякое *ограниченное* ( $|S_n| \leq \text{Const}$ ,  $n \geq 1$ ) решение уравнений (6) (для  $n \geq 1$ ) имеет (в предположении, что  $|E(\delta_{n+i} | \mathcal{F}_n)| \leq \text{Const}$ ,  $n \geq 0$ ,  $i \geq 1$ ) следующий вид:

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} E(\delta_{n+i} | \mathcal{F}_n). \quad (8)$$

Это решение в экономической литературе именуют *фундаментальным решением* (market fundamental solution; см., например, [211]). В том частном случае, когда дивиденды не меняются со временем ( $\delta_n \equiv \delta = \text{Const}$ ) и  $E(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) \equiv r > 0$ , из формулы (8) следует, что (ограниченные) цены  $S_n$ ,  $n \geq 1$ , также не могут меняться со временем:

$$S_n \equiv \frac{\delta}{r}, \quad n \geq 1.$$

8. Класс мартингалов достаточно широк. Он включает, например, и рассмотренное выше «случайное блуждание». Далее, как видно из свойства мартингалности

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n,$$

самое большее, что можно сказать о *прогнозе* приращения  $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$  на основании «информации»  $\mathcal{F}_n$ , — это только то, что *в среднем* (относительно  $\mathcal{F}_n$ ) *это приращение равно нулю*. Это обстоятельство отвечает интуитивному представлению о том, что на «справедливом», «честно организованном» рынке не может быть (с положительной вероятностью) выигрыша у одних и проигрыша у других. На таком рынке условный выигрыш  $E(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1})$  должен быть равен нулю. Именно в этой связи Л. Башелье писал (в английском переводе): «The mathematical expectation of the speculator is zero». (Напомним, что в игровой практике система игры, заключающаяся в удвоении ставки при проигрыше и прекращении игры при первом выигрыше, называется *мартингалом* и для нее условный выигрыш  $E(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ ; подробнее см. [439, гл. VII, § 1].)

Наконец, отметим, что эмпирический анализ эволюции цен показывает (см. § 3с гл. IV), что автокорреляция величин

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

близка к нулю, что можно рассматривать как подтверждение, хотя и косвенное, гипотезы мартингалности.

9. Гипотеза эффективного рынка дала толчок к появлению новых финансовых инструментов, устраивающих «осторожных» инвесторов, которые являются приверженцами идей диверсификации (см. § 2b).

К числу таких новых финансовых инструментов надо отнести, в первую очередь, одну из разновидностей «фондов взаимных вложений» («Mutual Funds») — так называемые «Index Funds». Специфика этих фондов состоит в

том, что они инвестируют средства (своих клиентов) в акции тех компаний, которые указаны в том или ином «индексе» акций.

Одним из первых таких фондов был (и есть) «The Vanguard Index Trust 500 Fund», созданный в 1976 г. Vanguard Group (США) и оперирующий акциями (покупая и продавая их) тех компаний, которые учитываются в индексе S&P 500, составленном по ценам акций 500 компаний (400 индустриальных, 20 транспортных, 40 потребительских и 40 финансовых).

Гипотеза эффективного рынка говорит о том, что изменение цен, а значит, и изменение финансовых решений происходит (и к тому же достаточно быстро) тогда, когда обновляется информация. Обычные же «рядовые» инвесторы (будь то индивидуумы или организации) не располагают достаточной информацией и обычно не могут быстро реагировать на изменение цен. К тому же операционные издержки индивидуального трейдинга, как правило, таковы, что они «съедают» возможную прибыль.

В этом смысле инвестирование в «Index Funds» привлекательно именно для тех «недостаточно информированных» инвесторов, которые не рассчитывают на получение «быстрых» и «больших» прибылей, а предпочитают (осторожное) вложение средств в хорошо диверсифицированные ценные бумаги долгосрочного действия.

Другими примерами аналогичных фондов (в том числе и по бонам) в США являются: «The Extended Market Portfolio», «The Vanguard Small Capitalization Stock Fund», «The Vanguard Bond Market Fund»; международные фонды — «The European Portfolio», «The Pacific Portfolio» и др.

## § 2b. Портфель ценных бумаг. Диверсификация Марковитца

1. Как уже было отмечено в § 2a, работа Г. Марковитца [332] 1952 года сыграла определяющую роль в становлении современной теории и практики финансового менеджмента, финансовой инженерии. В теории Марковитца для инвесторов особенно привлекательной оказалась идея *диверсификации* (diversification) в составлении *портфеля* (portfolio) *ценных бумаг*, поскольку она не только объясняла принципиальную возможность *редуцирования* (несистематического, см. с. 44) *риска* инвестирования, но и давала практические рекомендации того, как это делать <sup>6</sup>.

Для пояснения основных положений и идей этой теории рассмотрим следующую *одношаговую* задачу инвестирования.

Пусть инвестор имеет возможность разместить свой начальный капитал  $x$  по акциям  $A_1, \dots, A_N$ , стоимость которых в момент  $n = 0$  равна соответственно  $S_0(A_1), \dots, S_0(A_N)$ .

6 Толковый словарь по бизнесу [65] дает такие определения. *Диверсификация* — включение в портфель инвестиций ценных бумаг широкого круга компаний с целью избежания серьезных потерь в случае спада, охватившего лишь один из секторов экономики. *Портфель ценных бумаг* — список ценных бумаг, находящихся в собственности физического или юридического лица.

Пусть  $X_0(b) = b_1 S_0(A_1) + \dots + b_N S_0(A_N)$ , где  $b_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Иначе говоря, пусть

$$b = (b_1, \dots, b_N)$$

есть *портфель ценных бумаг*, где  $b_i$  — «число» акций  $A_i$  стоимостью  $S_0(A_i)$ .

Будем предполагать, что эволюция каждой акции  $A_i$  определяется тем, что ее цена  $S_1(A_i)$  в момент  $n = 1$  подчиняется разностному уравнению

$$\Delta S_1(A_i) = \rho(A_i) S_0(A_i),$$

или, что равносильно,

$$S_1(A_i) = (1 + \rho(A_i)) S_0(A_i),$$

где  $\rho(A_i)$  — случайная процентная ставка акции  $A_i$ ,  $\rho(A_i) > -1$ .

Если инвестор выбрал портфель  $b = (b_1, \dots, b_N)$ , то его начальный капитал  $X_0(b) = x$  превратится в

$$X_1(b) = b_1 S_1(A_1) + \dots + b_N S_1(A_N),$$

и эту величину желательно сделать «побольше». Это желание, однако, должно рассматриваться с учетом «риска», связанного с получением «большого» дохода.

С этой целью Г. Марковитц рассматривает две характеристики капитала  $X_1(b)$ :

$$E X_1(b) \text{ — математическое ожидание}$$

и

$$D X_1(b) \text{ — дисперсию.}$$

Имея эти две характеристики, можно по-разному формулировать оптимизационную задачу выбора наилучшего портфеля в зависимости от критерия оптимальности.

Можно, например, задаться вопросом о том, на каком портфеле  $b^*$  достигается максимум некоторой целевой функции  $f = f(E X_1(b), D X_1(b))$  при «бюджетном ограничении» на класс допустимых портфелей:

$$B(x) = \{b = (b_1, \dots, b_N) : b_i \geq 0, X_0(b) = x\}, \quad x > 0.$$

Естественна и следующая *вариационная* постановка: найти

$$\inf D X_1(b)$$

в предположении, что  $\inf$  берется по тем портфелям  $b$ , для которых выполнены ограничения

$$\begin{aligned} b &\in B(x), \\ E X_1(b) &= m, \end{aligned}$$

где  $m$  — некоторая константа.

Нижеследующий рисунок 8 иллюстрирует типичную картину множества точек  $(E X_1(b), \sqrt{D X_1(b)})$ , когда  $b \in B(x)$  и, возможно, имеются еще дополнительные ограничения на  $b$ .

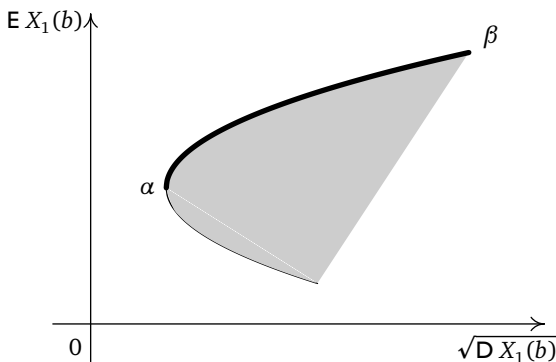


Рис. 8. Иллюстрация к средне-дисперсионному анализу Марковитца

Из этого рисунка становится понятным, что если вы интересуетесь *максимальным средним значением капитала при минимуме дисперсии*, то следует выбирать те портфели, для которых  $(E X_1(b), \sqrt{D X_1(b)})$  расположены на выделенной кривой с «начальной» и «концевой» точками  $\alpha$  и  $\beta$ . (Г. Марковитц называет эти портфели *эффективными*, а весь проведенный анализ, оперирующий со средними и дисперсиями, — *средне-дисперсионным анализом*, mean-variance analysis.)

**2.** Покажем теперь, что в *одношаговой* задаче оптимизации портфеля ценных бумаг можно вместо величин  $(S_1(A_1), \dots, S_1(A_N))$  оперировать непосредственно с процентными ставками  $(\rho(A_1), \dots, \rho(A_N))$ , подразумевая под этим следующее.

Пусть  $b \in B(x)$ , т. е.  $x = b_1 S_0(A_1) + \dots + b_N S_0(A_N)$ . Введем величины  $d = (d_1, \dots, d_N)$ , полагая

$$d_i = \frac{b_i S_0(A_i)}{x}.$$

Поскольку  $b \in B(x)$ , получаем, что  $d_i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^N d_i = 1$ . Представим капитал  $X_1(b)$  в виде

$$X_1(b) = (1 + R(b))X_0(b),$$

и пусть

$$\rho(d) = d_1 \rho(A_1) + \dots + d_N \rho(A_N).$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} R(b) &= \frac{X_1(b)}{X_0(b)} - 1 = \frac{X_1(b)}{x} - 1 = \frac{\sum b_i S_1(A_i)}{x} - 1 = \\ &= \sum d_i \frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1 = \sum d_i \left( \frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1 \right) = \\ &= \sum d_i \rho(A_i) = \rho(d). \end{aligned}$$

Итак,

$$R(b) = \rho(d),$$

откуда следует, что если  $d = (d_1, \dots, d_N)$  и  $b = (b_1, \dots, b_N)$  связаны соотношениями  $d_i = \frac{b_i S_0(A_i)}{x}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , то для  $b \in B(x)$  выполняется равенство

$$X_1(b) = x(1 + \rho(d)),$$

и, следовательно, с точки зрения оптимизационных задач для  $X_1(b)$  можно оперировать с соответствующими задачами для  $\rho(d)$ .

**3.** Обратимся теперь к вопросу о том, как *диверсификацией* можно добиться сколь угодно малого (несистематического) риска, измеряемого дисперсией или стандартным отклонением величин  $X_1(b)$ .

С этой целью рассмотрим для начала пару случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$  с конечными вторыми моментами. Тогда если  $c_1$  и  $c_2$  — константы,  $\sigma_i = \sqrt{D \xi_i}$ ,  $i = 1, 2$ , то

$$D(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2) = (c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2)^2 + 2c_1 c_2 \sigma_1 \sigma_2 (1 + \sigma_{12}),$$

где  $\sigma_{12} = \frac{\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$ ,  $\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = E \xi_1 \xi_2 - E \xi_1 \cdot E \xi_2$ . Отсюда ясно, что если  $c_1 \sigma_1 = c_2 \sigma_2$  и  $\sigma_{12} = -1$ , то  $D(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2) = 0$ .

Таким образом, если величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  *отрицательно* коррелированы с коэффициентом корреляции  $\sigma_{12} = -1$ , то таким подбором констант  $c_1$  и  $c_2$ , что  $c_1 \sigma_1 = c_2 \sigma_2$ , получаем комбинацию  $c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$  с *нулевой* дисперсией. Но, конечно, при этом среднее значение  $E(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2)$  может оказаться достаточно малым. (Случай  $c_1 = c_2 = 0$  для задачи оптимизации не интересен в силу условия  $b \in B(x)$ .)

Из этих элементарных рассуждений ясно, что при заданных ограничениях на  $(c_1, c_2)$  и класс величин  $(\xi_1, \xi_2)$  при решении задачи о том, чтобы сделать  $E(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2)$  «побольше», а  $D(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2)$  «поменьше», надо стремиться к выбору таких пар  $(\xi_1, \xi_2)$ , для которых их ковариация была бы как можно ближе к минус единице.

Изложенный эффект *отрицательной коррелированности*, называемый также *эффектом Марковитца*, является одной из основных идей диверсификации при инвестировании — при составлении портфеля ценных бумаг надо стремиться к тому, чтобы вложения делались в бумаги, среди которых по возможности много отрицательно коррелированных.

Другая идея, лежащая в основе диверсификации, основана на следующем соображении.

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  — последовательность *некоррелированных* случайных величин с дисперсиями  $D \xi_i \leq C$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где  $C$  — некоторая константа. Тогда

$$D(d_1 \xi_1 + \dots + d_N \xi_N) = \sum_{i=1}^N d_i^2 D \xi_i \leq C \sum_{i=1}^N d_i^2.$$

Поэтому, взяв, например,  $d_i = 1/N$ , находим, что

$$D(d_1 \xi_1 + \dots + d_N \xi_N) \leq \frac{C}{N} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Этот эффект *некоррелированности* говорит о том, что если инвестирование производится в некоррелированные ценные бумаги, то для уменьшения риска, т. е. дисперсии  $D(d_1 \xi_1 + \dots + d_N \xi_N)$ , надо по возможности брать их число  $N$  как можно большим.

Вернемся к вопросу о дисперсии  $D \rho(d)$  величины

$$\rho(d) = d_1 \rho(A_1) + \dots + d_N \rho(A_N).$$

Имеем

$$D \rho(d) = \sum_{i=1}^N d_i^2 D \rho(A_i) + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N d_i d_j \text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)).$$

Возьмем здесь  $d_i = 1/N$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^N d_i^2 D \rho(A_i) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot N \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D \rho(A_i) = \frac{1}{N} \cdot \bar{\sigma}_N^2,$$

где  $\bar{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D \rho(A_i)$  — средняя дисперсия. Далее,

$$\sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N d_i d_j \text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 (N^2 - N) \cdot \overline{\text{Cov}}_N,$$

где  $\overline{\text{Cov}}_N$  есть средняя ковариация:

$$\overline{\text{Cov}}_N = \frac{1}{N^2 - N} \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)).$$

Таким образом,

$$D \rho(d) = \frac{1}{N} \bar{\sigma}_N^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \overline{\text{Cov}}_N, \quad (1)$$

и ясно, что если  $\bar{\sigma}_N^2 \leq C$  и  $\overline{\text{Cov}}_N \rightarrow \overline{\text{Cov}}$  при  $N \rightarrow \infty$ , то

$$D \rho(d) \rightarrow \overline{\text{Cov}}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Из этой формулы мы видим, что если  $\overline{\text{Cov}}$  равна нулю, то диверсификацией с достаточно большим  $N$  риск инвестирования, т. е.  $D \rho(d)$ , может быть сделан сколь угодно малым. К сожалению, если рассматривать, скажем, рынок акций, то на нем, как правило, имеется положительная корреляция в ценах (они движутся довольно-таки согласованно в одном направлении), что приводит к тому, что  $\overline{\text{Cov}}_N$  не стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Предельное значение  $\overline{\text{Cov}}$  и есть тот *систематический*, иначе — *рыночный* — риск, который присущ рассматриваемому рынку и диверсификацией не может быть редуцирован. Первый же член в формуле (1) определяет *несистематический риск*, который может быть редуцирован, как мы видели, выбором большого числа акций. (Подробнее о теории средне-дисперсионного анализа см. [268], [331]–[333].)

## § 2с. Модель ценообразования финансовых активов (CAPM — Capital Asset Pricing Model)

1. Средне-дисперсионный анализ для своих расчетов оптимального портфеля требует знания  $E \rho(A_i)$  и  $\text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j))$  и не дает объяснения происхождения этих значений. (В реальной практике эти величины оцениваются по прошлым данным обычными *статистическими* средними и ковариациями.)

*Теория CAPM* (В. Шарп (W. F. Sharpe [433]), Дж. Линтнер (J. Lintner [301])) и рассматриваемая далее *теория APT* не только дают ответы на вопросы о значениях величин  $E \rho(A_i)$  и  $\text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j))$ , но также и показывают, как величины (случайных) процентных ставок  $\rho(A_i)$  отдельных акций  $A_i$  зависят от величины процентной ставки  $\rho$  «большого» рынка, на котором торгуются  $A_i$ . В дополнение к ковариациям  $\text{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j))$ , играющим ключевую роль в средне-дисперсионном анализе Марковитца, теория *CAPM* выявляет важную роль еще одного нового объекта — ковариаций  $\text{Cov}(\rho(A_i), \rho)$  между процентными ставками акций  $A_i$  рынка и самого рынка.

Теория *CAPM* и ее выводы базируются на концепции *равновесного* рынка, подразумевающего, в частности, что на таком рынке отсутствуют операционные издержки, все его участники (инвесторы) *однородны* в том смысле, что имеют равные возможности оценивания будущего движения цен на основе доступной всем им информации, имеют один и тот же временной горизонт и все их решения основываются на средних значениях и ковариациях цен. Предполагается также, что все рассматриваемые активы «безгранично делимы» и что на рынке имеется *безрисковая* ценная бумага (банковский счет, Treasury bills и т. п.) с процентной ставкой  $r$ .

Наличие безрисковой ценной бумаги является ключевым, поскольку именно процентная ставка  $r$  входит во все формулы теории *CAPM* в качестве «базовой» переменной, от которой производится отсчет.



Таблица 1

Ценная бумага	Номинальная процентная ставка	Реальное значение процентной ставки с учетом инфляции
Common stocks	12,0 %	8,8 %
Corporate bonds	5,1 %	2,1 %
Government bonds	4,4 %	1,4 %
Treasury bills	3,5 %	0,4 %

В этом смысле полезно отметить, что долгосрочные наблюдения за средними значениями  $E \rho(A_i)$  процентных ставок  $\rho(A_i)$  рискованных ценных активов  $A_i$  показывают, что  $E \rho(A_i) > r$ . Приведенная на следующей странице таблица, составленная по среднегодовым данным, дает сопоставительное представление о номинальных и реальных (с учетом инфляции) средних значениях процентных ставок в США за период 1926–1985 гг.

2. Основные положения теории *SAPM* поясним на примере одноэтапно функционирующего рынка.

Пусть  $S_1 = S_0(1 + \rho)$  определяет значение (случайной) цены «большого» рынка, скажем, для примера, индекса S&P 500 в момент времени  $n = 1$ . Через  $S_1(A) = S_0(A)(1 + \rho(A))$  обозначаем стоимость актива  $A$  в момент  $n = 1$  с процентной ставкой  $\rho(A)$  ( $A$  — некоторая акция из S&P 500).

Эволюция цены безрискового актива определяется формулой

$$B_1 = B_0(1 + r).$$

Теория *SAPM*, опираясь на заложенные в ней концепции *равновесного* рынка, устанавливает (см., например, [268], [433]), что для каждого актива  $A$  существует такая величина  $\beta(A)$ , называемая *бетой* этого актива <sup>7</sup>, что

$$E[\rho(A) - r] = \beta(A) E[\rho - r]. \quad (1)$$

При этом

$$\beta(A) = \frac{\text{Cov}(\rho(A), \rho)}{D\rho}. \quad (2)$$

Иначе говоря, среднее значение «премии»  $\rho(A) - r$  (при использовании рискованного актива  $A$  относительно безрискового актива) пропорционально среднему значению премии  $\rho - r$  (при вложении средств в глобальную характеристику рынка, скажем в индекс S&P 500).

Формула (2) устанавливает, что значение «беты», т. е.  $\beta(A)$ , определяется корреляционными свойствами процентных ставок  $\rho$  и  $\rho(A)$ , или, что равносильно, ковариационными свойствами соответствующих цен  $S_1$  и  $S_1(A)$ .

<sup>7</sup> Если уж у актива  $A$  есть «бета»  $\beta(A)$ , то по логике вещей должна быть и «альфа»  $\alpha(A)$ . Ею ряд авторов (см., например, [267]) называют среднее значение  $E \rho(A)$ .

Перепишем соотношение (1) в виде

$$E \rho(A) = r + \beta(A) E(\rho - r), \quad (3)$$

и пусть для актива  $A$  с бетой  $\beta(A) = \beta$  соответствующее значение процентной ставки  $\rho(A)$  обозначено  $\rho_\beta$ .

Тогда в случае  $\beta = 0$  имеем

$$\rho_0 = r,$$

а в случае  $\beta = 1$  получаем

$$\rho_1 = \rho.$$

С учетом этого видим, что (3) есть *уравнение прямой CAPM*:

$$E \rho_\beta = r + \beta E(\rho - r), \quad (4)$$

изображенной на рис. 9 и показывающей, как для активов изменяется их средний доход  $E \rho_\beta$  в зависимости от беты  $\beta$ , процентной ставки  $r$  и среднего рыночного дохода  $E \rho$ .

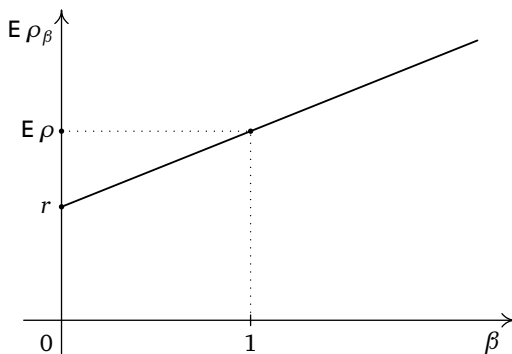


Рис. 9. Прямая CAPM

Величина  $\beta = \beta(A)$  играет важную роль при составлении портфеля ценных бумаг, являясь «мерой чувствительности», «мерой реакции» актива на изменения на рынке. Для определенности будем считать, что показатель рынка измеряется по индексу S&P 500 и что компания  $A$ , акцию которой мы сейчас рассматриваем, входит в число пятисот компаний этого индекса. Тогда если изменение индекса произошло на 1%, а бета акции  $A$  равна 1,5, то изменение цены акции  $A$  происходит на 1,5% (в среднем).

На практике определение беты активов осуществляется по статистическим данным обычными линейными регрессионными методами, вытекающими из линейности соотношения (3).

3. Образум для актива  $A$  величину

$$\eta(A) = (\rho(A) - E \rho(A)) - \frac{\text{Cov}(\rho(A), \rho)}{D \rho} (\rho - E \rho).$$

Ясно, что  $E \eta(A) = 0$  и

$$E(\eta(A)(\rho - E \rho)) = 0,$$

т. е. величины  $\eta(A)$  и  $\rho - E \rho$ , имеющие нулевые средние, являются *некоррелированными*. Следовательно,

$$\rho(A) - E \rho(A) = \beta(A)(\rho - E \rho) + \eta(A), \quad (5)$$

что вместе с формулой (3) приводит к следующему соотношению между премиями  $\rho(A) - r$  и  $\rho - r$ :

$$\rho(A) - r = \beta(A)(\rho - r) + \eta(A), \quad (6)$$

показывающему, что премия  $(\rho(A) - r)$  актива  $A$  складывается из премии рынка  $(\rho - r)$ , умноженной на бету  $\beta(A)$ , и величины  $\eta(A)$ , некоррелированной с  $\rho - E \rho$ .

Из соотношения (5) мы получаем формулу

$$D \rho(A) = \beta^2(A) D \rho + D \eta(A), \quad (7)$$

говорящую о том, что риск  $(D \rho(A))$  инвестирования в актив  $A$  складывается из двух рисков —

$$\text{систематического риска } (\beta^2(A) D \rho),$$

присущего рынку, и

$$\text{несистематического риска } (D \eta(A)),$$

присущего непосредственно активу  $A$ .

Как и в предыдущем параграфе, можно показать, что здесь, в рамках CAPM, несистематический риск также редуцируется диверсификацией.

С этой целью предположим, что на «большом» рынке имеется  $N$  активов  $A_1, \dots, A_N$ , для которых соответствующие величины  $\eta(A_1), \dots, \eta(A_N)$  некоррелированы:  $\text{Cov}(\eta(A_i), \eta(A_j)) = 0, i \neq j$ .

Пусть  $d = (d_1, \dots, d_N)$  — портфель ценных бумаг,  $d_i \geq 0, \sum_{i=1}^N d_i = 1$  и

$$\rho(d) = d_1 \cdot \rho(A_1) + \dots + d_N \cdot \rho(A_N).$$

В силу того что

$$\rho(A_i) - r = \beta(A_i)[\rho - r] + \eta(A_i),$$

имеем

$$\rho(d) - r = \sum_{i=1}^N d_i \beta(A_i)[\rho - r] + \sum_{i=1}^N d_i \eta(A_i).$$

Поэтому, полагая

$$\beta(d) = \sum_{i=1}^N d_i \beta(A_i) \quad \text{и} \quad \eta(d) = \sum_{i=1}^N d_i \eta(A_i),$$

находим (ср. с формулой (6)), что

$$\rho(d) - r = \beta(d)(\rho - r) + \eta(d).$$

Значит, как и в предыдущем параграфе,

$$D\rho(d) = \beta^2(d) D\rho + D\eta(d),$$

где  $D\eta(d) = \sum_{i=1}^N d_i^2 D\eta(A_i) \leq \frac{C}{N} \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , если  $D\eta(A_i) \leq C$  и  $d_i = \frac{1}{N}$ .

## § 2d. Арбитражная теория расчетов (APT — Arbitrage Pricing Theory)

1. В теории *CAPM* главный акцент сделан на то, как на рынке, находящемся в определенном *равновесии*, индивидуальный доход актива зависит от дохода «большого» рынка, на котором действует этот актив (см. формулу (1) в § 2с), и каков риск его получения. При этом (см. в предыдущем параграфе формулу (6)) доход (процентная ставка, возврат)  $\rho(A)$  актива  $A$  определяется формулой

$$\rho(A) = r + \beta(A)(\rho - r) + \eta(A). \quad (1)$$

Более современная теория «риска и возврата» — *теория APT* (Arbitrage Pricing Theory; С. Росс (S. A. Ross [412]), Р. Ролл и С. Росс (R. Roll, S. A. Ross [410])) — исходит из *многофакторной* модели, предполагающей, что величина  $\rho(A)$  актива  $A$  зависит от некоторого количества случайных факторов  $f_1, \dots, f_q$  (их значения могут быть самыми разными — цена на нефть, процентная ставка и т. д.) и «шумового» члена  $\zeta(A)$ :

$$\rho(A) = a_0(A) + a_1(A)f_1 + \dots + a_q(A)f_q + \zeta(A). \quad (2)$$

При этом  $E f_i = 0$ ,  $D f_i = 1$ ,  $\text{Cov}(f_i, f_j) = 0$ ,  $i \neq j$ ; «шумовой» член  $\zeta(A)$  имеет математическое ожидание  $E \zeta(A) = 0$  и некоррелирован с факторами  $f_1, \dots, f_q$  и с «шумовыми» членами других активов.

Из сопоставления формул (1) и (2) видим, что (1) является частным случаем однофакторной модели с фактором  $f_1 = \rho$ . В этом смысле *APT* является обобщением *CAPM*, хотя с точки зрения практических расчетов методология *CAPM* продолжает оставаться одним из излюбленных приемов при расчетах ценных бумаг, что объясняется ее наглядностью, простотой и традицией оперирования с *бетой* — мерой чувствительности активов к изменениям на рынке.

Один из центральных результатов теории *CAPM*, опирающейся на *концепцию равновесного рынка*, — это формула (1) из предыдущего параграфа для среднего значения «премии»  $E(\rho(A) - r)$ , выражаемого через среднее значение премии  $E(\rho - r)$ .

Аналогичным образом, центральный результат теории *APT*, опирающейся на *концепцию отсутствия на рынке асимптотического арбитража*, — это приводимая далее (асимптотическая) формула для среднего значения  $E \rho(A)$

в предположении, что поведение  $\rho(A)$  актива  $A$  описывается *многофакторной* моделью (2).

Напомним, что  $\rho(A)$  — это (случайная) процентная ставка актива  $A$  в (рассмотренной выше) *одношаговой* модели  $S_1(A) = S_0(A)(1 + \rho(A))$ .

2. Будем предполагать, что имеется « $N$ -рынок», состоящий из  $N$  активов  $A_1, \dots, A_N$  и  $q$  факторов, причем

$$\rho(A_i) = a_0(A_i) + a_1(A_i)f_1 + \dots + a_q(A_i)f_q + \zeta(A_i),$$

где  $E f_k = 0$ ,  $E \zeta(A_i) = 0$ ,  $\text{Cov}(f_k, f_l) = 0$  при  $k \neq l$ ,  $D f_k = 1$ ,  $\text{Cov}(f_k, \zeta(A_i)) = 0$ ,  $\text{Cov}(\zeta(A_i), \zeta(A_j)) = \sigma_{ij}$ ,  $k, l = 1, \dots, q$  и  $i, j = 1, \dots, N$ .

Рассмотрим некоторый портфель  $d = (d_1, \dots, d_N)$ . Тогда отвечающий ему «доход» определяется по формуле

$$\begin{aligned} \rho(d) &= d_1 \rho(A_1) + \dots + d_N \rho(A_N) = \\ &= \sum_{i=1}^N d_i a_{i0} + \left( \sum_{i=1}^N d_i a_{i1} \right) f_1 + \dots + \left( \sum_{i=1}^N d_i a_{iq} \right) f_q + \sum_{i=1}^N d_i \zeta(A_i), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a_{ik} = a_k(A_i)$ .

Ниже будет показано, что при некоторых предположениях на коэффициенты  $a_{ik}$  многофакторной модели (2) можно найти такой нетривиальный портфель  $d = (d_1, \dots, d_N)$ , что

$$d_1 + \dots + d_N = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N d_i a_{ik} = 0, \quad k = 1, \dots, q, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N d_i a_{i0} = \sum_{i=1}^N d_i^2. \quad (6)$$

Тогда для портфеля  $\theta d = (\theta d_1, \dots, \theta d_N)$ , где  $\theta$  — константа, получаем

$$\rho(\theta d) = \theta \rho(d)$$

и в силу соотношений (2)–(6) находим

$$\rho(\theta d) = \theta \sum_{i=1}^N d_i^2 + \theta \sum_{i=1}^N d_i \zeta(A_i). \quad (7)$$

Поэтому

$$\mu(\theta d) = E \rho(\theta d) = \theta \sum_{i=1}^N d_i^2, \quad \sigma^2(\theta d) = D \rho(\theta d) = \theta^2 \sum_{i,j=1}^N d_i d_j \sigma_{ij}.$$

Положим

$$\theta = \left( \sum_{i=1}^N d_i^2 \right)^{-2/3} \quad \left( = \|d\|^{-4/3}, \text{ где } \|d\| = \left( \sum_{i=1}^N d_i^2 \right)^{1/2} \right). \quad (8)$$

Тогда

$$\mu(\theta d) = \left( \sum_{i=1}^N d_i^2 \right)^{1/3}, \quad (9)$$

$$\sigma^2(\theta d) = \frac{\sum_{i,j=1}^N d_i d_j \sigma_{ij}}{\left( \sum_{i=1}^N d_i^2 \right)^{4/3}}. \quad (10)$$

Если предположить (для простоты анализа; по поводу общего случая см., например, [240], [268]), что  $\sigma_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $\sigma_{ii} = 1$ , то найдем, что

$$\sigma^2(\theta d) = \left( \sum_{i=1}^N d_i^2 \right)^{-1/3}. \quad (11)$$

Формулы (9) и (11) являются ключевыми для последующего асимптотического анализа. Из них видно, что если  $\sum_{i=1}^N d_i^2 \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ , то  $\mu(\theta d) \rightarrow \infty$  и  $\sigma^2(\theta d) \rightarrow 0$ . Если к тому же положить  $S_0(A_1) = \dots = S_0(A_N) = 1$ , то из условия  $d_1 + \dots + d_N = 0$  найдем, что *начальный капитал портфеля*  $\theta d$  равен

$$X_0(\theta d) = \theta(d_1 + \dots + d_N) = 0,$$

а капитал в момент времени  $n = 1$  равен

$$X_1(\theta d) = d_1 S_1(A_1) + \dots + d_N S_1(A_N) = \theta \rho(d) = \rho(\theta d).$$

Далее, если  $E X_1(\theta d) = \mu(\theta d) \rightarrow \infty$ , а  $D X_1(\theta d) \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , то для достаточно большого  $N$  с большой вероятностью  $X_1(\theta d) \geq 0$ , причем с положительной вероятностью  $X_1(\theta d) > 0$ . Иначе говоря, имея *нулевой начальный капитал* и оперируя на « $N$ -рынках» с активами  $A_1, \dots, A_N$ ,  $N \geq 1$ , путем составления соответствующего портфеля можно («асимптотически») извлечь *положительную прибыль*, что в теории АРТ (см. [412]) и интерпретируется как *наличие асимптотического арбитража* (ср. также с соответствующими более поздними определениями в § 3а, b, с гл. VI).

Таким образом, считая, что « $N$ -рынки» *асимптотически* (при  $N \rightarrow \infty$ ) являются безарбитражными, приходим к заключению, что возможность  $\sum_{i=1}^N d_i^2 \rightarrow \infty$ , приводящая к арбитражу, *должна быть исключена*. Это, естественно, накладывает определенные ограничения на коэффициенты многофакторной

модели (2), поскольку описываемое далее конструирование портфеля  $d = (d_1, \dots, d_N)$  со свойствами (4)–(6) производится по коэффициентам этой модели.

Образую матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nq} \end{pmatrix} \quad (12)$$

и по ней построим матрицу

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^*, \quad (13)$$

считая, что она определена («\*» означает транспонирование).

Пусть

$$\begin{aligned} d &= (I - \mathcal{B})a_0, \\ e &= \mathcal{B}a_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $I$  — единичная матрица,  $a_0$  — вектор-столбец, состоящий из  $a_{10}, \dots, a_{N0}$ . Тогда для  $a_0$  имеет место ортогональное разложение

$$a_0 = d + e \quad (15)$$

и

$$d^* \mathbf{1} = 0, \quad d^* a_k = 0, \quad (16)$$

где  $a_k$  — вектор-столбец из элементов  $a_{1k}, \dots, a_{Nk}$  и  $\mathbf{1}$  — вектор-столбец, составленный из единиц.

Формулы (16) — это и есть в точности формулы (4) и (5), о которых шла речь выше.

Из формул (14) и (15) имеем также

$$d^* a_0 = d^* d + d^* e = d^* d$$

— это и есть требуемая формула (6).

Заметим теперь, что согласно формуле (14) вектор-столбец  $e$  может быть представлен в виде

$$e = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_q a_q,$$

где числа  $\lambda_0, \dots, \lambda_q$  таковы, что

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_q)^* = (\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^* a_0.$$

Следовательно,

$$d = a_0 - \lambda_0 \mathbf{1} - \sum_{k=1}^q \lambda_k a_k$$

и

$$\sum_{i=1}^N d_i^2 = \sum_{i=1}^N \left( a_{i0} - \lambda_0 - \sum_{k=1}^q \lambda_k a_{ik} \right)^2. \quad (17)$$

Для « $N$ -рынка» все входящие в правую часть этой формулы коэффициенты  $a_{i0}, \dots, a_{ik}, \lambda_0, \dots, \lambda_k$ , разумеется, зависят от  $N$ .

Предположение *отсутствия* асимптотического арбитража исключает возможность ( $d_i = d_i(N)$ )

$$\lim_N \sum_{i=1}^N d_i^2(N) = \infty,$$

и, значит, в силу формулы (17), коэффициенты « $N$ -рынков» должны быть такими, чтобы выполнялось условие

$$\lim_N \sum_{i=1}^N \left[ a_{i0}(N) - \lambda_0(N) - \sum_{k=1}^q \lambda_k(N) a_{ik}(N) \right]^2 < \infty. \quad (18)$$

Это соотношение (как следствие предположения отсутствия асимптотического арбитража) в теории APT интерпретируют следующим образом: *при достаточно большом числе  $N$  активов, привлекаемых к созданию портфеля ценных бумаг, «большинство» их должно быть таково, чтобы между коэффициентами  $a_0(A_i), a_1(A_i), \dots, a_q(A_i)$  было выполнено «почти линейное» соотношение*

$$a_0(A_i) \approx \lambda_0 + \sum_{k=1}^q \lambda_k a_k(A_i), \quad (19)$$

где все рассматриваемые величины зависят от  $N$  и

$$a_0(A_i) = E \rho(A_i).$$

При этом существует портфель  $d = (d_1, \dots, d_N)$ , для которого дисперсия дохода  $\rho(d)$  является (в силу формулы (11)) достаточно малой, что говорит о том, что в рассматриваемой многофакторной модели влияние «шумовых» членов  $\zeta(A_i)$  и отдельных факторов *может быть (в предположении отсутствия асимптотического арбитража) редуцировано диверсификацией*. Но надо помнить, что все это справедливо лишь при большом  $N$ , т. е. для «больших» рынков, а для малых рынков расчет (pricing) математического ожидания дохода  $E \rho(A_i)$  с помощью выражения в правой части формулы (19) может приводить к весьма грубым ошибкам. (По поводу соответствующих утверждений см. [231], [240], [412]; строгую математическую теорию асимптотического арбитража, основанную на понятии контигуальности [250] см. в [260], [261], [273] и далее раздел 3 в гл. VI.)



## § 2е. Анализ, интерпретация и пересмотр классической концепции эффективно функционирующего рынка. I

1. Основной концепцией, на которой зиждется понятие *эффективного рынка*, является предположение о том, что цены мгновенно ассимилируют новую информацию и устанавливаются таким образом, что не дают возможности «где-то что-то купить подешевле и в другом месте немедленно продать подороже», т. е. не создают, как принято говорить, *арбитражных возможностей*.

Как мы видели выше, эта концепция *рационально устроенного, честно функционирующего рынка* была воплощена в то, что (нормированные) цены на таком рынке описываются *мартингалами* (относительно некоторой меры, эквивалентной исходной вероятностной мере).

Напомним, что если  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  — мартингал относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , то  $E(X_{n+m} | \mathcal{F}_n) = X_n$ . Поэтому оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка  $\widehat{X}_{n+m;n}$  величины  $X_{n+m}$ , основанная на «информации»  $\mathcal{F}_n$ , есть просто значение  $X_n$ , поскольку  $\widehat{X}_{n+m;n}$  совпадает с  $E(X_{n+m} | \mathcal{F}_n)$ .

Можно тем самым сказать, что предположение мартингальности цен  $(X_n)$  соответствует тому экономически понятному допущению, что на «хорошо организованном» рынке наилучший (по крайней мере в среднеквадратическом смысле) прогноз значения цены на «завтра», «послезавтра», ... по данным на «сегодняшний» день есть значение цены «сегодня».

Иначе говоря, прогноз носит тривиальный характер, вроде бы исключая возможность какого-либо предсказания «будущего движения наблюдаемых цен». (Л. Башелье, в сущности, при своей конструкции броуновского движения как модели эволюции цен отпирался именно от этой идеи невозможности более хорошего прогноза цен на «завтра», нежели как значение цены «сегодня».)

В то же самое время общеизвестно, что участники рынка (включая и таких экспертов, как «фундаменталисты», «техники», «количественные аналитики» — «fundamentalists», «technicians», «quants») не оставляют попыток предсказания «будущего движения цен», не оставляют попыток «догадки» относительно направления движения и величин будущих значений цен, относительно того, акции каких компаний и когда покупать или продавать и т. д.

**Замечание.** «Фундаменталисты» исходят в своих решениях из «глобального» состояния экономики в целом, состояния тех или иных ее секторов; для них особенно важна информация относительно *перспектив* развития; они исходят из *рациональности* действия участников рынка. Представители же «технического» анализа руководствуются в своих решениях «локальным» поведением рынка; для них особенно важно «поведение толпы» как фактора, существенно влияющего на их решения.

Как отмечается в [385, с. 15–16], в 20–40 годах XX в. «фундаменталисты» и «техники» образовывали две основные группы «аналитиков» финансового

рынка. В 50-х годах к ним добавилась третья группа «quants» — группа «количественных аналитиков», являющихся последователями Л. Башелье. Эта группа более тяготеет к «фундаменталистам», нежели к представителям «технического» подхода, для которых, как сказано, более важно *эмоциональное* состояние рынка, а не *рациональные* причины, определяющие поведение инвесторов на рынке.

2. Вернемся к вопросу о том, как объяснить, на чем же, собственно говоря, могут быть основаны надежды и попытки предсказания «будущего движения цен». Начинать, конечно, нужно с *анализа эмпирических данных*, с объяснения ряда нетривиальных феноменов (типа кластерности, например) относительно характера движения цен, с выяснения вероятностно-статистической структуры цен как случайных процессов.

Пусть  $H_n = \ln(S_n/S_0)$  — логарифмы (нормированных) цен. Представим  $H_n$  в виде  $H_n = h_1 + \dots + h_n$ .

Если последовательность  $(H_n)$  является мартингалом относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_n)$ , то величины  $(h_n)$  образуют *мартингал-разность* ( $E(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ ), и, как следствие этого, величины  $(h_n)$  оказываются (в предположении интегрируемости их квадратов) *некоррелированными*:  $E h_{n+m} h_n = 0$ ,  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$ .

Однако некоррелированность, как известно, еще не означает независимости, и совершенно не исключено, что, скажем,  $h_{n+m}^2$  и  $h_n^2$  или  $|h_{n+m}|$  и  $|h_n|$  окажутся положительно *коррелированными*. Экспериментальный анализ многих финансовых данных показывает (не противореча гипотезе мартингальности цен на *эффективном* рынке!), что так оно и есть на самом деле. И весьма замечательно также то, что этот феномен положительной коррелированности, приводящий к эффекту кластерности (скупенности) величин  $(h_n)_{n \geq 1}$  по группам с большими или малыми их значениями, «ухватывается», объясняется рядом довольно-таки простых моделей (таких как, например, ARCH, GARCH, моделями стохастической волатильности и т. д.), о которых речь будет идти ниже в гл. II. Появляется некоторая возможность (или, по крайней мере, надежда) уже более нетривиального (и, вообще говоря, нелинейного) прогноза, скажем, *абсолютных* значений  $|h_{n+m}|$ . Появляется также возможность получения более детальной информации о совместных распределениях последовательности  $(h_n)_{n \geq 1}$ .

Простейшее предположение о вероятностном характере величин  $(h_n)$  состоит в том, что

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

где  $(\varepsilon_n)$  — независимые стандартные нормально распределенные величины,  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , и  $\sigma_n$  — некоторые константы, являющиеся стандартными отклонениями величин  $h_n$ , т. е.  $\sigma_n = +\sqrt{D h_n}$ .

Однако эта классическая модель гауссовского случайного блуждания давно признана *неадекватно отражающей* реальные данные, статистический

анализ которых «на нормальность» показывает, прежде всего, что эмпирические плотности распределений величин  $h_n$  более *вытянуты*, более *пикообразны* в окрестности среднего значения, нежели в нормальном случае. Этот анализ показывает также, что *хвосты* распределений величин  $h_n$  более *тяжелые*, чем для нормального распределения. (Подробнее см. гл. IV.)

В финансовой литературе величины  $\sigma_n$ , входящие в представление  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , принято называть *волатильностью* (изменчивостью), и принципиально важным является тот факт, что *волатильность сама по себе является волатильной*. Иначе говоря, последовательность  $\sigma = (\sigma_n)$  не только является функцией от времени (в простейшем случае константой), но и *случайна*. (Подробнее о волатильности см. далее § 3а в гл. IV.)

С математической точки зрения подобное предположение весьма привлекательно, поскольку существенно расширяет традиционный класс (*линейных*) гауссовских моделей, включая в рассмотрение (*нелинейные*) *условно-гауссовские* модели, в которых

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

где по-прежнему  $(\varepsilon_n)$  — независимые стандартные нормально распределенные величины,  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , но зато  $\sigma_n = \sigma_n(\omega)$  являются  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми неотрицательными *случайными* величинами. По-другому это можно выразить так: условное распределение  $h_n$  относительно  $\mathcal{F}_{n-1}$  имеет вид

$$\text{Law}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(0, \sigma_n^2),$$

откуда следует, что  $\text{Law}(h_n)$ -распределение  $h_n$  есть *взвесь (смесь)* нормальных распределений с усреднением по распределению волатильности («случайной дисперсии»)  $\sigma_n^2$ .

Полезно отметить, что в математической статистике хорошо известно, что смеси распределений с быстро убывающими хвостами могут приводить к распределениям с тяжелыми хвостами. Так что если экспериментально это наблюдается (а это и действительно так для многих финансовых показателей), то условно-гауссовские схемы могут рассматриваться как подходящие вероятностные модели.

Естественно, что при обращении к моделям со стохастической волатильностью, а именно к моделям типа  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , определяющим фактором успеха их применения является «правильное» описание эволюции волатильности  $(\sigma_n)$ .

Уже первая модель ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity — авторегрессионная условная неоднородность), введенная в 1980 г. Р. Энглем (R. F. Engle) и предполагающая, что

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \dots + \alpha_q h_{n-q}^2,$$

дала возможность «ухватить» упомянутый выше *эффект кластерности* (скупченности, сгруппированности) реально наблюдаемых данных при статистическом анализе финансовых временных рядов.

Суть этого эмпирического феномена состоит в том, что большие (малые) значения  $h_n$  влекут за собой большие (малые) последующие значения, но, вообще говоря, непредсказуемого знака.

Это, конечно, становится понятным из сделанного в модели *ARCH* предположения о структуре  $\sigma_n^2$  как функции предшествующих значений  $h_{n-1}^2, \dots, h_{n-q}^2$ . Таким образом, согласно этой модели и в соответствии с реальными наблюдениями, вслед за большим значением  $|h_n|$  следует ожидать большое значение  $|h_{n+1}|$ . Однако подчеркнем что, эта модель *не дает* объяснения того, в «какую сторону двинутся цены», т. е. не дает информации о знаке  $h_{n+1}$ . (Отсюда, между прочим, вытекает следующая рекомендация к практической деятельности на стохастическом рынке по продаже и покупке — если имеете дело с покупкой, например, опциона, то надо приобретать одновременно и опцион-колл, и опцион-пут; ср. с § 4е гл. VI.)

Неудивительно, что *ARCH*-модель породила огромное число сходных моделей, создаваемых для того, чтобы суметь «ухватить» (помимо «кластерности») и другие обнаруживаемые эффекты. Наиболее известна среди них *GARCH*-модель (Generalized *ARCH*), введенная Т. Боллерсlevом (Т. Bollerslev [48], 1987 г.), в которой

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \dots + \alpha_q h_{n-q}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{n-p}^2.$$

(О разнообразии моделей, обобщающих *ARCH*, можно судить уже по одному только перечислению их наименований — *HARCH*, *EGARCH*, *AGARCH*, *NARCH*, *MARCH*, ...)

Одно из «технических» преимуществ *GARCH*-моделей перед *ARCH* состоит в том, что, в то время как для «подгонки» *ARCH*-моделей к реальным данным приходится брать большие значения  $q$ , модель *GARCH* позволяет ограничиваться небольшими значениями  $q$  и  $p$ .

Отметив, что модели *ARCH* и *GARCH* объясняют эффект кластерности, нельзя не упомянуть, что в действительности имеются и другие эмпирические феномены, показывающие, что связь цен и волатильности является на самом деле более тонкой. Так, практики хорошо знают, что когда волатильность «мала», то цены стремятся к тому, чтобы их рост или падение длились как можно дольше. Аналогичным образом, если волатильность «велика», то цены ведут себя таким образом, что они как бы замедляют свой рост или падение, стремясь повернуть движение в противоположном направлении.

Все это говорит о том, что внутренняя (довольно сложная) структура финансового рынка, видимо, дает некоторую надежду если уж и не на возможность предсказания *самого* движения цен, то, по крайней мере, на возможность конструкции достаточно надежных *границ* их будущего движения. (Эту мысль «оптимисты» часто предваряют словами о том, что рыночные цены «помнят прошлое», хотя этот субъективный тезис далеко не бесспорен.)

Довольно подробное рассмотрение ряда вероятностно-статистических моделей, описывающих эволюцию финансовых временных рядов, будет дано в дальнейшем (см. гл. II, III). Сейчас же мы остановимся на некоторой критике

и пересмотре предположений о функционировании трейдеров на «эффективно» организованном рынке.

3. В § 2а говорилось о том, что в концепции *эффективного рынка* заложено то, что все его участники *однородны* с точки зрения своих целевых установок, усвоения новой информации, их решения носят *рациональный* характер. Однако эти положения вызывают определенную критику, состоящую в том, что участники рынка, даже если они и получают всю доступную информацию, все же реагируют на нее, интерпретируют ее далеко *не однозначным, не однородным образом*; целевые установки участников рынка могут быть крайне различны; временные интервалы финансовой активности трейдеров различны — от коротких интервалов для «speculators» и «technicians» до длинных периодов для центральных банков; отношение участников рынка к размерам риска может быть весьма субъективным.

Достаточно хорошо известно, что люди в своих решениях «нелинейны»: они меньше склонны рисковать, когда ожидают прибыль, чем когда находятся перед возможностью потерь. Наглядной иллюстрацией этого утверждения является следующая дилемма, сформулированная А. Тверски (A. Tversky [465]).

- а) Что вы предпочтете: заведомо иметь 85 000 \$ или попытаться получить больший капитал в 100 000 \$ в игре, где выигрыш имеет вероятность 0,85?
- б) Что вы предпочтете: заведомо потерять 85 000 \$ или же вступить в игру, где с вероятностью 0,85 вы потеряете уже 100 000 \$, но с вероятностью 0,15 потери сведутся к нулевым?

Большинство людей в случае а) предпочтут иметь 85 000 \$, не стремясь получить 100 000 \$. Во втором же случае б) большинство людей предпочтет вступить в игру, которая дает шанс (в 15%) свести потери до нуля.

При принятии инвесторами решений чрезвычайно важным фактором является *время*. Если вам предоставляется возможность получения 5000 \$ сегодня или 5150 \$ через месяц, то вы, скорее всего, предпочтете получить их сегодня. Однако если первая возможность представляется через год, а вторая — через 13 месяцев, то большинство предпочтет 13 месяцев. Иначе говоря, «временные» горизонты инвесторов на рынке могут быть различными в зависимости от их индивидуальных установок, что, вообще говоря, не согласуется с моделями «рациональных инвесторов», предполагающими (явно или неявно) тождественность их «временных горизонтов».

В § 2а (п. 3) отмечалось, что в понятие *эффективного рынка* входит и то, что участники рынка *мгновенно корректируют* свои решения в зависимости от поступившей информации. Однако все хорошо знают, что так на самом деле не бывает — людям нужно некоторое время (и разное для разных людей) для осознания поступившей информации и принятия затем того или иного решения.

4. В книге Дж. Сороса [451] приводится много аргументов в защиту необходимости понимания того, что помимо состояний «равновесия» или «почти равновесия» рынок может находиться и в состояниях, «далеких от равновесия», что участники рынка неадекватно воспринимают и интерпретируют информацию, что их взгляды «по самой своей природе являются предвзятыми», [451, с. 14]. В состояниях, близким к равновесным, действуют определенные корректирующие механизмы, предотвращающие «слишком разительное расхождение восприятий и реальности», а в состояниях, далеких от равновесных, «действует рефлексивный механизм двойной обратной связи и тенденция к сближению восприятий и реальности не возникает, если не происходит значительных изменений в существующих условиях ...» [451, с. 13].

С этими словами созвучны высказывания Р. Олсена (R. B. Olsen [2]) — основателя Research Institute for Applied Economics («Olsen & Associates», Zürich): «На рынке имеется широкий спектр агентов с разными временными горизонтами. Эти горизонты меняются от одной минуты для „краткосрочных“ трейдеров до нескольких лет для центральных банков и корпораций. Реакция агентов на внешние события зависит от их временных горизонтов. Поскольку эти горизонты различны и разнятся в миллионы раз, экономические агенты могут принимать существенно разные решения. Все это приводит к „эффекту ряби“ (ripple effect), когда разнородные реакции порождают новые события, вызывающие в свою очередь вторичные реакции участников рынка».

В настоящее время, видимо, рано еще говорить о какой-то стройной экономико-математической теории финансового рынка как «большой сложной системы», функционирующей не в «классических» условиях равновесия, а в тех, которые реально наблюдаемы на рынке. Современное состояние можно определить как период «накопления фактов», «уточнения моделей». И в этом смысле первостепенная роль принадлежит новым методам сбора и хранения статистических данных, их обработки и анализа с применением, естественно, современной вычислительной техники (о чем пойдет речь в гл. IV), дающим эмпирический материал для анализа различных концепций относительно функционирования рынка ценных бумаг и коррекции различных положений, заложенных, скажем, в понятие *эффективного* рынка, гипотез относительно характера распределений цен, динамики их поведения и т. п.

## § 2f. Анализ, интерпретация и пересмотр концепций *эффективно функционирующего* рынка. II

1. В настоящем параграфе мы продолжим рассмотрение (на описательном уровне) вопросов, относящихся к предположениям, заложенным в *концепции эффективно функционирующего* рынка и *рационального* поведения инвесторов, сосредоточив свое внимание на ряде новых, не обсуждавшихся ранее аспектов.

Будучи одним из замечательных достижений, *концепция эффективного* рынка сыграла и продолжает играть доминирующую роль и в финансовой

теории, и в финансовом бизнесе. В этой связи становится ясно, что четкое выявление и *сильных*, и *слабых* сторон этой концепции помогает пониманию тех неоклассических концепций (типа «фрактальности» структуры рынка), которые мы находим в математико-экономической литературе, посвященной структурным свойствам и функционированию финансового рынка.

2. Как мы уже видели, концепция эффективного рынка исходит из предположений, что значение цены «сегодня» установилось так, что оно полностью «учло» всю доступную информацию, и изменение цены происходит лишь только в результате «обновления» этой информации, так сказать, в результате появления «новой», «неожиданной», «непредсказанной» информации. При этом инвесторы на таком рынке понимают, что цены установились «справедливо», поскольку все участники рынка действуют «коллективно-рационально» и «однородно».

Эти предположения сделали вполне естественной *гипотезу случайного блуждания* (предполагающую, что цена есть сумма независимых составляющих) и ее развитие — *гипотезу мартингалности* (и, как следствие, то, что прогноз цены на «завтра» есть значение цены «сегодня»).

Образно говоря, все вышесказанное означает, что «рынок — это мартингал», в том смысле, что на таком рынке идет *справедливая, честная* игра (в соответствии с обычной интерпретацией понятия «мартингал»; см. далее § 1b, 1с гл. II и подробнее, например, [439, гл. VII, § 1]).

Читатель, видимо, уже отметил, что сформулированная выше (§ 2a) концепция эффективного рынка, в сущности, просто *постулировала*, что «эффективный рынок — это мартингал» (относительно того или иного потока «информации» и некоторой вероятностной меры). Соответствующая же аргументация носила отнюдь не формально-математический характер, а интуитивно-описательный.

На самом деле утверждение, что «рынок есть мартингал», допускает безупречное математическое толкование, если отойти от той гипотезы, что (по определению) «честно», «рационально» устроенный рынок — это *безарбитражный рынок*. Иначе говоря, это такой рынок, на котором невозможен *безрисковый доход*. (Формальное определение дается в § 2a гл. V.)

Далее мы увидим, что предположение безарбитражности приводит к тому, что существует, вообще говоря, целый *спектр* («мартингалных») мер, относительно которых (нормированные) цены являются мартингалами, что является своеобразной формой того, что у рынка может быть не единственное, а целый спектр *устойчивых* состояний, а это, несомненно, связано с тем, что участники рынка имеют разные целевые установки, разные временные периоды на обработку и усвоение поступившей информации.

То обстоятельство, что на рынке присутствуют инвесторы с разными интересами и возможностями, является скорее положительным фактором, а не недостатком, как это может показаться на первый взгляд.

Суть дела здесь состоит в том, что именно *диверсификационные* свойства рынка обеспечивают его *ликвидность* (liquidity) — возможность быстрого превращения активов в средство платежа (например, в деньги), необходимую для стабильности рынка. В качестве подтверждения приведем следующие известные факты (см., например, [386, с. 46–47]).

В день убийства (22.11.1963) президента Дж. Кеннеди рынок мгновенно отреагировал на создавшуюся неопределенность относительно «перспектив на будущее». Проявлением этого явилось то, что в этот день «долгосрочные» (long-term) инвесторы либо просто прекратили свои операции, либо превратились в «краткосрочных» (short-term) инвесторов. В последующие дни биржи были закрыты, и после их открытия «долгосрочные» инвесторы, руководствующиеся «фундаментальной» информацией, снова вернулись на рынок.

Хотя полная картина известного финансового краха 19 октября 1987 года в США, видимо, не достаточно понята, однако известно, что непосредственно перед этим днем «долгосрочные» инвесторы пытались произвести распродажу активов и становились «краткосрочными». Причиной этого явилось ужесточение монетарной политики Федеральной резервной системы (Federal Reserve System) и перспектива удорожания недвижимости. Тем самым, на рынке доминировали краткосрочные операции, и в этом смысле основной «полезной» информацией стала «техническая» информация, базирующаяся, впрочем, в подобные периоды паники во многом на слухах и домыслах.

В обоих этих примерах, когда «долгосрочные» инвесторы «выходили» из игры на рынке, следствием явилось то, что рынок становился неликвидным и, в результате, неустойчивым. Все это говорит о том, что для устойчивости на рынке должны быть инвесторы с разными «инвестиционными горизонтами», должна иметь место «неоднородность», «дробность», или, как говорят, «фрактальность» интересов участников рынка.

То, что финансовый рынок обладает «статистической фрактальностью» (см. определение в § 2с гл. III), со всей четкостью было отмечено Б. Мандельбротом еще в шестидесятых годах XX в., и в последующие годы этому вопросу стало уделяться значительное внимание, что обусловлено такими обнаруженными факторами, как, например, наличие статистической фрактальной структуры в обменных курсах валют, наличие (краткосрочной) статистической фрактальной структуры в акциях и облигациях.

С точки же зрения понимания того, какие модели эволюции финансовых индексов являются «правильными», почему «устойчивые» системы должны иметь «фрактальную» структуру, полезно сопоставление *детерминистических* и *статистических* фрактальных структур. В связи с этим в разделе 4 гл. II мы даем некоторое представление о ряде взаимосвязанных между собой вопросов, относящихся к *нелинейным динамическим системам*, хаосу и т. п.

Как уже было сказано выше, математически безупречной теорией, которой мы в настоящей книге следуем, является «Теория арбитража». В этой связи следует подчеркнуть, что каждая из *концепций эффективности*, без-



*арбитражности, фрактальности* ни в коей мере не заменяет другую. Они дополняют друг друга, и, например, многие безарбитражные модели обладают фрактальной структурой, а фрактальные процессы могут быть (относительно мартингалных мер) мартингалами (и тогда соответствующий рынок является безарбитражным), но могут быть и не мартингалами, как, например, фрактальное броуновское движение (см. § 2с гл. III).

3. Подобно тому как в § 2а на описательном уровне давалось понятие *эффективного рынка*, так и сейчас, в заключение, целесообразно резюмировать отличительные особенности рынка с фрактальной структурой (по терминологии книги [386] — *фрактального рынка*):

- 1) в каждый момент времени на таком рынке цены корректируются инвесторами в зависимости от той информации, которая существенна для их *инвестиционного горизонта*; реакция инвесторов на получаемую информацию может быть и не мгновенной, а осуществляться лишь после соответствующего ее подкрепления;
- 2) в случае коротких временных горизонтов определяющую роль играет *техническая информация* и *технический анализ*, а при увеличении длины временного горизонта доминирующую роль начинает играть *фундаментальная информация*;
- 3) цены «складываются» в результате взаимодействия «краткосрочных» и «долгосрочных» инвесторов;
- 4) *высоочастотная* составляющая в ценах определяется действиями «краткосрочных» инвесторов; *низкочастотные, гладкие* составляющие отражают активность «долгосрочных» инвесторов;
- 5) рынок начинает терять *ликвидность, устойчивость*, когда на нем исчезают инвесторы с разными инвестиционными горизонтами, т. е. теряется его *фрактальность*.

4. Как следует из изложенного, в книге рассматриваются в основном модели («эффективных») рынков с *отсутствием арбитражных возможностей*.

Примерами таких детально изучаемых далее моделей являются «модель Башелье» (§ 4b гл. III и § 1a гл. VIII), «модель Блэка—Мертон—Шоулса» (§ 4b гл. III и § 4с гл. VII), «модель Кокса—Росса—Рубинштейна» (§ 1е гл. II и § 1d гл. V), в основе которых лежат соответственно линейное броуновское движение, геометрическое броуновское движение и геометрическое случайное блуждание.

Из приведенного в п. 3 качественного описания «фрактальных» рынков представляется весьма правдоподобным, что на них могут *возникать арбитражные возможности*.

Простейшими примерами моделей с такими свойствами являются, как недавно было установлено Роджерсом (L. R. C. Rogers. Arbitrage with fractional Brownian motion // Mathematical Finance, 7 (1997), с. 95–105), *модифицирован-*

ные модели Башелье и Блэка—Мертон—Шоулса с заменой в них броуновского движения на фрактальное броуновское движение с  $\mathbb{H} \neq \frac{1}{2}$ .

**Замечание.** Фрактальное броуновское движение с  $\mathbb{H} \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$  не является семимартингалом, [304], и поэтому для него отсутствуют мартингальные меры; см. подробнее § 2с гл. III. Это обстоятельство является косвенным указанием (ср. с утверждением первой фундаментальной теоремы в § 2d гл. V) на возможность (но не необходимость!) возникновения в этих и подобных моделях арбитража.

### 3. Цели и задачи финансовой теории, инженерии и финансово-актуарных расчетов

#### § 3а. Роль финансовой теории и финансовой инженерии. Финансовый риск

1. Проведенное в предшествующих разделах описательное изложение, касающееся финансовых структур, финансового рынка, действующего в условиях неопределенности, достаточно четко выделяет *риск* как одно из центральных понятий и в *финансовой теории*, и в *теории страхования*.

Это понятие является достаточно емким, и с содержательной его стороной каждый достаточно хорошо знаком.

Так, *риск кредитования* связан с теми потерями, которые могут возникнуть у кредитора, если получатель кредита не сможет выполнить своих обязательств.

*Операционный риск* возможен в результате ошибок при платежных операциях.

*Инвестиционный риск* связан с неудовлетворительной проработкой деталей инвестиционного проекта, неудачными решениями, возможными изменениями экономической, политической ситуаций и т. п.

Финансовая математика и финансовая инженерия (в части оперирования с ценными бумагами) имеет дело главным образом с *рыночным риском*, вызванным неопределенностями в изменениях рыночных цен, процентных ставок, неопределенностью в действиях и решениях участников рынка и т. п.

Резкое увеличение интереса *теории финансов* к ее математике и инженерии (особенно в последние 2–3 десятилетия) требует своего объяснения. Ответ здесь, пожалуй, весьма прост, и кроется он в радикальных изменениях финансового рынка — изменении его структуры, большой изменчивости (волатильности) в ценах, появлении весьма изощренных финансовых инструментов, появлении новых технологических возможностей в анализе цен и т. п.

Все это предъявило к финансовой теории новые требования и поставило новые проблемы, для решения которых понадобилось привлечение весьма «высокой» математики.

2. При первом ознакомлении с финансовой математикой и финансовой инженерией, когда значительный акцент делается на «игровую» сторону дела («инвестор» против «рынка»), может сложиться впечатление, что основная цель финансовой математики состоит в том, чтобы выработать такие рекомендации и создать такие финансовые инструменты, которые давали бы возможность инвестору *«победить рынок»* или, по крайней мере, *«сильно не проиграть»*.

Однако роль теории финансов (включая и финансовую математику), финансовой инженерии значительно шире — они призваны помогать инвесторам в решении широкого круга вопросов *рационального размещения финансовых средств* с учетом риска, связанного со случайным характером «окружающей экономической среды» и вызванной этим неопределенностью как в ценах и объемах торговых сделок, так и в действиях участников рынка.

Важность и полезность методов финансовой математики и финансовой инженерии также и в том, что их рекомендации и разнообразные финансовые инновации играют роль «регулятора» в перераспределении средств, необходимых для лучшего функционирования как отдельных секторов экономики, так и всей экономики в целом.

Будучи «большой» и «сложной» системой, рынок ценных бумаг требует для своего анализа и довольно-таки сложных, далеко продвинутых математических методов, методов статистической обработки данных, численных методов и компьютерных средств. Не удивительно поэтому, что в финансовой литературе используются самые современные результаты стохастического анализа (*броуновское движение, стохастические дифференциальные уравнения, локальные мартингалы, предсказуемость* и т. д.), математической статистики (*бутстреп — bootstrap, метод складного ножа — jackknife* и т. д.), нелинейной динамики (*детерминистический хаос, бифуркации, фракталы*), и, конечно, трудно себе представить финансовую деятельность без *современной компьютерной техники*.

3. Теория Марковитца — это первая значительная проба сил вероятностно-статистических методов с целью минимизации неизбежного экономического и финансового риска путем рационального составления «портфеля ценных бумаг».

С точки зрения «риска» безусловные фундаментальные экономические положения говорят о том, что

1) *получение «большого» дохода сопряжено с большим риском*

и что при этом

2) *риск должен быть «оправданным», «разумным», «просчитанным».*

В связи с тезисом 1 можно сказать, что «большой доход — это компенсация за риск», и уместно снова напомнить известное выражение «Nothing

ventured, nothing gained», иначе говоря, «Кто не рискует, тот не выигрывает». В связи же с тезисом 2 напомним, что в теории Марковитца «просчитанность» риска реализовалась в составлении *эффективного портфеля* ценных бумаг, обеспечивающего максимальный средний доход при ограничении на величину «риска», измеряемого дисперсией. Еще раз отметим, что идея *диверсификации* при создании эффективного портфеля заняла прочное место в финансовой математике, стала отправным моментом при создании новых финансовых понятий (например *хеджирование*) различных финансовых инструментов (*опционы, фьючерсы, свопы* и т. д.) и нашла свое выражение в такой известной фразе, как «Don't put all your eggs in one basket».

Средне-дисперсионный анализ (mean-variance analysis) основывался на «квадратическом критерии качества», измеряя риск дисперсией дохода от выбранного портфеля ценных бумаг и считая, что исследуемая модель «статична». В современном анализе рассматриваются и более общие «функции качества» и «функции полезности» в проблематике оптимального «инвестирования, потребления, размещения». Важно при этом отметить новый аспект — *динамику* во времени, необходимость последовательного, шаг за шагом принятия решений — на основе лишь прошлой информации, т. е. без упреждения. «Статика» предусматривала, что мы интересуемся доходом в момент времени  $N > 0$ , а портфель составляется в момент времени  $n = 0$ , т. е. является  $\mathcal{F}_0$ -измеримым. «Динамика» же допускает развитие во времени, причем значение дохода в любой момент  $n \leq N$  определяется портфелем, составленным по информации до момента времени  $n - 1$ , т. е. являющимся  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримым, и так шаг за шагом.

В связи с вышесказанным становится понятным, что *динамика* соответствующих проблем потребовала привлечения в финансовую математику идей и методов *оптимального стохастического управления, стохастической оптимизации, динамического программирования, статистического последовательного анализа* и т. п.

Говоря о риске, вызванном разными видами «неопределенностей», разными видами «случайностей», нельзя не остановиться на вопросах *страхования «риска»*, которыми занимается *теория страхования*, или, в несколько более широком плане, — *теория актуарных расчетов*.

В следующем параграфе мы даем краткое описание, относящееся к возникновению страхования как некоторого механизма компенсации экономических потерь, к зарождению и роли профессии *актуарий*. Данный материал не будет использован в последующем изложении. Однако мы считаем его включение и целесообразным, и полезным, поскольку он дает представление об области, тесно связанной с финансами. К тому же становится все более ясной общность и идей, и методов финансовой и актуарной математики.

### § 3б. Страховой бизнес как социальный механизм компенсации экономических потерь

1. Слово *actuarius* (актуарий) в Древнем Риме относилось, с одной стороны, к тем, кто вел записи актов в Acta Publica в сенате, и, с другой стороны, к офицерам, которые оперировали с военными счетами и вели контроль за военными поставками.

В его английской версии (*actuary*) это слово претерпевало различные изменения. Сначала так назывались клерки и чиновники-регистраторы, затем секретари и советники совместных компаний (*joint-stock companies*) и в особенности страховых компаний. Со временем термин *актуарий* стали соотносить с теми, кто делает *математические вычисления, связанные с вероятностями длительности человеческой жизни*, дающими основу расчета контрактов страхования жизни, годовой ренты и т. д.

В современном понимании актуарий — это эксперт в *математике страхования*. Их часто называют *социальными математиками*, так как они играют ключевые роли в определении стратегии и политики не только страховых компаний, но и пенсионных и других фондов; правительственные актуарии ответственны за вопросы национального страхования, государственных пенсионных и других схем.

*Страхование* (*insurance, assurance*) — это социальный механизм, позволяющий индивидуумам и организациям компенсировать экономические потери, вызванные теми или иными неблагоприятными обстоятельствами.

*Страхование* призвано заменить *определенностью* ту *неопределенность* в экономической стоимости, которая может быть обусловлена будущими потерями.

*Страхование* может быть определено как некоторый социальный инструмент, в котором индивидуумы, организации посредством своих вкладов редуцируют или исключают определенную долю риска возможных потерь.

Человечество довольно быстро поняло, что наиболее эффективный способ уменьшения потерь от неопределенностей — это кооперативные устройства, позволяющие распределять стоимость потерь для конкретного индивидуума между всеми членами сообщества. Индивидуумы довольно быстро осознали, что трудно предсказывать время, место, характер событий, способных отрицательно повлиять на их экономическое состояние. Страхование явилось именно тем инструментом, который помогал индивидууму уменьшить, «смягчить» влияние неопределенности, неизвестности, неуверенности и т. п.

Было бы неправильно страхование (и соответствующую ему математику) сводить лишь, скажем, к страхованию жизни и имущества. Страхование надо понимать в более широком смысле, а именно, как страхование *риска*, что включает ситуации, связанные, например, с игрой на рынке ценных бумаг, с инвестированием не только внутри страны, но и за рубежом. Ниже мы увидим, что современное состояние *теории страхования* (в обычном понимании значения термина «*страхование*») характеризуется самым тесным

переплетением с *теорией финансов*. Ярким примером этого могут служить фьючерсные контракты на перестрахование, выпущенные в декабре 1992 года Чикагской торговой палатой.

В страховании не все виды «неопределенностей», не все «риски» подлежат страхованию. Здесь приняты следующие терминология и классификация, позволяющие обрисовать сферу действия страхования.

2. Все «неопределенности» принято относить к одной из двух групп: *чистые* и *спекулятивные*.

*Спекулятивная неопределенность* — это та, в которой возможен как финансовый *выигрыш*, так и финансовый *проигрыш* (и такие неопределенности могут, вообще говоря, и не страховаться).

*Чистые неопределенности* связаны с возможностью лишь только *потерь* (например, от пожара), и многие из них страхуются.

Часто оба эти вида неопределенностей заменяют одним словом *риск*. (Отметим, что в теории страхования можно встретить отождествление риска и чистой неопределенности; с другой стороны, известный популярный финансовый журнал «Risk» посвящен в основном спекулятивной неопределенности.)

Источником риска и вызванных им потерь является *опасность*, которую в страховании относят к одной из двух групп — *физических* и *моральных* опасностей.

К моральным относят опасности, которые связаны с нечестностью, недобросовестностью, небрежностью, умыслом и т. п. Примерами могут служить кражи, пожары и т. п.

К физическим опасностям относят, например, землетрясения, погоду, разные природные явления и т. п.

С риском можно «бороться» разными способами.

1. Можно риск сознательно избегать, предотвращая его сознательными решениями и действиями, рациональным поведением.
2. Риск можно редуцировать, перекладывая (перемещая) возможные потери на другие лица или организации.
3. Риск можно стараться редуцировать предсказанием. Статистические методы — важное оружие актуария в предсказании возможных потерь. В страховании *предсказание* и *аккумуляирование фондов* играют определяющую роль для успешного и гарантированного функционирования страховых компаний.

Хотя страхование — вполне логичное и во многих отношениях замечательное средство «борьбы» с риском, разумеется, не все неопределенности и связанные с ними финансовые потери им охватываются. Чтобы «риск» подлежал страхованию, он должен удовлетворять определенным требованиям. Например, при добровольном личностном страховании

- 1) должна существовать достаточно большая группа таких «однородных» страхуемых участников, что их «характеристики» в прошлом действенны и в будущем;
- 2) причины потерь не должны затрагивать сразу большое число страхуемых участников (катастрофические события типа войн, ядерного облучения и др. требуют специального рассмотрения);
- 3) причины и серьезность потерь не должны определяться умышленными действиями страхуемых; эти причины должны быть случайными;
- 4) рассматриваемые опасности должны давать потери, которые легко идентифицируются («потери трудно фальсифицировать»);
- 5) потенциальные потери, вызванные опасностями, должны быть достаточно большими («нет смысла страховать то, что связано с малыми, легко восполняемыми потерями»);
- 6) вероятность потерь должна быть достаточно малой (страховое событие должно происходить достаточно редко), с тем чтобы размер «страховки» был экономически приемлемым;
- 7) должна быть доступной статистика реальных данных как база для расчета вероятностей потерь («репрезентативность и возможность статистического оценивания»).

Эти и другие сходные требования образуют определенный минимум условий, необходимых для осуществления *страхования* и выработки соответствующих *схем страхования*, разнообразие которых объясняется различными факторами, такими как, например,

- (a) *вид страхования*,
- (b) *форма страхования*,
- (c) *способ платежей при страховании*,
- (d) *тип опасностей*, являющихся и могущих быть причинами риска и потерь.

К группе (a) видов страхования относят *страхование жизни, собственностно-сти, ответственности*.

К группе (b) форм страхования относят *добровольное* (или коммерческое) и *обязательное* (или социальное) страхование. Обе эти формы основаны на сходных принципах, но различны по своей философии и организации.

В группе (c) способы платежей (премии, выплаты) определяются контрактными условиями и варьируются от (страхового) полиса к полису.

К группе (d) относят упомянутые выше *физические и моральные опасности*.

3. Предмет *страхование*, его цели и задачи нельзя понять не только без знания внутренней структуры страхования, но и без знания соответствующей истории.

Можно сказать, что в определенном смысле страхование так же старо, как и само человеческое общество.



Старейшими известными формами страхования являются так называемые контракты *bottomry* и *respondencia* (на морские перевозки), обнаруженные в Вавилонских записях, относящихся к периоду 4–3 тысяч лет до нашей эры.

*Bottomry* (bottom — дно, днище) — контракт, являющийся по своей сути *закладом*, — имел форму займа судовладельцу (например, в виде товара, требующего доставки в определенное место), который в качестве залога предлагал не только судно или другую «осязаемую» ценность, но также и свою жизнь (что означало быть рабом), и жизнь членов семьи. (В случае *respondencia* в качестве залога выступал товар.)

Вавилоняне разработали также систему страховых контрактов, в которых поставщик товара в случае его рискованной перевозки соглашался аннулировать предоставляемый заем, если перевозчик был ограблен, захвачен в плен в расчете на выкуп и т. п.

Эта практика была легализована («Кодекс Хаммурапи») в период царствования Хаммурапи (Hammurabe), когда древневавилонское государство достигло своего расцвета (во втором веке до н. э.) и Вавилон был крупным торговым центром, через который проходили караванные пути.

Известно, что впоследствии практика этих контрактов перешла через финикийцев к грекам, римлянам и индусам. Она использовалась в ранних кодексах Римской цивилизации, законах Византийской империи; она находит свое отражение и в современных законах о страховании.

Зарождение страхования жизни прослеживается в греческих *thiasoi* и *eranoi*, в римских *collegia* от 600 г. до н. э. до конца Римской империи (годом падения Римской империи считается 476 г. н. э.). Первоначально *collegia* (ассоциации, гильдии) зарождались как религиозные группы, но постепенно становились все более утилитарными, осуществляя, например, похоронные услуги. Через похоронные клубы римляне оплачивали расходы по похоронам; в клубах имелись также зачатки страхования жизни.

Практика страхования «по премии» идет, видимо, от итальянских городов-республик (Рим, Венеция, Пиза, Флоренция, Генуя), примерно с 1250 г. н. э. А первый точно датированный контракт по страхованию был заключен в Генуе в 1347 году. Там же был заключен (1430 год) «истинный» контракт по страхованию жизни, который касался беременных женщин и рабов.

Контракты «годовой ренты» (annuity) были известны римлянам уже в первом веке н. э. (Это контракты, в которых страховой компании платится некоторая сумма, а взамен периодически получают платежи в оговоренном интервале времени или в конце жизни. В определенном смысле эти контракты противоположны контрактам по страхованию жизни, где, наоборот, страхуемый платит регулярные взносы и получает оптом некоторую сумму.)

Интересно отметить, что римский закон («Palcidian law») основывался на таблице значений ожидаемой продолжительности жизни (нужных при подсчете годовой ренты и т. п.). В 225 году Ульпиан составил более аккуратные таблицы, которые использовались в Tuscany вплоть до XVIII века.

Триста лет назад, в 1693 году, Эдмунд Галлей (с именем которого связана известная комета) усовершенствовал актуарные таблицы Ульпиана, считая, что число смертей в заданной группе людей в заданном интервале времени *детерминировано*. В 1756 году Дж. Подсон (Joseph Podson) подкорректировал таблицы Галлея, что дало возможность составить «шкалу премий по годам».

С ростом городов и торговли в средневековой Европе гильдии расширяли практику защиты их членов от пожаров, кораблекрушений, от нападения пиратов; практику помощи при похоронах, болезнях и др. Вслед за контрактами XIV века в Генуе морские контракты по страхованию быстро распространились практически во всех морских державах Европы.

Современная история *морского страхования* — это в значительной степени «история Ллойда» — корпорации страховщиков и страховых брокеров, образованной в 1689 году на базе кофейного магазина Эдварда Ллойда (Edward Lloyd), где торговцы, судовладельцы, морские страховщики собирались для заключения сделок относительно морских перевозок. В 1774 году эта корпорация была официально утверждена Королевским указом, а в 1871 году зарегистрирована актом парламента. Возникшая для нужд морского страхования, в настоящее время корпорация «Lloyd's» оперирует почти со всеми видами риска.

С 1974 года Lloyd's издает *ежедневную* газету с подробностями движения судов (а позднее и самолетов) и публикует информацию об авариях, катастрофах, кораблекрушениях и т. д.

*Еженедельно* Lloyd's публикует список судов, загружаемых в Британии и континентальных портах, с окончательными датами принятия грузов. Дает также общая информация о ситуации на страховом рынке.

В 1760 году Lloyd's образовал общество по инспектированию и классификации всех океанских судов грузоподъемностью более 100 тонн. Ллойдовские инспекторы периодически инспектируют и классифицируют суда согласно состоянию их корпуса, двигателей, спасательных средств и т. п. Общество дает также технические советы.

*Годичная* публикация «Lloyd's Register of British and Foreign Shipping» дает страховщикам доступ к информации, необходимой для заключения морских страховых контрактов, даже тогда, когда судно находится за тысячи миль вдали.

Большой пожар в Лондоне в 1666 году послужил причиной развития *страхования от пожаров*. (Первая страховая компания от пожаров была образована в 1667 году.) В 1854 году в Англии начинается страхование рисков от аварий паровых бойлеров; с 1880 года производится страхование ответственности работодателя, с 1895 года — страхование ответственности на транспорте, с 1899 года — страхование потерь от столкновений транспортных средств.

В Америке страховые компании от пожаров были образованы в Нью-Йорке в 1787 году и в Филадельфии в 1794 году. Почти с самого начала эти компании стали заниматься вопросами предотвращения и тушения пожа-

ров. Первая компания по страхованию жизни в Америке была образована в 1759 году.

Большой пожар в Нью-Йорке в 1835 году привлек внимание к необходимости иметь резервы для неожиданно больших («катастрофических») потерь. Большой пожар в Чикаго в 1871 году продемонстрировал, что размеры стоимости страхования от пожаров в современных «плотных» городах могут быть огромными. *Перестрахование* (потери покрываются многими компаниями) возникло именно как метод страхования в случае потерь от пожаров *катастрофических размеров* и сейчас стало обычным делом в разных видах страхования.

Из других исторически «первых» современных страховых форм в Америке отметим следующие: страхование от случайных увечий (1864 год), страхование ответственности за нанесение ущерба (1880 год), страхование от взломов (1885 год) и др.

В России первое страховое акционерное общество от огня возникло в Сибири в 1827 году. Первое же общество по страхованию жизни и доходов было образовано в России в 1835 году («Российское общество страхования капиталов и доходов»).

В XX столетии мы видим значительное расширение той сферы страхования, которая связана с внутренними перевозками сухопутными или водными путями («inland marine») и покрывает огромное количество товаров, включая туристский багаж, срочную почту, посылки, транспорт для перевозки, транзитные товары и даже мосты, туннели и т. п.

Страхование теперь можно получить практически в связи с любым мыслимым «страхуемым» риском. Компании типа Lloyd's страхуют ноги балерин, пальцы пианистов, приемы для гостей на открытом воздухе от потерь в ненастье и т. д.

С конца XIX века стала расти тенденция проникновения государства в область страхования, особенно в связи с защитой рабочих от болезней, нетрудоспособности (временной или постоянной), по возрасту или в связи с увольнением. Пионером в области так называемого социального страхования была, по-видимому, Германия (законы 1883–89 годов).

В середине нашего столетия в страховой практике отмечается тенденция к слиянию, консолидации страховых компаний. Так, в США в период 1955–65 гг. такое слияние имело место между страховыми компаниями, имеющими дело со страхованием жизни и собственности. Появилась новая форма «слияния» — *холдинговая компания*, владеющая акциями других компаний с филиалами, которые в свою очередь состоят не только из страховых компаний, но и из компаний, имеющих дело с банковской системой, компьютерным обеспечением и др. Преимущество компаний, входящих в холдинг, состоит в разнообразии, диверсификации возможностей, которыми они обладают. В частности, для страховых компаний становится меньше ноша налогов, если они являются частью холдинговой компании. Холдинговая компания может оперировать с акциями в других странах, что иногда невозможно

для страховых компаний. Это дает страховым компаниям большую «подъемную силу» («leverage»), поскольку они получают возможность оперировать с большими ресурсами при меньших инвестициях.

4. Первоначально профессия актуариев была связана в основном со страхованием жизни, но сейчас их деятельность распространяется и на другие смежные сферы. Чтобы получить некоторое количественное представление о числе актуариев, занятых в разных компаниях, фирмах, правительственных организациях, ..., приведем данные по Великобритании (на 1988 год) по *Институту* актуариев в Лондоне, основанному в 1848 году, и *Факультету* актуариев в Эдинбурге, основанному в 1856 году.

Вид работы	Институт	Факультет	Всего	%
Компании по страхованию жизни	853	252	1105	60,2
Компании по страхованию собственности	30	2	32	1,7
Консультанты	403	65	468	25,5
Инвестиционные фирмы	60	19	79	4,3
Правительственные организации	21	3	24	1,3
Индустриальные компании	65	1	66	3,6
Прочие	54	8	62	3,4
Всего	1486	350	1836	100,0

В разных странах мира созданы общества актуариев. Существует *Международная актуарная ассоциация* (IAA — *International Actuarial Association*). Регулярно проводятся *международные конгрессы актуариев* (первый состоялся в Брюсселе в 1895 году).

В США имеется несколько профессиональных организаций, представляющих актуариев. Это, прежде всего, *Общество актуариев* (*Society of Actuaries*), образовавшееся в 1949 году в результате слияния двух актуарных организаций. Сама же профессия актуария в 1989 году отметила свое столетие.

Это общество, насчитывающее более 11 тысяч членов, является основной международной профессиональной организацией актуариев в США и Канаде, имеющей дело в основном со страхованием жизни и здоровья, пенсионными делами, пособиями. Одно из направлений деятельности Общества — проведение экзаменов и аттестация на звание *ассоциированного члена* и *действительного члена* Общества.

Вторым из основных обществ является *Casualty Actuarial Society* — общество, объединяющее актуариев и специалистов, занимающихся вопросами *страхования собственности, несчастных случаев* (*casualty*), *компенсаций и ответственности*.

Эти два общества совместно осуществляют обучение студентов и проводят экзамены.

Другими организациями актуариев являются: *Американская академия актуариев*, *Американское общество пенсионных актуариев*. Следует упомянуть и *Канадский институт актуариев*, тесно взаимодействующий с вышеперечисленными обществами.

Одна из основных задач Американской академии актуариев — подготовка информации по страхованию для правительства.

По данным на 1994 год квалификационное звание актуария в Северной Америке имеют около 18 тысяч человек.

Основным управляющим органом *Общества актуариев* является Совет Общества, состоящий из 30 избранных членов — президента, президента-электа (president-elect), шести вице-президентов, секретаря, казначея, двух паст-президентов (past-president) и 18 членов.

Вице-президенты ответственны за разные виды активности Общества, такие как экзамены, научные исследования, связь с общественностью, «карьерная поддержка», публикации и др. Большую роль в деятельности Общества играют волонтеры. Около 500 членов Общества принимают участие в программах обучения и экзаменах.

Существуют две категории членства — *ассоциированные* члены и *действительные* члены. Стать ими можно, только успешно выдержав определенное количество экзаменов, которые принимаются 2 раза в год.

Чтобы стать ассоциированным членом, надо пройти обучение (очное или заочное) и сдать экзамены. Обычно на это уходит 3–4 года. На сдачу экзаменов на действительного члена уходит 5–7 лет. Примерно половина всех членов Общества — это действительные члены.

Общество актуариев в США имеет разнообразные формы поддержки научных исследований. Оно имеет свой профессиональный журнал, участвует в составлении программ конференций, семинаров, симпозиумов. Общество публикует отчеты, исследования, книги, таблицы, учебные материалы.

Оно проводит годичное (в конце года) собрание членов и три весенних собрания. В рамках учебно-образовательной программы Общество доставляет своим членам резюме текущей актуарной литературы, материалы об экзаменах, публикует информацию о возможностях работы для актуариев. Общество публикует списки успешно сдавших экзамены на звание ассоциированного и действительного членов, издает большое число буклетов о профессии актуария, об экзаменах, учебных курсах, программах; имеет свои годовые труды; четыре раза в год печатаются сообщения о четырех «больших» собраниях Общества. Бюллетень «*The Actuary*» содержит текущую информацию по различным профессиональным вопросам деятельности общества, печатает письма редактору, что дает возможность быстрого обмена мнениями. Издается бюллетень десять раз в год.

Вопрос об экзаменах и членстве решается в Обществе актуариев следующим образом.

Каждый прошедший актуарное обучение может быть допущен к вступлению в члены Общества. После сдачи экзаменов по так называемой «про-

грамме 100» Совет Общества рассматривает заявление о праве быть ассоциированным членом. В случае его обоснованности сдавший экзамены таким членом и становится. По «программе 100» надо сдать 7 обязательных экзаменов и 6 по выбору. При этом надо получить 155 очков («credits») по обязательным экзаменам и 45 очков по экзаменам по выбору. (Количество очков за экзамен определяется его сложностью и важностью; шкала оценок такова: 10, 15, 30, 40 очков. Кроме того, каждый экзамен оценивается по десятибалльной системе: баллы от 6 до 10 считаются проходными, от 0 до 5 — непроходными.) Общее количество набранных проходных баллов дает представление об уровне сдавшего экзамены.

Экзамены на действительного члена состоят из экзаменов по «программе 100–500», которые подразделяются на три серии «100», «200» и «300–500» и включают как обязательные экзамены, так и экзамены и семинары по выбору. Ядро этих экзаменов составляет серия «200», в которую входят экзамены по *актуарной практике, инвестированию и финансам*.

5. Невозможно сейчас практику страхования, теорию страхования рассматривать изолированно от практики и теории инвестирования и финансов, имеющих дело с рынком ценных бумаг.

Можно считать определенным, что производные финансовые инструменты (фьючерсы — futures, опционы — options, свопы — swaps, варранты — warrants, стрейддлсы — straddles, спрэды — spreads и т. д.) будут играть все более возрастающую роль в глобальной финансовой системе. Будет, несомненно, происходить более активное проникновение финансовых методов расчетов в актуарную науку. В связи с этим актуарные и финансовые проблемы, так или иначе связанные с разными формами риска, оправданно и целесообразно рассматривать не изолированно, а наоборот, одновременно, в одном пакете. Об этом свидетельствует также и следующая классификация периодов развития страховой математики, предложенная известным швейцарским специалистом в актуарной науке Г. Бюльманом (H. Bühlmann).

*Первый период* («страхование первого рода») восходит к Э. Галлею, который, как уже отмечалось выше, в 1693 году составил таблицы страхования жизни, считая, что число смертей в заданной группе людей и в заданном интервале времени детерминированно.

*Второй период* («страхование второго рода») связан с внедрением вероятностной идеологии и вероятностно-статистических методов как в страхование жизни, так и в другие виды страхования.

*Третий период* («страхование третьего рода») характеризуется активным использованием финансовых инструментов, финансовой инженерии с целью уменьшения риска страхования.

Математика в страховании второго рода основана на законе больших чисел, центральной предельной теореме, теории случайных процессов пуассоновского типа. Теория же страхования третьего рода более изощрена в своих методах: ей требуются стохастическое исчисление, стохастические

дифференциальные уравнения, мартингалы и родственные понятия, а также новые статистические методы и, конечно, современная компьютерная техника и современное программное обеспечение.

Хорошей иллюстрацией высказанной мысли о необходимости и полезности комплексного рассмотрения *чисто актуарных* и *чисто финансовых* проблем рынка ценных бумаг служит эффективность применения финансовых «опционных» методов в актуарных расчетах, связанных с перестрахованием *катастрофических событий* [87].

На международном рынке под *катастрофическими* понимают события, в которых «потери превышают 5 млн долларов застрахованной собственности и касаются значительного числа страхователей и застрахованных» (извлечение из «Property Claims Services», 1993). При этом реальные потери в ряде катастрофических случаев таковы, что ни одна страховая компания не в состоянии (да и не будет) страховать такие случаи. Этим и объясняется тот факт, что страхование таких событий становится делом не только коллективным, но и интернациональным.

Вот примеры потерь от некоторых катастрофических событий.

В период с 1970 года до середины 1993 года в среднем каждый год происходило по 34 катастрофы с годовыми потерями 2,5 млрд долларов ( $2,5 \times 10^9$ ). В большинстве случаев катастрофические события приносили убыток менее 250 млн долларов. Однако же, например, потери от урагана «Andrew» (в августе 1992 года) оценивались в 13,7 млрд долларов, из которых страхованием было выплачено лишь около 3 млрд долларов.

Ураган Хьюго (1989 год) принес потери в 4,2 млрд долларов, а ураган Иники, происшедший во втором квартале 1992 года, оценивается как четвертый по убыткам ураган с 1949 года.

Учитывая значительность страховых выплат за катастрофические последствия (от ураганов, ливней, землетрясений, наводнений), биржа СВОНТ (Chicago Board of Trade) в декабре 1992 года ввела *фьючерсные* страховые контракты на катастрофические события как *альтернативу* перестрахованию. Эти контракты легко реализуемы (*ликвидны*), анонимны, имеют низкие операционные издержки, а наличие клиринговой палаты, через которую проходят все перерасчеты, вызывает к ним доверие, столь важное в подобных делах. При этом оказалось, что расчет рыночной цены таких фьючерсных контрактов сводится, в сущности, к расчету рациональной стоимости «арифметического азиатского опциона-колл» (см. определение в § 1с). Подробнее об этом см. в [87].

### § 3с. Классический пример актуарных расчетов.

#### Теорема Лундберга—Крамёра

1. Парадоксальным образом, почти в то же самое время, когда Л. Башелье ввел в своей диссертации «Théorie de la spéculation» (1900 г.) броуновское движение для описания цен акций и тем самым заложил основы *стохастической*

финансовой математики, в 1903 году Ф. Лундберг (Ph. Lundberg) в Уппсале (Швеция) опубликовал диссертацию «Approximerad framsröllning av sannolikhetsfunctionen. Atersförsäkring av kollektivrisker», заложившую вероятностные основы *актуарной теории риска* (второго рода), систематически используя процесс Пуассона, который вместе с броуновским движением лежит в фундаменте общей теории случайных процессов.

В 1929 году по инициативе ряда шведских страховых компаний в Стокгольмском университете была образована профессорская единица по страховой (актуарной) математике. Она была предложена Г. Крамэру, и с этого времени началась деятельность «Стокгольмской группы», известной своими результатами и в актуарной математике, и в общей теории вероятностей, статистике и случайных процессах.

Вот как формулируется классический результат теории актуарных расчетов — *фундаментальная теорема теории риска Лундберга—Крамера*.

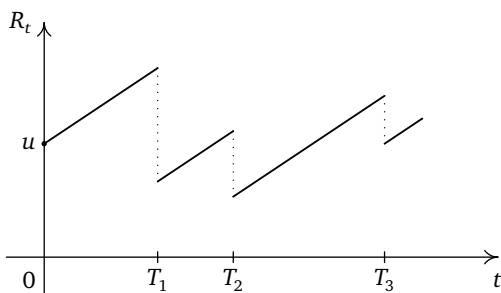


Рис. 10. Процесс риска  $R_t$

Определим процесс риска (см. рис. 10), скажем, некоторого страхового бизнеса следующим образом:

$$R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k,$$

где

$u$  — начальный капитал,

$c$  — скорость поступления «премий», взносов,

$(\xi_k)$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с некоторой функцией распределения  $F(x) = P\{\xi_1 \leq x\}$ ,  $\mu = E \xi_1$  ( $F(0) = 0$ ,  $\mu < \infty$ ),

$N = (N_t)_{t \geq 0}$  — процесс Пуассона,  $N_t = \sum_k I(T_k \leq t)$ , где  $T_1, T_2, \dots$  — моменты поступлений требований к оплате, причем  $(T_{k+1} - T_k)_{k \geq 1}$  являются независимыми величинами, имеющими экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ :

$$P\{T_{k+1} - T_k \geq t\} = e^{-\lambda t}.$$



Ясно, что

$$E R_t = u + (c - \lambda\mu)t = u + \rho\lambda\mu t$$

с коэффициентом  $\rho = c/(\lambda\mu) - 1$ , предполагаемым *положительным* («условие положительности чистого дохода»).

Одна из первых естественных задач, связанных с этой моделью, — это расчет вероятности разорения вообще,  $P(\tau < \infty)$ , или вероятности разорения  $P(\tau \leq t)$  до момента времени  $t$ , где

$$\tau = \inf\{t: R_t \leq 0\}.$$

**Теорема Лундберга—Крамера** утверждает следующее.

Пусть существует такое  $R > 0$ , что выполнено условие

$$\int_0^\infty e^{Rx}(1 - F(x)) dx = \frac{c}{\lambda}.$$

Тогда

$$P(\tau < \infty) \leq e^{-Ru},$$

где  $u$  — начальный капитал.

Сформулированные в модели Лундберга—Крамера предположения естественным образом можно ослаблять, а саму модель усложнять. Можно, например, считать, что процесс риска имеет вид

$$R_t = u + (ct + \sigma B_t) - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k,$$

где  $(B_t)$  — броуновское движение, а  $(N_t)$  — процесс Кокса (т. е. «считающий процесс» со случайной интенсивностью; см., например, [250]).

В заключение остановимся кратко на вопросе о характере распределений  $F = F(x)$  величин выплат. События, связанные с выплатами, принято (правда, весьма условно) относить к одному из трех типов:

- нормальные,
- экстремальные,
- катастрофические.

Для описания *нормальных* событий используются распределения с быстро убывающими «хвостами» (например, экспоненциальное с условием  $1 - F(x) \sim e^{-x}$ ,  $x \rightarrow \infty$ ).

Для описания «экстремальных» событий используют распределения  $F = F(x)$  с «тяжелыми хвостами», например,  $1 - F(x) \sim x^{-\alpha}$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $\alpha > 0$  (распределение типа Парето) или

$$1 - F(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^p\right\}, \quad x > \mu$$

(распределение Вейбулла) с  $p \in (0, 1)$ .

Отметим, что теорема Лундберга—Крамера относится к *нормальному* типу и неприменима к случаю выплат большого размера. (Тогда даже не определен «коэффициент Лундберга»  $R$ . По поводу доказательства теоремы Лундберга—Крамера см., например, [439, англ. изд.].)



# Глава II

## Стохастические модели. Дискретное время

1. Необходимые вероятностные понятия и некоторые модели динамики рыночных цен . . . . .	101
§ 1a. Неопределенность и нерегулярность поведения цен, вероятностное их описание и представление, 101. — § 1b. Разложение Дуба. Канонические представления, 108. — § 1c. Локальные мартингалы, мартингальные преобразования, обобщенные мартингалы, 114. — § 1d. Гауссовские и условно-гауссовские модели, 123. — § 1e. Биномиальная модель эволюции цен, 129. — § 1f. Модели с дискретным вмешательством случая, 132.	
2. Линейные стохастические модели . . . . .	138
§ 2a. Модель скользящего среднего $MA(q)$ , 140. — § 2b. Авторегрессионная модель $AR(p)$ , 146. — § 2c. Модель авторегрессии и скользящего среднего $ARMA(p, q)$ и интегральная модель $ARIMA(p, d, q)$ , 158. — § 2d. Прогнозирование в линейных моделях, 162.	
3. Нелинейные стохастические условно-гауссовские модели . . . . .	173
§ 3a. Модели $ARCH$ и $GARCH$ , 174. — § 3b. Модели $EGARCH$ , $TGARCH$ , $HARCH$ и др., 183. — § 3c. Модели стохастической волатильности, 189.	
4. Приложение: модели динамического хаоса . . . . .	196
§ 4a. Нелинейные хаотические модели, 196. — § 4b. Проблематика различимости «хаотических» и «стохастических» последовательностей, 202.	

## 1. Необходимые вероятностные понятия и некоторые модели динамики рыночных цен

### § 1а. Неопределенность и нерегулярность поведения цен, вероятностное их описание и представление

1. Предположим, что единицей измерения времени является один день ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и

$$S = (S_n)_{n \geq 0}$$

— рыночная цена, скажем, акции, обменный курс двух валют или какой-либо другой финансовый индекс (без каких-либо ограничений на время его «жизни», как это имеет место для цен облигаций). Эмпирический анализ значений  $S_n$ ,  $n \geq 0$ , показывает, что они меняются весьма нерегулярно, флуктуируют так, как если бы, по словам М. Кендалла (см. ранее § 2а, гл. I), «...the Demon of Chance drew a random number ... and added it to the current price to determine the next ... price».

Л. Башелье, без сомнения, был первым, кто стал для описания цен  $(S_n)_{n \geq 0}$  пользоваться понятиями и методами *теории вероятностей*, дающей модель для изучения эмпирических феноменов, характеризуемых статистической неопределенностью, но в то же самое время обладающих свойствами устойчивости статистических частот.

Придерживаясь вероятностного подхода и следуя общепринятой ныне аксиоматике *теории вероятностей* Колмогорова, мы будем предполагать, что все рассмотрения ведутся на некотором *вероятностном пространстве*

$$(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

где

$\Omega$  — пространство элементарных событий  $\omega$  (состояний рынка, в рассматриваемом контексте);

$\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$  (совокупность событий, наблюдаемых на рынке);

$P$  — вероятность, вероятностная мера на  $\mathcal{F}$ .

Как отмечалось в § 1а гл. I, *время* и *динамика* являются неотъемлемыми компонентами финансовой теории, в связи с чем целесообразно исходное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  специфицировать, считая заданным поток  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$   $\sigma$ -алгебр таких, что

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}.$$

Смысл введения этого потока неубывающих  $\sigma$ -подалгебр, входящих в  $\mathcal{F}$  и называемых также *фильтрацией*, проясняется следующей интерпретацией:

$\mathcal{F}_n$  — совокупность событий, *наблюдаемых до момента  $n$*  (включительно).

По-другому можно сказать, что  $\mathcal{F}_n$  — это доступная наблюдателю «информация» о состоянии рынка до момента времени  $n$ . (В рамках концепции «эффективного» рынка это может быть, например, одна из трех  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_n^1$ ,  $\mathcal{F}_n^2$ ,  $\mathcal{F}_n^3$ ; см. § 2а гл. I.)

Итак, будем считать, что нашей базовой вероятностной моделью является *фильтрованное вероятностное пространство*

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, P),$$

называемое также *стохастическим базисом*.

Во многих случаях целесообразно *расширить* понятие стохастического базиса, считая, что вместо *единственной* вероятностной меры  $P$  задано целое семейство  $\mathcal{P} = \{P\}$  вероятностных мер. (Вызвано это тем, что часто бывает трудно специфицировать какую-то одну конкретную меру  $P$ .) Пользуясь терминологией статистической теории решений, набор объектов  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathcal{P})$  можно назвать *фильтрованным стохастическим (статистическим) экспериментом*.

2. Если интерпретировать  $\mathcal{F}_n$  как информацию, доступную к моменту времени  $n$ , то естественно считать, что

$$S_n \text{ являются } \mathcal{F}_n\text{-измеримыми,}$$

т. е., образно говоря, считать, что значения цен складываются в зависимости от событий, наблюдаемых на рынке до момента времени  $n$  (включительно).

Исходя из смысла  $S_n$  как «цены» (скажем, акции) в момент времени  $n$ , будем предполагать, что  $S_n > 0$ ,  $n \geq 0$ .

Приведем теперь два наиболее распространенных способа представления цен  $S = (S_n)_{n \geq 0}$ .

Первый способ (I), аналогичный формуле сложных процентов (compound return), см. § 1b гл. I, исходит из представления

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \quad (1)$$

где  $H_n = h_0 + h_1 + \dots + h_n$ ,  $h_0 = 0$ ,  $n \geq 0$ , причем случайные величины  $h_n = h_n(\omega)$  являются  $\mathcal{F}_n$ -измеримыми.

Таким образом, здесь

$$H_n = \ln \frac{S_n}{S_0} \quad (2)$$

и «возврат», «отдача», «логарифмическая прибыль» (return) составляет

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} \right), \quad (3)$$

$$\Delta S_n = S_n - S_{n-1}.$$

Положим

$$\hat{h}_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}, \quad \hat{H}_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \hat{h}_k. \quad (4)$$

Тогда формула (1) переписывается в виде

$$S_n = S_0 \prod_{1 \leq k \leq n} (1 + \hat{h}_k), \quad (5)$$

или, что равносильно, в виде

$$S_n = S_0 \prod_{1 \leq k \leq n} (1 + \Delta \hat{H}_k) = S_0 e^{\hat{H}_n} \prod_{1 \leq k \leq n} (1 + \Delta \hat{H}_k) e^{-\Delta \hat{H}_k}. \quad (6)$$

Представление (5) — это и есть второй способ (II) представления цен, аналогичный формуле простых процентов (simple return).

Обозначим через  $\mathcal{E}(\hat{H})_n$  выражение, стоящее в правой части формулы (6):

$$\mathcal{E}(\hat{H})_n = e^{\hat{H}_n} \prod_{1 \leq k \leq n} (1 + \Delta \hat{H}_k) e^{-\Delta \hat{H}_k}. \quad (7)$$

Определяемая этим выражением стохастическая последовательность

$$\mathcal{E}(\hat{H}) = (\mathcal{E}(\hat{H})_n)_{n \geq 0}, \quad \mathcal{E}(\hat{H})_0 = 1,$$

называется *стохастической экспонентой*, порожденной величиной  $\hat{H} = (\hat{H}_n)_{n \geq 0}$ ,  $\hat{H}_0 = 1$ , или *экспонентой Долеана*.

Таким образом, можно сказать, что первый способ представления цен (I — compound return) использует *обычную экспоненту*:

$$S_n = S_0 e^{H_n},$$

второй же способ (II — simple return) для своего описания использует *стохастическую экспоненту*:

$$S_n = S_0 \mathcal{E}(\hat{H})_n. \quad (8)$$

При этом из формул (2)–(4) следует, что

$$\hat{H}_n = \sum_{1 \leq k \leq n} (e^{\Delta H_k} - 1),$$

что равносильно представлению

$$\hat{H}_n = H_n + \sum_{1 \leq k \leq n} (e^{\Delta H_k} - \Delta H_k - 1). \quad (9)$$

Из формул (3) и (4) также понятно, что

$$H_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \ln(1 + \Delta \hat{H}_k), \quad (10)$$

где  $\hat{h}_n = \Delta \hat{H}_n > -1$  вследствие предположения  $S_n > 0$ .

Полезно отметить, что стохастическая экспонента удовлетворяет стохастическому разностному уравнению

$$\Delta \mathcal{E}(\hat{H})_n = \mathcal{E}(\hat{H})_{n-1} \Delta \hat{H}_n, \quad (11)$$

что непосредственно следует из формулы (7).

**Замечание 1.** Представления (1) и (8) даны в случае дискретного времени  $n = 0, 1, \dots$ . В том же случае, когда цены  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  эволюционируют в непрерывном времени  $t \geq 0$ , обычно предполагается, что процессы  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  и  $\hat{H} = (\hat{H}_t)_{t \geq 0}$  являются *семимартингалами* (см. раздел 5 в гл. III). Тогда из формулы Ито (§ 5с гл. III; см. также [250, гл. I, § 4е]) следует, что

$$e^{H_t} = \mathcal{E}(\hat{H})_t,$$

где

$$\hat{H}_t = H_t + \frac{1}{2} \langle H^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} (e^{\Delta H_s} - 1 - \Delta H_s) \quad (12)$$

и  $\mathcal{E}(\hat{H}) = (\mathcal{E}(\hat{H})_t)_{t \geq 0}$  — стохастическая экспонента:

$$\mathcal{E}(\hat{H})_t = e^{\hat{H}_t - \frac{1}{2} \langle \hat{H}^c \rangle_t} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta \hat{H}_s) e^{-\Delta \hat{H}_s}, \quad (13)$$

которая удовлетворяет (ср. с (11)) линейному стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\mathcal{E}(\hat{H})_t = \mathcal{E}(\hat{H})_{t-} d\hat{H}_t. \quad (14)$$

(В формулах (12) и (13) через  $\langle H^c \rangle$  и  $\langle \hat{H}^c \rangle$  обозначены квадратичные характеристики непрерывных мартингалов составляющих у семимартингалов  $H$  и  $\hat{H}$ ; см. раздел 5 в гл. III. По поводу стохастических дифференциальных уравнений для случая, когда  $\hat{H}$  является броуновским движением, см. § 3е гл. III.)

Таким образом, для случая непрерывного времени аналогами формул (1) и (8) являются соответственно представления

$$S_t = S_0 e^{H_t} \quad (15)$$

и

$$S_t = S_0 \mathcal{E}(\hat{H})_t, \quad (16)$$

где процесс  $\hat{H} = (\hat{H}_t)_{t \geq 0}$  связан с  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  формулой (12). Присутствующих в (12) ряд абсолютно сходится, поскольку на каждом интервале  $[0, t]$



у семимартингала с вероятностью единица имеется лишь конечное число «больших» скачков  $(|\Delta H_s| > \frac{1}{2})$  и  $\sum_{0 < s \leq t} |\Delta H_s|^2 < \infty$ . (См. замечание 3, § 5б гл. III.)

**Замечание 2.** Из формул (3) и (4) следует, что

$$h_n = \ln(1 + \hat{h}_n) \quad (17)$$

и

$$\hat{h}_n = e^{h_n} - 1. \quad (18)$$

Понятно, что при малых значениях  $h_n$  имеем

$$\hat{h}_n \approx h_n, \quad (19)$$

при этом

$$\hat{h}_n - h_n = \frac{1}{2}h_n^2 + \frac{1}{6}h_n^3 + \dots \quad (20)$$

**3.** Остановимся на проблеме описания распределения вероятностей последовательностей  $S = (S_n)_{n \geq 0}$ ,  $H = (H_n)_{n \geq 0}$ .

С точки зрения классической теории вероятностей и далеко продвинутой «статистики нормального распределения» было бы весьма привлекательно рассчитывать на то, что последовательность  $H = (H_n)_{n \geq 0}$  является гауссовской (нормально распределенной). Если

$$H_n = h_1 + \dots + h_n, \quad n \geq 1, \quad (21)$$

то свойства такой последовательности полностью определяются двумерными распределениями последовательности  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ , характеризующимися средними

$$\mu_n \equiv E h_n, \quad n \geq 1,$$

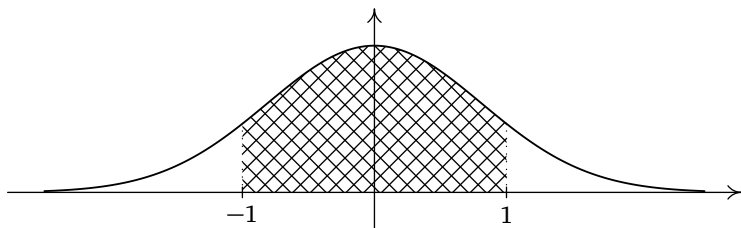
и ковариациями

$$\text{Cov}(h_n, h_m) \equiv E h_n h_m - E h_n E h_m, \quad m, n \geq 1.$$

Предположение нормальности существенно упрощает решение многих вопросов, зависящих от свойств *распределений*. Так, например, *теорема о нормальной корреляции* (см., например, [303, гл. 13]) в явном виде дает формулу для условного математического ожидания  $\tilde{h}_{n+1} = E(h_{n+1} | h_1, \dots, h_n)$ , являющаяся оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой  $h_{n+1}$  по  $h_1, \dots, h_n$ :

$$\tilde{h}_{n+1} = \mu_{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i (h_i - \mu_i), \quad (22)$$

где коэффициенты  $a_i$  подсчитываются по матрице ковариаций (см. [303, гл. 13], а также [439, гл. II, § 13]).



**Рис. 11.** График плотности  $\varphi_{(0,1)}(x)$  стандартного нормального распределения. Площадь заштрихованной части равна примерно 0,6827

Формула (22) особенно проста, если  $h_1, \dots, h_n$  независимы. В этом случае

$$a_i = \frac{\text{Cov}(h_{n+1}, h_i)}{D h_i},$$

и оценка имеет вид

$$\tilde{h}_{n+1} = E h_{n+1} + \sum_{i=1}^n \frac{\text{Cov}(h_{n+1}, h_i)}{D h_i} (h_i - E h_i). \quad (23)$$

Ошибка оценивания

$$\Delta_{n+1} = E(\tilde{h}_{n+1} - h_{n+1})^2$$

определяется по формуле

$$\Delta_{n+1} = D h_{n+1} - \sum_{i=1}^n \frac{\text{Cov}^2(h_{n+1}, h_i)}{D h_i}. \quad (24)$$

Заметим, что если

$$\varphi_{(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

— плотность нормального распределения с параметрами  $(\mu, \sigma^2)$ , то (см. рис. 11)

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \varphi_{(\mu, \sigma^2)}(x) dx = 0,6827\dots$$

Точно так же

$$\int_{\mu-1.65\sigma}^{\mu+1.65\sigma} \varphi_{(\mu, \sigma^2)}(x) dx \approx 0,90. \quad (25)$$

В силу гауссовости

$$h_{n+1} - \tilde{h}_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, \Delta_{n+1}),$$

и согласно формуле (25) получаем

$$P\{|h_{n+1} - \tilde{h}_{n+1}| \leq 1,65\sqrt{\Delta_{n+1}}\} \approx 0,90.$$

Следовательно, можно утверждать, что с вероятностью, близкой к 0,90, ожидаемое значение величины  $h_{n+1}$  будет принадлежать доверительному интервалу

$$[\tilde{h}_{n+1} - 1,65\sqrt{\Delta_{n+1}}, \tilde{h}_{n+1} + 1,65\sqrt{\Delta_{n+1}}].$$

Отсюда вытекает, что в 90 % случаев прогнозируемое значение  $\tilde{S}_{n+1}$  величины рыночной цены  $S_{n+1}$  (по наблюдениям  $h_1, \dots, h_n$ ) лежит в интервале

$$[S_n e^{\tilde{h}_{n+1} - 1,65\sqrt{\Delta_{n+1}}}, S_n e^{\tilde{h}_{n+1} + 1,65\sqrt{\Delta_{n+1}}}]$$

4. Оказывается, однако, что к привлекательной гипотезе «нормальности» распределений величин  $h_n$ ,  $n \geq 1$ , надо относиться с осторожностью. Дело в том, что эмпирический анализ многих финансовых данных показывает (см. далее гл. IV), что

(а) число выборочных значений, не попадающих в «доверительные» интервалы  $[\bar{h}_n - k\hat{\sigma}_n, \bar{h}_n + k\hat{\sigma}_n]$ ,  $k = 1, 2, 3$ , где  $\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i$  — выборочное среднее и  $\hat{\sigma}_n$  — стандартное отклонение,

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h}_n)^2,$$

значительно больше, чем это должно было быть при гипотезе нормальности; наглядно это означает, что «хвосты» эмпирических плотностей убывают значительно медленнее, нежели для гауссовского распределения («тяжелые хвосты»);

(б) эксцесс, или коэффициент вытянутости (kurtosis),

$$\hat{k}_n = \frac{\hat{m}_4}{\hat{m}_2^2} - 3,$$

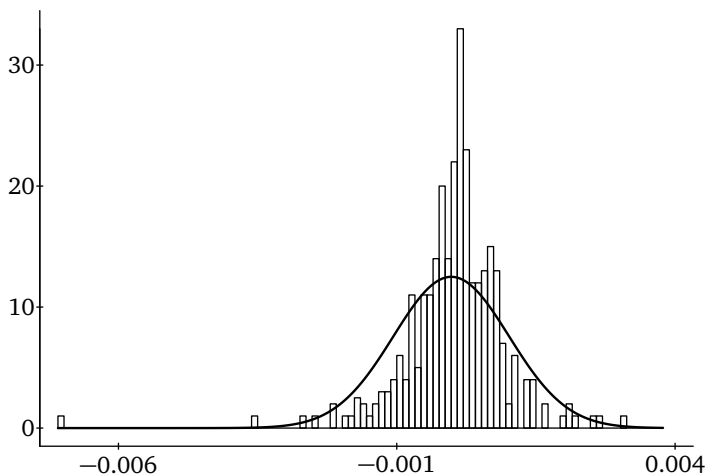
где  $\hat{m}_2$  и  $\hat{m}_4$  — эмпирические второй и четвертый моменты, значимым образом является *положительным* (для нормального распределения kurtosis равен нулю), что означает сильную «вытянутость» пика плотности распределения в окрестности центральных значений (см. рис. 12).

Пожалуй, самым сильным (относительно структуры распределений величин  $h = (h_n)$ ) является, помимо гауссовости, предположение

*независимости и одинаковой распределенности этих величин.*

При таких условиях анализ цен  $S_n = S_0 e^{H_n}$ ,  $H_n = h_1 + \dots + h_n$ , легко проводится обычными методами теории вероятностей, основанными на этих предположениях. Но, конечно, понятно, что предположение *независимости* значений  $h = (h_n)$  сразу разрушает надежду (и веру) в то, что «прошлые данные» могут что-то дать для прогноза «будущих значений».

На самом же деле в этом отношении ситуация более благоприятна, поскольку многочисленные исследования временных финансовых рядов пока-



**Рис. 12.** Эмпирическая плотность одномерного распределения величин  $(h_n)_{n \leq 300}$ , подчиняющихся модели  $HARCH(16)$  (см. § 3b). Непрерывная кривая — плотность соответствующего нормального распределения  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  с  $m = \bar{h}_{300}$ ,  $\sigma^2 = \hat{\sigma}_{300}^2$

зывают наличие, как уже отмечалось, *негауссовости* и *зависимости* в значениях  $(h_n)$ , хотя они могут быть и некоррелированными, а зависимость — весьма слабой. Проще всего убедиться в наличии зависимости можно, рассматривая эмпирические корреляции не для величин  $h_n$ , а для  $|h_n|$  или  $h_n^2$ . (В приводимой далее модели стохастической волатильности ситуация такова, что  $\text{Cov}(h_n, h_m) = 0$  для  $n \neq m$ , но  $\text{Cov}(h_n^2, h_m^2)$  и  $\text{Cov}(|h_n|, |h_m|)$  значительно отклоняются от нуля; см. § 3с.)

## § 1b. Разложение Дуба. Канонические представления

1. Будем предполагать, что в модели

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \quad H_n = h_1 + \dots + h_n, \quad (1)$$

величины  $h_n$ ,  $n \geq 1$ , имеют конечные абсолютные первые моменты,  $\mathbb{E} |h_n| < \infty$ ,  $n \geq 1$ .

Разложение Дуба, о котором пойдет речь дальше, предполагает изучение последовательности  $H = (H_n)$  в зависимости от свойств фильтрации  $(\mathcal{F}_n)$ , т. е. потока «информаций»  $\mathcal{F}_n$ , доступных «наблюдателю» (на рынке ценных бумаг — в интересующем нас контексте;  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ).

Поскольку  $\mathbb{E} |h_n| < \infty$ ,  $n \geq 1$ , определены *условные математические ожидания*  $\mathbb{E}(h_n | \mathcal{F}_{n-1})$ , и, значит,

$$H_n = \sum_{k \leq n} \mathbb{E}(h_k | \mathcal{F}_{k-1}) + \sum_{k \leq n} [h_k - \mathbb{E}(h_k | \mathcal{F}_{k-1})]. \quad (2)$$

Иначе говоря, если

$$A_n = \sum_{k \leq n} \mathbb{E}(h_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad (3)$$

$$M_n = \sum_{k \leq n} [h_k - \mathbb{E}(h_k | \mathcal{F}_{k-1})], \quad (4)$$

то для  $H = (H_n)_{n \geq 0}$ ,  $H_0 = 0$ , справедливо разложение Дуба

$$H_n = A_n + M_n, \quad n \geq 0, \quad (5)$$

где

а) последовательность  $A = (A_n)_{n \geq 0}$ ,  $A_0 = 0$ , является *предсказуемой* в том смысле, что при каждом  $n \geq 1$

величины  $A_n$  являются  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми;

б) последовательность  $M = (M_n)_{n \geq 0}$ ,  $M_0 = 0$ , является *мартингалом*, т. е. при каждом  $n \geq 1$  выполнено свойство

$$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} \quad (\text{Р-п. н.})$$

и при этом величины  $M_n$  являются  $\mathcal{F}_n$ -измеримыми и  $\mathbb{E} |M_n| < \infty$  при каждом  $n \geq 1$ .

**Замечание.** Предположим, что наряду с фильтрацией  $(\mathcal{F}_n)$  задана *под-фильтрация*  $(\mathcal{G}_n)$ , где  $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$  и  $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$ . Для  $H = (H_n)$  можно написать аналог разложения (5) относительно потока  $(\mathcal{G}_n)$ :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(h_k | \mathcal{G}_{k-1}) + \sum_{k=1}^n (h_k - \mathbb{E}(h_k | \mathcal{G}_{k-1})).$$

Последовательность  $A = (A_n)$  с элементами

$$A_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(h_i | \mathcal{G}_{i-1})$$

будет  $(\mathcal{G}_n)$ -предсказуемой (т. е.  $A_n$  являются  $\mathcal{G}_{n-1}$ -измеримыми), но  $M = (M_n)$ ,

$$M_n = \sum_{k=1}^n (h_k - \mathbb{E}(h_k | \mathcal{G}_{k-1})),$$

не будет, вообще говоря, мартингалом относительно потока  $(\mathcal{G}_n)$ , поскольку  $h_k$  являются измеримыми относительно  $\mathcal{F}_k$ , но не относительно  $\mathcal{G}_k$ .

Важно отметить, что если наряду с (5) мы имеем другое разложение

$$H_n = A'_n + M'_n$$

с предсказуемой (относительно потока  $(\mathcal{F}_n)$ ) последовательностью  $A' = (A'_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $A'_0 = 0$ , и мартингалом  $M' = (M'_n, \mathcal{F}_n)$ , то  $A'_n = A_n$ ,  $M'_n = M_n$  для всех  $n \geq 0$ .

Действительно,

$$A'_{n+1} - A'_n = (A_{n+1} - A_n) + (M_{n+1} - M_n) - (M'_{n+1} - M'_n).$$

Отсюда, взяв от обеих частей условное математическое ожидание  $E(\cdot | \mathcal{F}_n)$ , находим, что  $A'_{n+1} - A'_n = A_{n+1} - A_n$  (в силу  $\mathcal{F}_n$ -измеримости  $A'_{n+1}$  и  $A_{n+1}$ ). Но  $A'_0 = A_0 = 0$ , и, значит,  $A'_n = A_n$  и  $M'_n = M_n$  для всех  $n \geq 0$ . Тем самым, разложение (1) с предсказуемой последовательностью  $A = (A_n)$  является *единственным*.

Отметим также, что если в рассматриваемой модели  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1}) = 0$ ,  $k \geq 1$ , то согласно формуле (2) сама последовательность  $H = (H_n)$  является *мартингалом*.

Приведем следующий пример на «разложение Дуба», хорошо иллюстрирующий «нетривиальность» этого разложения, несмотря на его простоту.

**Пример.** Пусть  $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , где  $(\xi_n)$  — такие независимые бернуллиевские величины, что

$$P(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим разложение Дуба для  $H_n = |X_n|$ ,  $n \geq 0$ ,  $X_0 = 0$ .

Здесь

$$h_n = \Delta H_n = \Delta |X_n| = |X_n| - |X_{n-1}| = |X_{n-1} + \xi_n| - |X_{n-1}|,$$

и ясно, что

$$\begin{aligned} \Delta M_n &\equiv h_n - E(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = |X_{n-1} + \xi_n| - E(|X_{n-1} + \xi_n| | \mathcal{F}_{n-1}) = \\ &= |X_{n-1} + \xi_n| - E(|X_{n-1} + \xi_n| | X_{n-1}) = \\ &= (\text{Sgn } X_{n-1}) \xi_n, \end{aligned}$$

где

$$\text{Sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, для мартингала  $M = (M_n)_{n \geq 1}$  в разложении (5) имеем

$$M_n = \sum_{1 \leq k \leq n} (\text{Sgn } X_{k-1}) \Delta X_k.$$

Далее,

$$E(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(|X_{n-1} + \xi_n| | X_{n-1}) - |X_{n-1}|.$$

На множестве  $\{\omega : X_{n-1} = i\}$ ,  $i \neq 0$ , правая часть равна нулю. Если же  $i = 0$ , то

правая часть равна единице. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(h_i | \mathcal{F}_{i-1}) = N\{1 \leq k \leq n: X_{k-1} = 0\},$$

где  $N\{1 \leq k \leq n: X_{k-1} = 0\}$  — число тех  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , для которых  $X_{k-1} = 0$ .

Пусть  $L_n(0) = N\{0 \leq k \leq n-1: X_k = 0\}$  — число нулей последовательности  $(X_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ . Тогда находим

$$|X_n| = \sum_{1 \leq k \leq n} (\text{Sgn } X_{k-1}) \Delta X_k + L_n(0),$$

что есть дискретный аналог известной формулы Танака для модуля броуновского движения (см. § 5с гл. III). Между прочим, отсюда видно, что

$$\mathbb{E} L_n(0) = \mathbb{E} |X_n|.$$

Поскольку  $\frac{X_n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , мы получаем  $\mathbb{E} |X_n| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n$ , и, значит,

$$\mathbb{E} L_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n$$

— известный результат о среднем числе нулей в симметричном случайном блуждании Бернулли (см., например, [156]).

2. Пусть  $M = (M_n)_{n \geq 1}$  является квадратично интегрируемым мартингалом ( $\mathbb{E} M_n^2 < \infty$ ,  $n \geq 1$ ),  $M_0 = 0$ . Тогда разложение (2), примененное к  $H_n = M_n^2$ , примет следующий вид:

$$M_n^2 = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) + \sum_{1 \leq k \leq n} (\Delta M_k^2 - \mathbb{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})), \quad (6)$$

где  $\Delta M_k^2 = M_k^2 - M_{k-1}^2$ .

Положим

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}), \\ m_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} (\Delta M_k^2 - \mathbb{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})). \end{aligned} \quad (7)$$

С этими обозначениями разложение (6) можно записать в виде

$$M_n^2 = \langle M \rangle_n + m_n, \quad (8)$$

где (предсказуемая) последовательность  $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_n)_{n \geq 1}$  называется *квадратической характеристикой* мартингала  $M$  (см. также с. 329).

Заметим, что, поскольку  $M = (M_n)$  есть мартингал, справедливо равенство

$$\mathbb{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}((\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}). \quad (9)$$

Это свойство объясняет, почему квадратическую характеристику  $\langle M \rangle$  называют также *предсказуемой квадратической вариацией* (квадратично интегрируемого) мартингала  $M$ . При этом термин *квадратическая вариация* резервируется для (непредсказуемой, вообще говоря) последовательности  $[M] = ([M]_n)_{n \geq 1}$  со значениями (см. также с. 327)

$$[M]_n = \sum_{k \leq n} (\Delta M_k)^2. \quad (10)$$

3. Предположим сейчас, что последовательность  $H = (H_n)$  сама является мартингалом и к тому же — квадратично интегрируемым, т. е. пусть  $E(\Delta H_k | \mathcal{F}_{k-1}) = E(h_k | \mathcal{F}_{k-1}) = 0$  и  $E h_k^2 < \infty$ ,  $k \geq 1$ . Тогда

$$\langle H \rangle_n = \sum_{k \leq n} E(h_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}). \quad (11)$$

Величины  $E(h_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})$ , из которых складывается квадратическая характеристика  $\langle H \rangle_n$ , определяют *степень изменчивости (волатильности)* мартингала  $H$  и во многом — его свойства. Например, если с вероятностью единица  $\langle H \rangle_n \rightarrow \infty$ , то для квадратично интегрируемого мартингала  $H$  имеет место *усиленный закон больших чисел*: при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$\frac{H_n}{\langle H \rangle_n} \rightarrow 0 \quad (\text{Р-п. н.}). \quad (12)$$

(См. [439, гл. VII, § 5].)

В дальнейшем набор величин  $(E(h_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}))_{k \geq 1}$  будет играть существенную роль при анализе временных финансовых рядов  $S = (S_n)$ ,  $S_n = S_0 e^{H_n}$ . Применительно к этому случаю, следуя принятой в *теории финансов* терминологии, последовательность  $(E(h_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}))_{k \geq 1}$  будем называть *стохастической волатильностью*. (Подробнее о волатильности см. раздел 3.)

Если условные математические ожидания  $E(h_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})$  совпадают с безусловными (например, если  $(h_n)$  есть последовательность независимых случайных величин и  $\mathcal{F}_{k-1} = \sigma(h_1, \dots, h_{k-1})$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная величинами  $h_1, \dots, h_{k-1}$ ), то волатильность — это просто набор дисперсий  $\sigma_k^2 = E h_k^2$  (предполагается, что  $E h_k = 0$ ),  $k \geq 1$ , которые являются стандартными *мерами разброса (изменчивости)* величин  $h_k$ .

4. При написании разложения Дуба (2) или (5) предполагалось, что  $E|h_k| < \infty$ ,  $k \geq 1$ . Это предположение было нужно, в сущности, лишь только для того, чтобы были определены условные математические ожидания  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})$ ,  $k \geq 1$ . Тем самым, естественным образом возникает идея использовать разложение (2) и в том более общем случае, когда определены и конечны (Р-п. н.) только условные математические ожидания  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})$ , без выполнения, вообще говоря, условия  $E|h_k| < \infty$ .



С этой целью напомним, что если  $E|h_k| < \infty$ , то условное математическое ожидание  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})$  определяется по Колмогорову как такая  $\mathcal{F}_{k-1}$ -измеримая случайная величина, которая для любого  $A \in \mathcal{F}_{k-1}$  удовлетворяет условию

$$\int_A E(h_k | \mathcal{F}_{k-1}) dP = \int_A h_k dP. \quad (13)$$

При этом существование такой случайной величины следует из теоремы Радона—Никодима. См., например, [439, гл. II, § 7].

Однако заметим, что предположение  $E|h_k| < \infty$  вовсе не является *необходимым* для существования  $\mathcal{F}_{k-1}$ -измеримой величины  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})$ , удовлетворяющей условию (13). Например, когда  $h_k \geq 0$  (Р-п. н.), эту величину можно определить и без требования  $E h_k < \infty$ .

Отсюда возникает идея определения *обобщенного* условного математического ожидания, также обозначаемого  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})$ , следующим образом.

Представим  $h_k$  в виде

$$h_k = h_k^+ - h_k^-,$$

где  $h_k^+ = \max(h_k, 0)$ ,  $h_k^- = -\min(h_k, 0)$ . Будем предполагать, что существуют такие версии  $E(h_k^+ | \mathcal{F}_{k-1})(\omega)$  и  $E(h_k^- | \mathcal{F}_{k-1})(\omega)$ , что для всех  $\omega \in \Omega$  выполняется неравенство

$$\min\{E(h_k^+ | \mathcal{F}_{k-1})(\omega), E(h_k^- | \mathcal{F}_{k-1})(\omega)\} < \infty. \quad (14)$$

Тогда по определению мы полагаем

$$E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})(\omega) = E(h_k^+ | \mathcal{F}_{k-1})(\omega) - E(h_k^- | \mathcal{F}_{k-1})(\omega) \quad (15)$$

и называем  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})$  *обобщенным условным математическим ожиданием*.

Если  $E|h_k| < \infty$ , то очевидным образом обобщенное математическое ожидание совпадает с обычным условным математическим ожиданием.

В том случае, когда  $E(|h_k| | \mathcal{F}_{k-1})(\omega) < \infty$ ,  $\omega \in \Omega$ , свойство (14) выполнено очевидным образом и  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})(\omega)$  не только определено, но и конечно для всех  $\omega \in \Omega$ . В этом случае мы говорим, что обобщенное условное математическое ожидание  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})$  *определено и конечно*.

**Замечание.** Следуя общему духу теории вероятностей, рассматривающей, как правило, выполнение тех или иных свойств не «для каждого  $\omega \in \Omega$ », а лишь «для почти всех  $\omega \in \Omega$ », данное выше определение обобщенного условного математического ожидания легко переформулировать и в варианте «для почти всех  $\omega \in \Omega$ », доопределяя  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})(\omega)$  произвольным образом на множестве нулевой вероятности, где свойство (14) нарушается.

Обратимся теперь к представлению (2). Правая часть формулы (2) заведомо определена, если  $E(|h_k| | \mathcal{F}_{k-1}) < \infty$ ,  $k \geq 1$  (для всех  $\omega \in \Omega$  или для почти всех  $\omega \in \Omega$ ). В этом случае мы будем говорить, что (2) есть *обобщенное разложение Дуба* последовательности  $H = (H_n)_{n \geq 1}$ .

5. Остановимся также на соответствующем разложении (или, как будет дальше говориться, *представлении*) в том случае, когда условные математические ожидания  $E(h_k | \mathcal{F}_{k-1})$  («обычные» или обобщенные) *не определены*.

В этом случае можно поступить, например, таким образом.

Представим величины  $h_k$  в виде

$$h_k = h_k I(|h_k| \leq a) + h_k I(|h_k| > a),$$

где  $a$  — некоторая константа; обычно полагают  $a = 1$ .

Величины  $h_k I(|h_k| \leq a)$  уже имеют абсолютный первый момент, и, следовательно,

$$\begin{aligned} H_n^{(\leq a)} &\equiv \sum_{1 \leq k \leq n} h_k I(|h_k| \leq a) = \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} E(h_k I(|h_k| \leq a) | \mathcal{F}_{k-1}) + \\ &\quad + \sum_{1 \leq k \leq n} [h_k I(|h_k| \leq a) - E(h_k I(|h_k| \leq a) | \mathcal{F}_{k-1})] \\ & (= A_n^{(\leq a)} + M_n^{(\leq a)}). \end{aligned} \quad (16)$$

Тем самым,

$$H_n = A_n^{(\leq a)} + M_n^{(\leq a)} + \sum_{1 \leq k \leq n} h_k I(|h_k| > a), \quad (17)$$

где  $(A_n^{(\leq a)})_{n \geq 1}$  — предсказуемая последовательность,  $(M_n^{(\leq a)})_{n \geq 1}$  — мартингал и  $(\sum_{1 \leq k \leq n} h_k I(|h_k| > a))_{n \geq 1}$  — последовательность «больших» скачков.

Следуя терминологии, принятой в «общей теории случайных процессов» (см. раздел 5 в гл. III и [250, гл. I, § 4с]), представление (17) будем называть *каноническим представлением*  $H$ .

Отметим, что если наряду с (16) имеется другое представление  $H$  вида

$$H_n = A'_n + M'_n + \sum_{1 \leq k \leq n} h_k I(|h_k| > a) \quad (18)$$

с предсказуемой последовательностью  $(A'_n)$  и мартингалом  $(M'_n)$ , то необходимым образом  $A'_n = A_n^{(\leq a)}$ ,  $M'_n = M_n^{(\leq a)}$ .

Иначе говоря, представление вида (18) *единственно* и совпадает с (17), что оправдывает название для этого представления как *канонического*.

### § 1с. Локальные мартингалы, мартингальные преобразования, обобщенные мартингалы

1. В проведенном выше анализе последовательности  $H = (H_n)$ , основанном на разложении Дуба (5) и его обобщении, ключевую роль играют два понятия — «мартингальность» и «предсказуемость» — и соответственно участ-

вующие в представлении  $H = (H_n)$  *мартингал*  $M = (M_n)$  и *предсказуемая* последовательность  $A = (A_n)$ .

Именно поэтому проводимый далее стохастический анализ часто называют «мартингалным» или «стохастическим исчислением», подразумевая под этим анализ на *фильтрованных вероятностных пространствах*, специализированных выделением на (обычных) вероятностных пространствах особой структуры — потока  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_n)$ . Именно, с наличием этой структуры — «фильтрации»  $(\mathcal{F}_n)$  — связаны такие понятия, как момент остановки, мартингал, предсказуемость, суб- и супермартингалы, семимартингалы и др.

В современном стохастическом исчислении, пожалуй, более важную роль играет не понятие мартингала, а понятие *локального мартингала*. Замечательным является то обстоятельство, что, хотя класс локальных мартингалов шире класса мартингалов, он сохраняет многие важные свойства последних. Дадим ряд определений.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$  — стохастический базис, т. е. *фильтрованное вероятностное пространство*, с дискретным временем,  $n \geq 0$ .

**Определение 1.** Последовательность случайных величин  $X = (X_n)$ , заданных на стохастическом базисе, называется *стохастической последовательностью*, если при каждом  $n \geq 0$  величины  $X_n$  являются  $\mathcal{F}_n$ -измеримыми.

Чтобы подчеркнуть это свойство *измеримости*, стохастические последовательности записывают в виде  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ , включая в обозначение также и  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n$ , относительно которых измеримы величины  $X_n$ .

**Определение 2.** Стохастическая последовательность

$$X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$$

является

*мартингалом,*  
*супермартингалом,*  
*субмартингалом,*

если  $E|X_n| < \infty$  при каждом  $n \geq 0$  и (P-п. н.) для всех  $n \geq 1$  выполняется условие

$$E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1},$$

$$E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1},$$

$$E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$$

соответственно.

Понятно, что для мартингала математические ожидания  $E X_n$  постоянны ( $E X_n = E X_0$ ), для супермартингала они не возрастают ( $E X_n \leq E X_{n-1}$ ), для субмартингала — не убывают ( $E X_n \geq E X_{n-1}$ ).

Классическим примером мартингала является «мартингал Леви»  $X = (X_n)$ ,  $X_n = E(\xi | \mathcal{F}_n)$ , где  $\xi$  —  $\mathcal{F}$ -измеримая случайная величина,  $E|\xi| < \infty$ .

Этот мартингал является *равномерно интегрируемым*, т. е. семейство случайных величин  $\{X_n\}$  равномерно интегрируемо:

$$\sup_n E(|X_n|I(|X_n| > C)) \rightarrow 0, \quad C \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем через  $\mathcal{M}_{UI}$  будем обозначать класс *всех равномерно интегрируемых мартингалов* (UI — от Uniformly Integrable). Класс *всех мартингалов* будет обозначаться  $\mathcal{M}$ .

В том случае, когда рассматриваемые мартингалы определены лишь для  $n \leq N < \infty$ , понятия мартингала и равномерно интегрируемого мартингала, очевидно, совпадают ( $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{UI}$ ).

Иногда для  $\mathcal{M}_{UI}$  и  $\mathcal{M}$  используются также обозначения  $\mathcal{M}_{UI}(P, (\mathcal{F}_n))$  и  $\mathcal{M}(P, (\mathcal{F}_n))$ , если надо подчеркнуть, относительно какой меры  $P$  и какого потока  $(\mathcal{F}_n)$  рассматривается свойство «мартингалности».

**Определение 3.** Будем называть стохастическую последовательность  $x = (x_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ ,  $E|x_n| < \infty$ , *мартингал-разностью*, если  $(\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\})$

$$E(x_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad (P\text{-п. н.}), \quad n \geq 1.$$

Ясно, что для такой последовательности  $x = (x_n)$  соответствующая «суммарная» последовательность  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $X_n = X_0 + x_1 + \dots + x_n$ , образует *мартингал*. И наоборот, с каждым мартингалом  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$  связывается *мартингал-разность*  $x = (x_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $x_n = \Delta X_n$ , где  $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$  для  $n \geq 1$  и  $\Delta X_0 = X_0$  для  $n = 0$ .

**Определение 4.** Будем называть стохастическую последовательность  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$  *локальным мартингалом* (субмартингалом, супермартингалом), если найдется такая (локализирующая) последовательность  $(\tau_k)_{k \geq 1}$  марковских моментов (т. е. таких, что  $\{\omega: \tau_k \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ ,  $n \geq 0$ ; см. также далее определение 1 в §1f), что  $\tau_k \leq \tau_{k+1}$  (P-п. н.),  $\tau_k \uparrow \infty$  (P-п. н.) при  $k \rightarrow \infty$  и каждая «остановленная» последовательность

$$X^{\tau_k} = (X_{\tau_k \wedge n}, \mathcal{F}_n)$$

является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом).

**Замечание 1.** В определение локального мартингала часто включают требование, чтобы последовательность  $X^{\tau_k}$  была при каждом  $k \geq 1$  не только мартингалом, но и *равномерно интегрируемым* мартингалом (см., например, [250]).

Отметим также, что иногда, желая рассматривать и такие последовательности  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ , для которых «начальная» случайная величина  $X_0$  не интегрируема, остановленные последовательности  $X^{\tau_k}$  определяют несколько иначе:

$$X^{\tau_k} = (X_{\tau_k \wedge n} I(\tau_k > 0), \mathcal{F}_n).$$

Для класса локальных мартингалов используется обозначение  $\mathcal{M}_{\text{loc}}$  или  $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbf{P}, (\mathcal{F}_n))$ .

Из определения 4 следует, что всякий мартингал является локальным мартингалом и, тем самым,

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_{\text{loc}}.$$

Если  $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  и семейство случайных величин

$$\Sigma = \{X_\tau : \tau - \text{конечный момент остановки}\}$$

равномерно интегрируемо (т. е.  $\sup_{X_\tau \in \Sigma} \mathbf{E}\{|X_\tau| I(|X_\tau| \geq C)\} \rightarrow 0$  при  $C \rightarrow \infty$ ), то

$X$  является мартингалом ( $X \in \mathcal{M}$ ) и, более того, мартингалом Леви: существует такая интегрируемая  $\mathcal{F}$ -измеримая случайная величина  $X_\infty$ , что  $X_n = \mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n)$ . Тем самым, в этом случае  $X \in \mathcal{M}_{\text{UL}}$ . (Подробнее см. [250, гл. I, § 1e] или [439, гл. VII, § 4].)

**Определение 5.** Будем называть стохастическую последовательность  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  обобщенным мартингалом (субмартингалом, супермартингалом), если  $\mathbf{E}|X_0| < \infty$ , для каждого  $n \geq 1$  определены обобщенные условные математические ожидания  $\mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})$  и выполнено условие

$$\mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} \quad (\text{Р-п. н.})$$

(выполнены условия  $\mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$ ,  $\mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}$  соответственно).

**Замечание 2.** Из определения (см. § 1b) обобщенного математического ожидания  $\mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})$  и «мартингалового» равенства  $\mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$  автоматически следует, что  $\mathbf{E}(|X_n| | \mathcal{F}_{n-1}) < \infty$  (Р-п. н.). Иначе говоря, условное математическое ожидание  $\mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})$  не только определено, но и конечно. Тем самым, в определении 5 сразу можно предполагать, что  $\mathbf{E}(|X_n| | \mathcal{F}_{n-1}) < \infty$  (Р-п. н.),  $n \geq 0$ .

**Определение 6.** Будем называть стохастическую последовательность  $x = (x_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  обобщенной мартингал-разностью (субмартингал-разностью, супермартингал-разностью), если для каждого  $n \geq 1$  определены обобщенные условные математические ожидания  $\mathbf{E}(x_n | \mathcal{F}_{n-1})$  и выполнены условия

$$\mathbf{E}(x_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad (\text{Р-п. н.})$$

(соответственно условия  $\mathbf{E}(x_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq 0$ ,  $\mathbf{E}(x_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq 0$  (Р-п. н.)).

**Замечание 3.** Как и в предыдущем замечании, в определении обобщенной мартингал-разности можно сразу требовать, чтобы выполнялось условие  $\mathbf{E}(|x_n| | \mathcal{F}_{n-1}) < \infty$  (Р-п. н.),  $n \geq 1$ .

**Определение 7.** Пусть  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)$  — стохастическая последовательность и  $Y = (Y_n, \mathcal{F}_{n-1})$  — предсказуемая последовательность ( $Y_n$  являются  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми,  $n \geq 1$ , и  $Y_0$  является  $\mathcal{F}_0$ -измеримой).

## Стохастическая последовательность

$$Y \cdot M = ((Y \cdot M)_n, \mathcal{F}_n),$$

где

$$(Y \cdot M)_n = Y_0 \cdot M_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} Y_k \Delta M_k,$$

называется *преобразованием*  $M$  с помощью  $Y$ . Если к тому же  $M$  есть *мартингал*, то  $X = Y \cdot M$  называют *мартингальным преобразованием* (мартингала  $M$  с помощью (предсказуемой) последовательности  $Y$ ).

Следующая теорема устанавливает, что в случае *дискретного времени* объ-екты, введенные определениями 4, 5 и 7, родственны между собой.

**Теорема.** Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — стохастическая последовательность,  $E|X_0| < \infty$ . Следующие условия являются эквивалентными:

- (a)  $X$  — локальный мартингал (обозначение:  $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ );
- (b)  $X$  — обобщенный мартингал (обозначение:  $X \in G\mathcal{M}$ );
- (c)  $X$  есть мартингальное преобразование (обозначение:  $X \in \mathcal{MT}$ ), т. е.  $X = Y \cdot M$  с некоторой предсказуемой последовательностью  $Y = (Y_n, \mathcal{F}_{n-1})$  и некоторым мартингалом  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)$ .

*Доказательство.* (c)  $\Rightarrow$  (a). Пусть  $X \in \mathcal{MT}$  и

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n Y_k \Delta M_k, \quad (1)$$

где  $Y$  — предсказуемая последовательность и  $M$  — мартингал. Если  $|Y_k| \leq C$ ,  $k \geq 1$ , то  $X$ , очевидно, мартингал.

В противном случае положим  $\tau_j = \inf\{n-1: |Y_n| > j\}$ . Величины  $Y_n$  являются  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми, поэтому  $\tau_j$  — моменты остановки,  $\tau_j \uparrow \infty$  при  $j \rightarrow \infty$  и «остановленные» последовательности  $X^{\tau_j}$  снова имеют вид (1) с ограниченными величинами  $Y_k^{\tau_j} = Y_k I\{k \leq \tau_j\}$ . Следовательно,  $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b). Пусть  $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  и  $(\tau_k)$  — его локализирующая последовательность. Тогда  $E|X_n^{\tau_k}| < \infty$  и  $E(|X_{n+1}| | \mathcal{F}_n) = E(|X_{n+1}^{\tau_k}| | \mathcal{F}_n)$  на множестве  $\{\tau_k > n\} \in \mathcal{F}_n$ . Поэтому  $E(|X_{n+1}| | \mathcal{F}_n) < \infty$  (Р-п. н.).

Аналогично на этом же множестве  $\{\tau_k > n\}$  имеем

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^{\tau_k} | \mathcal{F}_n) = X_n^{\tau_k} = X_n.$$

Тем самым,  $X \in G\mathcal{M}$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c). Пусть  $X \in G\mathcal{M}$ . Положим

$$A_n(k) = \{\omega: E(|X_{n+1}| | \mathcal{F}_n) \in [k, k+1)\}.$$

Тогда

$$u_n = \sum_{k \geq 0} (k+1)^{-3} \Delta X_n I_{A_{n-1}(k)}$$

—  $\mathcal{F}_n$ -измеримая интегрируемая случайная величина,  $E(u_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ . Следовательно,  $M_n = \sum_{i=1}^n u_i$  является мартингалом (полагаем  $M_0 = 0$ ), и условие (1) выполнено для  $Y = (Y_n)$ , где

$$Y_n = \sum_{k \geq 0} (k+1)^3 I_{A_{n-1}(k)}.$$

Таким образом,  $X \in \mathcal{MT}$ . □

**2.** Важность понятий локального мартингала, мартингального преобразования и обобщенного мартингала в финансовой математике в полной мере будет проиллюстрирована в гл. V. Эти понятия играют важную роль и в стохастическом исчислении, что можно продемонстрировать, например, следующим образом.

Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  является локальным субмартингалом с локализующей последовательностью  $(\tau_k)$ , где  $\tau_k > 0$  (Р-п. н.). Тогда при каждом  $k$  для  $X^{(\tau_k)} = (X_{n \wedge \tau_k}, \mathcal{F}_n)$  имеем разложение

$$X_{n \wedge \tau_k} = A_n^{(\tau_k)} + M_n^{(\tau_k)}$$

с предсказуемыми последовательностями  $(A_n^{(\tau_k)})_{n \geq 0}$  и мартингалами  $(M_n^{(\tau_k)})_{n \geq 0}$ .

В силу единственности этого разложения (с предсказуемыми последовательностями  $(A_n^{(\tau_k)})_{n \geq 0}$ ) нетрудно вывести, что

$$A_{n \wedge \tau_k}^{(\tau_{k+1})} = A_n^{(\tau_k)}.$$

Полагая  $A_n = A_n^{(\tau_k)}$  для  $n \leq \tau_k$ , видим, что  $(X_n - A_n)_{n \geq 0}$  является локальным мартингалом, поскольку «остановленные» последовательности

$$(X_n^{(\tau_k)} - A_n^{(\tau_k)})_{n \geq 0}$$

являются мартингалами.

Итак, если  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  является локальным субмартингалом, то

$$X_n = A_n + M_n, \quad n \geq 0, \tag{2}$$

где  $A = (A_n)$  — предсказуемая последовательность,  $A_0 = 0$ , а  $M = (M_n)$  является локальным мартингалом.

Следует отметить, что в этом случае последовательность  $A = (A_n)$  является возрастающей (точнее, неубывающей), что вытекает из явной формулы для  $A_n^{(\tau_k)}$ :

$$A_n^{(\tau_k)} = \sum_{i \leq n \wedge \tau_k} E(\Delta X_i | \mathcal{F}_{i-1}),$$

и свойства субмартингальности  $E(\Delta X_i | \mathcal{F}_{i-1}) \geq 0$ .

Отметим также, что разложение вида (2) с предсказуемым процессом  $A = (A_n)$  является единственным.

**Определение 8.** Если стохастическая последовательность  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$  допускает представление в виде  $X_n = A_n + M_n$  с предсказуемой последовательностью  $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})$  и локальным мартингалом  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)$ , то мы говорим, что  $X$  допускает обобщенное разложение Дуба, а последовательность  $A$  является компенсатором (или предсказуемым компенсатором, или дуально предсказуемой проекцией) последовательности  $X$ .

(Термин «компенсатор» объясняется тем, что  $A$  компенсирует  $X$  до локального мартингала.)

**3.** В заключение приведем один простой, но полезный результат из книги [251], дающий достаточные условия, при которых локальный мартингал в действительности есть (просто) мартингал.

**Лемма. 1.** Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  является локальным мартингалом,  $E|X_0| < \infty$ , причем либо

$$E X_n^- < \infty, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

либо

$$E X_n^+ < \infty, \quad n \geq 0. \quad (4)$$

Тогда  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал.

2. Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$  — локальный мартингал,  $N < \infty$ ,  $E|X_0| < \infty$  и либо  $E X_N^- < \infty$ , либо  $E X_N^+ < \infty$ . Тогда для всех  $n \leq N$  выполнены условия (3) и (4) и  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$  — мартингал.

*Доказательство.* 1. Покажем, что любое из условий (3) или (4) влечет за собой выполнение другого, а значит,  $E|X_n| < \infty$ ,  $n \geq 0$ .

Действительно, если выполнено, скажем, условие (3), то по лемме Фату [439, гл. II, § 6]

$$\begin{aligned} E X_n^+ &= E \lim_k X_{n \wedge \tau_k}^+ \leq \lim_k E X_{n \wedge \tau_k}^+ = \lim_k [E X_{n \wedge \tau_k} + E X_{n \wedge \tau_k}^-] = \\ &= E X_0 + \lim_k E X_{n \wedge \tau_k}^- \leq |E X_0| + \sum_{i=0}^n E X_i^- < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,  $E|X_n| < \infty$ ,  $n \geq 0$ .

Далее, поскольку  $|X_{(n+1) \wedge \tau_k}| \leq \sum_{i=0}^{n+1} |X_i|$ , где  $E \sum_{i=0}^{n+1} |X_i| < \infty$ , по теореме Лебега о мажорируемой сходимости [439, гл. II, § 6 и 7] в результате предельного перехода ( $k \rightarrow \infty$ ) в соотношениях

$$E(X_{\tau_k \wedge (n+1)} I(\tau_k > 0) | \mathcal{F}_n) = X_{\tau_k \wedge n}$$

получаем, что  $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ ,  $n \geq 0$ .

2. Заметим, что если  $E X_N^- < \infty$ , то тогда и  $E X_n^- < \infty$ ,  $n \leq N$ . Действительно, локальный мартингал является обобщенным мартингалом, значит,  $X_n = E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ , откуда следует, что  $X_n^- \leq E(X_{n+1}^- | \mathcal{F}_n)$ , а потому и  $E X_n^- \leq E X_{n+1}^- \leq E X_N^-$  для всех  $n \leq N-1$ .



Тем самым, из п. 1 следует, что  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$  является мартингалом. Аналогично рассматривается и случай  $E X_N^+ < \infty$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.** *Всякий локальный мартингал  $X = (X_n)_{n \geq 0}$ , ограниченный снизу ( $\inf_n X_n(\omega) \geq C > -\infty$  Р-п. н.) или ограниченный сверху ( $\sup_n X_n(\omega) \leq C < \infty$  Р-п. н.), является мартингалом.*

4. Утверждение доказанной леммы интересно сравнить с соответствующим результатом для случая непрерывного времени.

Если  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  — фильтрованное вероятностное пространство с неубывающим семейством  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ( $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ,  $s \leq t$ ), то стохастический процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  называется *мартингалом* (супермартингалом или субмартингалом), если  $X_t$  является  $\mathcal{F}_t$ -измеримым,  $E |X_t| < \infty$ ,  $t \geq 0$ , и  $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$  ( $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$  или  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ ),  $s \leq t$ .

Процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  называется *локальным мартингалом*, если можно найти такую неубывающую последовательность моментов остановки  $(\tau_k)$ ,  $\tau_k \uparrow \infty$  (Р-п. н.), что при каждом  $k$  «остановленные» процессы  $X^{\tau_k} = (X_{t \wedge \tau_k} I(\tau_k > 0), \mathcal{F}_t)$  являются равномерно интегрируемыми мартингалами.

Те же рассуждения, что и при доказательстве леммы, основанные на применении леммы Фату и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости [439, гл. II, § 6 и 7], позволяют доказать справедливость следующих утверждений.

I. Всякий локальный мартингал  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , удовлетворяющий условию

$$E \sup_{s \leq t} X_s^- < \infty, \quad t \geq 0,$$

является супермартингалом.

II. Всякий локальный мартингал  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , удовлетворяющий условию

$$E \sup_{s \leq t} |X_s| < \infty, \quad t \geq 0,$$

является мартингалом.

III. Всякий локальный мартингал  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , удовлетворяющий условию

$$E \sup_{s < \infty} |X_s| < \infty, \quad t \geq 0,$$

является равномерно интегрируемым мартингалом.

Полезно обратить внимание на то, что в случае дискретного времени из того, что  $E X_n^- < \infty$ ,  $n \leq N$ , вытекает, что  $E \max_{n \leq N} X_n^- < \infty$ . В случае же непрерывного времени из того, что  $E X_t^- < \infty$ ,  $t \leq T$ , не следует, вообще говоря, что  $E \sup_{t \leq T} X_t^- < \infty$ . Это обстоятельство и есть, в сущности, основная причина того, что результат приведенной выше леммы не переносится автоматически на случай дискретного времени.

Отметим также, что в утверждении I локальный мартингал может оказаться действительно «настоящим» супермартингалом, т. е. не быть мартингалом.

Вот хорошо известный

**Пример.** Пусть  $B = (B_t^1, B_t^2, B_t^3)_{t \geq 0}$  — трехмерное броуновское движение,

$$R_t = \sqrt{(B_t^1)^2 + (B_t^2)^2 + (B_t^3)^2} \quad \text{и} \quad R_0 = \sqrt{(B_0^1)^2 + (B_0^2)^2 + (B_0^3)^2} = 1.$$

Известно, что этот процесс, называемый *процессом Бесселя порядка 3*, допускает стохастический дифференциал

$$dR_t = \frac{dt}{R_t} + d\beta_t, \quad R_0 = 1,$$

с некоторым стандартным броуновским движением  $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$  (см. § 3а гл. III и, например, [402]).

По формуле Ито (см. § 3d гл. III, а также [250], [402])

$$df(R_t) = f'(R_t) dR_t + \frac{1}{2} f''(R_t) dt$$

для  $f(R_t) = 1/R_t$ , применение которой здесь законно, поскольку для *трехмерного* процесса Бесселя  $R$  с  $R_0 = 1$  нулевое значение недостижимо, находим, что

$$d\left(\frac{1}{R_t}\right) = -\frac{d\beta_t}{R_t^2},$$

или, в интегральной форме,

$$\frac{1}{R_t} = 1 - \int_0^t \frac{d\beta_s}{R_s^2}.$$

Стохастический интеграл  $\left(\int_0^t \frac{d\beta_s}{R_s^2}\right)_{t \geq 0}$  является локальным мартингалом (см. [402]), а значит, процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ,  $X_t = \frac{1}{R_t}$ ,  $X_0 = 1$ , есть *локальный мартингал*, не будучи *мартингалом*.

Действительно, из свойства автомодельности (см. далее § 3а гл. III) броуновских движений  $B^1, B^2, B^3$  следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_t &= \mathbb{E} \frac{1}{\sqrt{1 + (B_t^1 - B_0^1)^2 + (B_t^2 - B_0^2)^2 + (B_t^3 - B_0^3)^2}} = \\ &= \mathbb{E} \frac{1}{\sqrt{1 + t(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)}} \downarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где  $\xi_i, i = 1, 2, 3$ , — независимые стандартные нормально распределенные величины,  $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

В случае же «мартингалности» математическое ожидание  $\mathbb{E} X_t$  должно было бы быть *константой*.

## § 1d. Гауссовские и условно-гауссовские модели

1. Концепция *эффективного* рынка обосновывает *гипотезу мартингалности* (нормированных) цен, делая тем самым понятие «мартингала» одним из основных при исследовании динамики эволюции цен как стохастических последовательностей или процессов с определенными свойствами их распределений. Однако при проведении конкретных расчетов одного лишь знания «мартингалности распределений» слишком мало — нужна более «тонкая» структура этих распределений, что приводит к необходимости детального рассмотрения самых разнообразных вероятностно-статистических моделей с целью выявления тех из них, свойства распределений которых лучше всего согласуются со свойствами эмпирических распределений, построенных по статистическим данным. Именно этой цели и посвящен, в сущности, весь последующий материал этой главы, в которой представлены модели, позволяющие объяснять те или иные свойства, обнаруживаемые при анализе «статистического сырья», в частности образованного временными финансовыми рядами.

Предположение гауссовости распределений  $\text{Law}(h_1, \dots, h_n)$  величин  $h_1, \dots, h_n$  является, конечно, наиболее привлекательным и с точки зрения теоретического анализа, и с точки зрения хорошо развитой «статистики нормального распределения». Но, как отмечалось выше, приходится констатировать (и считаться с этим), что статистическая обработка данных многих финансовых рядов показывает, что предположение гауссовости не всегда адекватно отражает истинную картину поведения цен.

Если пытаться искать альтернативу предположению о *гауссовости* безусловных распределений  $\text{Law}(h_1, \dots, h_n)$  последовательности  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ , то, имея в виду «разложение Дуба», которое определяется с привлечением условных математических ожиданий  $E(h_n | \mathcal{F}_{n-1})$ , вполне естественно считать, что не безусловные, а *условные* распределения вероятностей  $\text{Law}(h_n | \mathcal{F}_{n-1})$  являются гауссовскими:

$$\text{Law}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2) \quad (1)$$

с некоторыми  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми величинами  $\mu_n = \mu_n(\omega)$  и  $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$ .<sup>1</sup>

Говоря точнее, равенство (1) означает, что (регулярное) условное распределение  $P(h_n \leq x | \mathcal{F}_{n-1})$  задается формулой (для всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $\omega \in \Omega$ )

$$P(h_n \leq x | \mathcal{F}_{n-1})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-\mu_n(\omega))^2}{2\sigma_n^2(\omega)}} dy.$$

Из регулярности этого условного распределения вытекает (см. [439, гл. II, § 7]), что  $E(h_n | \mathcal{F}_{n-1})(\omega)$  может быть найдено обычным интегрированием

1 Во избежание рассмотрения тривиальных случаев, требующих тем не менее специальных оговорок, мы будем всюду далее предполагать, что при всех  $n$  и  $\omega$  величины  $\sigma_n(\omega)$  отличны от 0.

(для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$ ):

$$\mathbf{E}(h_n | \mathcal{F}_{n-1})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\mathbf{P}(h_n \leq x | \mathcal{F}_{n-1})(\omega),$$

что в рассматриваемом случае приводит к формуле

$$\mathbf{E}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mu_n. \quad (2)$$

Аналогично

$$\mathbf{D}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n^2. \quad (3)$$

Таким образом, «параметры»  $\mu_n$  и  $\sigma_n^2$  имеют простой «традиционный» смысл — это *условное среднее* и *условная дисперсия* (условного) распределения  $\text{Law}(h_n | \mathcal{F}_{n-1})$ .

Само же распределение  $\text{Law}(h_n)$  является, тем самым, *взвесью* (или *смесью*) условных гауссовских распределений  $\text{Law}(h_n | \mathcal{F}_{n-1})$  с усреднением по распределению величин  $\mu_n$  и  $\sigma_n^2$ .

Отметим, что класс распределений, образованных «взвесью» нормальных распределений  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  со «случайными» параметрами  $\mu = \mu(\omega)$ ,  $\sigma^2 = \sigma^2(\omega)$ , является весьма широким. С разными частными случаями таких распределений мы будем в дальнейшем встречаться не раз.

Наряду с последовательностью  $h = (h_n)$  целесообразно ввести «стандартную» условно-гауссовскую последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$   $\mathcal{F}_n$ -измеримых случайных величин таких, что

$$\text{Law}(\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{где } \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Понятно, что эта последовательность является *мартингал-разностью*, поскольку  $\mathbf{E}(\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ . Но, более того, это будет последовательность *независимых* случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение  $\mathcal{N}(0, 1)$ , поскольку

$$\text{Law}(\varepsilon_n | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) = \mathcal{N}(0, 1).$$

В силу сделанного выше предположения  $\sigma_n(\omega) \neq 0$  ( $n \geq 1$ ,  $\omega \in \Omega$ ) величины  $\varepsilon_n$ ,  $n \geq 1$ , определяемые формулой  $\varepsilon_n \equiv (h_n - \mu_n) / \sigma_n$ , образуют стандартную гауссовскую последовательность. Следовательно, можно считать, что рассматриваемые условно-гауссовские (относительно потока  $(\mathcal{F}_n)$  и вероятности  $\mathbf{P}$ ) последовательности  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  представимы в виде

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n, \quad (4)$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  — последовательность независимых  $\mathcal{F}_n$ -измеримых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение  $\mathcal{N}(0, 1)$ . (По поводу представления последовательности  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  в общем случае, т. е. когда  $\sigma_n$  может обращаться в ноль, см. [303, гл. 13, § 1].)

Ясно, что более детальное изучение вероятностных свойств последовательности  $h = (h_n)$ , а значит, и  $S = (S_n)$ , зависит от конкретизации структуры величин  $\mu_n$  и  $\sigma_n^2$ . Именно это и делается в представляемых ниже моделях.

Заметим, что с точки зрения распределений последовательности  $h = (h_n)$  и желая иметь условную гауссовость целесообразно бывает рассмотрение этого свойства в следующем контексте. Пусть  $(\mathcal{G}_n)$  — подфилтратия  $(\mathcal{F}_n)$ , т. е.  $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ ,  $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$ ; например,  $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{n-1}$ .

Предположим, что  $\text{Law}(h_n | \mathcal{G}_n) = \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ ,  $\mu_n = E(h_n | \mathcal{G}_n)$ ,  $\sigma_n^2 = D(h_n | \mathcal{G}_n)$ . В этом случае распределение  $\text{Law}(h_n)$  также является смесью гауссовских.

Перейдем теперь к некоторым конкретным (линейным и нелинейным) гауссовским и условно-гауссовским моделям, в которых для  $n \geq 1$  специфицируются значения  $\mu_n$ ,  $\sigma_n$  и должны задаваться начальные условия  $(\dots, h_{-1}, h_0)$  и  $(\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$  для  $h$  и  $\varepsilon$ .

**2. Авторегрессионная модель  $AR(p)$  порядка  $p$ .** В этой модели предполагается, что

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \quad (5)$$

и

$$\mu_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}, \quad (6)$$

$$\sigma_n \equiv \sigma = \text{Const} \quad (\sigma > 0). \quad (7)$$

Таким образом, здесь

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p} + \sigma \varepsilon_n.$$

Последовательность  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ , называемая *авторегрессионной моделью* (AutoRegressive model) *порядка  $p$* , требует для своего определения задания начальных значений  $h_{1-p}, \dots, h_0$ . Если эти значения являются константами, то последовательность  $(h_n)_{n \geq 1}$  будет не только условно-гауссовской, но и (просто) гауссовской. В § 2b будет проведено более детальное рассмотрение свойств авторегрессионной модели первого порядка ( $p = 1$ ).

**3. Модель скользящего среднего  $MA(q)$ .** В этой модели (аббревиатура  $MA$  означает Moving Average) задаются начальные значения  $(\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$  и полагается

$$\begin{aligned} \mu_n &= b_0 + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q}, \\ \sigma_n &\equiv \sigma = \text{Const}. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно,

$$h_n = b_0 + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q} + \sigma \varepsilon_n. \quad (9)$$

**4. Модель авторегрессии и скользящего среднего  $ARMA(p, q)$ .** Полагается  $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ , задаются начальные условия  $(\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$ ,

$(h_{1-p}, \dots, h_{-1}, h_0)$ , и считается, что

$$\begin{aligned}\mu_n &= (a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}) + (b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q}), \\ \sigma_n &\equiv \sigma = \text{Const.}\end{aligned}\quad (10)$$

Модель такого типа порядка  $(p, q)$  обозначается  $ARMA(p, q)$  (AutoRegressive Moving Average) и называется *смешанной моделью авторегрессии и скользящего среднего порядка*  $(p, q)$ ; она реализуется, если

$$h_n = (a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}) + (b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q}) + \sigma \varepsilon_n. \quad (11)$$

Все эти три модели,  $AR(p)$ ,  $MA(q)$  и  $ARMA(p, q)$ , являются *линейными гауссовскими* моделями (если «начальные» условия есть, скажем, константы).

Перейдем теперь к некоторым интересным *условно-гауссовским* моделям, которые (в отличие от предшествующих) являются уже *нелинейными*.

### 5. Авторегрессионная модель условной неоднородности $ARCH(p)$ .

Снова предполагаем, что последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  является (единственным) источником случайности,  $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ,

$$\mu_n = E(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0, \quad (12)$$

и

$$\sigma_n^2 = E(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2, \quad (13)$$

где  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  и  $h_{1-p}, \dots, h_0$  — заданные начальные константы.

Иначе говоря, условная дисперсия  $\sigma_n^2$  является функцией от значений  $h_{n-1}^2, \dots, h_{n-p}^2$ .

Эта модель, введенная (как уже отмечалось в § 2е гл. I) в 1982 г. Р. Энглем (R. F. Engle, [140]) и названная им  $ARCH(p)$  (AutoRegressive Conditional Heteroskedastic model — *авторегрессионная модель условной неоднородности*), оказалась весьма удачной при объяснении ряда нетривиальных свойств временных финансовых рядов, таких как, например, эффект *кластерности* (скущенности) значений величин  $h_n$ .

Итак,

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \quad (14)$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин,  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , а  $\sigma_n^2$  определяются по формуле (13).

Если вместо равенства (12) имеем

$$\mu_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_r h_{n-r}, \quad (15)$$

а  $\sigma_n^2$  подчиняется условию (13), то уравнение (4) принимает форму

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_r h_{n-r} + \sigma_n \varepsilon_n. \quad (16)$$

Эти модели иногда обозначают  $AR(r)/ARCH(p)$ .

Положим (считая  $E h_n^2 < \infty$ )

$$v_n = h_n^2 - \sigma_n^2. \quad (17)$$

Тогда в силу формулы (13) имеем

$$h_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2 + v_n, \quad (18)$$

где

$$E(v_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - \sigma_n^2 = 0,$$

т. е. последовательность  $v = (v_n)$  образует *мартингал-разность*.

Таким образом,  $ARCH(p)$ -модель может рассматриваться как авторегрессионная модель  $AR(p)$  для последовательности  $(h_n^2)$  с «шумом»  $v = (v_n)$ , являющимся *мартингал-разностью*.

**6. Обобщенная авторегрессионная модель условной неоднородности  $GARCH(p, q)$ .** Успех применения модели  $ARCH(p)$  привел к появлению различных ее обобщений, уточнений, модификаций и т. п.

Приводимая модель  $GARCH(p, q)$  (Generalized  $ARCH$  — обобщенная авторегрессионная модель условной неоднородности), введенная Т. Боллерселевом (Т. Bollerslev, [48]) в 1986 г., является одной из таких разновидностей.

Считая по-прежнему

$$\mu_n = E(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

будем предполагать, что вместо равенства (13) имеет место формула

$$\sigma_n^2 = E(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{n-j}^2 \quad (19)$$

с  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i, \beta_j \geq 0$  и «начальными» условиями  $(h_{1-p}, \dots, h_0)$ ,  $(\sigma_{1-q}^2, \dots, \sigma_0^2)$ , которые для простоты можно считать константами.

Модель  $GARCH(p, q)$  — это последовательность  $h = (h_n)$ ,

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad (20)$$

где  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , а  $\sigma_n^2$  подчиняются соотношениям (19).

Будем обозначать

$$\alpha(L)h_{n-1}^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2, \quad (21)$$

где  $L$  — оператор сдвига ( $L^i h_{n-1}^2 = h_{(n-1)-i}^2$ ; см. п. 2 в § 2а далее) и

$$\beta(L)\sigma_{n-1}^2 = \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{n-j}^2. \quad (22)$$

В этих обозначениях

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha(L)h_{n-1}^2 + \beta(L)\sigma_{n-1}^2.$$

Если, как и выше, положить  $v_n = h_n^2 - \sigma_n^2$ , то получим

$$\begin{aligned} h_n^2 &= v_n + \sigma_n^2 = v_n + \alpha_0 + \alpha(L)h_{n-1}^2 + \beta(L)(h_{n-1}^2 - v_{n-1}) = \\ &= \alpha_0 + (\alpha(L) + \beta(L))h_{n-1}^2 - \beta(L)v_{n-1} + v_n. \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$h_n^2 = \alpha_0 + (\alpha(L) + \beta(L))h_{n-1}^2 + v_n - \beta(L)v_{n-1}. \quad (23)$$

Тем самым,  $GARCH(p, q)$ -модель можно рассматривать как *модель авто-регрессии скользящего среднего*,  $ARMA(\max(p, q), q)$ , для последовательности  $(h_n^2)$  с «шумом»  $(v_n)$ , который является *мартингал-разностью*.

В частности, для модели  $ARCH(1)$  с

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2$$

находим, полагая  $v_n \equiv h_n^2 - \sigma_n^2$ , что

$$h_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + v_n,$$

где «шум»  $(v_n)$  образует мартингал-разность.

Разнообразные обобщения  $ARCH$ - и  $GARCH$ -моделей (такие, как  $EGARCH$ ,  $AGARCH$ ,  $STAR$ ,  $NARCH$ ,  $MARCH$ ,  $HARCH$ , ...) связаны, в конечном счете, с той или иной спецификацией величин  $\sigma_n^2 = E(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1})$  как функций, измеримых относительно  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ .

**7. Модель стохастической волатильности.** Во всех предыдущих моделях источник случайности был *один*. Он задавался гауссовской последовательностью независимых величин  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ . Модели *стохастической волатильности* включают в себя *два* источника случайности:  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  и  $\delta = (\delta_n)$ , которые в простейшем случае предполагаются независимыми и стандартными гауссовскими последовательностями, т. е. состоящими из независимых  $\mathcal{N}(0, 1)$ -распределенных случайных величин.

Пусть  $\mathcal{G}_n = \sigma(\delta_1, \dots, \delta_n)$ . Положим

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad (24)$$

где  $\sigma_n$  являются  $\mathcal{G}_n$ -измеримыми.

Тогда ясно, что

$$\text{Law}(h_n | \mathcal{G}_n) = \mathcal{N}(0, \sigma_n^2), \quad (25)$$

т. е.  $\mathcal{G}_n$ -условное распределение  $h_n$  является гауссовским с параметрами 0 и  $\sigma_n^2$ .

Положим

$$\sigma_n = e^{\frac{1}{2}\Delta_n}. \quad (26)$$



Тогда  $\sigma_n^2 = e^{\Delta_n}$ , где  $\Delta_n$  являются  $\mathcal{G}_n$ -измеримыми. Весьма популярны модели, где последовательность  $(\Delta_n)$  является авторегрессионной моделью,  $(\Delta_n) \in AR(p)$ ,

$$\Delta_n = a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + \dots + a_p \Delta_{n-p} + c \delta_n.$$

Естественным обобщением (24) является схема, в которой

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n, \quad (27)$$

где  $\mu_n$  и  $\sigma_n$  являются  $\mathcal{G}_n$ -измеримыми.

В том случае, когда последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  в формуле (27) образует нормально распределенную *стационарную* последовательность,  $E \varepsilon_n = 0$ ,  $E \varepsilon_n^2 = 1$ , а  $\sigma = (\sigma_n)$  не зависят от  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ , соответствующая модель носит название *модели Тейлора*.

На этом закончим здесь краткое обсуждение ряда гауссовских и условно-гауссовских моделей, находящих применение в финансовой математике и финансовой инженерии. Более подробное исследование свойств этих моделей будет проведено далее в разделах 2 и 3.

## § 1е. Биномиальная модель эволюции цен

1. В теории вероятностей исключительная роль принадлежит *схеме Бернулли* — последовательности

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots),$$

состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих всего лишь два значения, скажем, 1 и 0, с вероятностями  $p$  и  $q$ ,  $p + q = 1$ .

Именно для этой схемы была получена (Я. Бернулли, «Ars Conjectandi», 1713 г.) первая предельная теорема теории вероятностей — *закон больших чисел*, утверждающий, что для всякого  $\varepsilon > 0$  выполняется соотношение

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\frac{S_n}{n} \left(= \frac{\delta_1 + \dots + \delta_n}{n}\right)$  — частота появления «единиц» среди  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

Именно для этой схемы были установлены многие другие замечательные результаты теории вероятностей (*предельная теорема Муавра—Лапласа, Усиленный закон больших чисел, закон повторного логарифма, закон арксинуса* и т. д.), которые, как оказалось, имеют гораздо более широкую область применений.

В этом смысле вводимая ниже *биномиальная модель Кокса—Росса—Рубинштейна* (Cox—Ross—Rubinstein), [82], играет в финансовой математике роль, сходную со схемой Бернулли в классической теории вероятностей, — будучи весьма простой, эта модель дает возможность полного расчета многих финансовых характеристик, например справедливых цен опционов, хеджирующих стратегий и др. (см. далее гл. VI).

2. Будем считать, что все финансовые операции происходят на  $(B, S)$ -рынке, состоящем из банковского счета  $B = (B_n)_{n \geq 0}$  и акции, цена которой есть  $S = (S_n)_{n \geq 0}$ .

Представим эволюцию  $B$  и  $S$  в виде

$$B_n = (1 + r_n)B_{n-1}, \quad (1)$$

$$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}, \quad (2)$$

или, что равносильно,

$$\Delta B_n = r_n B_{n-1},$$

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1},$$

где  $B_0 > 0$ ,  $S_0 > 0$ .

Основное отличие банковского счета от акции состоит в том, что («банковская» процентная ставка)

$r_n$  является  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримой,

тогда как («рыночная» процентная ставка акции)

$\rho_n$  является  $\mathcal{F}_n$ -измеримой,

где  $(\mathcal{F}_n)$  — фильтрация (поток информации) на данном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

В биномиальной модели  $(B, S)$ -рынка Кокса—Росса—Рубинштейна («CRR-модель») предполагается, что

$$r_n \equiv r = \text{Const}$$

и  $\rho = (\rho_n)_{n \geq 1}$  есть бернуллиевская последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин  $\rho_1, \rho_2, \dots$ , принимающих два значения:

$$\rho_n = \begin{cases} b, \\ a, \end{cases} \quad a < b.$$

Записывая  $\rho_n$  в виде

$$\rho_n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \varepsilon_n \quad (3)$$

или

$$\rho_n = a + (b-a)\delta_n, \quad (4)$$

находим, что

$$\rho_n = \begin{cases} b, \\ a \end{cases} \Leftrightarrow \varepsilon_n = \begin{cases} +1, \\ -1 \end{cases} \Leftrightarrow \delta_n = \begin{cases} +1, \\ 0. \end{cases}$$

Сделанное допущение, что  $r_n \equiv \text{Const}$ , а  $\rho_n$  принимают всего лишь два значения, позволяет с самого начала считать, что исходное вероятностное пространство  $\Omega$  есть пространство двоичных последовательностей:

$$\Omega = \{a, b\}^\infty, \quad \text{или} \quad \Omega = \{-1, 1\}^\infty, \quad \text{или} \quad \Omega = \{0, 1\}^\infty.$$

Из соотношения (2) следует, что

$$S_n = S_0 \prod_{k \leq n} (1 + \rho_k). \quad (5)$$

Сопоставляя это выражение сформулой (5) из § 1а, мы видим, что  $\rho_k$  совпадает с введенными выше величинами  $\hat{h}_k$ . Понятно, что  $S_n$  могут быть представлены также в виде

$$S_n = S_0 e^{H_n} = S_0 e^{h_1 + \dots + h_n},$$

где  $h_n = \ln(1 + \rho_k)$ . Ср. с формулами (1) и (10) в § 1а.

3. Остановимся на одном частном случае, когда значения  $a$  и  $b$  таковы, что

$$a = \lambda^{-1} - 1, \quad b = \lambda - 1,$$

где  $\lambda > 1$ .

В этом случае

$$S_n = \begin{cases} \lambda S_{n-1}, & \text{если } \rho_n = b, \\ \lambda^{-1} S_{n-1}, & \text{если } \rho_n = a. \end{cases} \quad (6)$$

Если определить  $\varepsilon_n (= \pm 1)$  из формулы (3), то  $S_n$  можно представить в виде

$$S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}, \quad (7)$$

или, что то же самое,

$$S_n = S_0 e^{h_1 + \dots + h_n} \quad (8)$$

где  $h_k = \varepsilon_k \ln \lambda$ .

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае  $S = (S_n)$  есть не что иное, как *геометрическое блуждание* по множеству

$$E_{S_0} = \{S_0 \lambda^k : k = 0, \pm 1, \dots\}.$$

Если  $S_0 \in E = \{\lambda^k : k = 0, \pm 1, \dots\}$ , то  $E_{S_0} = E$ . В этом случае говорят, что  $S = (S_n)$  есть *марковское блуждание* по фазовому множеству  $E = \{\lambda^k : k = 0, \pm 1, \dots\}$ .

Рассматриваемая биномиальная модель является дискретным аналогом *геометрического броуновского движения*  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ , т. е. случайного процесса, представимого в виде (ср. с формулой (8))

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t},$$

где  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  — стандартный винеровский процесс, или стандартное броуновское движение (см. § 3а гл. III).

В этой связи естественно напомнить, что соответствующим дискретным аналогом обычного броуновского движения является *арифметическое случайное блуждание*  $S_n = S_{n-1} + \xi_n$  с некоторой бернуллиевской последовательностью  $\xi = (\xi_n)_{n \geq 1}$ .

4. В предшествующем изложении мы начинали с того, что все рассмотрения происходят на некотором фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$  с некоторой вероятностной мерой. Вообще говоря, вопрос о том, какова вероятностная мера  $P$ , а значит, и значения  $p = P(\rho_n = b)$  и  $q = P(\rho_n = a)$ , является далеко не простым. В определенном смысле более реалистичным было бы предположение, что на  $(\Omega, \mathcal{F})$  задана не одна вероятностная мера  $P$ , а целое семейство вероятностных мер  $\mathcal{P} = \{P\}$ , для которых соответствующие значения  $p = P(\rho_n = b)$  лежат в интервале  $(0, 1)$ .

Затрагивая вопрос о возможных обобщениях рассмотренной биномиальной модели, отметим, что весьма реалистично было бы также и предположение, что величины  $\rho_n$  принимают не два значения  $a$  и  $b$ , а значения из интервала  $[a, b]$ , при этом, вообще говоря, распределением вероятностей  $\rho_n$  может быть любое распределение на  $[a, b]$ . Именно такая модель будет рассматриваться в §1с гл. V в связи с теорией расчетов рациональной стоимости опционов на так называемых *неполных* рынках. В этом же параграфе будет рассмотрен и *невероятностный* подход, основанный на представлении, что  $\rho_n$  — «хаотические» величины. (По поводу описания эволюции цен моделями динамического «хаоса» см. далее §4а, b.)

## §1f. Модели с дискретным вмешательством случая

1. При исследовании последовательностей  $H = (H_n)_{n \geq 0}$  часто представляется удобным их «вложение» в схему с непрерывным временем, что означает следующее.

Свяжем с исходным стохастическим базисом  $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, P)$  следующий базис  $\tilde{\mathcal{B}}$  с непрерывным временем ( $t \geq 0$ ):

$$\tilde{\mathcal{B}} = (\Omega, \mathcal{F}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, P),$$

где  $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{[t]}$ ,  $[t]$  — целая часть  $t$ .

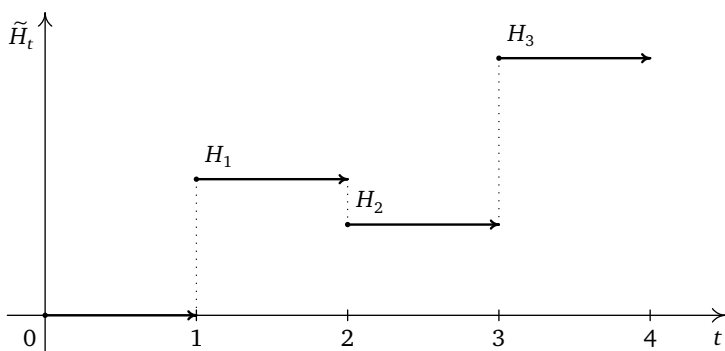
Определим также по стохастической последовательности  $H = (H_n, \mathcal{F}_n)$  новую последовательность (с непрерывным временем)  $\tilde{H} = (\tilde{H}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)$ , полагая <sup>2</sup>

$$\tilde{H}_t = H_{[t]}.$$

Таким образом (см. рис. 13), траектории  $\tilde{H}_t$ ,  $t \geq 0$ , являются кусочно постоянными со скачками  $\Delta \tilde{H}_t \equiv \tilde{H}_t - \tilde{H}_{t-}$ , происходящими в моменты  $t = 1, 2, \dots$ , и непрерывными справа. При этом  $\Delta \tilde{H}_n = \Delta H_n = h_n$ .

Понятно, что верно и обратное: заданный на некотором стохастическом базисе  $\tilde{\mathcal{B}} = (\Omega, \mathcal{F}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, P)$  случайный процесс  $\tilde{H} = (\tilde{H}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ , траектории которого являются кусочно постоянными, непрерывными справа с возможными скачками в моменты  $t = 1, 2, \dots$ , является, в сущности, процессом с дискретным временем рассмотренного выше вида.

2 Как и в случае дискретного времени, запись  $\tilde{H} = (\tilde{H}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)$  подразумевает, что величины  $\tilde{H}_t$  являются  $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -измеримыми при каждом  $t \geq 0$ .

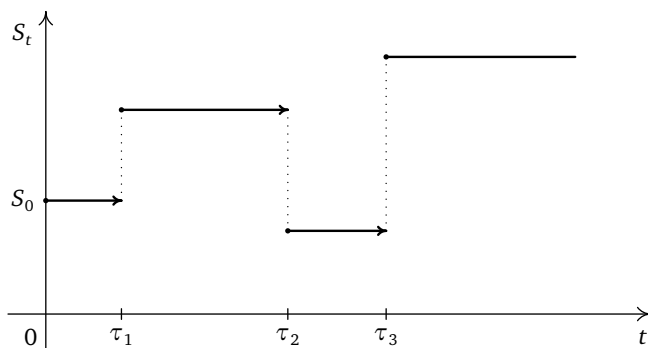


**Рис. 13.** Вложение последовательности  $(H_n)$  с дискретным временем в схему с непрерывным временем

2. До сих пор, обсуждая разные модели динамики цен, мы имели дело либо (в основном) с моделями, в которых цены  $S = (S_n)$  фиксируются в дискретные моменты времени  $n = 0, 1, \dots$ , либо (как в случае Башелье) с моделями, в которых цены  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  описываются непрерывным случайным процессом (броуновским движением, например) с непрерывным временем  $t \geq 0$ .

На самом же деле статистический анализ (см. гл. IV) эволюции реальных цен  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  показывает, что их структура в некотором смысле является промежуточной.

Более точно, это означает следующее. Согласно многочисленным наблюдаемым данным структура траекторий цен  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  такова, как это изображено на приводимом рисунке:



**Рис. 14.** Процесс с дискретным вмешательством случая (в моменты  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ )

Иначе говоря, записывая  $S_t$  в форме  $S_t = S_0 e^{H_t}$ , мы находим, что траектории  $(H_t)_{t \geq 0}$  имеют вид

$$H_t = \sum_{k \geq 1} h_k I(\tau_k \leq t), \quad (1)$$

где  $\tau_1, \tau_2, \dots$  — моменты скачков, а  $h_k$  — величины скачков ( $\Delta H_{\tau_k} \equiv H_{\tau_k} - H_{\tau_{k-}} = h_k$ ).

Если считать, что все рассмотрения происходят на стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ , то на (случайные) моменты скачков  $\tau_k, k \geq 1$ , и на величины  $h_k, k \geq 1$ , естественно накладывать некоторые условия «измеримости», обеспечивающие по крайней мере то, что при каждом  $t \geq 0$  величины  $H_t$  являются  $\mathcal{F}_t$ -измеримыми, т. е. определяются той «информацией», которая доступна на интервале времени  $[0, t]$ .

3. С этой целью введем ряд определений, в которых под неотрицательной *расширенной* случайной величиной  $\tau = \tau(\omega)$  понимается отображение<sup>3</sup>

$$\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \equiv [0, \infty].$$

**Определение 1.** Говорят, что неотрицательная расширенная случайная величина  $\tau = \tau(\omega)$  есть *марковский момент*, или *случайная величина*, не зависящая от будущего, если для каждого  $t \geq 0$  выполняется включение

$$\{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (2)$$

Марковские моменты называют также *моментами остановки*, хотя иногда этот термин относят лишь к тем марковским моментам  $\tau = \tau(\omega)$ , для которых либо  $\tau(\omega) < \infty$  при всех  $\omega \in \Omega$ , либо  $P(\tau(\omega) < \infty) = 1$ .

Наглядный смысл условия (2) становится вполне ясным, если интерпретировать  $\tau(\omega)$  как тот момент времени, когда надо принимать некоторое «решение» (например, купить или продать акции). Поскольку  $\mathcal{F}_t$  является  $\sigma$ -алгеброй, условие (2) равносильно условию  $\{\tau(\omega) > t\} \in \mathcal{F}_t$ , означающему, что в момент времени  $t$  заключение о переносе «решения» на более поздний момент времени (нежели  $t$ ) определяется лишь информацией  $\mathcal{F}_t$ , доступной на  $[0, t]$ , и не зависит от «будущего» (после момента  $t$ ).

**Определение 2.** Пусть  $\tau = \tau(\omega)$  — момент остановки. Через  $\mathcal{F}_\tau$  обозначается совокупность множеств  $A \in \mathcal{F}$ , обладающих тем свойством, что для каждого  $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  выполняется включение

$$A \cap \{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (3)$$

Через  $\mathcal{F}_{\tau-}$  обозначается  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $\mathcal{F}_0$  и всеми множествами вида  $A \cap \{\omega: \tau(\omega) < t\}$ , где  $A \in \mathcal{F}_t$  и  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Нетрудно убедиться, что  $\mathcal{F}_\tau$  является  $\sigma$ -алгеброй.

Если  $\mathcal{F}_t$  интерпретируется как совокупность событий, происшедших до момента  $t$  включительно, то  $\mathcal{F}_\tau$  и  $\mathcal{F}_{\tau-}$  естественно интерпретировать как совокупность событий, наблюдаемых на временных интервалах  $[0, \tau]$  и  $[0, \tau)$ , соответственно.

3 Напомним, что согласно традиционным вероятностным определениям действительная случайная величина принимает лишь конечные значения, т. е. значения в  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

4. Вернемся к представлению (1) процесса  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  как «процесса с дискретным вмешательством случая» (в моменты  $\tau_1, \tau_2, \dots$ ); см. рис. 14. Будем предполагать, что для каждого  $\omega \in \Omega$  (или  $\mathbb{P}$ -почти всех  $\omega \in \Omega$ ) выполняются неравенства

$$0 < \tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \dots,$$

причем при каждом  $k \geq 1$  моменты  $\tau_k = \tau_k(\omega)$  являются моментами остановки, а величины  $h_k = h_k(\omega)$  являются  $\mathcal{F}_{\tau_k}$ -измеримыми.

Из этих предположений и условий (2) и (3) вытекает, в частности, то, что процесс  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  согласован, или адаптирован, с потоком  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , т. е. при каждом  $t \geq 0$

величины  $H_t$  являются  $\mathcal{F}_t$ -измеримыми.

Таким образом, в соответствии с принятыми выше (§ 1с) соглашениями процесс  $H$  может быть записан в виде  $H = (H_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

Действительнозначный процесс  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ , определяемый формулой (1), есть частный случай так называемых *мультивариантных точечных процессов* со значениями в фазовом пространстве  $\mathbb{E}$  (в рассматриваемом случае  $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ), [250]. Сам же термин *точечный* или *считающий* процесс относят обычно к случаю  $h_n \equiv 1$ , т. е. к процессу

$$N_t = \sum_k I(\tau_k \leq t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

**Замечание.** Иногда термин «точечный процесс» связывают лишь с последовательностью моментов  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots)$ , называя «считающим» процесс  $N = (N_t)_{t \geq 0}$ , соответствующий этой последовательности, т. е. процесс, заданный формулой (4). Понятно, что между  $\tau$  и  $N$  существует взаимно однозначное соответствие:  $N$  определяется по  $\tau$  и  $\tau$  — по  $N$ , поскольку

$$\tau_k = \inf\{t: N_t = k\}.$$

Отметим, что, как обычно,  $\tau_k(\omega)$  полагается равным  $+\infty$ , если  $\{t: N_t = k\} = \emptyset$ . Так, для «одноточечного» точечного процесса с траекториями, изображенными на рис. 15, можно считать, что  $\tau_2 = \tau_3 = \dots = +\infty$ .

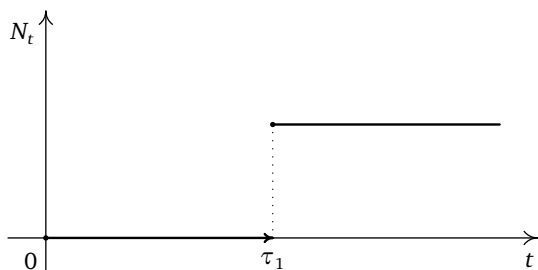


Рис. 15. «Одноточечный» точечный процесс

5. Точечные процессы  $N = (N_t)_{t \geq 0}$ , определяемые формулой (4), допускают другое, эквивалентное описание, использующее понятие *случайной замены времени*, [250, гл. II, § 3b].

**Определение 3.** Будем говорить, что семейство случайных величин  $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ , заданных на стохастическом базисе  $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbf{P})$  и принимающих значения в  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  или в  $\bar{\mathbb{N}} = \{0, 1, \dots, \infty\}$ , образует *случайную замену времени*, если

- 1) при каждом  $t$  величины  $\sigma_t$  являются моментами остановки (относительно  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ );
- 2)  $\sigma_0 = 0$ ;
- 3) каждая из траекторий  $\sigma_t(\omega)$ ,  $t \geq 0$ , является возрастающей, непрерывной справа, со скачками, равными единице.

Свяжем с  $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$  стохастический базис  $\mathcal{B}^\sigma$  с непрерывным временем:

$$\mathcal{B}^\sigma = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{\sigma_t})_{t \geq 0}, \mathbf{P})$$

и положим

$$\tau_k = \inf\{t: \sigma_t \geq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно показать, что относительно потока  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ ,  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\sigma_t}$ , моменты  $\tau_k = \tau_k(\omega)$  являются моментами остановки. При этом, если  $\sigma_t < \infty$  для всех  $t \in \mathbb{N}$ , то

$$H_t = \sum_{k \geq 1} h_k I(\tau_k \leq t) = \sum_{1 \leq k \leq \sigma_t} h_k. \quad (5)$$

Ясно также, что

$$\sigma_t = \sum_{k \geq 1} I(\tau_k \leq t),$$

т. е.  $\sigma_t$  — это число тех моментов, в которые на интервале  $[0, t]$  происходят изменения. Иначе можно сказать, что случайная замена времени  $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ , построенная по последовательности  $(\tau_1, \tau_2, \dots)$ , есть не что иное, как *считающий* процесс  $N = (N_t)$ ,

$$N_t = \sum_{k \geq 1} I(\tau_k \leq t),$$

соответствующий этой последовательности.

Во всех приведенных формулах  $t$  играет роль реального («физического») времени. «Время» же  $\sigma_t$  играет роль *операционного* времени, показывая число изменений за «физическое» время  $t$ . (К вопросу об операционном времени при эмпирическом анализе временных финансовых рядов мы вернемся в § 3d гл. IV.)

Отметим также, что если

$$\sigma_t = [t],$$

то  $\mathcal{B}^\sigma = \tilde{\mathcal{B}}$ , где  $\tilde{\mathcal{B}}$  — рассмотренный выше стохастический базис с дискретным временем  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ ,  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[t]}$ .



6. Из § 1b следует, что при стохастическом анализе последовательности  $H = (H_n)_{n \geq 0}$  разложение Дуба играет ключевую роль, позволяя выделить в  $H$  «мартингальную» и «предсказуемую» составляющие в зависимости от потока  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  поступающей информации (в финансовом контексте — информации о состояниях рынка).

Аналогичное разложение (Дуба—Мейера) имеет место как для считающего процесса  $N$ , так и для мультивариантного точечного процесса  $H$ , являясь (как и в случае дискретного времени) основным исходным моментом их стохастического анализа с привлечением понятий «мартингальности» и «предсказуемости» (см. далее § 5b гл. III и подробнее [250]).

## 2. Линейные стохастические модели

Эмпирический анализ эволюции финансовых индексов, как, разумеется, и многих других — экономических, социологических и т. д. — должен начинаться прежде всего с построения подходящей вероятностно-статистической (или какой-либо иной) модели, правильный выбор которой является делом весьма непростым.

В общей теории временных рядов имеется целый арсенал разнообразных «стандартных» линейных моделей, среди которых в первую очередь надо назвать такие, как  $MA(q)$ ,  $AR(p)$ ,  $ARMA(p, q)$ , рассмотренные в § 1d. Эти модели — скользящего среднего порядка  $q$ , авторегрессии порядка  $p$ , смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего порядка  $(p, q)$  — детально исследуются в теории временных рядов, особенно в предположении их стационарности.

Причины популярности этих моделей кроются, с одной стороны, в их простоте и, с другой стороны, в том, что уже с небольшим числом параметров ими можно хорошо аппроксимировать весьма широкий класс стационарных последовательностей.

Однако далеко не все временные «эконометрические» ряды являются стационарными. Анализ показывает, что часто в статистических данных весьма рельефно вырисовываются следующие три составляющие:

- медленно меняющийся (например, «инфляционный») тренд ( $x$ ),
- периодические или непериодические циклы ( $y$ ),
- нерегулярная, флуктуирующая («стохастическая» или «хаотическая») компонента ( $z$ ).

При этом в наблюдаемые данные ( $h$ ) они могут входить весьма разнообразными способами, что условно можно представить как

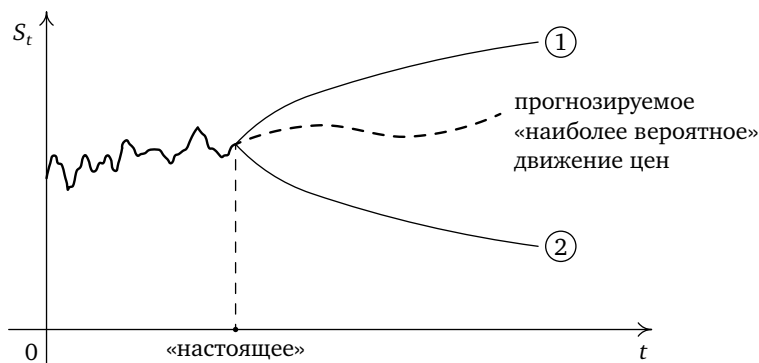
$$h = x * y * z,$$

где в качестве операции композиции « $*$ » могут выступать, например, сложение « $+$ », умножение « $\times$ » и т. п.

Теории временных рядов и их применениям, в частности, при анализе финансовых данных посвящено довольно-таки много книг, монографий. (См., например, [62], [193], [202], [211], [212], [351] и [460].)

Ниже мы останавливаемся на некоторых *линейных* (и затем на нелинейных) моделях, преследуя цель дать представление об их структуре, особенностях, свойствах, применяемых в эмпирическом анализе финансовых данных.

Здесь уместно сказать, что, в конечном счете, одна из важных целей эмпирического анализа статистических данных по финансовым индексам состоит в *прогнозировании, предсказании* «будущего движения цен».



**Рис. 16.** Область между кривыми 1 и 2 является доверительной областью (с той или иной степенью надежности), в которой будет происходить предполагаемое движение цен в «будущем»

Насколько же это прогнозирование будет надежно, зависит, разумеется, от удачного выбора модели, точности оценивания определяющих ее параметров и качества экстраполяционного (линейного или нелинейного) оценивания.

В этом отношении показателен анализ временных рядов обменных курсов, приведенный в четвертой главе. Там показывается, как, начиная с *простых* линейных гауссовских моделей, приходится их постепенно *корректировать, усложнять*, с тем чтобы получить в конце концов модель, «ухватывающую» те феномены, которые обнаруживаются при эмпирическом анализе (скажем, отклонение от гауссовости, эффекты кластерности и «долгая память» в ценах).

Если принять во внимание схему « $h = x * y * z$ » композиции трех составляющих  $x$ ,  $y$  и  $z$  при образовании цен  $h$ , то следует отметить, что главный акцент в нашем изложении будет делаться в первую очередь на последнюю, «флуктуирующую» компоненту  $z$  и затем (в случае обменных курсов) на периодическую (сезонную) составляющую  $y$ .

Мы не будем подробно останавливаться на анализе трендовой составляющей  $x$ , однако отметим, что именно эта компонента часто определяет «нестационарный» характер рассматриваемых моделей, классическим примером

которых являются так называемые модели  $ARIMA(p, d, q)$  — смешанные модели интегральной авторегрессии и скользящего среднего ( $I$  — от integrated;  $d$  — порядок «интегрирования»), широко используемые и пропагандируемые Дж. Боксом и Дж. Дженкинсом (G. E. P. Box, G. M. Jenkins; [53]). См. подробнее § 2с.

## § 2а. Модель скользящего среднего $MA(q)$

1. Во всех рассматриваемых далее моделях (линейных и нелинейных) предполагается заданной некоторая «базисная» последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ , которую в теории временных рядов обычно считают белым шумом (см. рис. 17) и которая идентифицируется с источником случайности, определяющим стохастический характер исследуемых вероятностно-статистических объектов.

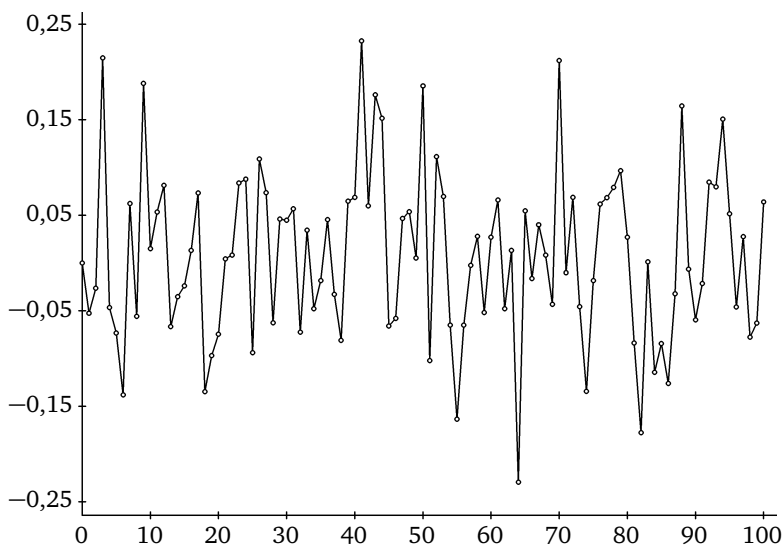


Рис. 17. График компьютерной реализации белого шума  $h_n = \sigma \varepsilon_n$  с  $\sigma = 0,1$  и  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$

При этом (в « $L^2$ -теории») говорят, что последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  является белым шумом в широком смысле, если  $E \varepsilon_n = 0$ ,  $E \varepsilon_n^2 < \infty$  и

$$E \varepsilon_n \varepsilon_m = 0 \quad (1)$$

для всех  $n \neq m$ . (Временной параметр  $n$  удобно сейчас считать принимающим значения  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

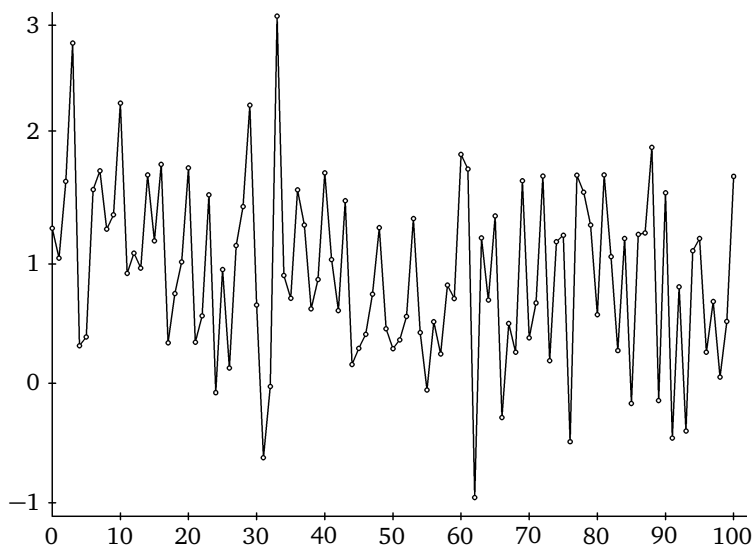
Иначе говоря, белый шум в широком смысле — это квадратично интегрируемая последовательность некоррелированных случайных величин с нулевыми средними.

Если в этом определении добавить еще требование *гауссовости* (нормальности), то получаемую последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  называют *белым шумом* в узком смысле, или *белым (гауссовским) шумом*, или просто *белым шумом*, что равносильно тому, что  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  есть последовательность независимых нормально распределенных случайных величин,  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ . В дальнейшем мы будем считать, что  $\sigma_n^2 \equiv 1$ . (В этом случае часто говорят, что  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  — *стандартная* гауссовская последовательность; полезно сравнить это понятие с *фрактальным* гауссовским шумом, также используемым в статистике финансовых данных; см. § 2d гл. III.)

2. В модели *скользящего среднего*  $MA(q)$ , описывающей эволюции последовательности  $h = (h_n)$ , предполагается следующий способ формирования значений  $h_n$  по белому шуму в широком смысле  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ :

$$h_n = (\mu + b_1\varepsilon_{n-1} + \dots + b_q\varepsilon_{n-q}) + b_0\varepsilon_n, \quad (2)$$

где параметр  $q$  определяет порядок зависимости от «прошлого», а  $\varepsilon_n$  играет роль величин, «обновляющих» информацию, содержащуюся в  $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \dots)$ ; см. рис. 18.



**Рис. 18.** График компьютерной реализации последовательности  $h = (h_n)$ , подчиняющейся  $MA(1)$ -модели с  $h_n = \mu + b_1\varepsilon_{n-1} + b_0\varepsilon_n$  с параметрами  $\mu = 1, b_1 = 1, b_0 = 0,1$  и  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$

С целью компактности изложения удобно ввести *оператор сдвига «назад»*  $L$ , действующий на числовых последовательностях  $x = (x_n)$  по формуле

$$Lx_n = x_{n-1}. \quad (3)$$

Поскольку  $L(Lx_n) = Lx_{n-1} = x_{n-2}$ , через  $L^2$  естественно обозначать оператор, действующий по формуле

$$L^2x_n = x_{n-2},$$

и, вообще,  $L^kx_n = x_{n-k}$  для всех  $k \geq 0$ .

Отметим следующие хотя и простые, но полезные свойства оператора  $L$  ( $c, c_1, c_2$  — константы):

$$\begin{aligned} L(cx_n) &= cLx_n, \\ L(x_n + y_n) &= Lx_n + Ly_n, \\ (c_1L + c_2L^2)x_n &= c_1Lx_n + c_2L^2x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2}, \\ (1 - \lambda_1L)(1 - \lambda_2L)x_n &= x_n - (\lambda_1 + \lambda_2)x_{n-1} + (\lambda_1\lambda_2)x_{n-2}. \end{aligned}$$

С помощью оператора  $L$  соотношению (2) можно придать следующую компактную форму:

$$h_n = \mu + \beta(L)\varepsilon_n, \quad (4)$$

где

$$\beta(L) = b_0 + b_1L + \dots + b_qL^q.$$

3. Обратимся к вопросу о *вероятностных характеристиках* последовательности  $h = (h_n)$ .

Пусть  $q = 1$ . В этом случае

$$h_n = \mu + b_0\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1}, \quad (5)$$

и непосредственно находим, что

$$E h_n = \mu, \quad D h_n = b_0^2 + b_1^2, \quad (6)$$

$$\text{Cov}(h_n, h_{n+1}) = b_0b_1, \quad \text{Cov}(h_n, h_{n+k}) = 0, \quad k > 1. \quad (7)$$

Последние два свойства означают, что  $h = (h_n)$  является последовательностью с коррелированными соседними значениями ( $h_n$  и  $h_{n+1}$ ), в то время как корреляция значений  $h_n$  и  $h_{n+k}$  при  $k \geq 2$  равна нулю.

Заметим, между прочим, что если  $b_0b_1 > 0$ , то величины  $h_n$  и  $h_{n+1}$  *положительно* коррелированы. Если же  $b_0b_1 < 0$ , то корреляция *отрицательна*. (С такой ситуацией мы встретимся далее в § 3с, гл. IV, при объяснении эффекта отрицательной коррелированности в случае обменных курсов.)

Из соотношений (6) и (7) следует, что у элементов последовательности  $h = (h_n)$  среднее значение, дисперсия и ковариация не зависят от  $n$ . (Это, конечно, определяется предположением, что  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  — *белый шум* в широком смысле,  $E \varepsilon_n = 0$ ,  $D \varepsilon_n^2 = 1$  и коэффициенты в формуле (5) не зависят от  $n$ .) Тем самым, последовательность  $h = (h_n)$  является (просто по определению) стационарной в широком смысле. Если к тому же предположить, что последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  является *гауссовской*, то последовательность  $h = (h_n)$  также будет гауссовской и, следовательно, все ее вероятностные свойства

выражаются лишь в терминах среднего, дисперсии и ковариации. В этом случае последовательность  $h = (h_n)$  является стационарной в узком смысле, т. е.

$$\text{Law}(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) = \text{Law}(h_{i_1+k}, \dots, h_{i_n+k})$$

для всех  $n \geq 1$ ,  $i_1, \dots, i_n$  и произвольных  $k$ .

4. Пусть  $(h_1, \dots, h_n)$  — некоторая реализация, полученная в результате наблюдений величин  $h_k$  в моменты  $k = 1, \dots, n$ , и

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k \quad (8)$$

— временное среднее.

Со статистической точки зрения обращение к «статистике»  $\bar{h}_n$  представляет тот интерес, что  $\bar{h}_n$  является естественным «кандидатом» для оценивания среднего значения  $\mu$ .

В случае измерения качества этой оценки величиной среднеквадратического отклонения  $\Delta_n^2 = E |\bar{h}_n - \mu|^2$  полезным является следующий критерий:

$$\Delta_n^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(k) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где  $R(k) = \text{Cov}(h_n, h_{n+k})$  и  $h = (h_n)$  — произвольная стационарная в широком смысле последовательность.

В самом деле, пусть для простоты  $\mu = E h_n = 0$ . Тогда

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(k) \right|^2 = \left| E \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k \right) h_0 \right|^2 \leq E h_0^2 E \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k \right|^2,$$

и, значит, в формуле (9) справедлива импликация  $\Rightarrow$ .

С другой стороны,

$$E \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k \right|^2 = \frac{1}{n^2} E \left( \sum_{k=1}^n h_k^2 + 2 \sum_{k \neq l} h_k h_l \right) = \frac{2}{n^2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{l-1} R(k) - \frac{1}{n} R(0).$$

Выберем  $\delta > 0$ , и пусть  $n(\delta)$  таково, что для всех  $l \geq n(\delta)$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} R(k) \right| \leq \delta.$$

Тогда для  $n \geq n(\delta)$  имеем

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{l-1} R(k) \right| = \left| \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{n(\delta)} \sum_{k=0}^{l-1} R(k) + \frac{1}{n^2} \sum_{l=n(\delta)+1}^n \sum_{k=0}^{l-1} R(k) \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{n^2} \left| \sum_{l=1}^{n(\delta)} \sum_{k=0}^{l-1} R(k) \right| + \frac{1}{n^2} \left| \sum_{l=n(\delta)+1}^n l \cdot \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} R(k) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \left| \sum_{l=1}^{n(\delta)} \sum_{k=0}^{l-1} R(k) \right| + \delta, \end{aligned}$$

и, поскольку  $n(\delta) < \infty$ ,  $|R(0)| \leq \text{Const}$ , получаем

$$\overline{\lim}_n \mathbf{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k \right|^2 \leq \delta,$$

что в силу произвольности  $\delta > 0$  доказывает импликацию  $\Leftarrow$ .

Таким образом, рассматриваемая модель  $MA(1)$  является «эргодической» в том смысле, что *временные средние*  $\bar{h}_n$  сходятся (в  $L^2$ ) к среднему значению  $\mu$ , или, как еще говорят, к *среднему по ансамблю*. (По поводу общих понятий «эргодичности», «перемешивания», «эргодических теорем» см., например, [439, гл. V].)

Важность этого «эргодического» результата со статистической точки зрения вполне понятна — он *обосновывает* возможность оценивания среднего значения по временным средним, построенным по наблюдаемым значениям  $h_1, h_2, \dots$ . Понятно, что «эргодичность» играет ключевую роль в обосновании статистических приемов оценивания по выборкам не только среднего значения, но и других характеристик, таких как, скажем, моменты разных порядков, ковариации и т. п.

5. Напомним, что по ковариации  $\text{Cov}(h_n, h_m)$  определяется *корреляция*  $\text{Corr}(h_n, h_m)$  формулой

$$\text{Corr}(h_n, h_m) = \frac{\text{Cov}(h_n, h_m)}{\sqrt{\mathbf{D} h_n \mathbf{D} h_m}}. \quad (10)$$

Из неравенства Коши—Буняковского следует, что  $|\text{Corr}(h_n, h_m)| \leq 1$ .

В стационарном случае  $\text{Cov}(h_n, h_{n+k})$  не зависит от  $n$ . Обозначая эту величину  $R(k)$  и полагая

$$\rho(k) = \text{Corr}(h_n, h_{n+k}) = \frac{R(k)}{R(0)}, \quad (11)$$

из соотношений (7) находим, что в случае модели  $MA(1)$

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{b_0 b_1}{b_0^2 + b_1^2}, & k = 1, \\ 0, & k > 1. \end{cases} \quad (12)$$

Интересно отметить, что если обозначить  $\theta_1 = b_1/b_0$ , то

$$\rho(1) = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{(1/\theta_1)}{1 + (1/\theta_1)^2}, \quad (13)$$



и, следовательно, *разные* значения  $(\theta_1$  и  $1/\theta_1)$  приводят здесь к одному и тому же значению  $\rho(1)$ .

6. Обратимся теперь к моделям  $MA(q)$ :

$$h_n = \mu + \beta(L)\varepsilon_n, \quad \beta(L) = b_0 + b_1L + \dots + b_qL^q.$$

Легко находим, что

$$E h_n = \mu,$$

$$D h_n = b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_q^2$$

и

$$R(k) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{k+j}, & k = 1, \dots, q, \\ 0, & k > q. \end{cases} \quad (14)$$

Из формулы (14) мы видим, что схемами типа  $MA(q)$  можно (путем варьирования коэффициентов  $b_i$ ) пытаться моделировать поведение последовательностей  $h = (h_n)$ , у которых корреляция величин  $h_n$  и  $h_{n+k}$ ,  $k > q$ , равна нулю.

**Замечание.** Коль скоро зашла речь о подгонке той или иной модели к эмпирическим данным, или, как мы говорили выше, «моделировании поведения последовательностей  $h = (h_n)$ », то следует отметить, что общий принцип действий здесь таков.

По выборочным значениям  $h_1, h_2, \dots$  строятся прежде всего некоторые эмпирические характеристики, например выборочное среднее

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k,$$

выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (h_k - \bar{h}_n)^2,$$

выборочная корреляция (порядка  $k$ )

$$r_n(k) = \frac{1}{n\hat{\sigma}_n^2} \sum_{i=k+1}^n (h_i - \bar{h}_n)(h_{i-k} - \bar{h}_n),$$

выборочные частичные корреляции и др.

Затем, используя выражения для соответствующих теоретических характеристик (как, например, (12) и (14)) аппроксимируемых моделей, мы производим варьирование параметров (таких, как, скажем,  $b_i$  в формулах (12) и (14)) с целью *подгонки* теоретических характеристик под эмпирические. Наконец, на заключительном этапе мы находим *оценку качества* подгонки, основываясь на знании распределений эмпирических характеристик и их отклонений от теоретических распределений.

7. После моделей  $MA(q)$  следующий естественный шаг состоит в рассмотрении моделей  $MA(\infty)$ , т. е. моделей, в которых

$$h_n = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{n-j}. \quad (15)$$

Разумеется, для сходимости ряда в формуле (15) нужно на коэффициенты налагать некоторые условия. Если потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 < \infty, \quad (16)$$

то ряд в формуле (15) будет сходиться в среднеквадратическом смысле.

В этом предположении

$$E h_n = \mu, \quad D h_n = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 \quad (17)$$

и

$$R(k) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{k+j} b_j, \quad k \geq 0. \quad (18)$$

В теории стационарных случайных процессов относительно представления (15) для  $h = (h_n)$  принято говорить, что  $h_n$  есть «результат реакции физически осуществимого фильтра с импульсной переходной функцией  $b = (b_j)$ , когда на вход подается последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ ».

Весьма замечательно, что в определенном смысле всякая «регулярная» стационарная (в широком смысле) последовательность  $h = (h_n)$  может быть представлена в виде (15) с выполнением свойства (16). По поводу точной формулировки этого результата, а также всего комплекса проблем, связанных с разложением Вольда стационарных последовательностей на сумму «сингулярной» и «регулярной» составляющих (с «регулярной» составляющей, представимой в виде (15)); см. далее § 2d и, более подробно, например, [439, гл. VI, § 5].

## § 2b. Авторегрессионная модель $AR(p)$

1. В соответствии с определениями из § 1d говорят, что последовательность  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  подчиняется авторегрессионной модели (схеме)  $AR(p)$  порядка  $p$ , если

$$h_n = \mu_n + \sigma \varepsilon_n, \quad (1)$$

где

$$\mu_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}. \quad (2)$$

Иначе можно сказать, что последовательность  $h = (h_n)$  подчиняется разностному уравнению порядка  $p$ :

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p} + \sigma \varepsilon_n, \quad (3)$$

которое с помощью введенного в § 2а оператора  $L$  может быть переписано в следующем виде:

$$(1 - a_1 L - \dots - a_p L^p) h_n = a_0 + \sigma \varepsilon_n, \quad (4)$$

или, в более компактной форме, как

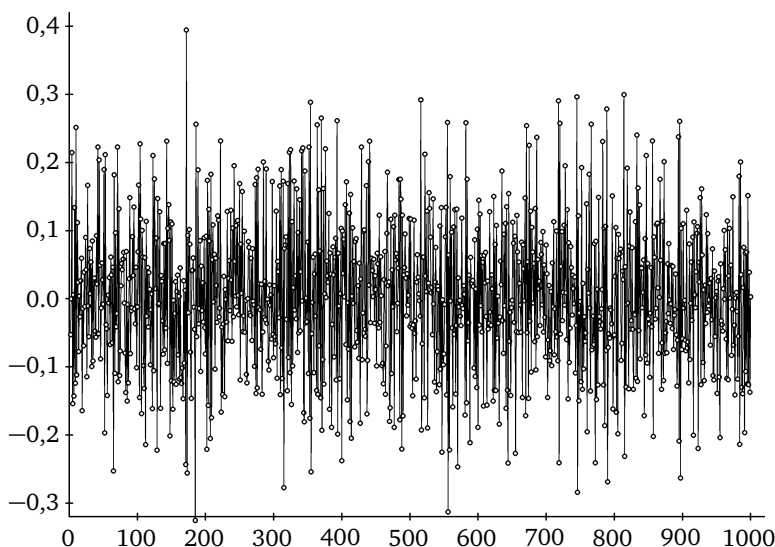
$$\alpha(L) h_n = w_n, \quad (5)$$

где  $\alpha(L) = 1 - a_1 L - \dots - a_p L^p$ ,  $w_n = a_0 + \sigma \varepsilon_n$ .

В случае  $n \geq 1$  для полного описания эволюции последовательности  $h = (h_n)$  разностным уравнением (3) нужно, как отмечалось в § 1d, еще задать начальные условия  $(h_{1-p}, h_{2-p}, \dots, h_0)$ .

Часто полагают  $h_{1-p} = \dots = h_0 = 0$ . Начальные условия можно считать также случайными, не зависящими от последовательности значений  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ . В «эргодических» случаях асимптотическое поведение  $h_n$  при  $n \rightarrow \infty$  не зависит от начальных условий, и в этом смысле их конкретизация не очень-то существенна. (Тем не менее, в последующем изложении мы будем четко оговаривать все предположения относительно начальных условий.)

На следующем рис. 19 приведена компьютерная реализация в авторегрессионной модели  $AR(2)$ .



**Рис. 19.** График компьютерной реализации последовательности  $h = (h_n)$ , подчиняющейся  $AR(2)$ -модели с  $h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \sigma \varepsilon_n$  с параметрами  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -0,5$ ,  $a_2 = 0,01$ ,  $\sigma = 0,1$ ;  $h_0 = h_1 = 0$ ;  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и  $2 \leq n \leq 1000$

2. Рассмотрим сначала подробно простой случай  $p = 1$ , где

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \sigma \varepsilon_n. \quad (6)$$

Этот случай выделяется из общего класса  $AR(p)$ -моделей тем, что в формуле (3) из «прошлых» величин  $h_{n-1}, h_{n-2}, \dots, h_{n-p}$  вклад в  $h_n$  вносит только ближайшее (по времени) значение  $h_{n-1}$ .

Если  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  — последовательность независимых случайных величин,  $h_0$  не зависит от  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ , то последовательность  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  будет классическим примером *конструктивно заданной марковской цепи*. Рекуррентным образом из формулы (6) находим

$$h_n = a_0(1 + a_1 + \dots + a_1^{n-1}) + a_1^n h_0 + \sigma(\varepsilon_n + a_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + a_1^{n-1} \varepsilon_1). \quad (7)$$

Отсюда видно, что свойства последовательности  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  существенным образом зависят от значений параметра  $a_1$ , при этом следует различать три случая:  $|a_1| < 1$ ,  $|a_1| = 1$  и  $|a_1| > 1$ , среди которых случай  $|a_1| = 1$  играет своего рода «пограничную» роль, точный смысл которой будет ясен из последующего изложения.

Из формулы (7) находим, что

$$\mathbf{E} h_n = a_1^n \mathbf{E} h_0 + a_0(1 + a_1 + \dots + a_1^{n-1}),$$

$$\mathbf{D} h_n = a_1^{2n} \mathbf{D} h_0 + \sigma^2(1 + a_1^2 + \dots + a_1^{2(n-1)}),$$

$$\mathbf{Cov}(h_n, h_{n-k}) = a_1^{2n-k} \mathbf{D} h_0 + \sigma^2 a_1^k (1 + a_1^2 + \dots + a_1^{2(n-k-1)})$$

для  $n - k \geq 1$ .

Из этих формул видно, что в случае  $|a_1| < 1$  и  $\mathbf{E} |h_0| < \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$\mathbf{E} h_n = a_1^n \mathbf{E} h_0 + \frac{a_0(1 - a_1^n)}{1 - a_1} \rightarrow \frac{a_0}{1 - a_1}$$

и (если  $\mathbf{D} h_0 < \infty$ )

$$\mathbf{D} h_n = a_1^{2n} \mathbf{D} h_0 + \frac{\sigma^2(1 - a_1^{2n})}{1 - a_1^2} \rightarrow \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2},$$

$$\mathbf{Cov}(h_n, h_{n-k}) \rightarrow \frac{\sigma^2 a_1^k}{1 - a_1^2}.$$

В этом случае ( $|a_1| < 1$ ) последовательность  $h = (h_n)_{n \geq 0}$  при  $n \rightarrow \infty$  «стационаризуется». Более того, если начальное распределение для  $h_0$  является гауссовским,

$$h_0 \sim \mathcal{N}\left(\frac{a_0}{1 - a_1}, \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2}\right),$$

то  $h = (h_n)_{n \geq 0}$  образует гауссовскую *стационарную* (и в широком, и в узком смыслах) последовательность с

$$\mathbf{E} h_n = \frac{a_0}{1 - a_1}, \quad \mathbf{D} h_n = \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2} \quad (8)$$

и

$$\text{Cov}(h_n, h_{n+k}) = \frac{\sigma^2 a_1^k}{1 - a_1^2}. \quad (9)$$

Напомним, что стационарность в узком смысле понимается как выполнение для всех допустимых  $m$  и  $k$  свойства

$$\text{Law}(h_0, h_1, \dots, h_m) = \text{Law}(h_k, h_{1+k}, \dots, h_{m+k});$$

стационарность в широком смысле означает, что

$$\text{Law}(h_i, h_j) = \text{Law}(h_{i+k}, h_{j+k}).$$

Если

$$\rho(k) = \text{Corr}(h_n, h_{n+k}) = \frac{\text{Cov}(h_n, h_{n+k})}{\sqrt{\mathbb{D} h_n \mathbb{D} h_{n+k}}},$$

то из формул (8) и (9) находим, что при  $|a_1| < 1$  выполняется равенство

$$\rho(k) = a_1^k, \quad (10)$$

т.е. корреляция между значениями  $h_n$  и  $h_{n+k}$  убывает к нулю геометрическим образом.

Если сопоставить представление (7) с формулой (2) из предыдущего параграфа, то можно заметить, что для каждого фиксированного  $n$  значение  $h_n$  в модели  $AR(1)$  можно интерпретировать как соответствующее значение  $h_n$  в модели  $MA(q)$  с  $q = n - 1$ . В этом смысле иногда несколько вольно говорят, что «модель  $AR(1)$  может рассматриваться как модель  $MA(\infty)$ ».

В модели  $AR(1)$  случай  $|a_1| = 1$  соответствует классическому случайному блужданию (ср. с § 2а гл. I, посвященным гипотезе случайного блуждания и концепции эффективного рынка). Если, скажем,  $a_1 = 1$ , то

$$h_n = a_0 n + h_0 + \sigma(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n).$$

Отсюда видим, что

$$\mathbb{E} h_n = a_0 n + \mathbb{E} h_0$$

и

$$\mathbb{D} h_n = \sigma^2 n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Случай  $|a_1| > 1$  является «взрывающимся» (в том смысле, например, что среднее значение  $\mathbb{E} h_n$  и дисперсия  $\mathbb{D} h_n$  растут с ростом  $n$ , к тому же экспоненциально быстро).

3. Рассмотрим теперь случай  $p = 2$ :

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \sigma \varepsilon_n. \quad (11)$$

С помощью введенного ранее оператора  $L$  этому разностному уравнению можно придать следующую форму:

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2) h_n = a_0 + \sigma \varepsilon_n. \quad (12)$$

Если  $a_2 = 0$ , то соответствующее уравнение

$$(1 - a_1 L)h_n = a_0 + \sigma \varepsilon_n \quad (13)$$

отвечает рассмотренному выше случаю  $AR(1)$ .

Положим  $w_n = a_0 + \sigma \varepsilon_n$ . Тогда уравнение (13) примет вид

$$(1 - a_1 L)h_n = w_n, \quad (14)$$

и, естественно, хотелось бы «обратить» это соотношение, с тем чтобы иметь возможность находить значения  $h_n$  по «входному сигналу» ( $w_n$ ).

Опираясь на свойства оператора  $L$  (см. п. 2 в § 2а), находим, что

$$(1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \dots + a_1^k L^k)(1 - a_1 L) = (1 - a_1^{k+1} L^{k+1}). \quad (15)$$

Применим к обеим частям соотношения (13) оператор  $1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \dots + a_1^k L^k$ . Тогда с учетом формулы (15) получим, что

$$h_n = (1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \dots + a_1^k L^k)w_n + a_1^{k+1} L^{k+1} h_n. \quad (16)$$

Полагая здесь  $k = n - 1$  и  $w_n = a_0 + \sigma \varepsilon_n$ , получаем равенство

$$h_n = (a_0 + \sigma \varepsilon_n) + a_1(a_0 + \sigma \varepsilon_{n-1}) + \dots + a_1^{n-1}(a_0 + \sigma \varepsilon_1) + a_1^n h_0, \quad (17)$$

в точности совпадающее с ранее найденным представлением (7).

Из формулы (16) с учетом (14) при  $k = n - 1$  видим, что

$$h_n = (1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \dots + a_1^{n-1} L^{n-1})(1 - a_1 L)h_n + a_1^n h_0. \quad (18)$$

Если  $|a_1| < 1$  и  $n$  достаточно велико, то

$$h_n \approx (1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \dots + a_1^{n-1} L^{n-1})(1 - a_1 L)h_n. \quad (19)$$

Тем самым, становится понятно, что «обратный» оператор  $(1 - a_1 L)^{-1}$  естественным образом должен быть определен как предел (в подходящем смысле) операторов  $1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \dots + a_1^n L^n$  при  $n \rightarrow \infty$ . (Ср. с алгебраическим представлением  $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \dots$  для  $|z| < 1$ .)

Эти наводящие соображения могут быть формализованы, например, следующим образом.

Рассмотрим стационарную последовательность  $\tilde{h} = (\tilde{h}_n)$ :

$$\tilde{h}_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j w_{n-j} \quad (20)$$

(ряд сходится в среднеквадратическом смысле). Нетрудно видеть, что  $(\tilde{h}_n)$  является решением разностного уравнения (14). Покажем, что в классе стационарных решений с конечным вторым моментом это решение является *единственным*.

Пусть  $h = (h_n)$  — какое-то другое стационарное решение. Тогда из формулы (16) получаем

$$h_n = \sum_{j=0}^k a_1^j w_{n-j} + a_1^{k+1} h_{n-(k+1)}, \quad (21)$$

и, значит,

$$\mathbb{E} \left| h_n - \sum_{j=0}^k a_1^j w_{n-j} \right|^2 = a_1^{2k+1} \mathbb{E} h_{n-(k+1)}^2 = a_1^{2k+1} \mathbb{E} h_0^2 \rightarrow 0 \quad (22)$$

при  $k \rightarrow \infty$ .

Отсюда и из формулы (20) следует, что стационарное решение уравнения (13) (с конечным вторым моментом) существует и единственно.

4. Проведенные рассмотрения показывают, на каком пути можно получить «обращение» в разностном уравнении (12) с целью получения значений последовательности  $(h_n)$  по значениям  $(w_n)$ .

Поскольку для любых  $\lambda_1, \lambda_2$  выполняется равенство

$$(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)L + \lambda_1 \lambda_2 L^2, \quad (23)$$

определяя  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  из системы

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a_1, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= -a_2, \end{aligned} \quad (24)$$

получим, что

$$1 - a_1 L - a_2 L^2 = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L). \quad (25)$$

Из соотношений (24) понятно, что  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - a_1 \lambda - a_2 = 0, \quad (26)$$

т. е.

$$\lambda_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}.$$

По-другому можно сказать, что  $\lambda_1 = z_1^{-1}$ ,  $\lambda_2 = z_2^{-1}$ , где  $z_1, z_2$  — корни уравнения

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 = 0, \quad (27)$$

а алгебраическое выражение  $1 - a_1 z - a_2 z^2$  получается соответствующей заменой  $L \rightarrow z$  из операторного выражения  $1 - a_1 L - a_2 L^2$ .

С учетом формулы (25) уравнение (12) переписывается в следующем виде:

$$(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)h_n = w_n,$$

откуда, «умножая» обе части на  $(1 - \lambda_2 L)^{-1}(1 - \lambda_1 L)^{-1}$ , находим, что

$$h_n = (1 - \lambda_2 L)^{-1}(1 - \lambda_1 L)^{-1}w_n. \quad (28)$$

Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то чисто формальным образом получаем соотношение

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \left[ \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1 L} - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2 L} \right], \quad (29)$$

и поэтому

$$h_n = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - \lambda_1 L)^{-1} w_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 - \lambda_2 L)^{-1} w_n. \quad (30)$$

Предполагая, что  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$ , или, что равносильно, что корни характеристического уравнения (27) лежат вне единичного круга, находим, что

$$(1 - \lambda_i L)^{-1} = 1 + \lambda_i L + \lambda_i^2 L^2 + \dots, \quad i = 1, 2, \quad (31)$$

и, значит, согласно соотношению (30), стационарное решение (с конечным вторым моментом) уравнения (12) имеет следующий вид:

$$h_n = \sum_{j=0}^{\infty} (c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j) w_{n-j} \quad (32)$$

с коэффициентами

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(То, что это решение является единственным стационарным решением уравнения (12), доказывается так же, как и для уравнения (13).)

5. Перейдем, наконец, к общим моделям  $AR(p)$ :

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p} + \sigma \varepsilon_n, \quad (33)$$

или

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p) h_n = w_n, \quad (34)$$

где  $w_n = a_0 + \sigma \varepsilon_n$ .

Следуя тому же самому методу, который был использован в случаях  $p = 1$  и  $p = 2$ , предположим, что найдено «факторизационное» представление

$$1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots (1 - \lambda_p L) \quad (35)$$

(с разными  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ ).

Если  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1, \dots, p$ , то из формулы (34) находим стационарное решение, единственное в классе решений с конечным вторым моментом, «идущих» (по времени) из  $-\infty$ :

$$h_n = (1 - \lambda_1 L)^{-1} \dots (1 - \lambda_p L)^{-1} w_n. \quad (36)$$

Числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  являются корнями уравнения

$$\lambda^p - a_1 \lambda^{p-1} - \dots - a_{p-1} \lambda - a_p = 0 \quad (37)$$



(ср. с (26)). Равносильным образом, можно сказать, что  $\lambda_i = z_i^{-1}$ , где  $z_i$  — корни уравнения  $1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_p z^p = 0$  (ср. с (27)).

Стационарное решение  $h = (h_n)$  мы получаем, если все корни этого уравнения лежат *вне* единичного круга.

Чтобы получить представление типа (30) или (32), рассмотрим аналог разложения (29):

$$\frac{1}{(1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_p z)} = \frac{c_1}{1 - \lambda_1 z} + \dots + \frac{c_p}{1 - \lambda_p z}, \quad (38)$$

где  $c_1, \dots, c_p$  — константы, подлежащие определению.

Умножая обе части равенства (38) на  $(1 - \lambda_1 z) \dots (1 - \lambda_p z)$ , видим, что константы  $c_1, \dots, c_p$  должны быть такими, что при всех  $z$  выполняется условие

$$1 = \sum_{i=1}^p c_i \prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}} (1 - \lambda_k z). \quad (39)$$

Это равенство, будучи выполненным для всех  $z$ , должно быть верным и для  $z = \lambda_1^{-1}, \dots, z = \lambda_p^{-1}$ , что дает для  $c_1, \dots, c_p$  следующие значения:

$$c_i = \frac{\lambda_i^{p-1}}{\prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}} (\lambda_i - \lambda_k)}. \quad (40)$$

(Заметим, что  $c_1 + \dots + c_p = 1$ .)

Из формул (36), (38) и (40) получаем

$$h_n = \sum_{l=0}^{\infty} (c_1 \lambda_1^l + \dots + c_p \lambda_p^l) w_{n-l}, \quad (41)$$

что обобщает равенство (32) на случай  $p \geq 2$ .

Представление (41) дает возможность подсчитывать различные характеристики последовательности  $h = (h_n)$ , например моменты  $E h_n^k$ , ковариации, условные математические ожидания  $E(h_{n+k} | \mathcal{F}_n)$ , где  $\mathcal{F}_n = \sigma(\dots, w_{-1}, w_0, \dots, w_n)$ , и т. п.

В предположении стационарности моменты  $E h_n \equiv \mu$  легко находятся непосредственно из формулы (33):

$$\mu = \frac{a_0}{1 - (a_1 + \dots + a_p)}. \quad (42)$$

Что же касается ковариаций  $R(k) = \text{Cov}(h_n, h_{n+k})$ , то из формулы (33) так же можно легко найти, что

$$R(k) = a_1 R(k-1) + \dots + a_p R(k-p), \quad k = 1, 2, \dots \quad (43)$$

Если  $k = 0$ , то

$$R(0) = a_1 R(1) + \dots + a_p R(p) + \sigma^2. \quad (44)$$

Для корреляционных функций  $\rho(k)$ ,  $k \geq 0$ , справедливы те же самые уравнения (43) и (44), называемые *уравнениями Юла—Уолкера* (G. U. Yule, G. T. Walker; [271]).

6. Один из центральных вопросов статистики авторегрессионных схем  $AR(q)$  состоит в *оценивании* параметров  $\theta = (a_0, a_1, \dots, a_p, \sigma)$ , входящих в уравнения (1) и (2), где сейчас для определенности будем считать  $h_0, h_{-1}, \dots$  известными константами.

Если предполагать, что белый шум в широком смысле  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  является гауссовским, то основным методом оценивания является *метод максимального правдоподобия*, согласно которому в качестве оценки параметра  $\theta$  (по наблюдениям  $h_1, h_2, \dots, h_n$ ) берется значение

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p_{\theta}(h_1, h_2, \dots, h_n),$$

где  $p_{\theta}(h_1, h_2, \dots, h_n)$  — совместная плотность (гауссовского) вектора  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ .

Общие принципы, связанные с методом максимального правдоподобия, проиллюстрируем на примере модели  $AR(1)$ , в которой  $h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \sigma \varepsilon_n$ , причем  $\sigma$  будем считать известным параметром ( $\sigma > 0$ ),  $h_0 = 0$ ,  $n \geq 1$ .

Поскольку здесь  $\theta = (a_0, a_1)$ , получаем

$$p_{\theta}(h_1, \dots, h_n) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(h_k - a_0 - a_1 h_{k-1})^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Оценка  $\hat{\theta} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1)$  определяется, как нетрудно видеть, из условия обращения в минимум функции

$$\psi(a_0, a_1) = \sum_{k=1}^n (h_k - a_0 - a_1 h_{k-1})^2.$$

Считая, что  $a_0 \in \mathbb{R}$  и  $a_1 \in \mathbb{R}$ , видим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial a_0} = 0 &\Leftrightarrow 2 \sum_{k=1}^n (h_k - a_0 - a_1 h_{k-1}) = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial a_1} = 0 &\Leftrightarrow 2 \sum_{k=1}^n (h_k - a_0 - a_1 h_{k-1}) h_{k-1} = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Решая эту линейную систему, находим оценки  $\hat{a}_0$  и  $\hat{a}_1$ .

Сосредоточим свое внимание на свойствах оценок  $\hat{a}_1 = \hat{a}_1(h_1, \dots, h_n)$ ,  $n \geq 1$ , параметра  $a_1$ , считая для простоты изложения, что параметр  $a_0$  известен ( $a_0 = 0$ ), а  $\sigma = 1$ .

В этих предположениях  $h_n = a_1 h_{n-1} + \varepsilon_n$ , и из соотношений (45) находим, что

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{k=1}^n h_{k-1} h_k}{\sum_{k=1}^n h_{k-1}^2}.$$

Значит,

$$\hat{a}_1 = a_1 + \frac{\sum_{k=1}^n h_{k-1} \varepsilon_k}{\sum_{k=1}^n h_{k-1}^2}.$$

Обозначим

$$M_n = \sum_{k=1}^n h_{k-1} \varepsilon_k.$$

Последовательность  $M = (M_n)$  является (при любом значении параметра  $a_1$ ) *мартингалом*, квадратическая характеристика которого есть

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n h_{k-1}^2.$$

Поэтому если  $a_1$  — истинное значение неизвестного параметра, то

$$\hat{a}_1 = a_1 + \frac{M_n}{\langle M \rangle_n}. \quad (46)$$

Из этого представления мы видим, что оценка максимального правдоподобия  $\hat{a}_1$  является *сильно состоятельной*: т. е. с вероятностью единица  $\hat{a}_1 \rightarrow a_1$  при  $n \rightarrow \infty$ , поскольку  $\langle M \rangle_n \rightarrow \infty$  (П.-п. н.) и согласно *усиленному закону больших чисел* для квадратично интегрируемых мартингалов ([439, гл. VII, § 5]; ср. также с (12) в § 1b) имеем

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \rightarrow 0 \quad (\text{П.-п. н.}).$$

Если в рассматриваемом случае ( $a_0 = 0$ ,  $\sigma = 1$ ) подсчитать *информацию Фишера*

$$I_n(a_1) = \mathbb{E}_{a_1} \left\{ -\frac{\partial^2 \ln P_{a_1}(h_1, \dots, h_n)}{\partial a_1^2} \right\},$$

где  $\mathbb{E}_{a_1}$  — математическое ожидание по мере

$$P_{a_1} = \text{Law}(h_1, \dots, h_n | \theta = a_1),$$

то найдем, что

$$I_n(a_1) = \mathbb{E}_{a_1} \langle M \rangle_n = \mathbb{E}_{a_1} \sum_{k=1}^n h_{k-1}^2.$$

Используя вышеприведенные формулы для  $E h_{k-1}$ ,  $D h_{k-1}$ , получаем, что

$$I_n(a_1) \sim \begin{cases} \frac{n}{1-a_1^2}, & |a_1| < 1, \\ \frac{n^2}{2}, & |a_1| = 1, \\ \frac{a_1^{2n}}{(a_1^2-1)^2}, & |a_1| > 1. \end{cases} \quad (47)$$

Случай  $|a_1| = 1$ , как видим, является в некотором смысле особым, «пограничным». В этом случае  $h = (h_n)$  является *случайным блужданием* (ср. с § 2а гл. I: «Гипотеза случайного блуждания и концепция эффективного рынка»). При  $|a_1| \neq 1$  соответствующая последовательность  $h = (h_n)$  является марковской. При этом в случае  $|a_1| < 1$  последовательность  $h = (h_n)$  «стационаризуется», когда  $n \rightarrow \infty$ .

Это объясняет то большое внимание, которое уделяется в статистике последовательностей  $h = (h_n)$  решению вопроса о том, какая из двух гипотез:

$$H_0: |a_1| = 1 \quad \text{или} \quad H_1: |a_1| > 1$$

— является более правдоподобной.

В эконометрической литературе, в том числе посвященной финансовым моделям, круг вопросов, связанных с тем, будет ли выполняться условие  $|a_1| = 1$ , носит название «проблемы единичного корня» (unit root).

Приведем (без доказательства, отсылая за подробностями, например, к книгам [445], [452] и соответствующей литературе, указанной в них) некоторые результаты относительно предельного распределения отклонений  $\hat{a}_1 - a_1$ .

**Теорема 1.** При  $n \rightarrow \infty$  выполняются соотношения

$$\lim_n P_{a_1} \{ \sqrt{I_n(a_1)} (\hat{a}_1 - a_1) \leq x \} = \begin{cases} \Phi(x), & |a_1| < 1, \\ H_{a_1}(x), & |a_1| = 1, \\ \text{Ch}(x), & |a_1| > 1, \end{cases} \quad (48)$$

где  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{(0,1)}(y) dy$  — стандартное нормальное распределение,  $\text{Ch}(x)$  — распределение Коши с плотностью  $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$  и  $H_{a_1}(x)$  — распределение случайной величины

$$a_1 \frac{W^2(1) - 1}{2\sqrt{2} \int_0^1 W^2(s) ds},$$

$(W(s))_{s \leq 1}$  — стандартный винеровский процесс (броуновское движение; см. § 3а гл. III).

Интересно отметить, что при  $|a_1| \neq 1$  плотности предельных распределений являются *симметричными* относительно нуля. Однако плотность распределения  $H_{a_1}(x)$  *несимметрична*. (Это легко увидеть из того наблюдения, что  $P(W^2(1) - 1 > 0) \neq \frac{1}{2}$ .)

Следующий результат показывает, что с помощью случайной нормировки отклонения  $(\hat{a}_1 - a_1)$ , состоящей в том, что вместо информации Фишера  $I_n(a_1)$  используется стохастическая фишеровская информация  $\langle M \rangle_n$ , можно получить лишь только два предельных распределения вместо трех в формуле (48).

**Теорема 2.** При  $n \rightarrow \infty$  выполняются соотношения

$$\lim P_{a_1} \{ \sqrt{\langle M \rangle_n} (\hat{a}_1 - a_1) \leq x \} = \begin{cases} \Phi(x), & |a_1| \neq 1, \\ H'_{a_1}(x), & |a_1| = 1, \end{cases} \quad (49)$$

где  $H'_{a_1}(x)$  — распределение вероятностей случайной величины

$$a_1 \frac{W^2(1) - 1}{2 \sqrt{\int_0^1 W^2(s) ds}}.$$

Наконец, использование наряду со случайной нормировкой последовательных оценок максимального правдоподобия приводит к единственному предельному (нормальному) распределению.

**Теорема 3.** Пусть  $\theta > 0$ ,

$$\tau(\theta) = \inf \{ n \geq 1 : \langle M \rangle_n \geq \theta \} \quad (50)$$

и

$$\hat{a}_1(\tau(\theta)) = \frac{\sum_{k=1}^{\tau(\theta)} h_{k-1} h_k}{\sum_{k=1}^{\tau(\theta)} h_{k-1}^2} \quad (51)$$

— последовательная оценка максимального правдоподобия. Тогда при любом значении  $a_1 \in \mathbb{R}$  выполняются соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{a_1} \{ \sqrt{\langle M \rangle_{\tau(\theta)}} [\hat{a}_1(\tau(\theta)) - a_1] \leq x \} = \Phi(x). \quad (52)$$

Сопоставим этот результат с утверждением (48).

Если исходным временным параметром является «время»  $n$ , то параметр  $\theta$  можно рассматривать как «новое», «операционное» время, построенное по стохастической фишеровской информации  $\langle M \rangle$ . Заметим, что тем (большим) временным интервалам, где фишеровская информация мало меняется, в «новом  $\theta$ -времени» будут соответствовать малые интервалы, и наоборот. Тем самым, в «новом», «операционном» времени приток информации становится как бы равномерным, однородным. В этом «новом»  $\theta$ -времени поступающие данные становятся «равноценными», в некотором смысле «одинаково распределенными» для всех значений параметра  $a_1$ , благодаря чему, в конечном счете, предельное распределение оказалось единственным и нормальным.

С проблематикой «нового» времени мы столкнемся далее в § 3д гл. IV, где достаточно подробно будет объяснен смысл перехода к этому времени

с целью «выравнивания» статистических данных обменных курсов валют, имеющих в своем поведении «географические» компоненты периодического характера.

7. Дополнительную информацию о свойствах оценок максимального правдоподобия можно получить из следующих результатов (см. [258], [445], [452]).

Во-первых,

$$\sup_{a_1 \in \mathbb{R}} E_{a_1} |\hat{a}_1 - a_1| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Во-вторых, пусть  $U(a_1)$  — класс оценок  $\tilde{a}_1$ , для которых

$$b_{a_1}(\tilde{a}_1) \equiv E_{a_1}(\tilde{a}_1 - a_1) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и

$$\frac{db_{a_1}}{da_1}(\tilde{a}_1) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(Оценки максимального правдоподобия  $\hat{a}_1$  принадлежат классу  $U(a_1)$  при  $|a_1| \neq 1$ .)

Для  $|a_1| \neq 1$  оценки максимального правдоподобия  $\hat{a}_1$  являются *асимптотически эффективными* в классе  $U(a_1)$  в том смысле, что для всех  $\tilde{a}_1 \in U(a_1)$  выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_n \frac{E_{a_1} \langle M \rangle_n (\hat{a}_1 - a_1)^2}{E_{a_1} \langle M \rangle_n (\tilde{a}_1 - a_1)^2} \leq 1.$$

Для  $|a_1| < 1$  («стационарный» случай) оценки  $\hat{a}_1$  *асимптотически эффективны* также и в обычном смысле: для всех  $\tilde{a}_1 \in U(a_1)$  выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_n \frac{D_{a_1} \hat{a}_1}{D_{a_1} \tilde{a}_1} \leq 1.$$

*Последовательные оценки* максимального правдоподобия обладают следующими свойствами *асимптотической равномерности*: при  $\theta \rightarrow \infty$  имеем

$$\sup_{|a_1| \leq 1} \sup_x |P_{a_1} \{ \sqrt{\langle M \rangle_{\tau(\theta)}} f[\hat{a}_1(\tau(\theta)) - a_1] \leq x \} - \Phi(x)| \rightarrow 0,$$

$$\sup_{1 < r \leq |a_1| \leq R} \sup_x |P_{a_1} \{ \sqrt{\langle M \rangle_{\tau(\theta)}} [\hat{a}_1(\tau(\theta)) - a_1] \leq x \} - \Phi(x)| \rightarrow 0.$$

## § 2с. Модель авторегрессии и скользящего среднего $ARMA(p, q)$ и интегральная модель $ARIMA(p, d, q)$

1. Эти модели воплощают в себе черты обеих рассмотренных выше моделей  $MA(q)$  и  $AR(p)$ , давая довольно-таки широкие возможности для построения моделей, «хорошо» объясняющих вероятностную природу статистического «сырья».

Как и выше, предполагается заданным фильтрованное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbf{P})$ , где сейчас удобно считать, что  $\mathcal{F}_n = \sigma(\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  с «белым шумом» (в широком смысле)  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ .

По определению (ср. § 1d), последовательность  $h = (h_n)$  является *ARMA-моделью*, если

$$h_n = \mu_n + \sigma \varepsilon_n, \quad (1)$$

где

$$\mu_n = (a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}) + (b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q}). \quad (2)$$

Без ограничения общности значение  $\sigma$  можно полагать известным и равным единице:  $\sigma = 1$ . Тогда из уравнений (1) и (2) находим, что

$$h_n - (a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}) = a_0 + [\varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q}] \quad (3)$$

или

$$\alpha(L)h_n = a_0 + \beta(L)\varepsilon_n, \quad (4)$$

где

$$\alpha(L) = 1 - a_1 L - \dots - a_p L^p \quad (5)$$

и

$$\beta(L) = 1 + b_1 L + \dots + b_q L^q. \quad (6)$$

Отметим, что в том случае, когда  $q = 0$ , выполняется равенство

$$\alpha(L)h_n = w_n,$$

где  $w_n = a_0 + \varepsilon_n$ , т. е. получаем *AR(p)-модель*. (Ср. с формулой (5) в § 2b.)

В том же случае, когда  $p = 0$ , соотношение (3) принимает вид

$$h_n = a_0 + \beta(L)\varepsilon_n, \quad (7)$$

т. е. приходим к *MA(q)-модели*. (Ср. с формулой (4) в § 2a.)

Формальным обращением из формулы (4) находим, что

$$h_n = \mu + \frac{\beta(L)}{\alpha(L)} \varepsilon_n, \quad (8)$$

где

$$\mu = \frac{a_0}{1 - (a_1 + \dots + a_p)} \quad (9)$$

(в предположении, что  $a_1 + \dots + a_p \neq 1$ ).

Обратимся теперь к вопросу существования стационарного решения (из класса  $L^2$ ) уравнения (3). Из формулы (8) и предшествующих рассмотрений (в п. 5 § 2b) следует, что «стационарность» определяется свойствами оператора  $\alpha(L)$ , т. е. авторегрессионной компонентой *ARMA(p, q)-модели*.

Если все корни уравнения (37) в § 2b по модулю меньше единицы (а для этого необходимо, чтобы выполнялось условие  $a_1 + \dots + a_p \neq 1$ ), то тогда у

этой модели (в классе  $L^2$ ) существует и притом единственное стационарное решение  $h = (h_n)$ .

Из формулы (8) получаем, что для стационарного решения

$$\mathbb{E} h_n = \frac{a_0}{1 - (a_1 + \dots + a_p)}. \quad (10)$$

(Ср. с (42) в § 2b.)

Из формулы (3) нетрудно найти, что ковариация  $R(k) = \text{Cov}(h_n, h_{n+k})$  для  $k > q$  удовлетворяет соотношениям

$$R(k) = a_1 R(k-1) + \dots + a_p R(k-p) \quad (11)$$

— тем же самым, что и в случае модели  $AR(p)$ . (Ср. с формулой (43) в § 2b.)

В случае  $k < q$  соответствующее представление для  $R(k)$  выглядит более сложно, нежели (11), поскольку надо учитывать также корреляционную зависимость между  $\varepsilon_{n-k}$  и  $h_{n-k}$ .

**2.** В качестве иллюстрации рассмотрим модель  $ARMA(1, 1)$ , являющуюся комбинацией моделей  $AR(1)$  и  $MA(1)$ :

$$h_n - a_1 h_{n-1} = a_0 + \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1}. \quad (12)$$

Будем предполагать, что  $|a_1| < 1$  («стационарность»). В этом случае

$$\alpha(L) = 1 - a_1 L, \quad \beta(L) = 1 + b_1 L \quad (13)$$

и соотношение (8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{1+b_1 L}{1-a_1 L} \varepsilon_n = \\ &= \frac{a_0}{1-a_1} + \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_1^k L^k \right) (1+b_1 L) \varepsilon_n = \\ &= \frac{a_0}{1-a_1} + (a_1 + b_1) \sum_{k=1}^{\infty} a_1^{k-1} \varepsilon_{n-k} + \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда непосредственно находим, что  $R(k) = \text{Cov}(h_n, h_{n+k})$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} R(k) &= a_1 R(k-1), \quad k \geq 2, \\ R(1) &= a_1 R(0) + b_1, \\ R(0) &= a_1 R(1) + (1 + a_1 b_1 + b_1^2), \end{aligned} \quad (15)$$

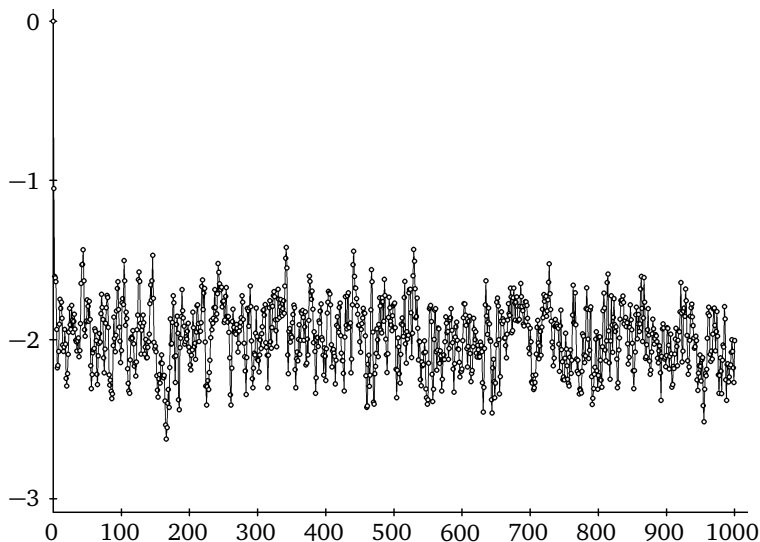
из которых получаем

$$R(0) = D h_n = \frac{1 + 2a_1 b_1 + b_1^2}{1 - a_1^2}$$

и

$$\rho(k) = \frac{R(k)}{R(0)} = \frac{(1 + a_1 b_1)(a_1 + b_1)}{1 + 2a_1 b_1 + b_1^2} a_1^{k-1}. \quad (16)$$





**Рис. 20.** График компьютерной реализации последовательности  $h = (h_n)$ , подчиняющейся  $ARMA(1, 1)$ -модели с  $h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + b_1 \varepsilon_{n-1} + \sigma \varepsilon_n$  с параметрами  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 0,5$ ,  $b_1 = 0,1$ ,  $\sigma = 0,1$ ;  $h_0 = 0$  и  $0 \leq n \leq 1000$

Важно отметить, что при  $|a_1| < 1$  корреляция убывает *геометрическим* образом при  $k \rightarrow \infty$ , что следует иметь в виду при попытках использования моделей  $ARMA(1, 1)$  (так же как и более общих моделей  $ARMA(p, q)$ ) при подгонке к конкретным статистическим данным.

**3.** Рассмотренные выше модели  $ARMA(p, q)$  хорошо изучены и успешно применяются главным образом при описании стационарных временных рядов. В том же случае, когда имеет место *нестационарность* во временном ряду  $x = (x_n)$ , иногда простым взятием разностей  $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$  или разностей  $\Delta^d x_n$  порядка  $d$  удастся получить «более» стационарную последовательность  $\Delta^d x = (\Delta^d x_n)$ .

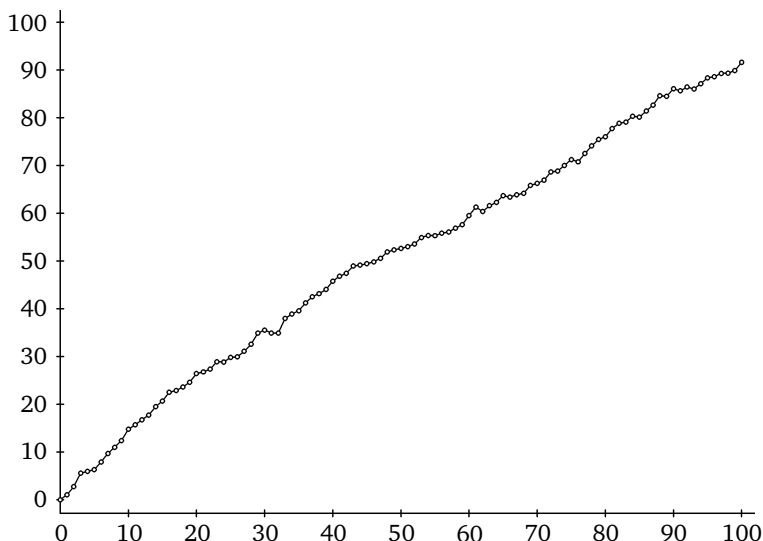
С этим связана следующая терминология: говорят, что последовательность  $x = (x_n)$  является  $ARIMA(p, d, q)$ -моделью, если  $\Delta^d x = (\Delta^d x_n)$  образует  $ARMA(p, q)$ -модель.

В символической форме это можно представить следующим образом:

$$\Delta^d ARIMA(p, d, q) = ARMA(p, q).$$

Чтобы пояснить смысл этих моделей, рассмотрим их частный случай — модель  $ARIMA(0, 1, 1)$ . Это означает, что  $\Delta x_n = h_n$ , где  $(h_n)$  подчиняется модели  $MA(1)$ , т. е.

$$\Delta x_n = \mu + (b_0 + b_1 L) \varepsilon_n.$$



**Рис. 21.** График компьютерной реализации последовательности  $x = (x_n)$ , подчиняющейся  $ARIMA(0, 1, 1)$ -модели с  $\Delta x_n = \mu + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_0 \varepsilon_n$  с параметрами  $\mu = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 0,1$ ;  $x_0 = 0$

Если ввести оператор суммирования (оператор «интегрирования»)  $S$ , определяя его формулой  $S = \Delta^{-1}$ , или, что равносильно,

$$S = 1 + L + L^2 + \dots = (1 - L)^{-1},$$

то формально можно записать, что  $x_n = (Sh)_n$ , где  $h_n = \mu + (b_0 + b_1 L)\varepsilon_n = \mu + b_0 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1}$ .

Тем самым,  $x = (x_n)$  можно рассматривать как результат «интегрирования» последовательности  $h = (h_n)$ , подчиняющейся модели  $MA(1)$ , что и объясняет происхождение названия

$$ARIMA = AR + I + MA,$$

в котором буква  $I$  — от слова «Integrated». (Ср. рис. 18 и 21.)

Как уже отмечалось, эти модели широко используются в теории Бокса и Дженкинса [53]. Большой материал по применениям этих моделей в статистике финансовых данных см., например, в [351].

## § 2d. Прогнозирование в линейных моделях

1. Во введении к настоящему разделу отмечалось, что построение вероятностно-статистических моделей (по «прошлым» данным) представляет собой не самоцель, а является необходимым для того, чтобы в конечном счете дать прогноз «будущего» движения цен.

В очень редких случаях по «прошлым» данным можно дать безошибочный прогноз. (Такая ситуация присуща, например, так называемым сингулярным стационарным последовательностям; см. далее п. 4, и подробнее, например, [439, гл. VI].)

Типичен же, конечно, тот случай, когда, делая тот или иной прогноз, мы неминуемо будем совершать некоторую ошибку, величина которой определяет степень риска решений, основанных на полученном прогнозе.

2. В линейных стационарных моделях имеется хорошо разработанная (и красивая) теория построения *оптимальных* (в среднеквадратическом смысле) *линейных оценок*, развитая главным образом в работах А. Н. Колмогорова и Н. Винера.

Как мы видели выше, многие из рассмотренных последовательностей  $h = (h_n)$  могут быть представлены в виде *одностороннего скользящего среднего*

$$h_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} \quad (1)$$

с  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$  и некоторой «базовой» последовательностью  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ , являющейся белым шумом в широком смысле. (Для моделей  $MA(q)$ ,  $MA(\infty)$  см. формулу (15) в § 2а; для моделей  $AR(p)$  см. формулу (41) в § 2б; для моделей  $ARMA(p, q)$  см. формулу (8) в § 2с.)

Для изложения результатов относительно экстраполяции таких последовательностей нам понадобятся некоторые обозначения и понятия.

Если  $\xi = (\xi_n)$  — стохастическая последовательность, то будем обозначать через  $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma(\dots, \xi_{n-1}, \xi_n)$   $\sigma$ -алгебру, порожденную «прошлым»  $\{\xi_k, k \leq n\}$ , через  $\mathcal{F}_{\infty}^\xi = \bigvee \mathcal{F}_n^\xi$  —  $\sigma$ -алгебру, порожденную всеми величинами  $\xi = (\xi_n)$ ;  $H_n^\xi$  — замкнутое (в  $L^2$ ) линейное многообразие  $\mathcal{L}(\dots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ , порожденное величинами  $\{\xi_k, k \leq n\}$ , и  $H_\infty^\xi$  — замкнутое линейное многообразие, порожденное всеми величинами  $\xi = (\xi_n)$ , т. е.  $H_\infty^\xi = \mathcal{L}(\xi_k, k < \infty)$ .

Пусть  $\eta = \eta(\omega)$  — некоторая случайная величина с конечным вторым моментом,  $E \eta^2(\omega) < \infty$ . Сформулируем задачу оценивания величины  $\eta$  по наблюдениям за последовательностью  $\xi$ .

Здесь наиболее распространены следующие два подхода.

Если наблюдению подлежат значения  $(\dots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ , то в первом подходе в качестве оценок берется класс *всех*  $\mathcal{F}_n^\xi$ -измеримых оценок  $\hat{\eta}_n$  и среди них *наилучшей* (*оптимальной*) объявляется та оценка  $\hat{\eta}_n$ , на которой достигается минимум среднеквадратического отклонения:

$$E |\eta - \hat{\eta}_n|^2 = \inf_{\tilde{\eta}_n} E |\eta - \tilde{\eta}_n|^2. \quad (2)$$

Хорошо известно, что оптимальная в этом смысле оценка имеет следующий вид:

$$\hat{\eta}_n = E(\eta | \mathcal{F}_n^\xi), \quad (3)$$

где  $E(\cdot|\cdot)$  — условное математическое ожидание, являющееся, вообще говоря, *нелинейной* функцией от наблюдавшихся значений  $(\dots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ . (Вопросы *оптимальной нелинейной фильтрации, экстраполяции и интерполяции* для достаточно широких классов случайных процессов рассматриваются, например, в книге [303].)

В другом же подходе, на котором мы сейчас и сосредоточим наше внимание, к рассмотрению допускаются лишь *линейные* оценки, т. е. функции из  $H_n^\xi$ , образованные (по определению) или конечными линейными комбинациями величин  $\{\xi_k, k \leq n\}$ , или же их  $L^2$ -замыканиями.

По аналогии с формулой (2), *наилучшей (оптимальной) линейной* оценкой величины  $\eta$  объявляется такая оценка  $\hat{\lambda}_n \in H_n^\xi$ , что

$$E|\eta - \hat{\lambda}_n|^2 = \inf_{\tilde{\lambda}_n \in H_n^\xi} E|\eta - \tilde{\lambda}_n|^2. \quad (4)$$

При этом для  $\hat{\lambda}_n$  принято следующее обозначение (ср. с формулой (3)):

$$\hat{\lambda}_n = \hat{E}(\eta | H_n^\xi), \quad (5)$$

где  $\hat{E}(\cdot|\cdot)$  называют условным математическим ожиданием в *широком смысле*.

**3.** Вернемся к вопросу о (линейном) предсказании значения  $h_n$ ,  $n \geq 1$ , в последовательности  $h = (h_n)$ , описываемой формулой (1), по той «информации», которая имеется до момента времени 0. Сравнительно просто эта задача решается, когда «информацией» считается все «прошрое», порожденное не  $h = (h_n)_{n \leq 0}$ , а  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \leq 0}$ :

$$H_0^\varepsilon = \bar{\mathcal{L}}(\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{h}_n^{(\varepsilon)} &\equiv \hat{E}(h_n | H_0^\varepsilon) = \hat{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \varepsilon_{n-k} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} \mid H_0^\varepsilon\right) = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} + \hat{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \varepsilon_{n-k} \mid H_0^\varepsilon\right) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \end{aligned} \quad (6)$$

поскольку для  $i \geq 1$  имеем

$$\hat{E}(\varepsilon_i | H_0^\varepsilon) = E \varepsilon_i (= 0),$$

что легко следует из ортогональности компонент в «белом шуме»  $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ .

При этом нетрудно найти и ошибку экстраполяции

$$\sigma_n^2 = E|h_n - \hat{E}(h_n | H_0^\varepsilon)|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2.$$

Ясно, что  $\sigma_n^2 \leq \sigma_{n+1}^2$  и

$$\lim_n \sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 (= E h_n^2).$$

Отсюда следует, что с ростом  $n$  роль «прошлой информации»  $H_0^\varepsilon = \overline{\mathcal{L}}(\dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_0)$  в предсказании значений величины  $h_n$  становится «все меньше и меньше» и в пределе (при  $n \rightarrow \infty$ ) в качестве наилучшей линейной оценки надо брать просто математическое ожидание, т. е. 0 в рассматриваемом случае.

Разумеется, большой интерес представляет задача экстраполяции не только по бесконечному числу значений  $\{\varepsilon_k, k \leq 0\}$ , но и по некоторому их конечному числу, скажем,  $\{\varepsilon_k, l \leq k \leq 0\}$ . Следует, однако, отметить, что в техническом отношении эта последняя задача сложнее, нежели та, которая сейчас рассматривается.

Полученное представление

$$\widehat{h}_n^{(\varepsilon)} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} \quad (7)$$

решает задачу экстраполяции величин  $h_n$  по (линейной) «информации»  $H_0^\varepsilon$ , а не по «информации»  $H_0^h$ , содержащейся в  $\overline{\mathcal{L}}(\dots, h_{-1}, h_0)$ .

Понятно, конечно, что если предположить, что

$$H_0^\varepsilon = H_0^h, \quad (8)$$

то, по крайней мере в *принципе*, из формулы (7) можно получить и соответствующую оценку  $\widehat{E}(h_n | H_0^h)$  в виде  $\sum_{k=n}^{\infty} \widehat{a}_k h_{n-k}$ .

4. В связи со сделанными предположениями (1) и (8) целесообразно напомнить некоторые общие результаты теории стационарных случайных последовательностей.

Пусть  $\xi = (\xi_n)$  — некоторая стационарная (в широком смысле) последовательность.

Каждый элемент  $\eta \in H(\xi)$  может быть представлен в виде суммы двух ортогональных компонент:

$$\eta = \widehat{E}(\eta | S(\xi)) + [\eta - \widehat{E}(\eta | S(\xi))],$$

где  $S(\xi) = \bigcap_n H_n^\xi$  — (линейная) информация, содержащаяся в «бесконечно далеком прошлом». Обозначая через  $R(\xi)$  множество элементов вида  $\eta - \widehat{E}(\eta | S(\xi))$ , где  $\eta \in H(\xi)$ , находим, что и само множество  $H(\xi)$  может быть представлено как ортогональная сумма:  $H(\xi) = S(\xi) \oplus R(\xi)$ .

Стационарная последовательность  $\xi = (\xi_n)$  называется *регулярной*, если  $H(\xi) = R(\xi)$ , и *сингулярной*, если  $H(\xi) = S(\xi)$ .

Наглядный смысл условия  $H(\xi) = S(\xi)$  вполне понятен: оно означает, что вся информация, доставляемая значениями последовательности  $\xi$ , «сидит в

бесконечно далеком прошлом». Поэтому сингулярные последовательности называют также *чисто* или *вполне детерминированными*. В том случае, когда  $S(\xi) = \emptyset$ , т. е.  $H(\xi) = R(\xi)$ , последовательность  $\xi$  называют *чисто* или *вполне недетерминированной*.

Содержание введенных понятий раскрывается в следующем результате.

**Предложение 1.** *Всякая невырожденная стационарная в широком смысле случайная последовательность  $\xi = (\xi_n)$  допускает, и притом единственное, разложение*

$$\xi_n = \xi_n^r + \xi_n^s,$$

где  $\xi^r = (\xi_n^r)$  — регулярная, а  $\xi^s = (\xi_n^s)$  — сингулярная последовательности; при этом  $\xi^r$  и  $\xi^s$  ортогональны ( $\text{Cov}(\xi_n^r, \xi_m^s) = 0$  для всех  $n$  и  $m$ ).

(См. подробнее [439, гл. VI, § 5].)

Введем следующее важное

**Определение.** Случайная последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  называется *обновляющей* последовательностью для  $\xi = (\xi_n)$ , если

- а)  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  является белым шумом в широком смысле, т. е.  $E \varepsilon_n = 0$ ,  $E \varepsilon_n \varepsilon_m = 0$ ,  $n \neq m$ ,  $E |\varepsilon_n|^2 = 1$ ;
- б)  $H_n^\xi = H_n^\varepsilon$  для всех  $n$ .

Понятен наглядный смысл термина «обновляющий»: в силу ортогональности элементов последовательности  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  величина  $\varepsilon_{n+1}$  может рассматриваться как та («новая») информация, которая «обновляет» информацию, содержащуюся в  $H_n^\varepsilon$ , и дает возможность образовать  $H_{n+1}^\varepsilon$ . Поскольку  $H_n^\xi = H_n^\varepsilon$  для всех  $n$ , тем самым  $\varepsilon_{n+1}$  «обновляет» и информацию в  $H_n^\xi$ . (Ср. с § 2а гл. I, где рассматривалась гипотеза случайного блуждания и обсуждалось понятие эффективного рынка.)

Следующее предложение устанавливает связь между введенными выше понятиями.

**Предложение 2.** *Для того чтобы невырожденная последовательность  $\xi = (\xi_n)$  была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такая обновляющая последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  и такие числа  $(a_k)_{k \geq 0}$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ , что (Р-п. н.)*

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}. \quad (9)$$

(Доказательство см., например, в [439, гл. VI, § 5].)

Из сформулированных выше предложений 1 и 2 непосредственно вытекает следующий результат.

**Предложение 3.** Если  $\xi = (\xi_n)$  — невырожденная стационарная последовательность, то она допускает разложение Вольда:

$$\xi_n = \xi_n^s + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \quad (10)$$

где  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$  и  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  — некоторая обновляющая последовательность (для  $\xi^r$ ).

5. Если предполагать, что последовательность  $h = (h_n)$  допускает представление (1) с обновляющей (для  $h$ ) последовательностью  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ , то тогда

$$\hat{h}_n \equiv \hat{E}(h_n | H_0^h) = \hat{E}(h_n | H_0^\varepsilon) (= \hat{h}_n^{(\varepsilon)}).$$

Значит, в силу соотношения (6) имеем

$$\hat{h}_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} = \sum_{k=n}^{\infty} \hat{a}_k^{(n)} h_{n-k}, \quad (11)$$

где последнее равенство следует из того, что  $H_n^\varepsilon = H_n^h$  для всех  $n$ .

Формула (11) в принципе решает задачу оптимальной линейной экстраполяции значений  $h_n$  по «прошлой» информации  $\{h_k, k \leq 0\}$ . Но, естественно, возникают следующие два вопроса: когда последовательность  $h = (h_n)$  допускает представление (1) с обновляющей последовательностью  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  и как находить коэффициенты  $\hat{a}_k$ , входящие в формулу (11).

Ответ на первый вопрос содержится в предложении 2 — последовательность  $h = (h_n)$  должна быть регулярной. И здесь работает известный критерий Колмогорова: если  $h = (h_n)$  — стационарная в широком смысле последовательность с такой спектральной плотностью  $f = f(\lambda)$ , что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda > -\infty, \quad (12)$$

то эта последовательность является регулярной. (См., например, [439, гл. VI, § 5].)

6. Напомним, что всякая стационарная в широком смысле последовательность  $\xi = (\xi_n)$ ,  $E \xi_n = 0$ , допускает спектральное представление

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} z(d\lambda), \quad (13)$$

где  $z = z(\Delta)$ ,  $\Delta \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$ , является комплекснозначной стохастической мерой с ортогональными значениями:  $E z(\Delta_1) \bar{z}(\Delta_2) = 0$ ,  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ ; (см., например, [439, гл. VI, § 3]).

При этом ковариационная функция  $R(n) = \text{Cov}(\xi_{k+n}, \xi_k)$  допускает представление

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} F(d\lambda) \quad (14)$$

со спектральной мерой  $F(\Delta) = E |z(\Delta)|^2$ .

Если существует такая (неотрицательная) функция  $f = f(\lambda)$ , что

$$F(\Delta) = \int_{\Delta} f(\lambda) d\lambda, \quad (15)$$

то она называется *спектральной плотностью*. Сама же функция  $F(\lambda) = F((-\infty, \lambda])$  называется *спектральной функцией*.

Таким образом, если относительно исходной последовательности  $h = (h_n)$  известно а priori лишь только то, что она является стационарной в широком смысле со спектральной плотностью  $f = f(\lambda)$ , удовлетворяющей условию (12), то тогда эта последовательность является *регулярной*, допуская представление (9) с обновляющей последовательностью  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ .

7. В интересующих нас линейных моделях, рассмотренных выше, последовательность  $h = (h_n)$  задавалась не спектральным представлением, а в виде ряда (1), где  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  — некоторая ортонормированная последовательность с условиями  $E \varepsilon_n = 0$  и  $E \varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij}$ ; здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = 1, \text{ если } i = j, \text{ и } \delta_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Понятно, что последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  является стационарной, ее корреляционная (= ковариационная) функция имеет вид

$$R_{\varepsilon}(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (16)$$

и спектральная плотность имеет вид

$$f_{\varepsilon}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \lambda < \pi \quad (17)$$

(поскольку  $R_{\varepsilon}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \frac{1}{2\pi} d\lambda$ ).

Если  $h_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}$  и коэффициенты  $a_k$  таковы, что  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ , тогда, как нетрудно видеть, ковариационная функция последовательности  $h = (h_n)$  имеет вид

$$R_h(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_h(\lambda) d\lambda, \quad (18)$$

где

$$f_h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\Phi(e^{-i\lambda})|^2 \quad (19)$$



и

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \quad (20)$$

Предположим сейчас, что ряд (20) имеет радиус сходимости  $r > 1$  и не имеет нулей в области  $|z| \leq 1$ . В этом предположении вопрос о значениях коэффициентов  $\hat{a}_k$  в представлении (11) оптимального линейного прогноза  $\hat{h}_n$  решается следующим образом (см. подробнее, например, в [439, гл. VI, § 6]).

Пусть

$$\hat{\varphi}_n(\lambda) = e^{i\lambda n} \frac{\Phi_n(e^{-i\lambda})}{\Phi(e^{-i\lambda})}, \quad (21)$$

где

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k. \quad (22)$$

Разложим  $\hat{\varphi}_n(\lambda)$  в ряд Фурье:

$$\hat{\varphi}_n(\lambda) = \hat{a}_n^{(n)} + \hat{a}_{n+1}^{(n)} e^{-i\lambda} + \hat{a}_{n+2}^{(n)} e^{-2i\lambda} + \dots \quad (23)$$

Коэффициенты  $\hat{a}_n^{(n)}, \hat{a}_{n+1}^{(n)}, \dots$  будут в точности теми, которые определяют оптимальный линейный прогноз  $\hat{h}_n$  величины  $h_n$ :

$$\hat{h}_n \equiv \hat{E}(h_n | H_0^h) = \sum_{k=n}^{\infty} \hat{a}_k^{(n)} h_{n-k}. \quad (24)$$

Таким образом, мы получаем возможность построения прогноза значения  $h_n$  по прошлым значениям  $\{\dots, h_{-1}, h_0\}$ , если сумеем найти представление (23).

**8.** Для иллюстрации изложенного выше метода рассмотрим ряд примеров для стационарных моделей  $MA(q)$ ,  $AR(p)$ ,  $ARMA(p, q)$ , ограничиваясь приведением формул прогноза лишь для некоторых значений  $p$  и  $q$ . По поводу общих формул см., например, [439, гл. IV, § 6].

**Пример 1** (модель  $MA(q)$ ). Пусть

$$h_n = \beta(L) \varepsilon_n, \quad (25)$$

где

$$\beta(L) = b_0 + b_1 L + \dots + b_q L^q, \quad (26)$$

т. е.

$$h_n = \sum_{k=0}^q b_k \varepsilon_{n-k}. \quad (27)$$

Сравнивая это представление с (1), видим, что  $a_k = b_k$  для  $0 \leq k \leq q$  и  $a_k = 0$ ,  $k > q$ .

Следовательно,

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^q b_k z^k$$

и

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \sum_{k=n}^q b_k z^k, & n \leq q, \\ 0, & n > q. \end{cases}$$

Поэтому

$$\hat{\varphi}_n(\lambda) = e^{i\lambda n} \frac{\sum_{k=n}^q e^{-i\lambda k} b_k}{\sum_{k=0}^q e^{-i\lambda k} b_k} \quad \text{для } n \leq q \quad (28)$$

и  $\hat{\varphi}_n(\lambda) = 0$  для  $n > q$ .

Тем самым, если  $n > q$ , то в разложении (23) все коэффициенты  $\hat{a}_n$  равны 0, и, значит, в этом случае оптимальный прогноз  $\hat{h}_n = 0$ , что вовсе и не удивительно, поскольку корреляция между  $h_n$  и каждой из величин  $h_0, h_{-1}, \dots$  равна нулю при  $n > q$ .

Если  $q = 1$ , то  $h_n = b_0 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1}$  и

$$\hat{\varphi}_1(\lambda) = e^{i\lambda} \frac{e^{-i\lambda} b_1}{b_0 + e^{-i\lambda} b_1} = \frac{b_1}{b_0 + e^{-i\lambda} b_1}.$$

Можно, конечно, сразу считать, что  $b_0 = 1$ , и полагать  $b_1 = \theta$ , где  $|\theta| < 1$ , и тем самым мы обеспечим, что  $\Phi(z) = 1 + \theta z$  не имеет нулей в области  $|z| \leq 1$ . Тогда

$$\hat{\varphi}_1(\lambda) = \frac{\theta}{1 + \theta e^{-i\lambda}} = \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\theta e^{-i\lambda})^k = \theta \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i\lambda k} (-1)^k \theta^k.$$

Сравнивая это разложение с (23), находим, что для  $q = 1$  и  $n = 1$  выполняются равенства

$$\hat{a}_1^{(1)} = \theta, \quad \hat{a}_2^{(1)} = (-1) \cdot \theta^2, \quad \hat{a}_3^{(1)} = \theta^3, \quad \dots, \quad \hat{a}_k^{(1)} = (-1)^{k-1} \theta^k, \quad \dots$$

Тем самым, для модели  $MA(1)$  прогноз значения  $h_1$  по «прошлому»  $(\dots, h_{-1}, h_0)$  определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= \hat{a}_1^{(1)} h_0 + \hat{a}_2^{(1)} h_{-1} + \dots + \hat{a}_k^{(1)} h_{1-k} + \dots = \\ &= \theta (h_0 - \theta h_{-1} + \theta^2 h_{-2} + \dots + (-1)^{k-1} \theta^{k-1} h_{1-k} + \dots) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \theta^{k+1} h_{-k}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что *наибольший вклад* в значение прогноза величины  $h_1$  доставляется «ближайшим прошлым» — значением  $h_0$  — и вклад предшествующих значений убывает геометрическим образом (вклад от  $h_{-k}$  входит с коэффициентом  $\theta^k$ , где  $|\theta| < 1$ ).

**Пример 2** (модель  $AR(p)$ ). Будем предполагать (ср. с формулой (33) в § 2b), что для  $-\infty < n < \infty$

$$h_n = a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p} + \varepsilon_n, \quad (29)$$

при этом в факторизационном представлении (35) (§ 2b) значения  $\lambda_i$  различны,  $i = 1, \dots, p$ , и  $|\lambda_i| < 1$ .

В соответствии с формулой (41) из § 2b стационарное решение уравнения (29) имеет вид

$$h_n = \sum_{k=0}^{\infty} (c_1 \lambda_1^k + \dots + c_p \lambda_p^k) \varepsilon_{n-k}, \quad (30)$$

т. е. в представлении (1) имеем

$$a_k = c_1 \lambda_1^k + \dots + c_p \lambda_p^k. \quad (31)$$

С принципиальной точки зрения прогноз  $\hat{h}_n$  величины  $h_n$  по значениям  $\{h_k, k \leq 0\}$  дается формулой (24), где коэффициенты  $\hat{a}_k^{(n)}$  получаются из разложения функции  $\hat{\varphi}_n(\lambda)$  (см. (21)–(23)) в ряд Фурье с учетом формулы (31) для коэффициентов  $a_k$ , входящих в определение функции  $\hat{\varphi}_n(\lambda)$ .

В литературе приведено довольно-таки много разных приемов по отысканию удобных для применений формул для прогноза  $\hat{h}_n$  (см., например, [211], где излагаются рекуррентные процедуры отыскания значений  $\hat{h}_n$  по значениям  $\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_{n-1}$ ).

Мы ограничимся лишь иллюстративным подсчетом прогноза для стационарной модели  $AR(1)$ :

$$h_n = \theta h_{n-1} + \varepsilon_n, \quad (32)$$

$|\theta| < 1$ .

Напомним, что в этом случае  $R(n) = \text{Cov}(h_k, h_{k+n})$  определяется формулой

$$R(n) = \frac{\theta^k}{1 - \theta^2}.$$

Отсюда нетрудно заключить, что спектральная функция  $f = f(\lambda)$  существует и задается формулой

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1 - \theta e^{-i\lambda}|^2}. \quad (33)$$

Сопоставляя формулу (33) с (19), находим, что

$$\Phi(z) = \frac{1}{1 - \theta z} = \sum_{k=0}^{\infty} (\theta z)^k.$$

Поэтому из формулы (21) следует, что

$$\hat{\varphi}_n(\lambda) = \theta^n,$$

и, значит, (см. формулы (23) и (24))

$$\hat{h}_n = \theta^n h_0, \quad n \geq 1,$$

т. е. для прогнозирования величины  $h_n$  по  $\{h_k, k \leq 0\}$  достаточно знать лишь значение  $h_0$ , что и неудивительно, если иметь в виду марковский характер последовательности  $h = (h_n)$ .

**Пример 3** (модель  $ARMA(p, q)$  с параметрами  $p = q = 1$ ). В этой модели стационарное решение уравнения (12) с условием  $a_0 = 0$  из § 2с определяется формулой

$$h_n = (a_1 + b_1) \sum_{k=1}^{\infty} a_1^{k-1} \varepsilon_{n-k} + \varepsilon_n,$$

где  $|a_1| < 1$  и  $|b_1| < 1$ , и, значит, в представлении  $h_n = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \varepsilon_{n-k}$  имеем

$$\tilde{a}_0 = 1, \quad \tilde{a}_k = (a_1 + b_1) a_1^{k-1}. \quad (34)$$

В рассматриваемом случае

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k z^k = 1 + \frac{(a_1 + b_1)}{a_1} \sum_{k=1}^{\infty} (a_1 z)^k = 1 + \frac{a_1 + b_1}{a_1} \cdot \frac{a_1 z}{1 - a_1 z}$$

и для  $n \geq 1$  имеем

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{a}_k z^k = \frac{a_1 + b_1}{a_1} \sum_{k=n}^{\infty} (a_1 z)^k = \frac{a_1 + b_1}{a_1} (a_1 z)^n \frac{1}{1 - a_1 z}.$$

Поэтому согласно формулам (21) и (22) для  $z = e^{-i\lambda}$  получаем

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_n(\lambda) &= e^{i\lambda n} \frac{\frac{a_1 + b_1}{a_1} \cdot \frac{(a_1 z)^n}{1 - a_1 z}}{1 + \frac{a_1 + b_1}{a_1} \cdot \frac{a_1 z}{1 - a_1 z}} = \frac{(a_1 + b_1) a_1^{n-1}}{1 + b_1 z} = \\ &= a_1^{n-1} (a_1 + b_1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (b_1 z)^k \end{aligned}$$

и (см. формулу (23))

$$\hat{a}_k^{(n)} = a_1^{n-1} (a_1 + b_1) (-1)^k b_1^k.$$

Итак, согласно соотношению (24) имеем

$$\begin{aligned} \hat{h}_n &= a_1^{n-1} (a_1 + b_1) \{h_0 + (-1)b_1 h_{-1} + b_1^2 h_{-2} + \dots\}; \\ &= a_1^{n-1} (a_1 + b_1) \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k b_1^k h_{n-k}. \end{aligned}$$

**Замечание.** По поводу формул прогноза для общих моделей  $ARMA(p, q)$ ,  $ARIMA(p, d, q)$  см., например, [211].

### 3. Нелинейные стохастические условно-гауссовские модели

Обращение к *нелинейным* моделям вызвано желанием и необходимостью найти объяснение ряда наблюдаемых (в финансовой статистике и в экономике вообще) феноменов типа «кластерности» цен, их «катастрофических» изменений, наличие «тяжелых хвостов» в распределениях величин  $h_n = \ln(S_n/S_{n-1})$ , наличие «долгой памяти» в ценах и других присущих им свойств, которые нельзя объяснить в рамках *линейных* моделей.

По поводу же того, какими нелинейными моделями следует пользоваться — стохастическими, хаотическими («динамический хаос») или какими-то еще, — нет единодушного мнения, и есть много сторонников и аргументов в пользу как тех, так и других подходов.

Не вызывает сомнения, что экономические показатели, к которым относятся и финансовые индексы, носят *флуктуационный* характер.

Флуктуируют *макроэкономические* индексы (объем продукции, потребления, инвестирования, общий уровень цен, процентных ставок, государственного резерва и т. п.), дающие представление о состоянии экономики «в среднем», «в целом». Флуктуируют и *микроэкономические* индексы (текущие цены, объем проданных акций, и т. п.). При этом флуктуации могут носить весьма *высокочастотный* и крайне *нерегулярный* характер, который наблюдается, как хорошо известно, и в стохастических, и в хаотических моделях, что и объясняет попытки описания такими моделями флуктуационных эволюций, резких переходов, «катастрофических» выбросов, сгруппированности (кластерности) значений и т. п.

Многие экономические показатели имеют «в среднем» *трендовый* характер (объем продукции, численность популяций, величина государственных запасов), однако это движение может то убыстряться, то замедляться; рост может идти как бы *циклами* (как периодическими, так и непериодическими).

Таким образом, перед исследователями статистических данных, будь то в экономике, финансах или других областях науки, естествознания, техники, возникает далеко не тривиальная задача выбора «правильной» модели.

Ниже мы даем описание ряда *нелинейных стохастических* и *хаотических* моделей, популярных в финансовой математике и финансовой статистике,

не претендуя на их широкий охват, а желая дать как бы «введение» в этот круг вопросов. (По поводу изложения некоторых нелинейных моделей можно порекомендовать, например, монографии [193], [202], [461], [462].)

### § 3а. Модели ARCH и GARCH

1. Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — исходное вероятностное пространство,  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин,  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , моделирующих «случайность», «неопределенность» в рассматриваемых далее моделях.

Через  $\mathcal{F}_n$  обозначаем  $\sigma$ -алгебры  $\sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Будем интерпретировать  $S_n = S_n(\omega)$  как значение цены (скажем, акции, обменного курса) в момент времени  $n = 0, 1, \dots$ . Время может измеряться в годах, месяцах, ..., минутах, секундах, ...

Как уже отмечалось выше (§ 1d), для описания эволюции величин  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ , где

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}, \quad (1)$$

Р. Энгль, [140], обратился к условно-гауссовской модели, в которой

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad (2)$$

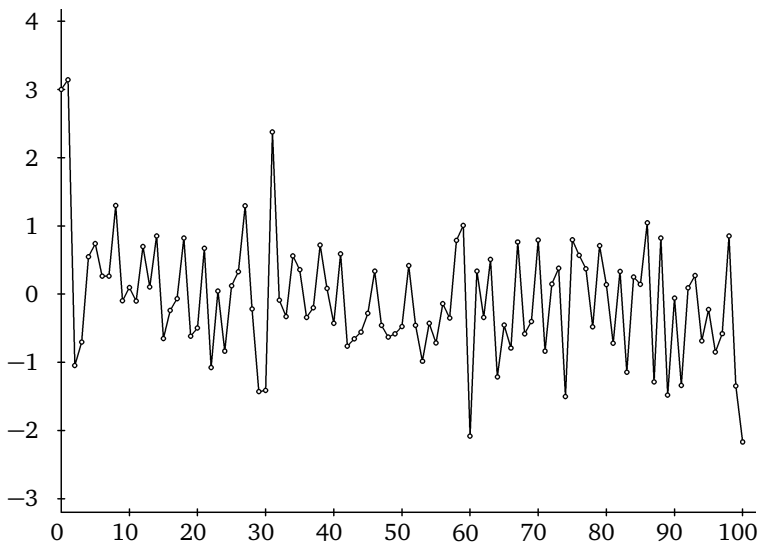
где «волатильности»  $\sigma_n$  определяются следующим образом:

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2, \quad (3)$$

$\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $h_0 = h_0(\omega)$  — случайная величина, не зависящая от  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ . (Часто  $h_0$  считается константой или случайной величиной, математическое ожидание квадрата которой выбирается из соображений «стационарности» значений  $E h_n^2$ ,  $n \geq 0$ .)

Из формулы (3) видим, что волатильности  $\sigma_n$  являются (предсказуемыми) функциями от  $h_{n-1}^2, \dots, h_{n-p}^2$ . При этом ясно, что большие (малые) значения  $h_{n-i}^2$  приводят к большим (малым) значениям  $\sigma_n^2$ . Возникновение же больших  $h_n^2$  в предположении, что предшествующие  $h_{n-1}^2, \dots, h_{n-p}^2$  были малыми, происходит за счет появления больших значений  $\varepsilon_n$ . Таким образом, становится понятным, почему рассматриваемые (нелинейные) модели (1)–(3) могут объяснять эффекты типа «кластерности», т. е. группирования значений  $(h_n)$  в пачки «больших» и пачки «малых» значений.

Эти рассуждения оправдывают, как уже говорилось выше (§ 1d), данное Р. Энглем в работе [140] название ARCH(p) для этой модели (AutoRegressive Conditional Heteroskedastic model — авторегрессионная модель условной неоднородности), в которой, как мы видим, условная дисперсия (волатильность)  $\sigma_n^2$  ведет себя весьма неоднородным образом, поскольку зависит, согласно формуле (3), от «прошлых» значений  $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \dots$



**Рис. 22.** График компьютерной реализации последовательности  $h = (h_n)$ , подчиняющейся  $ARCH(1)$ -модели с  $h_n = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2} \varepsilon_n$  с параметрами  $\alpha_0 = 0,9$ ,  $\alpha_1 = 0,2$ ;  $h_0 = 3$  и  $0 \leq n \leq 100$

2. Обратимся к рассмотрению ряда свойств последовательности  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ , описываемой  $ARCH(p)$ -моделью, ограничившись для простоты изложения случаем  $p = 1$ . (По поводу подробного изучения свойств  $ARCH(p)$ -моделей и их применений см., например, [193], [202] и [393]; в п. 6 § 3с приведен результат о наличии «тяжелых хвостов» в таких моделях.)

Для  $p = 1$  (см. рис. 22) имеем

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2, \quad (4)$$

и ясно, что для  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$  выполнены следующие простые свойства:

$$\mathbf{E} h_n = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} h_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{E} h_{n-1}^2, \quad (6)$$

$$\mathbf{E}(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2. \quad (7)$$

В предположении, что

$$0 < \alpha_1 < 1,$$

рекуррентное соотношение (6) имеет *единственное* «стационарное» решение

$$\mathbf{E} h_n^2 \equiv \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}, \quad n \geq 0, \quad (8)$$

и, таким образом, если взять  $h_0^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} g$ , то  $\mathbf{E} h_n^2$  для всех  $n \geq 1$  будет выражаться формулой (8).

Далее, простой подсчет показывает, что

$$\begin{aligned} E h_n^4 &= E \sigma_n^4 E \varepsilon_n^4 = 3 E \sigma_n^4 = 3 E(\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2)^2 = \\ &= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 E h_{n-1}^2 + \alpha_1^2 E h_{n-1}^4) = \\ &= \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{1-\alpha_1} + 3\alpha_1^2 E h_{n-1}^4. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда в предположении, что  $0 < \alpha_1 < 1$  и  $3\alpha_1^2 < 1$ , находим «стационарное» решение ( $E h_n^4 \equiv \text{Const}$ ):

$$E h_n^4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}. \quad (10)$$

Из формул (8) и (10) следует, что «стационарное» значение коэффициента эксцесса (kurtosis) равно

$$K \equiv \frac{E h_n^4}{(E h_n^2)^2} - 3 = \frac{6\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2};$$

его положительность говорит о том, что плотность «установившегося» распределения величин ( $h_n$ ) в окрестности среднего значения «вытянута» вверх (тем сильнее, чем больше  $\alpha_1^2$ ). Напомним, что для нормального распределения эксцесс  $K$  равен 0.

**Замечание.** Эмпирическое значение  $\widehat{K}_N$  коэффициента эксцесса, подсчитываемое по значениям  $h_1, h_2, \dots, h_N$ , находится по формуле

$$\widehat{K}_N = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (h_k - \bar{h}_N)^4}{\left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (h_k - \bar{h}_N)^2 \right)^2} - 3,$$

где  $\bar{h}_N = \frac{1}{N}(h_1 + \dots + h_N)$ . Согласно данным, приведенным в книге С. Тейлора [460], положительность коэффициента эксцесса для финансовых индексов является скорее правилом, чем исключением. Случаи отрицательных значений эксцесса на практике очень редки. О величинах же эмпирического коэффициента эксцесса  $\widehat{K}_N$  в случаях его положительности можно судить по следующей таблице, относящейся к ценам на золото (XAU) и серебро (XAG), обменному курсу британского фунта по отношению к доллару (USD) и стоимости акций компании General Motors (по месячным данным):

Таблица 2

XAU/USD	1975–82 гг.	$\widehat{K}_N = 8,4$
XAG/USD	1970–74 гг.	$\widehat{K}_N = 8,4$
GBP/USD	1974–82 гг.	$\widehat{K}_N = 5,4$
General Motors	1966–76 гг.	$\widehat{K}_N = 4,2$



3. Последовательность  $h = (h_n)$ ,  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , является при  $0 < \alpha_1 < 1$  квадратично интегрируемой мартингал-разностью и, тем самым, является последовательностью с ортогональными значениями:

$$\text{Cov}(h_n, h_m) = 0, \quad n \neq m.$$

Это свойство не означает, разумеется, *независимости* величин  $h_n$  и  $h_m$ , поскольку их совместное распределение  $\text{Law}(h_n, h_m)$  не является, как мы видим, гауссовским при  $\alpha_1 > 0$ .

О характере *зависимости* величин  $h_n$  и  $h_m$  можно получить представление рассматривая *корреляционную* зависимость их квадратов  $h_n^2$  и  $h_m^2$  или модулей  $|h_n|$  и  $|h_m|$ .

Простой подсчет дает

$$\mathbb{D} h_n^2 = \frac{2}{1-3\alpha_1^2} \left( \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \right)^2, \quad (11)$$

$$\mathbb{E} h_n^2 h_{n-1}^2 = \frac{1+3\alpha_1}{1-3\alpha_1^2} \cdot \frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_1}, \quad (12)$$

и, значит,

$$\rho(1) \equiv \text{Corr}(h_n^2, h_{n-1}^2) = \frac{\text{Cov}(h_n^2, h_{n-1}^2)}{\sqrt{\mathbb{D} h_n^2 \mathbb{D} h_{n-1}^2}} = \alpha_1.$$

Далее, для  $k < n$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} h_n^2 h_{n-k}^2 &= \mathbb{E}[h_{n-k}^2 \mathbb{E}(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1})] = \mathbb{E}[h_{n-k}^2 \mathbb{E}(\sigma_n^2 \varepsilon_n^2 | \mathcal{F}_{n-1})] = \\ &= \mathbb{E}[h_{n-k}^2 (\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2)] = \alpha_0 \mathbb{E} h_{n-k}^2 + \alpha_1 \mathbb{E} h_{n-1}^2 h_{n-k}^2, \end{aligned}$$

что дает в «стационарном» случае простое рекуррентное соотношение для

$$\rho(k) \equiv \frac{\text{Cov}(h_n^2, h_{n-k}^2)}{\sqrt{\mathbb{D} h_n^2 \mathbb{D} h_{n-k}^2}}:$$

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1),$$

откуда следует, что

$$\rho(k) = \alpha_1^k. \quad (13)$$

4. В §1d отмечалось, что  $ARCH(p)$ -модели самым тесным образом связаны с (общими) авторегрессионными схемами  $AR(p)$ .

Действительно, пусть имеется  $ARCH(p)$ -модель и  $v_n = h_n^2 - \sigma_n^2$ . Тогда, если  $\mathbb{E} h_n^2 < \infty$ , то последовательность  $v = (v_n)$  образует (относительно потока  $(\mathcal{F}_n)$ ) мартингал-разность, и из формулы (3) следует, что величины  $x_n = h_n^2$  удовлетворяют авторегрессионной модели  $AR(p)$ :

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_{n-1} + \dots + \alpha_p x_{n-p} + v_n, \quad (14)$$

с «шумом»  $v = (v_n)$ , являющимся *мартингал-разностью*.

В случае  $p = 1$  имеем

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_{n-1} + v_n \quad (15)$$

и видим, что найденная выше формула (13) в точности совпадает с формулой (10) из § 2b.

5.  $ARCH(p)$ -модели самым тесным образом связаны также с авторегрессионными моделями со случайными коэффициентами, которые используются при описании «случайных блужданий в случайных средах».

Для пояснения сути дела снова ограничимся значением  $p = 1$ .

Тогда из того, что  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$  и  $\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2$ , вытекает, что

$$h_n = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2} \varepsilon_n. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь следующую авторегрессионную модель первого порядка со случайными коэффициентами:

$$x_n = B_1 \eta_n x_{n-1} + B_0 \delta_n, \quad (17)$$

где  $(\eta_n)$  и  $(\delta_n)$  — две независимые стандартные гауссовские последовательности.

С точки зрения конечномерных распределений последовательность  $x = (x_n)$  с  $x_0 = 0$  (для определенности) устроена так же, как и последовательность  $\tilde{x} = (\tilde{x}_n)$ ,

$$\tilde{x}_n = \sqrt{B_0^2 + B_1^2 \tilde{x}_{n-1}^2} \tilde{\varepsilon}_n, \quad \tilde{x}_0 = 0, \quad (18)$$

где  $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_n)$  — стандартная гауссовская последовательность.

Сопоставление формул (16) и (18) показывает, что структура образования последовательностей  $h = (h_n)$  и  $\tilde{x} = (\tilde{x}_n)$  одна и та же. Следовательно, при  $B_0^2 = \alpha_0$  и  $B_1^2 = \alpha_1$  вероятностные законы последовательностей  $h = (h_n)$  и  $\tilde{x} = (\tilde{x}_n)$  с  $h_0 = \tilde{x}_0 = 0$  одни и те же.

6. Несколько усложним модель  $ARCH(1)$ , предполагая, что величины  $h = (h_n)$  управляются соотношениями

$$h_n = \beta_0 + \beta_1 h_{n-1} + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2} \varepsilon_n. \quad (19)$$

В этом случае говорят, что  $h = (h_n)$  подчиняется  $AR(1)/ARCH(1)$ -модели или что  $h = (h_n)$  удовлетворяет авторегрессионной схеме  $AR(1)$  с  $ARCH(1)$ -шумом  $(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2} \varepsilon_n)_{n \geq 1}$ .

Условно-гауссовский характер этой модели дает возможность представить плотность  $p_\theta(h_1, \dots, h_n)$  совместного распределения  $P_\theta$  величин  $h_1, \dots, h_n$  для заданного значения параметра  $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)$  в следующем виде ( $h_0 = 0$ ):

$$p_\theta(h_1, \dots, h_n) = (2\pi)^{-n/2} \prod_{k=1}^n (\alpha_0 + \alpha_1 h_{k-1}^2)^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(h_k - \beta_0 - \beta_1 h_{k-1})^2}{\alpha_0 + \alpha_1 h_{k-1}^2} \right\}. \quad (20)$$

В качестве примера использования этого представления рассмотрим задачу оценивания (методом максимального правдоподобия) неизвестного значения параметра  $\beta_1$  при условии, что остальные параметры  $\beta_0$ ,  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  известны.

Оценка  $\hat{\beta}_1$  максимального правдоподобия для параметра  $\beta_1$  определяется как корень уравнения

$$\frac{dP_{(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)}}{d\beta_1}(h_1, \dots, h_n) = 0.$$

С учетом соотношений (20) и (19) находим

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{(h_k - \beta_0)h_{k-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 h_{k-1}^2}}{\sum_{k=1}^n \frac{h_{k-1}^2}{\alpha_0 + \alpha_1 h_{k-1}^2}} \quad (21)$$

и

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{M_n}{\langle M \rangle_n}, \quad (22)$$

где

$$M_n = \sum_{k=1}^n \frac{h_{k-1} \varepsilon_k}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{k-1}^2}}$$

есть мартингал, а

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \frac{h_{k-1}^2}{\alpha_0 + \alpha_1 h_{k-1}^2} \quad (23)$$

— его квадратическая характеристика. (Ср. с формулой (46) в § 2b.)

Здесь  $\langle M \rangle_n \rightarrow \infty$  (Р-п. н.), и согласно усиленному закону больших чисел для квадратично интегрируемых мартингалов [439, гл. VII, § 5],

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \rightarrow 0 \quad (\text{Р-п. н.}).$$

Следовательно, построенные оценки  $\hat{\beta}_1$  являются сильно состоятельными в том смысле, что  $P_\theta(\hat{\beta}_1 \rightarrow \beta) = 1$  для значений  $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)$ , где  $\beta \in \mathbb{R}$ .

7. Рассмотрим вопрос о предсказании «будущего движения цен», считая, что последовательность  $h = (h_n)$  подчиняется модели ARCH(p).

Последовательность  $h = (h_n)$  является мартингал-разностью, поэтому  $E(h_{n+m} | \mathcal{F}_n) = 0$ , и, значит, оптимальной в среднеквадратическом смысле является оценка

$$\hat{h}_{n+m} \equiv E(h_{n+m} | \mathcal{F}_n^h) = E(E(h_{n+m} | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_n^h) = 0.$$

Тривиальность этой оценки делает целесообразным рассмотрение вопроса о предсказании будущих значений нелинейных функций от  $h_{n+m}$ , например величин  $h_{n+m}^2$ ,  $|h_{n+m}|$ .

Имеем ( $\mathcal{F}_n^h = \sigma(h_1, \dots, h_n)$ ):

$$\begin{aligned}\widehat{h_{n+m}^2} &\equiv \mathbf{E}(h_{n+m}^2 | \mathcal{F}_n^h) = \mathbf{E}(\sigma_{n+m}^2 \varepsilon_{n+m}^2 | \mathcal{F}_n^h) = \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}(\sigma_{n+m}^2 \varepsilon_{n+m}^2 | \mathcal{F}_{n+m-1}^\varepsilon) | \mathcal{F}_n^h] = \\ &= \mathbf{E}[\sigma_{n+m}^2 | \mathcal{F}_n^h] \quad (\equiv \widehat{\sigma_{n+m}^2}),\end{aligned}\tag{24}$$

откуда ясно, что вопрос предсказания будущих значений  $h_{n+m}^2$  сводится к вопросу предсказания «волатильности»  $\sigma_{n+m}^2$  по результатам прошлых наблюдений  $h_0, h_1, \dots, h_n$ .

Поскольку

$$\sigma_{n+m}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{n+m-1}^2 \varepsilon_{n+m-1}^2,$$

по индукции находим, что

$$\begin{aligned}\sigma_{n+m}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 [\alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{n+m-2}^2 \varepsilon_{n+m-2}^2] \varepsilon_{n+m-1}^2 = \dots = \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{j=1}^{m-1} \prod_{i=1}^j \alpha_1 \varepsilon_{n+j-i+1}^2 + \sigma_n^2 \prod_{i=1}^m \alpha_1 \varepsilon_{n+m-i}^2.\end{aligned}$$

Отсюда, взяв условное математическое ожидание  $\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_n^h)$  и учитывая независимость в величинах последовательности  $(\varepsilon_n)$ , находим, что

$$\begin{aligned}\widehat{h_{n+m}^2} &= \widehat{\sigma_{n+m}^2} \equiv \mathbf{E}(\sigma_{n+m}^2 | \mathcal{F}_n^h) = \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_1^j + h_n^2 \alpha_1^m = \\ &= \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^m}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^m h_n^2.\end{aligned}\tag{25}$$

Как и следовало ожидать, при  $m \rightarrow \infty$  оценки  $\widehat{h_{n+m}^2}$  сходятся (с вероятностью единица) к «стационарному» значению

$$\mathbf{E} h_n^2 \equiv \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}.$$

**8.** Напомним, что для нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  интервалы  $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$  и  $(\mu - 1,65\sigma, \mu + 1,65\sigma)$  являются (с определенной степенью точности) доверительными интервалами с уровнями надежности 68% и 90% соответственно.

Поскольку

$$S_{n+m} = S_n e^{h_{n+1} + \dots + h_{n+m}}\tag{26}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(h_{n+1} + \dots + h_{n+m})^2 | \mathcal{F}_n^h] &= \mathbf{E}(h_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n^h) + \dots + \mathbf{E}(h_{n+m}^2 | \mathcal{F}_n^h) \\ &= \widehat{\sigma_{n+1}^2} + \dots + \widehat{\sigma_{n+m}^2},\end{aligned}$$

в первом приближении в качестве доверительных интервалов (с уровнями значимости 68 % и 90 %) можно взять интервалы

$$(S_n e^{-\sqrt{\sigma_{n+1}^2 + \dots + \sigma_{n+m}^2}}, S_n e^{+\sqrt{\sigma_{n+1}^2 + \dots + \sigma_{n+m}^2}})$$

и

$$(S_n e^{-1,65\sqrt{\sigma_{n+1}^2 + \dots + \sigma_{n+m}^2}}, S_n e^{+1,65\sqrt{\sigma_{n+1}^2 + \dots + \sigma_{n+m}^2}})$$

соответственно.

При этом должно быть понятно, что слова «в первом приближении» связаны с тем, что на самом деле величины  $h_k$  не являются, вообще говоря, нормально распределенными и вопрос о том, насколько истинные уровни надежности приведенных выше доверительных интервалов отличаются от 68 % и 90 %, требует дополнительного исследования относительно точности нормальной аппроксимации.

9. Успех условно-гауссовской модели  $ARCH(p)$ , давшей объяснение целому ряду феноменов в поведении финансовых индексов («кластерность», «тяжелые хвосты», «вытянутость» плотности распределения величин  $h_n$ , и т. д.), породила целую лавину различных ее обобщений, преследующих цель «ухватить», дать возможные объяснения ряда других эффектов, обнаруживаемых методами статистического анализа.

Исторически одним из первых обобщений модели  $ARCH(p)$  явилась, как уже отмечалось в §1d, введенная в 1986 г. Т. Боллерслемом (Т. Bollerslev, [48]) обобщенная (Generalized)  $ARCH$ -модель, характеризующаяся двумя параметрами  $p$  и  $q$  и обозначаемая  $GARCH(p, q)$ .

В этой модели, как и для  $ARCH(p)$ -модели, снова берется  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , но относительно формирования «волатильности»  $\sigma_n$  предполагается, что

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{n-j}^2, \quad (27)$$

где  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$ . (Если все  $\beta_j$  равны 0, то получаем модель  $ARCH(p)$ .)

Основным преимуществом  $GARCH(p, q)$ -моделей сравнительно с их прародительницей —  $ARCH(p)$ -моделью является то, что при подгонке статистических данных моделями  $ARCH(p)$  часто приходится обращаться к слишком большим значениям  $p$ , в то время как при подгонке  $GARCH(p, q)$ -моделями можно ограничиваться (экспериментальный факт!) лишь небольшими значениями  $p$  и  $q$ . (В статье [431] при описании месячных данных в эволюции индекса S&P 500 использовались авторегрессионные модели двенадцатого порядка,  $AR(12)$ . См. также обзорную статью [141].)

Анализ моделей  $GARCH(p, q)$ , в которых «волатильность»  $\sigma_n$  предполагается зависящей (предсказуемым образом) как от  $h_{n-i}^2$ ,  $i \leq p$ , так и от  $\sigma_{n-j}^2$ ,  $j \leq q$ , проводится аналогично анализу  $ARCH(p)$ -моделей.

Опуская детали, приведем ряд простых формул, относящихся к модели  $GARCH(1, 1)$ :

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2, \quad (28)$$

где  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ .

Отсюда ясно, что

$$E h_n^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) E h_{n-1}^2$$

и «стационарное» значение  $E h_n^2$  существует при  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$  и задается формулой

$$E h_n^2 \equiv \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}. \quad (29)$$

Если  $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ , то существует «стационарное» значение

$$E h_n^4 \equiv \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)}{(1 - \alpha_1 - \beta_1)(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)} \quad (30)$$

и, тем самым, «стационарный» коэффициент эксцесса

$$K \equiv \frac{E h_n^4}{(E h_n^2)^2} - 3 = \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2}. \quad (31)$$

Нетрудно найти и «стационарное» значение автокорреляционной функции  $\rho(k)$  (ср. с формулой (13)):

$$\rho(1) = \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}{1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2}, \quad (32)$$

$$\rho(k) = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \rho(1), \quad k > 1. \quad (33)$$

Наконец, отметим, что формула (25) на случай  $GARCH(1, 1)$ -модели обобщается следующим образом:

$$\widehat{h_{n+m}^2} = \widehat{\sigma_{n+m}^2} \equiv E(\sigma_{n+m}^2 | \mathcal{F}_n^h) = \alpha_0 \frac{1 - \gamma^m}{1 - \gamma} + \gamma^{m-1} (\alpha_1 h_n^2 + \beta_1 \sigma_n^2),$$

где  $\gamma = \alpha_1 + \beta_1$ .

**10.** Модели семейства  $ARCH$ , эволюционирующие в дискретном времени, имеют соответствующие аналоги и в случае непрерывного времени. Более того, при подходящей нормировке можно получить (слабую) сходимость решений стохастических разностных уравнений, определяющих  $ARCH$ -,  $GARCH$ -, ... модели, к решениям соответствующих стохастических дифференциальных уравнений.

Для определенности рассмотрим следующую модификацию  $GARCH(1, 1)$ -модели (называемую в работе [15]  $GARCH(1, 1)$ - $M$ -моделью).

Пусть  $\Delta$  — временной шаг,  $H^{(\Delta)} = (H_{k\Delta}^{(\Delta)})$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , где  $H_{k\Delta}^{(\Delta)} = H_0^{(\Delta)} + h_{\Delta}^{(\Delta)} + \dots + h_{k\Delta}^{(\Delta)}$ ,

$$h_{k\Delta}^{(\Delta)} = c(\sigma_{k\Delta}^{(\Delta)})^2 + (\sigma_{k\Delta}^{(\Delta)}) \varepsilon_{k\Delta}, \quad (34)$$

причем  $\varepsilon_{k\Delta} \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$ ,  $c$  — константа и

$$(\sigma_{k\Delta}^{(\Delta)})^2 = \alpha_0(\Delta) + (\sigma_{(k-1)\Delta}^{(\Delta)})^2 (\beta(\Delta) + \alpha_1(\Delta) \varepsilon_{(k-1)\Delta}^2). \quad (35)$$

Будем считать, что заданы начальные условия  $H_0^{(\Delta)} = H_0$ ,  $\sigma_0^{(\Delta)} = \sigma_0$  при всех  $\Delta > 0$ , где  $(H_0, \sigma_0)$  — пара случайных величин, не зависящая от гауссовских последовательностей  $(\varepsilon_{k\Delta})$ ,  $\Delta > 0$ , состоящих из независимых случайных величин.

Вложим последовательность  $(H^{(\Delta)}, \sigma^{(\Delta)}) = (H_{k\Delta}^{(\Delta)}, \sigma_{k\Delta}^{(\Delta)})_{k \geq 0}$  в схему с непрерывным временем  $t \geq 0$ , полагая

$$H_t^{(\Delta)} = H_{k\Delta}^{(\Delta)}, \quad \sigma_t^{(\Delta)} = \sigma_{k\Delta}^{(\Delta)} \quad (36)$$

при  $k\Delta \leq t < (k+1)\Delta$ .

Из общих результатов теории слабой сходимости случайных процессов (см., например, [250], [304]) естественно ожидать, что при некоторых условиях на входящие в формулы (34), (35) коэффициенты последовательность процессов  $(H^{(\Delta)}, \sigma^{(\Delta)})$  слабо сходится (в пространстве Скорохода) к некоторому диффузионному процессу  $(H, \sigma) = (H_t, \sigma_t)_{t \geq 0}$ .

Как показывается в работе [364], при

$$\alpha_0(\Delta) = \alpha_0 \Delta, \quad \alpha_1(\Delta) = \alpha \sqrt{\frac{\Delta}{2}}, \quad \beta(\Delta) = 1 - \alpha \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)} - \beta \Delta$$

предельным (при  $\Delta \rightarrow 0$ ) процессом  $(H, \sigma)$  является процесс, подчиняющийся следующему стохастическому дифференциальному уравнению (см. § 3е гл. III):

$$dH_t = c\sigma_t^2 dt + \sigma_t dW_t^{(1)}, \quad (37)$$

$$d\sigma_t^2 = (\alpha_0 - \beta\sigma_t^2) dt + \alpha\sigma_t^2 dW_t^{(2)}, \quad (38)$$

где  $(W^{(1)}, W^{(2)})$  — два независимых стандартных броуновских движения, независимых также от начальных значений  $(H_0, \sigma_0) \equiv (H_0^{(\Delta)}, \sigma_0^{(\Delta)})$ .

### § 3б. Модели EGARCH, TGARCH, HARCH и др.

1. В 1976 году Ф. Блэк (F. Black) подметил в поведении финансовых индексов следующий феномен: отрицательную коррелированность величин  $h_{n-1}$  и  $\sigma_n$ , проявляющуюся в том, что эмпирическая ковариация  $\widehat{\text{Cov}}(h_{n-1}, \sigma_n)$  отрицательна.

Этот эффект, получивший название «leverage effect» (эффект рычага, или подъемной силы), приводит к тому, что волатильность стремится к возрастанию после падения цен, т. е. после убывания величин возврата. Этот феномен, называемый также «эффектом асимметрии», нельзя объяснить в рамках моделей ARCH, GARCH, поскольку в них волатильность  $\sigma_n^2$ , будучи зависимой от квадратов предшествующих величин  $h_{n-i}^2$ , нечувствительна к знаку величин  $h_{n-j}$  и, тем самым, значения  $h_{n-j} = \Delta$  и  $h_{n-j} = -\Delta$  приводят в GARCH-моделях к одному и тому же значению будущей волатильности  $\sigma_n^2$ .

Для объяснения обнаруженного Ф. Блэком эффекта Д. Нельсон (D. V. Nelson, [366]) в 1990 г. предложил так называемую модель  $EGARCH(p, q)$ , или  $Exponential GARCH(p, q)$ , в которой учет «асимметрии» осуществляется тем, что вместо величин  $h_{n-i}^2 = \sigma_{n-i}^2 \varepsilon_{n-i}^2$ , входящих в  $GARCH$ -модели, вводится линейная комбинация величин  $\varepsilon_{n-i}$  и  $|\varepsilon_{n-i}|$ . Именно, снова считается, что  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , но для  $\sigma_n$  предполагается выполненным следующее соотношение:

$$\ln \sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i [\theta \varepsilon_{n-i} + \gamma (|\varepsilon_{n-i}| - \sqrt{2/\pi})] + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln \sigma_{n-j}^2. \quad (1)$$

(Заметим, что  $\sqrt{2/\pi} = E |\varepsilon_{n-i}|$ .)

Поскольку  $h_{n-i} = \sigma_{n-i} \varepsilon_{n-i}$  и  $\sigma_{n-i} \geq 0$ , знаки у  $h_{n-i}$  и  $\varepsilon_{n-i}$  совпадают, и, следовательно, если  $\varepsilon_{n-i} = \Delta > 0$ , то соответствующий вклад в  $\sigma_n^2$  определяется величиной  $\Delta(\theta + \gamma)$ , но если  $\varepsilon_{n-i} = -\Delta < 0$ , то вклад будет равен  $\Delta(-\theta + \gamma)$ .

2.  $EGARCH$ -модели являются далеко не единственными, которые, сохраняя основные свойства моделей  $GARCH$ , в то же самое время позволяют также «ухватывать» эффект асимметрии. Примером может служить  $TGARCH(p, q)$ -модель ( $T$  — от Threshold — порог), навеянная пороговыми моделями типа  $TAR$  (Threshold AR):

$$h_n = \sum_{i=1}^k I_{A_i}(h_{n-d})(\alpha_0^i + \alpha_1^i h_{n-1} + \dots + \alpha_p^i h_{n-p}), \quad (2)$$

где  $d$  — параметр запаздывания,  $A_1, \dots, A_k$  — непересекающиеся множества в  $\mathbb{R}$ , для которых  $\sum_{i=1}^k A_i = \mathbb{R}$ .

Например, пусть

$$h_n = \begin{cases} \alpha_0^1 + \alpha_1^1 h_{n-1} + \alpha_2^1 h_{n-2}, & \text{если } h_{n-2} > 0, \\ \alpha_0^2 + \alpha_1^2 h_{n-1} + \alpha_2^2 h_{n-2}, & \text{если } h_{n-2} \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

(Подробное исследование таких пороговых моделей содержится в монографии [461].)

По определению (см. [399]), последовательность  $h = (h_n)$  описывается  $TGARCH(p, q)$ -моделью, если  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , где

$$\sigma_n = a_0 + \sum_{i=1}^p [a_i h_{n-i}^+ + b_i h_{n-i}^-] + \sum_{j=1}^q [c_j \sigma_{n-j}^+ + d_j \sigma_{n-j}^-] \quad (4)$$

и, как обычно,  $x^+ = \max(x, 0)$ ,  $x^- = -\min(x, 0)$ . В этой модели не предполагается неотрицательность коэффициентов и, следовательно, неотрицательность волатильностей  $\sigma_n$ , хотя, разумеется, смысл  $\sigma_n^2$  как условной дисперсии  $E(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}^h)$  сохраняет свою силу.



Поскольку

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n = (\sigma_n^+ - \sigma_n^-)(\varepsilon_n^+ - \varepsilon_n^-) = [\sigma_n^+ \varepsilon_n^+ + \sigma_n^- \varepsilon_n^-] - [\sigma_n^- \varepsilon_n^+ + \sigma_n^+ \varepsilon_n^-],$$

получаем, что

$$h_n^+ = [\sigma_n^+ \varepsilon_n^+ + \sigma_n^- \varepsilon_n^-] \quad \text{и} \quad h_n^- = [\sigma_n^- \varepsilon_n^+ + \sigma_n^+ \varepsilon_n^-].$$

Эти соотношения дают возможность переписать представление (4) в следующем виде:

$$\sigma_n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p^*} \alpha_i(\varepsilon_{n-i}) \sigma_{n-i}^+ + \sum_{i=1}^{p^*} \beta_i(\varepsilon_{n-i}) \sigma_{n-i}^- \quad (5)$$

со значениями  $p^* = \max(p, q)$  и функциями  $\alpha_i(\varepsilon_{n-i})$  и  $\beta_i(\varepsilon_{n-i})$ , являющимися линейными комбинациями величин  $\varepsilon_{n-i}^+$  и  $\varepsilon_{n-i}^-$ .

Есть определенная «техническая» сложность изучения таких моделей, заключающаяся в отсутствии марковского свойства. Однако в простых случаях, например, для  $p = q = 1$ , можно, тем не менее, провести достаточно полное исследование свойств этих моделей.

Действительно, при  $p = q = 1$  имеем

$$\sigma_n = a_0 + [a_1 h_{n-1}^+ + b_1 h_{n-1}^-] + [c_1 \sigma_{n-1}^+ + d_1 \sigma_{n-1}^-], \quad (6)$$

или, в эквивалентной форме,

$$\sigma_n = \alpha_0 + \alpha_1(\varepsilon_{n-1}) \sigma_{n-1}^+ + \beta_1(\varepsilon_{n-1}) \sigma_{n-1}^-, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0, \\ \alpha_1(\varepsilon_{n-1}) &= a_1 \varepsilon_{n-1}^+ + b_1 \varepsilon_{n-1}^- + c_1, \\ \beta_1(\varepsilon_{n-1}) &= a_1 \varepsilon_{n-1}^- + b_1 \varepsilon_{n-1}^+ + d_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Если  $\alpha_0 = 0$ , то из соотношения (7) находим, что

$$\begin{aligned} \sigma_n^+ &= (\alpha_1(\varepsilon_{n-1}))^+ \sigma_{n-1}^+ + (\beta_1(\varepsilon_{n-1}))^+ \sigma_{n-1}^-, \\ \sigma_n^- &= (\alpha_1(\varepsilon_{n-1}))^- \sigma_{n-1}^+ + (\beta_1(\varepsilon_{n-1}))^- \sigma_{n-1}^-. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда видно, что последовательность  $(\sigma_n^+, \sigma_n^-, \varepsilon_n)_{n \geq 1}$  относительно потока  $(\mathcal{F}_n)$  является марковской, что дает возможность проводить исследование ее свойств обычными «марковскими» методами. (Подробнее см. [399].)

**3.** Остановимся еще на одном феномене — эффекте «долгой памяти», или «сильного последействия», в эволюции цен  $S = (S_n)_{n \geq 0}$ .

Можно давать разные определения зависимости поведения случайных последовательностей от «прошлого». Этой цели в теории вероятностей служат различные меры зависимостей, такие как коэффициенты эргодичности, коэффициенты перемешивания и др.

Например, можно измерять степень пропадания зависимости от прошлого у действительной стационарной последовательности  $X = (X_n)$  тем, как быстро величина

$$\sup_A \mathbb{E} \left| \mathbb{P}(X_{n+m} \in A | X_1, \dots, X_n) - \mathbb{P}(X_{n+m} \in A) \right|$$

стремится к 0 при  $m \rightarrow \infty$ , где  $\sup$  берется по всем борелевским множествам  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

Стандартной же мерой зависимости является, конечно, (авто-)корреляционная функция.

Следует отметить, что согласно многочисленным статистическим исследованиям у временных финансовых рядов обнаруживается *более сильная корреляционная зависимость* в поведении последовательностей  $|h| = (|h_n|)_{n \geq 1}$  и  $h^2 = (h_n^2)_{n \geq 1}$ , чем та, которая получается в случае моделей ARCH, GARCH и, тем более, MA, AR и ARMA.

Напомним, что для ARCH(1) согласно формуле (13) из § 3а

$$\text{Corr}(h_{n-k}^2, h_n^2) = \alpha_1^k, \quad \alpha_1 < 1,$$

а для GARCH(1, 1) автокорреляционная функция  $\rho(k)$  описывается формулами (32) и (33) из того же § 3а, показывающими, что в этих моделях корреляция убывает геометрическим образом к нулю («память быстро забывает прошлое»).

Часто принято говорить, что стационарная (в широком смысле) последовательность  $Y = (Y_n)$  имеет *долгую память* или *сильное последствие*, если ее автокорреляционная функция  $\rho(k)$  имеет *гиперболический* характер убывания к нулю:

$$\rho(k) \sim c k^{-\rho}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (10)$$

при некотором  $\rho > 0$ .

Таким характером убывания автокорреляционной функции обладает, например, фрактальный гауссовский шум (см. § 2d гл. III)  $Y = (Y_n)_{n \geq 1}$  со значениями

$$Y_n = X_n - X_{n-1},$$

где  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  является фрактальным броуновским движением с параметром  $0 < \mathbb{H} < 1$  (см. § 5с). Для этого движения (см. формулу (3) в § 5d)

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2} \{ |t|^{2\mathbb{H}} + |s|^{2\mathbb{H}} - |t-s|^{2\mathbb{H}} \} \mathbb{E} X_1^2$$

и

$$\text{Cov}(Y_n, Y_{n+k}) = \frac{\sigma^2}{2} \{ |k+1|^{2\mathbb{H}} - 2|k|^{2\mathbb{H}} + |k-1|^{2\mathbb{H}} \}, \quad (11)$$

где  $\sigma^2 = \mathbb{D} Y_n$ , и, следовательно, автокорреляционная функция  $\rho(k) = \text{Corr}(Y_n, Y_{n+k})$  имеет при  $k \rightarrow \infty$  гиперболический характер:

$$\rho(k) \sim \mathbb{H}(2\mathbb{H}-1)k^{2\mathbb{H}-2}.$$

Заметим, что при  $\frac{1}{2} < \mathbb{H} < 1$  выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(k) = \infty.$$

При  $\mathbb{H} = \frac{1}{2}$  (обычное броуновское движение) величины  $Y = (Y_n)$  образуют гауссовский «белый шум» с  $\rho(k) = 0, k \geq 1$ .

Если же  $0 < \mathbb{H} < \frac{1}{2}$ , то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho(k) = 0.$$

**Замечание.** В гл. 7 монографии [202] рассмотрены разнообразные модели процессов с *сильным последствием* и содержится большой материал относительно применения этих моделей в экономике, биологии, гидрологии и др. См. также [418].

4. В работах [89], [360] была введена и изучалась новая модель  $HARCH(p)$ , относящаяся к семейству  $ARCH$ -моделей, в которой характер убывания автокорреляционной функции для модулей и квадратов величин  $h_n$  более медленный, нежели это обычно имеет место для моделей типа  $ARCH$  и  $GARCH$ . Этот же эффект *долгой памяти* свойствен и моделям  $FIGARCH$ , введенным в работе [15].

Согласно определению, данному в этих работах,  $HARCH(p)$  (*Heterogeneous AutoRegressive Conditional Heteroskedastic*) порядка  $p$  задается следующим образом:

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

где

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \left( \sum_{i=1}^j h_{n-i} \right)^2,$$

$\alpha_0 > 0, \alpha_p > 0, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, p-1$ .

В частности, для  $p = 1$  имеем

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2,$$

т. е.  $HARCH(1) = ARCH(1)$ .

В случае  $p = 2$  имеем

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \alpha_2 (h_{n-1} + h_{n-2})^2. \quad (12)$$

Приведем некоторые свойства этой модели.

Прежде всего отметим, что наличие члена  $(h_{n-1} + h_{n-2})^2$  дает возможность также «ухватывать» отмеченные выше эффекты асимметрии.

Далее, если  $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 < 1$ , то из формулы (12) следует, что существует «стационарное» значение

$$\mathbb{E} h_n^2 = \mathbb{E} \sigma_n^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - 2\alpha_2}. \quad (13)$$

Аналогичным образом, рассматривая  $\mathbb{E} \sigma_n^4$  и используя то, что

$$\mathbb{E} h_{n-1} h_{n-2} = \mathbb{E} h_{n-1}^3 h_{n-2} = \mathbb{E} h_{n-1} h_{n-2}^3 = 0,$$

из формулы (12) находим, что при  $(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \alpha_2^2 < \frac{1}{3}$  существует «стационарное» значение

$$\mathbb{E} h_n^4 = \frac{C}{\frac{1}{3} - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2^2}, \quad (14)$$

где

$$C = \frac{\alpha_0^2 [1 + 2\alpha_2(\alpha_1 + 3\alpha_2) - (\alpha_1 + 2\alpha_2)^2]}{[1 - (\alpha_1 + 2\alpha_2)]^2}. \quad (15)$$

(Отметим, что  $\mathbb{E} \sigma_n^4 = \frac{1}{3} \mathbb{E} h_n^4$ .)

Найдем теперь значение автокорреляционной функции для  $(h_n^2)$ .

Пусть  $R(k) = \mathbb{E} h_n^2 h_{n-k}^2$ . Тогда для  $k = 1$  в предположении «стационарности»

$$\begin{aligned} R(1) &= \mathbb{E} \sigma_n^2 \varepsilon_n^2 h_{n-1}^2 = \mathbb{E} \sigma_n^2 h_{n-1}^2 = \\ &= \mathbb{E} (h_{n-1}^2 [\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \alpha_2 (h_{n-1} + h_{n-2})^2]) = \\ &= \alpha_0 \mathbb{E} h_{n-1}^2 + \alpha_1 \mathbb{E} h_{n-1}^4 + \alpha_2 \mathbb{E} h_{n-1}^4 + 2\alpha_2 \mathbb{E} h_{n-1}^3 h_{n-2} + \alpha_2 \mathbb{E} h_{n-1}^2 h_{n-2}^2. \end{aligned}$$

Тем самым, если  $\alpha_2 < 1$ , то

$$R(1) = \frac{\alpha_0 \mathbb{E} h_{n-1}^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbb{E} h_{n-1}^4}{1 - \alpha_2}. \quad (16)$$

Далее,

$$\begin{aligned} R(k) &= \mathbb{E} h_n^2 h_{n-k}^2 = \mathbb{E} \sigma_n^2 h_{n-k}^2 = \\ &= \mathbb{E} [\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \alpha_2 (h_{n-1} + h_{n-2})^2] h_{n-k}^2 = \\ &= \alpha_0 \mathbb{E} h_{n-k}^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) R(k-1) + \alpha_2 R(k-2), \end{aligned}$$

где  $R(0) = \mathbb{E} h_n^4$ .

Отсюда ясно, что в стационарном случае автокорреляционная функция  $\rho(k) = \text{Corr}(h_n^2, h_{n-k}^2)$  подчиняется уравнению ( $k \geq 2$ )

$$\rho(k) = A + B\rho(k-1) + C\rho(k-2), \quad (17)$$

где

$$A = \frac{\alpha_0 \mathbb{E} h_n^2}{\mathbb{D} h_n^2}, \quad B = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbb{E} h_n^2)^2}{\mathbb{D} h_n^2}, \quad C = \frac{(\alpha_2 - 1)(\mathbb{E} h_n^2)^2}{\mathbb{D} h_n^2},$$

и

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(1) = \frac{R(1) - (\mathbb{E} h_n^2)^2}{\mathbb{D} h_n^2}.$$

В § 3е гл. IV будет продолжено рассмотрение вопросов «сильного последействия» применительно к обменным курсам.

### § 3с. Модели стохастической волатильности

1. Эти модели, уже введенные в п. 7 § 1d, характеризуются наличием *двух источников* случайности  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  и  $\delta = (\delta_n)$ , определяющих поведение последовательности  $h = (h_n)$  со значениями

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad (1)$$

где  $\sigma_n = e^{\frac{1}{2}\Delta_n}$ ,  $(\Delta_n) \in AR(p)$ ,

$$\Delta_n = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \Delta_{n-i} + c \delta_n. \quad (2)$$

Обе последовательности  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  и  $\delta = (\delta_n)$  будем предполагать независимыми стандартными гауссовскими; при этом будем говорить, что  $h = (h_n)$  подчиняется *SV(p)* (Stochastic Volatility)-модели, т. е. модели *стохастической волатильности*.

Рассмотрим свойства этой модели, предполагая, что  $p = 1$  и  $|a_1| < 1$ :

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \ln \sigma_n^2 = a_0 + a_1 \ln \sigma_{n-1}^2 + c \delta_n. \quad (3)$$

Пусть  $\mathcal{F}_n^{\varepsilon, \delta} = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n; \delta_1, \dots, \delta_n)$ ,  $\mathcal{F}_n^\delta = \sigma(\delta_1, \dots, \delta_n)$ . Ясно, что

$$\mathbf{E}(h_n | \mathcal{F}_n^\delta) = \sigma_n \mathbf{E} \varepsilon_n = 0$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon, \delta}) &= \mathbf{E}(\sigma_n \varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon, \delta}) = \\ &= \mathbf{E}(\sigma_n \mathbf{E}(\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon, \delta} \vee \sigma(\delta_n)) | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon, \delta}) = \\ &= \mathbf{E}(\sigma_n \mathbf{E}(\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon, \delta})) = 0, \end{aligned}$$

поскольку  $\mathbf{E} \varepsilon_n = 0$ .

Тем самым, относительно потока  $(\mathcal{F}_{n-1}^{\varepsilon, \delta})$  величины  $h = (h_n)$  образуют мартингал-разность (но не относительно  $(\mathcal{F}_n^\delta)$ , поскольку  $h_n$  не являются  $\mathcal{F}_n^\delta$ -измеримыми).

Далее,

$$\mathbf{E} h_n^2 = \mathbf{E} \sigma_n^2 \mathbf{E} \varepsilon_n^2 = \mathbf{E} \sigma_n^2 = \mathbf{E} e^{\Delta_n}.$$

Будем предполагать, что

$$\Delta_0 \sim \mathcal{N}\left(\frac{a_0}{1-a_1}, \frac{c^2}{1-a_1^2}\right). \quad (4)$$

Тогда согласно формуле (3), последовательность  $\Delta = (\Delta_n)$  удовлетворяет авторегрессионной схеме  $AR(1)$ :

$$\Delta_n = a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + c \delta_n$$

и является стационарной последовательностью. (См. § 2b.)

В силу формулы (4) имеем

$$\mathbf{E} h_n^2 = \mathbf{E} e^{\Delta_n} = e^{\frac{a_0}{1-a_1}} e^{\frac{c^2}{2(1-a_1^2)}},$$

где для подсчета  $\mathbf{E} e^{\Delta_n}$  мы воспользовались тем, что для случайной величины  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и для любого  $\sigma$  выполняется равенство

$$\mathbf{E} e^{\sigma \xi - \frac{1}{2} \sigma^2} = 1.$$

Аналогичным образом находим, что

$$\mathbf{E} |h_n| = \mathbf{E} |\varepsilon_n| \mathbf{E} \sigma_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbf{E} e^{\frac{1}{2} \Delta_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{a_0}{2(1-a_1)}} e^{\frac{1}{8} \cdot \frac{c^2}{1-a_1^2}}.$$

Рассмотрим теперь ковариационные свойства последовательностей  $h = (h_n)$  и  $h^2 = (h_n^2)$ .

Имеем

$$\mathbf{E} h_n h_{n+1} = 0$$

и, вообще,

$$\mathbf{E} h_n h_{n+k} = 0$$

для любого  $k \geq 1$ . Тем самым, последовательность  $h = (h_n)$  состоит из некоррелированных случайных величин: если  $R_h(k) = \mathbf{E} h_n h_{n+k}$ , то

$$R_h(k) = \begin{cases} \mathbf{E} h_n^2, & k = 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} h_n^2 h_{n-1}^2 &= \mathbf{E} \sigma_n^2 \sigma_{n-1}^2 = \mathbf{E} e^{\Delta_n + \Delta_{n-1}} = \\ &= \mathbf{E} (e^{\Delta_{n-1}} \mathbf{E} (e^{a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + c \delta_n} | \Delta_{n-1})) = \\ &= \mathbf{E} e^{a_0 + \Delta_{n-1}(1+a_1)} \mathbf{E} e^{c \delta_n} = e^{a_0 + \frac{c^2}{2}} \mathbf{E} e^{(1+a_1) \Delta_{n-1}} = \\ &= e^{a_0 + \frac{c^2}{2}} e^{\frac{a_0(1+a_1)}{1-a_1}} \mathbf{E} e^{(1+a_1)(\Delta_{n-1} - \frac{a_0}{1-a_1})} = \\ &= e^{\frac{2a_0}{1-a_1} + \frac{c^2}{2}} e^{\frac{(1+a_1)^2}{2} \cdot \frac{c^2}{1-a_1^2}} = e^{\frac{2a_0}{1-a_1} + \frac{c^2}{2}} e^{\frac{c^2}{2} \cdot \frac{1+a_1}{1-a_1}} = \\ &= e^{\frac{2a_0}{1-a_1} + \frac{c^2}{2} \cdot \frac{2}{1-a_1}} = e^{\frac{2a_0 + c^2}{1-a_1}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{Cov}(h_n^2, h_{n-1}^2) = e^{\frac{2a_0 + c^2}{1-a_1}} - e^{\frac{2a_0}{1-a_1}} e^{\frac{c^2}{1-a_1^2}} = e^{\frac{2a_0}{1-a_1}} e^{\frac{c^2}{1-a_1^2}} (e^{\frac{c^2 a_1}{1-a_1^2}} - 1).$$

Как и следовало ожидать, величины  $h_n^2$  и  $h_{n-1}^2$  положительно коррелированы в случае  $a_1 > 0$  и отрицательно коррелированы при  $a_1 < 0$ .

Наряду с полученными формулами

$$E \sigma_n^2 = e^{\frac{a_0}{1-a_1}} e^{\frac{c^2}{2(1-a_1^2)}},$$

$$E \sigma_n^2 \sigma_{n-1}^2 = e^{\frac{2a_0}{1-a_1}} e^{\frac{c^2}{1-a_1}}$$

приведем и более общие формулы:

$$E \sigma_n^r = e^{\frac{ra_0}{2(1-a_1)} + \frac{r^2}{8} \cdot \frac{c^2}{1-a_1^2}}$$

и

$$E \sigma_n^r \sigma_{n-1}^s = E \sigma_n^r E \sigma_n^s e^{\frac{rs}{4(1-a_1^2)} c^2}$$

для положительных  $r$  и  $s$

Эти формулы можно использовать для подсчета различных моментов от  $h = (h_n)$ . Так, например,

$$E |h_n| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E \sigma_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{a_0}{2(1-a_1)} + \frac{c^2}{8(1-a_1^2)}},$$

$$E h_n^4 = 3 E \sigma_n^4, \quad E h_n^2 h_{n-k}^2 = E \sigma_n^2 \sigma_{n-k}^2, \quad E |h_n h_{n-k}| = \frac{2}{\pi} E \sigma_n \sigma_{n-k}.$$

Из этих формул следует, в частности, выражение для «стационарного» коэффициента эксцесса:

$$K = \frac{E h_n^4}{(E h_n^2)^2} - 3 = 3 \left( \frac{E \sigma_n^4 - (E \sigma_n^2)^2}{(E \sigma_n^2)^2} \right) = 3 \frac{D \sigma_n^2}{(E \sigma_n^2)^2} \geq 0.$$

Это говорит о том, что модели «стохастической волатильности» с двумя источниками случайности  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  и  $\delta = (\delta_n)$ , так же как и модели семейства *ARCH*, позволяют описывать последовательности  $h = (h_n)$ , у которых плотности распределения вероятностей величин  $h_n$  имеют *вытянутость* в окрестности среднего значения  $E h_n = 0$ .

2. Остановимся на вопросах построения оценок  $\hat{\sigma}_n$  волатильности по результатам наблюдений  $h_1, \dots, h_n$ .

Если  $h_n = \mu + \sigma_n \varepsilon_n$ , то  $E h_n = \mu$  и

$$E |h_n - \mu| = E |\sigma_n \varepsilon_n| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E \sigma_n.$$

Это соотношение естественно положить в основу построения оценок  $\hat{\sigma}_n$  волатильности  $\sigma_n$  по формуле

$$\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} |h_n - \bar{h}_n|, \quad (5)$$

где

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k,$$

если  $\mu$  неизвестно, и

$$\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} |h_n - \mu|, \quad (6)$$

если  $\mu$  известно.

Другой метод оценивания  $\sigma_n^2$  исходит из того факта, что  $E h_n^2 = E \sigma_n^2$ , т. е. основан на свойствах моментов второго порядка.

В качестве оценки для  $\sigma_n^2$  можно было бы, конечно, взять оценку  $\widehat{\sigma}_n^2 = h_n^2$ . Она будет несмещенной, однако ее среднеквадратическая ошибка

$$\begin{aligned} E |\widehat{\sigma}_n^2 - \sigma_n^2|^2 &= E |h_n^2 - \sigma_n^2|^2 = E h_n^4 - 2 E h_n^2 \sigma_n^2 + E \sigma_n^4 = \\ &= 4 E \sigma_n^4 - 2 E \sigma_n^4 = 2 E \sigma_n^4 = 2 \exp \left\{ \frac{2a_0}{1-a_1} + \frac{2c^2}{1-a_1^2} \right\} \end{aligned}$$

может оказаться довольно большой.

Естественно, что если величины  $\sigma_k^2$ ,  $k \leq n$ , являются коррелированными, то можно пытаться при конструировании оценок  $\sigma_n^2$  использовать не только одно наблюдение  $h_n^2$ , но и предшествующие наблюдения  $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \dots$ . При этом, конечно, понятно, что если величины  $\sigma_k^2$ ,  $k \leq n$ , слабо коррелированы, то прошлые величины  $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \dots$  надо учитывать с малыми, убывающими весами. Если же  $\sigma_k^2$ ,  $k \leq n$ , сильно коррелированы, то значения  $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \dots$  могут дать существенную дополнительную информацию (к той, что есть в  $h_n^2$ ) о значениях  $\sigma_n^2$ .

Эта идея приводит к рассмотрению экспоненциально-взвешенных оценок

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = (1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k h_{n-k}^2, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (7)$$

конструирование которых, как видим, относит момент начала из нуля в  $-\infty$ . В этом предположении стационарное решение авторегрессионного рекуррентного соотношения (2) имеет вид

$$\Delta_n = \frac{a_0}{1-a_1} + c \sum_{k=0}^{\infty} a_1^k \delta_{n-k}, \quad (8)$$

где ряд сходится в среднем квадратическом. Как показано в § 2b, это решение (в классе стационарных решений) является единственным.

Заметим, что для формулы (7) верно равенство  $(1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = 1$ , т. е. сумма взвешенных коэффициентов при конструировании  $\widetilde{\sigma}_n^2$  равна единице.

Поскольку  $E h_{n-k}^2 = E \sigma_{n-k}^2 = E \sigma_n^2$ , мы видим, что  $E \widetilde{\sigma}_n^2 = E \sigma_n^2$ , т. е. оценка  $\widetilde{\sigma}_n^2$  наряду с  $\widehat{\sigma}_n^2$  является несмещенной.

Отметим также, что точность оценки  $\widetilde{\sigma}_n^2$  сильно зависит от значения выбранного параметра  $\lambda$  и, тем самым, возникает (и довольно-таки не простая) задача выбора «оптимального» значения параметра  $\lambda$ .



Из формулы (7) следует, что  $\widetilde{\sigma}_n^2$  подчиняются рекуррентным соотношениям

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = \lambda \widetilde{\sigma}_{n-1}^2 + (1 - \lambda) h_n^2, \quad (9)$$

которые удобны при отыскании оценок методами статистического анализа и моделирования.

### 3. Опираясь сейчас с моделью

$$h_n = e^{\frac{1}{2} \Delta_n} \varepsilon_n, \quad (10)$$

где  $\Delta_n = a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + c \delta_n$ , естественно было бы для оценки величин  $\Delta_n$  ( $= \ln \sigma_n^2$ ) воспользоваться оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой

$$m_n = E(\Delta_n | h_1, \dots, h_n).$$

К сожалению, *нелинейность* рассматриваемой схемы делает задачу отыскания  $m_n$  в явном виде почти безнадежной. Поэтому первое, что само напрашивается, — это необходимость «линеаризовать» рассматриваемую задачу и далее воспользоваться теорией «гауссовской линейной фильтрации Калмана—Бьюси» (см., например, [303]).

Можно поступить, например, так.

Из формулы (10) находим, что

$$\ln h_n^2 = \ln \varepsilon_n^2 + \ln \sigma_n^2 = E \ln \varepsilon_n^2 + \Delta_n + (\ln \varepsilon_n^2 - E \ln \varepsilon_n^2),$$

где  $E \ln \varepsilon_n^2 \approx -1,27$ ,  $D \ln \varepsilon_n^2 = \pi^2/2 \approx 4,93$ . Поэтому, обозначая  $x_n = \ln^2 h_n$ , получаем следующую *линейную* систему:

$$\Delta_n = a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + c \delta_n, \quad (11)$$

$$x_n = E \ln \varepsilon_n^2 + \Delta_n + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \xi_n, \quad (12)$$

где

$$\xi_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi} (\ln \varepsilon_n^2 - E \ln \varepsilon_n^2), \quad (13)$$

$E \xi_n = 0$ ,  $D \xi_n = 1$ , и в качестве (приближенного) значения для  $E \ln \varepsilon_n^2$  можно взять приведенное выше значение  $-1,27$ .

Таким образом, можно считать, что у нас задана *линейная* система (11)–(12), в которой, однако, распределения величин  $\xi_n$  не являются гауссовскими, что не дает возможности непосредственного применения теории линейной фильтрации Калмана—Бьюси.

Тем не менее, рассмотрим фильтр Калмана—Бьюси так, как если бы величины  $\xi_n$  были нормально распределенными,  $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $n \geq 1$ , и независимыми от последовательности  $(\delta_n)$ .

Пусть при этом допущении  $\mu_n = E(\Delta_n | x_1, \dots, x_n)$  и  $\gamma_n = D \Delta_n$ . Тогда соответствующая система, определяющая эволюцию величин  $\mu_n$  и  $\gamma_n$ , имеет

следующий вид (см., например, [303, гл. VI, § 7, теорема 1]):

$$\mu_{n+1} = (a_0 + a_1\mu_n) + \frac{a_1\gamma_n}{\pi^2/2 + \gamma_n}(x_{n+1} + 1,27 - \mu_n), \quad (14)$$

$$\gamma_{n+1} = (a_1^2\gamma_n + c^2) - \frac{(a_1\gamma_n)^2}{\pi^2/2 + \gamma_n}. \quad (15)$$

При этом  $\mu_0 = E \Delta_0$ ,  $\gamma_0 = D \Delta_0$ .

Заметим, что если в формуле (11) параметр  $c$  большой, то член  $\Delta_n$  в  $x_n$  будет играть доминирующую роль, и можно надеяться, что в этом случае интересующие нас величины  $m_n$  хорошо аппроксимируются величинами  $\mu_n$ .

4. Отметим, что в том случае, когда в исходной модели (11) неизвестны параметры  $\theta = (a_0, a_1, c)$ , для отыскания оценок  $\hat{\sigma}_n$  параметра  $\sigma_n$  по  $(h_1, \dots, h_n)$  часто используется байесовский метод, основанный на предположении наличия *априорного* распределения  $\pi(\theta)$  для  $\theta$ . Тогда, в принципе, возможно нахождение апостериорного распределения  $\pi(\theta, \sigma_n | h_1, \dots, h_n)$ , из которого затем можно найти апостериорные распределения  $\pi(\theta | h_1, \dots, h_n)$  и  $\pi(\sigma_n | h_1, \dots, h_n)$ , дающие возможность построения оценок  $\hat{\theta}_n$  и  $\hat{\sigma}_n$ , например, как апостериорных средних или тех значений, где апостериорные плотности обращаются в максимум. Подробнее по поводу байесовского подхода см., например, статью [252] и комментарии к ней на с. 395–417 того же самого выпуска (№ 4, т. 12) *Journal of Business and Economic Statistics*, 1994.

5. Описание моделей семейства *GARCH* и моделей «стохастической волатильности» давалось в рамках *условного* подхода. При этом условное распределение  $\text{Law}(h_n | \sigma_n)$  было всегда нормальным,  $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ , где  $\sigma_n^2$  предсказуемым образом зависели от «прошлого». Один из естественно возникающих при таком подходе вопросов заключается в следующем: каковы безусловные распределения  $\text{Law}(h_n)$ ,  $\text{Law}(h_1, \dots, h_n)$ ,  $n \geq 1$ ?

Чтобы иметь представление о характере возможных здесь результатов, рассмотрим следующую модель (см. [105]).

Пусть  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , где снова  $(\varepsilon_n)$  — стандартная гауссовская последовательность, а

$$\sigma_n^2 = a\sigma_{n-1}^2 + b\delta_n \quad (16)$$

и  $(\delta_n)$  — последовательность *неотрицательных* независимых устойчивых случайных величин с индексом устойчивости  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . (Ср. с п. 4 в § 1с гл. III.) Предполагается, что последовательности  $(\varepsilon_n)$  и  $(\delta_n)$  независимы.

Если предположить, что  $0 \leq a < 1$ , то последовательными итерациями из формулы (16) находим, что

$$\sigma_n^2 = b \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta_{n-k} + \lim_{m \rightarrow \infty} a^m \sigma_{n-m-1}^2. \quad (17)$$

В силу свойств автомодельности устойчивых распределений

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta_{n-k} \stackrel{d}{=} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a^{\alpha k} \right)^{1/\alpha} \delta_1$$

и в предположениях, что  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 \leq a < 1$ , уравнение (16) имеет (конечное) неотрицательное стационарное решение  $(\sigma_n^2)$ :

$$\sigma_n^2 \stackrel{d}{=} b \left( \frac{1}{1-a^\alpha} \right)^{1/\alpha} \delta_1. \quad (18)$$

Отсюда и из определения  $(h_n = \sigma_n \varepsilon_n)$  заключаем, что стационарное одномерное распределение  $\text{Law}(h_n)$  является устойчивым с индексом устойчивости, равным  $2\alpha$ .

6. В заключение настоящего раздела, посвященного нелинейным стохастическим моделям и их свойствам, остановимся на упоминавшемся эффекте «тяжелых хвостов», наблюдаемом в этих моделях. (См. также § 2с гл. IV.)

Рассмотрим ARCH(1)-модель  $h = (h_n)_{n \geq 0}$  с  $h_n = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2} \varepsilon_n$  для  $n \geq 1$ , начальным условием  $h_0$ , не зависящим от стандартной гауссовской последовательности  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ , и с  $\alpha_0 > 0$ ,  $0 < \alpha_1 < 1$ .

Оказывается, при подходящем выборе распределения величины  $h_0$  у рассматриваемой модели существует решение,  $h = (h_n)_{n \geq 0}$ , являющееся строго стационарным процессом, для которого (при достаточно малом  $\alpha_1 > 0$ ) имеет место эффект «тяжелых хвостов»:  $P(h_n > x) \sim cx^{-\gamma}$ , где  $c > 0$ ,  $\gamma > 0$ .

Доказательство этих (довольно-таки непростых) результатов см. в недавно вышедшей монографии П. Эмбрехта, К. Клюппелберг, Т. Микоша (P. Embrechts, C. Klueppelberg, T. Mikosch, «Modelling extremal events for insurance and finance», Berlin, Springer-Verlag, 1997; теоремы 8.4.9 и 8.4.12), где можно найти также подробный анализ многих моделей типа ARCH, GARCH, и т. п. и большой список литературы, посвященной их изучению.  $\square$

## 4. Приложение: модели динамического хаоса

### § 4а. Нелинейные хаотические модели

1. До сих пор при описании эволюции последовательностей  $h = (h_n)$ , где  $h_n = \ln(S_n/S_{n-1})$  и  $S_n$  — значение «цены» в момент времени  $n$ , мы исходили из той гипотезы, что эти величины имеют *стохастическую* природу, т. е.  $S_n = S_n(\omega)$ ,  $h_n = h_n(\omega)$  являются *случайными* величинами, заданными на некотором фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}, \mathbb{P})$ , моделирующими статистическую неопределенность состояний «природы».

С другой стороны, достаточно хорошо известно, что даже совсем простые нелинейные *детерминистические* системы типа

$$x_{n+1} = f(x_n; \lambda) \quad (1)$$

или

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}; \lambda), \quad (2)$$

где  $\lambda$  — некоторый параметр, могут порождать (при соответствующих начальных условиях) последовательности  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ , поведение которых весьма схоже с поведением стохастических последовательностей.

Это обстоятельство правомерным образом ставит вопрос о том, а не являются ли многие экономические, в том числе и финансовые, ряды в действительности не стохастическими, а *хаотическими*, т. е. описываемыми детерминистическими нелинейными системами, которые, как известно, могут приводить к эффектам (скажем, типа «кластерности»), наблюдаемым при статистическом анализе финансовых данных (см. гл. IV).

Отсылая за формальными определениями к специальной и весьма обширной литературе (см., например, [59], [71], [104], [198], [378], [379], [383], [385], [386], [428], [456]), приведем некоторые примеры нелинейных хаотических систем, чтобы дать представление об их поведении, а также о возникающем естественным образом вопросе о том, как определить, порождается данная реализация стохастической или хаотической системой.

С точки зрения прогноза будущего движения цен значительный интерес представляет вопрос и о том, насколько прогнозируемы нелинейные хаотиче-

ские модели. Мы увидим далее, что ситуация здесь не очень-то оптимистична, и причина кроется в том, что, несмотря на детерминистический характер, поведение траекторий хаотических систем может сильно изменяться в зависимости от точности определения значений начальных данных и значений параметра  $\lambda$ .

**2. Пример 1.** Рассмотрим так называемое *логистическое отображение*

$$x \rightsquigarrow Tx \equiv \lambda x(1-x)$$

и порождаемую им (одномерную) нелинейную динамическую систему

$$x_n = \lambda x_{n-1}(1-x_{n-1}), \quad n \geq 1, \quad 0 < x_0 < 1. \quad (3)$$

(По-видимому, впервые логистические уравнения (3) появились в моделях популяционной динамики, учитывающих ограничения на рост численности популяций.)

Для значений  $\lambda \leq 1$  имеем  $x_n = x_n(\lambda) \downarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  при всех  $x_0$ ,  $0 < x_0 < 1$  (рис. 23а). Таким образом, состояние  $x_\infty = 0$  можно в этом случае рассматривать как то *единственное устойчивое* состояние, к которому сходятся значения  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

При  $\lambda = 2$  имеем  $x_n \uparrow \frac{1}{2}$  (рис. 23б). Следовательно, в этом случае также существует *единственное устойчивое* состояние ( $x_\infty = \frac{1}{2}$ ), к которому «притягиваются» значения  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Будем теперь увеличивать значение параметра  $\lambda$ . При  $\lambda < 3$  у системы (3) все еще будет только одно устойчивое состояние. Однако при  $\lambda = 3$  возникает качественно новый эффект — по мере увеличения  $n$  появляются *два* состояния устойчивости  $x_\infty$  (рис. 23с), в которых попеременно находится система.

Такой же характер поведения у системы будет сохраняться и при увеличении значений параметра  $\lambda$ . Но затем при  $\lambda = 3,4494\dots$  с системой вдруг начинает происходить нечто новое — у нее появляются *четыре* состояния устойчивости, по которым происходит движение системы (рис. 21d).

При увеличении  $\lambda$  у системы начинают появляться все новые и новые состояния устойчивости: при  $\lambda = 3,5644\dots$  этих состояний 16, при  $\lambda = 3,5696\dots$  их уже 64. А при  $\lambda = 3,6$  число таких состояний становится равным бесконечности, что интерпретируют как *потерю системой устойчивости и переход системы в состояние хаоса*.

При этом полностью исчезает периодический характер смены состояний и система начинает совершать блуждание по бесконечному числу состояний, прыгая из одного из них в другое. Здесь важно отметить, что, хотя система и является детерминистической, *практически невозможно предсказать, где она окажется через некоторое время, поскольку ограниченная точность в определении значений  $x_n$  и  $\lambda$  может сильно повлиять на значения прогнозируемых величин*.

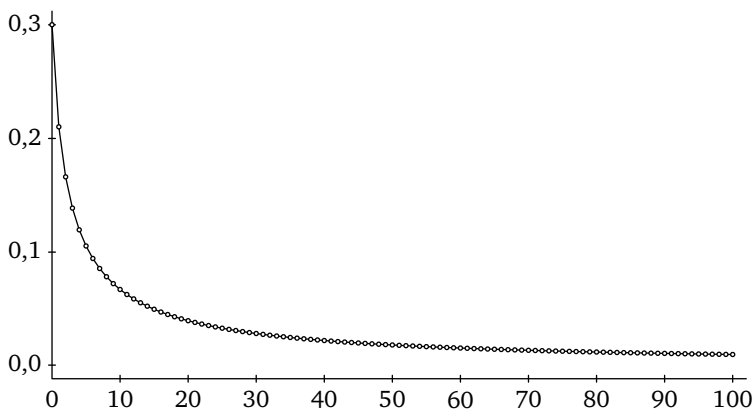


Рис. 23а. Случай  $\lambda = 1$

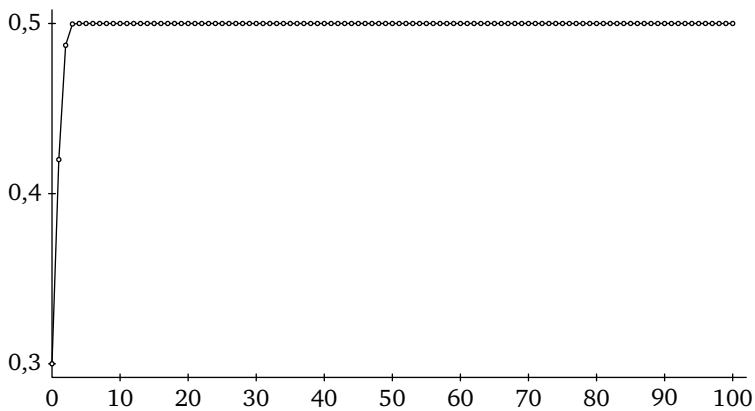


Рис. 23б. Случай  $\lambda = 2$

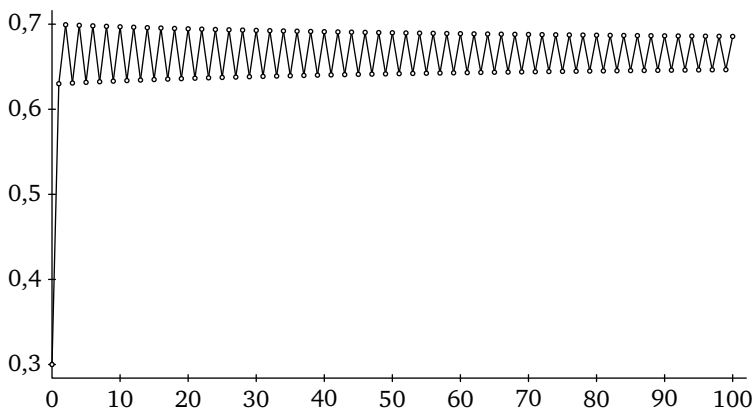


Рис. 23с. Случай  $\lambda = 3$

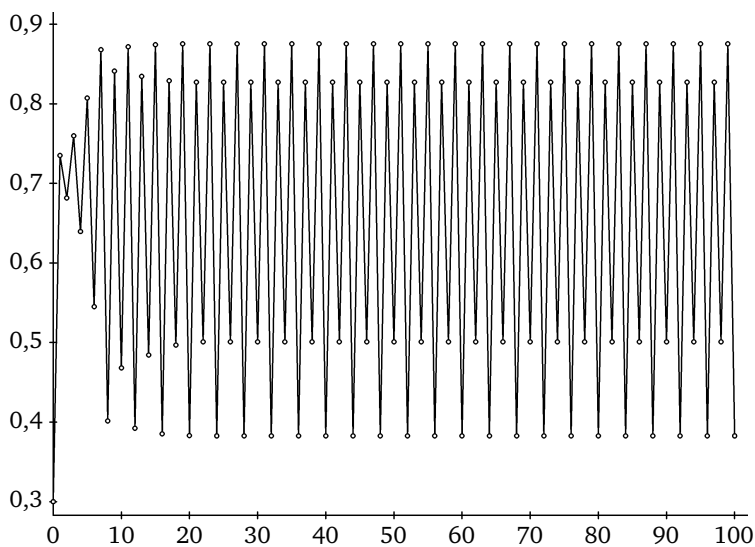


Рис. 23д. Случай  $\lambda = 3,5$

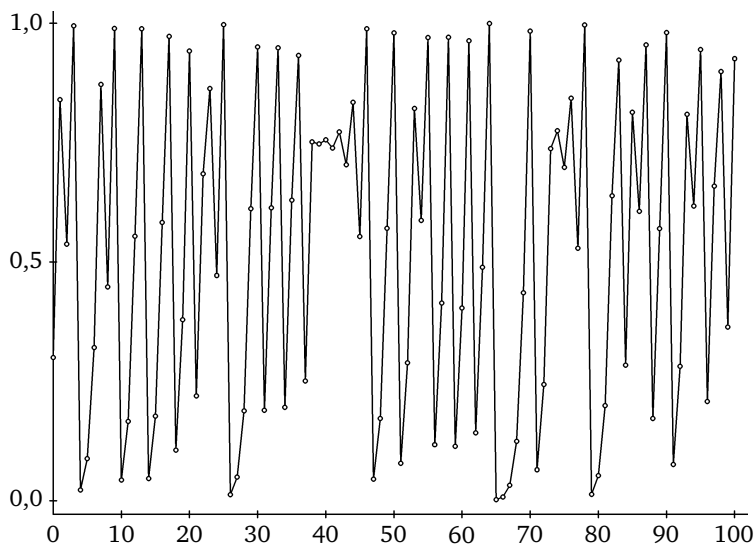


Рис. 23е. Случай  $\lambda = 4$

Уже из приведенного краткого описания становится понятным, что значения  $(\lambda_k)$  параметра  $\lambda$ , где происходит «разветвление», или «бифуркация», системы, становятся все «ближе и ближе» (рис. 24).

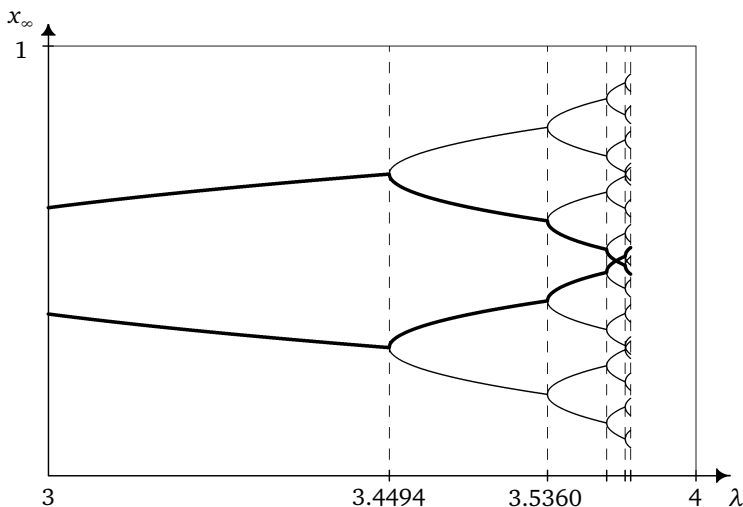


Рис. 24. Иллюстрация процесса удвоения состояний  $x_\infty$  в логистической системе при увеличении параметра  $\lambda \uparrow 4$

М. Фейгенбаум (M. Feigenbaum) высказал гипотезу и О. Ланфорд (O. Lanford) доказал, [294], что (для всех параболических систем)

$$\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \rightarrow F, \quad k \rightarrow \infty,$$

где  $F = 4,669201\dots$  — универсальная константа, называемая *числом Фейгенбаума*.

Параметр  $\lambda = 4$  играет для системы (3) особую роль — именно при этом значении последовательность наблюдений соответствующей (хаотической) последовательности  $(x_n)$  напоминает реализацию стохастической последовательности типа белого шума.

В самом деле, возьмем  $x_0 = 0,1$  и подсчитаем рекуррентным образом  $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$  по формуле (3). Подсчитанные по этим 1000 значениям (эмпирические) *среднее значение* и *стандартное отклонение* дают соответственно значения 0,48887 и 0,35742 (с точностью до пяти знаков).

В таблице 3 приведены значения (эмпирической) *корреляционной функции*  $\hat{r}(k)$ , подсчитанной по значениям  $x_0, x_1, \dots, x_{1000}$ .

Из этой таблицы видно, что величины  $(x_n)$ , порожденные логистическим отображением с  $\lambda = 4$ , практически можно считать *некоррелированными*, и в этом смысле последовательность  $(x_n)$  может быть названа «*хаотическим белым шумом*».



Таблица 3

1	-0,033	11	-0,046	21	-0,008	31	0,038
2	-0,058	12	0,002	22	0,009	32	-0,017
3	-0,025	13	-0,011	23	-0,039	33	0,014
4	-0,035	14	0,040	24	-0,020	34	0,001
5	-0,012	15	0,014	25	-0,008	35	0,017
6	-0,032	16	-0,023	26	0,017	36	-0,052
7	-0,048	17	-0,030	27	0,006	37	0,004
8	0,027	18	0,037	28	-0,004	38	0,053
9	-0,020	19	0,078	29	-0,019	39	-0,021
10	-0,013	20	0,017	30	-0,076	40	0,007

Интересно отметить, что для системы  $x_n = 4x_{n-1}(1 - x_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ ,  $x_0 \in (0, 1)$ , существует *инвариантное* распределение  $P$  (т. е. такое, что  $P(T^{-1}A) = P(A)$  для любого борелевского множества  $A$  из  $(0, 1)$ ), плотность которого

$$p(x) = \frac{1}{\pi[x(1-x)]^{1/2}}, \quad x \in (0, 1). \quad (4)$$

Тем самым, если считать начальное значение  $x_0$  *случайной* величиной с плотностью распределения вероятностей  $p = p(x)$ , то случайные величины  $x_n$ ,  $n \geq 1$ , будут иметь то же самое распределение, что и  $x_0$ . Полезно подчеркнуть, что у получаемой таким способом стохастической динамической системы  $(x_n)$  вся «случайность» полностью определяется *случайным* начальным значением  $x_0$ , а динамика переходов  $x_n \rightarrow x_{n+1}$  задается *детерминированным* образом согласно соотношениям (3).

В предположении (4) нетрудно найти, что  $E x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $E x_0^2 = \frac{3}{8}$ ,  $D x_0 = \frac{1}{8}$  ( $= (0,35355\dots)^2$ ) (ср. со значениями 0,48887 и 0,35742, приведенными выше) и

$$\rho(k) \equiv \frac{E x_0 x_k - E x_0 E x_k}{\sqrt{D x_0 D x_k}} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k \neq 0. \end{cases}$$

**Пример 2** (преобразование Бернулли):

$$x_n = 2x_{n-1} \pmod{1}, \quad x_0 \in (0, 1).$$

Инвариантным здесь является равномерное распределение с плотностью  $p(x) = 1$ ,  $x \in (0, 1)$ . При этом  $E x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $E x_0^2 = \frac{1}{3}$ ,  $D x_0 = \frac{1}{12}$ ,  $\rho(k) = 2^{-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$

**Пример 3** («палаточное» преобразование):

$$x_n = 1 - |1 - 2x_{n-1}|, \quad x_0 \in (0, 1).$$

Как и в примере 2, инвариантным здесь является равномерное распределение на  $(0, 1)$ . При этом  $E x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $E x_0^2 = \frac{1}{3}$ ,  $D x_0 = \frac{1}{12}$ ,  $\rho(k) = 0$ ,  $k \neq 0$ .

**Пример 4.** Пусть

$$x_n = 1 - 2\sqrt{|x_{n-1}|}, \quad x_0 \in (-1, 1).$$

Инвариантным здесь является распределение на  $(-1, 1)$  с плотностью  $p(x) = (1-x)/2$ . При этом  $E x_0 = -\frac{1}{3}$ ,  $E x_0^2 = \frac{1}{3}$ ,  $D x_0 = \frac{2}{9}$ . Рисунки 25а, б дают представление о поведении последовательностей  $(x_n)_{n \leq N}$  для  $x_0 = 0,2$  и  $N = 100$ ,  $N = 1000$ .

3. Приведенные примеры нелинейных динамических систем представляются для нас интерес с разных точек зрения. Во-первых, скажем, на примере логистической системы, развивающейся «бинарным образом», четко прослеживается идея фрактальности, изложенная в разделе 2 гл. III. Во-вторых, поведение таких систем, обладающих свойством «хаотичности», наводит на мысль об их использовании при построении моделей эволюции финансовых индексов, особенно в *кризисные периоды*, которым присуща скорее именно «хаотичность», а не «стохастичность».

#### § 4б. Проблематика различимости «хаотических» и «стохастических» последовательностей

1. То обстоятельство, что чисто детерминистические динамические системы могут проявлять свойства типа «стохастического белого шума», известно довольно-таки давно и не является неожиданным, хотя многие находят это удивительным. Поэтому тем более становятся интересными вопросы о том, как различать «стохастические» и «хаотические» последовательности, можно ли это сделать в принципе, какова же истинная природа «нерегулярности» финансовых данных — «стохастическая» или «хаотическая». (Видимо, один из возможных здесь подходов может быть основан на понятиях «сложности по Колмогорову—Мартин-Лёфу—Успенскому» для индивидуальных реализаций.)

Подход, изложенный ниже, основан на работах [448] и [305], в которых центральную роль при различении «хаотичности» и «стохастичности» играет функция

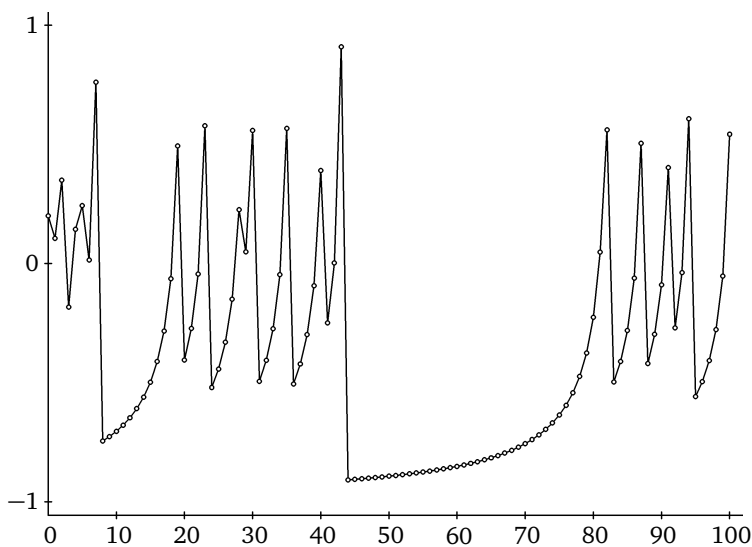
$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\psi(N, \varepsilon)}{N^2}, \quad (1)$$

где  $\psi(N, \varepsilon)$  — число тех пар  $(i, j)$ ,  $i, j \leq N$ , для которых в рассматриваемой последовательности  $(x_n)$  выполняется неравенство

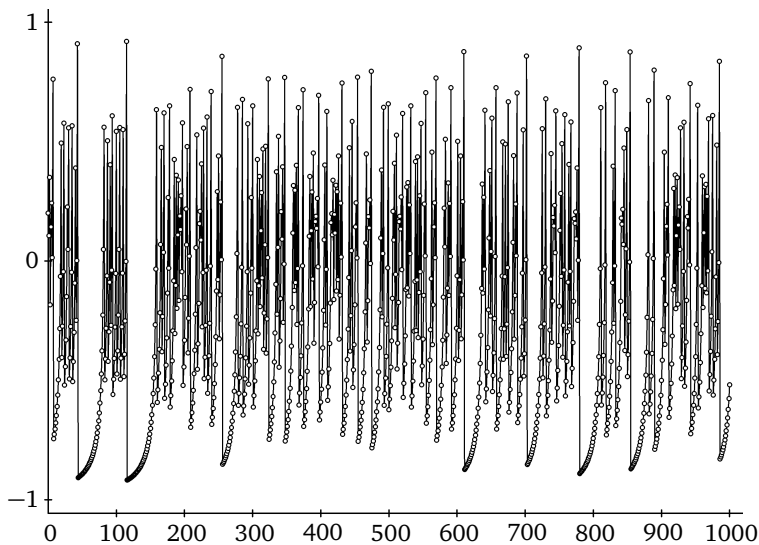
$$|x_i - x_j| < \varepsilon.$$

Помимо функций  $C(\varepsilon)$  привлекаются к рассмотрению также и функции

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\psi_m(N, \varepsilon)}{N^2},$$



**Рис. 25а.** График последовательности  $x = (x_n)_{n \geq 0}$ ,  
 $x_n = 1 - 2\sqrt{|x_{n-1}|}$ ,  $x_0 = 0,2$ , для  $N = 100$



**Рис. 25б.** График последовательности  $x = (x_n)_{n \geq 0}$ ,  
 $x_n = 1 - 2\sqrt{|x_{n-1}|}$ ,  $x_0 = 0,2$ , для  $N = 1000$

где  $\psi_m(N, \varepsilon)$  — число тех пар  $(i, j)$ , для которых все компоненты векторов  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1})$  и  $(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+m-1})$ ,  $i, j \leq N$ , отличаются не более чем на  $\varepsilon$ . (В случае  $m = 1$  имеем  $\psi_1(N, \varepsilon) = \psi(N, \varepsilon)$ .)

Для стохастических последовательностей  $(x_n)$  типа «белого шума» при малых  $\varepsilon$  имеем

$$C_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\nu_m}, \quad (2)$$

где «фрактальный» показатель  $\nu_m$  равен  $m$ . Свойством типа (2) обладают также и многие детерминистические системы (например, логистическая система (3) из предыдущего параграфа, [305]). Показатель  $\nu_m$  носит также название *корреляционной размерности* и тесно связан с хаусдорфовой и информационной колмогоровской размерностями.

Идея различения «хаотических» и «стохастических» последовательностей в работах [448] и [305] основана на том наблюдении, что корреляционная размерность у таких последовательностей различна. Как будет видно из дальнейшего, у «стохастических» последовательностей она больше, чем у «хаотических».

Согласно работам [305] и [448], в качестве оценок корреляционной размерности  $\nu_m$  естественно взять величины

$$\tilde{\nu}_{m,j} = \frac{\ln C_m(\varepsilon_j) - \ln C_m(\varepsilon_{j+1})}{\ln \varepsilon_j - \ln \varepsilon_{j+1}}$$

или

$$\tilde{\nu}_m(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \tilde{\nu}_{m,j},$$

где  $\varepsilon_j = \varphi^j$ ,  $0 < \varphi < 1$ .

Таблица 4а (данные из [305]) дает для логистической последовательности  $(x_n)_{n \leq N}$ ,  $N = 5900$ , значения  $\tilde{\nu}_{m,j}$  для  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 10$  и  $\varepsilon_j = \varphi^j$ ,  $\varphi = 0,9$ , для ряда значений  $j$ .

**Таблица 4а.** Значения  $\tilde{\nu}_{m,j}$  для логистической системы

$j$	$m$					
	1	2	3	4	5	10
20	0,78	0,90	0,96	0,98	1,02	1,19
30	0,81	0,89	0,95	0,98	0,98	1,11
35	0,83	0,90	0,94	0,97	0,95	1,01
40	0,83	0,91	0,97	0,99	1,05	1,20

Сравним результаты этой таблицы с теми оценками для  $\tilde{\nu}_{m,j}$ , которые получаются при моделировании гауссовского белого шума с теми же параметрами, что и для логистического отображения (3) из § 4а (таблица 4б — по данным из работы [305]):

**Таблица 4б.** Значения  $\tilde{v}_{m,j}$  для гауссовского белого шума

$j$	$m$					
	1	2	3	4	5	10
20	0,84	1,68	2,52	3,35	4,20	8,43
30	0,98	1,97	2,95	3,98	4,98	—
35	0,99	1,97	2,93	4,00	5,53	—
40	1,00	2,02	3,03	4,15	5,38	—

Из сопоставления этих таблиц видно, что в случае  $m = 1$  весьма трудно по значениям корреляционной размерности  $\tilde{v}_{1,j}$  отличить «хаотичность» и «стохастичность». Привлечение же больших значений  $m$  показывает существенное различие в величинах  $\tilde{v}_{m,j}$  для «хаотического» и «стохастического» случаев, что может служить достаточно весомым основанием для утверждения о разной природе образования соответствующих последовательностей  $(x_n)$ , хотя с точки зрения их эмпирических средних, дисперсий и корреляций разницы практически нет.

2. Для иллюстрации проблематики различимости «стохастичности» и «хаотичности» в финансовых рядах приведем таблицы значений корреляционных размерностей для дневных величин  $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ ,  $n \geq 1$ , для индексов IBM и S&P 500 (таблицы 5а, б; по 5903 наблюдениям в период времени 2.07.1962–31.12.1985, данные из [305]).

**Таблица 5а.** Значения  $\tilde{v}_{m,j}$  для IBM

$j$	$m$					
	1	2	3	4	5	10
20	0,46	0,90	1,31	1,68	2,05	3,63
30	0,83	1,76	2,61	3,44	4,27	8,44
35	0,97	1,93	2,88	3,82	4,79	9,84
40	0,98	1,96	2,94	3,86	4,94	—

**Таблица 5б.** Значения  $\tilde{v}_{m,j}$  для S&P 500

$j$	$m$					
	1	2	3	4	5	10
20	0,58	1,10	1,58	2,03	2,43	3,93
30	0,93	1,82	2,07	3,49	4,25	6,93
35	0,98	1,94	2,88	3,79	4,75	11,00
40	0,99	1,98	2,92	3,84	4,81	—

Из сопоставления этих двух таблиц видна, во-первых, однородность «фрактальной» структуры «корреляционной размерности» индексов IBM и S&P 500. Во-вторых, сравнение данных таблиц 5а, б с таблицами 4а, б показывает, что для этих индексов последовательности  $(h_n)$ ,  $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ ,  $n \geq 1$ , ведут себя скорее как *стохастический белый шум*, хотя, разумеется, это не отвергает гипотезу о том, что близкими свойствами могут обладать и какие-то другие «хаотические» последовательности с большой «корреляционной размерностью». (Подробнее о рассматриваемой проблематике различимости вместе с экономическими комментариями см. [305].)

**3.** Остановимся вкратце на еще одном подходе для выявления различий между «хаотичностью» и «стохастичностью», предложенном в работе [17].

Пусть  $x = (x_n)$  — «хаотическая» последовательность, порожденная некоторой динамической системой с распределением вероятностей  $F = F(x)$  для  $x_0$ , являющимся инвариантным для данной системы.

Пусть теперь  $\tilde{x} = (\tilde{x}_n)$  — «стохастическая» последовательность, состоящая из независимых одинаково распределенных величин с (одномерным) распределением  $F = F(x)$ .

Образует величины

$$M_n = \max(x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad \tilde{M}_n = \max(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n),$$

и пусть  $F_n(x) = P(M_n \leq x)$ ,  $\tilde{F}_n(x) = P(\tilde{M}_n \leq x)$ .

Идея подхода, принятого в работе [17], основана на том наблюдении, что *максимум* служит хорошей характеристикой, позволяющей улавливать отличия «стохастических» последовательностей от «хаотических».

С целью оправдания данного подхода авторы работы [17] поступают следующим образом.

В теории предельных теорем для экстремальных значений хорошо известны необходимые и достаточные условия, при которых величины  $a_n(\tilde{M}_n - b_n)$ ,  $n \geq 1$ , имеют (нетривиальное) предельное распределение

$$\lim_n P(a_n(\tilde{M}_n - b_n) \leq x) = \tilde{G}(x)$$

для некоторых констант  $a_n > 0$  и  $b_n$ ,  $n \geq 1$ .

Отсылая за подробностями к [124], [156], [187] и [206], приведем некоторые примеры.

Если  $F(x) = 1 - x^{-\rho}$ ,  $x \geq 1$ ,  $\rho > 0$ , то

$$P\left(\frac{\tilde{M}_n}{n^{1/\rho}} \leq x\right) \rightarrow \exp(-x^{-\rho}), \quad x > 0.$$

Если  $F(x) = 1 - (-x)^\rho$ ,  $-1 \leq x \leq 0$ ,  $\rho > 0$ , то

$$P(n^{1/\rho} \tilde{M}_n \leq x) \rightarrow \exp(-|x|^\rho), \quad x > 0.$$

Если  $F(x) = 1 - e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ , то

$$P(\tilde{M}_n - \ln n \leq x) \rightarrow \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если  $F(x) = \Phi(x)$  — стандартное нормальное распределение, то

$$P((2 \ln n)^{1/2}(\tilde{M}_n - b_n) \leq x) \rightarrow \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},$$

где  $b_n$  выбраны так, что  $P(x_0 > b_n) = \frac{1}{2}$ . (В этом случае  $b_n \sim (2 \ln n)^{1/2}$ .)

Для преобразования Бернулли (пример 2, § 4а) инвариантное распределение имеет вид  $F(x) = x$ ,  $x \in (0, 1)$ , и при  $a_n = n$ ,  $b_n = 1 - n^{-1}$  предельное распределение есть

$$\tilde{G}(x) = \exp(x - 1), \quad x \leq 1.$$

Для примера 4 из § 4а имеем  $F(x) = 1 - p^2(x)$ , где  $p(x) = (1 - x)/2$ ,  $x \in (-1, 1)$ , и при  $a_n = \sqrt{n}$ ,  $b_n = 1 - 2/\sqrt{n}$  находим

$$\tilde{G}(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2\right).$$

Для примера 1 из § 4а инвариантное распределение имеет вид  $F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ , и при соответствующей ренормализации можно найти

$$\tilde{G}(x) = \exp(-(1 - 2x)^{1/2}).$$

Имея распределение  $\tilde{F}_n(x) = (F(x))^n$  и предельное распределение  $\tilde{G}(x)$ , естественно было бы сравнить их с соответствующими распределениями  $F_n(x)$  и, если это возможно, с их пределами, скажем  $G(x)$ . Как отмечается в работе [17], здесь имеется большая техническая трудность, связанная с тем, что для рассмотренных в § 4а примеров отсутствуют удобные для анализа аналитические выражения для  $F_n(x)$ . Ввиду этого обстоятельства авторы работы [17] пошли по пути численного анализа распределений  $F_n(x)$  для больших  $n$  и сравнения их с соответствующими распределениями  $\tilde{F}_n(x) = [F(x)]^n$ .

Для динамических систем, рассмотренных в § 4а, этот анализ показывает, что, глобальным образом, поведение  $F_n(x)$  (для «хаотических» систем с инвариантным распределением  $F(x)$ ) качественно отличается от поведения  $\tilde{F}_n(x)$  (для «стохастических» систем, образованных независимыми одинаково распределенными величинами с одномерным распределением  $F(x)$ ). Это говорит о том, что для рассматриваемых моделей максимум является хорошей статистикой в рассматриваемой проблеме различимости «хаотичности» и «стохастичности». Но, разумеется, это не исключает того, что может найтись «хаотическая» система вида  $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}; \lambda)$  с достаточно большим  $k$ , которую будет трудно отличить от «стохастического белого шума», пусть и по большому, но конечному числу наблюдений.

Глава III

Стохастические модели.  
Непрерывное время

1. Негауссовские модели распределений и процессов . . . . . 209

§ 1a. Устойчивые и безгранично делимые распределения, 209. — § 1b. Процессы Леви, 220. — § 1c. Устойчивые процессы, 226. — § 1d. Гиперболические распределения и процессы, 234.

2. Модели со свойствами самоподобия (автомодельности). Фрактальность 242

§ 2a. Статистический феномен автомодельности Харста, 242. — § 2b. Экскурсы во фрактальную геометрию, 245. — § 2c. Статистическая автомодельность. Фрактальное броуновское движение, 248. — § 2d. Фрактальный гауссовский шум как процесс с сильным последствием, 254.

3. Модели, основанные на броуновском движении . . . . . 258

§ 3a. Броуновское движение и его роль как базисного процесса, 258. — § 3b. Броуновское движение: сводка классических результатов, 262. — § 3c. Стохастический интеграл по броуновскому движению, 273. — § 3d. Процессы и формула Ито, 279. — § 3e. Стохастические дифференциальные уравнения, 285. — § 3f. Прямые и обратные уравнения Колмогорова. Вероятностное представление решений, 293.

4. Диффузионные модели эволюции процентных ставок, стоимостей акций и облигаций . . . . . 300

§ 4a. Стохастические процентные ставки, 300. — § 4b. Стандартная диффузионная модель стоимости акций (геометрическое броуновское движение) и ее обобщения, 306. — § 4c. Диффузионные модели временной структуры стоимостей семейства облигаций, 312.

5. Семимартингальные модели . . . . . 317

§ 5a. Семимартингалы и стохастические интегралы, 317. — § 5b. Разложение Дуба—Мейера. Компенсаторы. Квадратическая вариация, 325. — § 5c. Формула Ито для семимартингалов. Некоторые обобщения, 331.



# 1. Негауссовские модели распределений и процессов

## § 1а. Устойчивые и безгранично делимые распределения

1. В следующей главе будут представлены результаты статистического анализа типов распределений и эволюции таких финансовых индексов, как обменный курс валют, цены акций и т. п. Из этого анализа будет видно, что *устойчивым распределениям и устойчивым процессам* отводится значительная роль как естественным и весьма правдоподобным кандидатам для построения вероятностных моделей распределений и эволюции финансовых индексов.

Этим и объясняется, что в данном разделе приводится необходимая для дальнейшего информация как об этих распределениях и процессах, так и о более общих — *безгранично делимых*, без которых описание и рассмотрение свойств финансовых индексов было бы весьма неполным.

При изложении основных понятий и свойств «устойчивости» и «безграничной делимости» мы будем в определенной степени следовать хронологической схеме — сначала рассматриваем одномерные устойчивые распределения, изученные в 20-х годах XX в. П. Леви (P. Lévy), Дж. Пойа (G. Pólya), А. Я. Хинчиным, затем переходим к одномерным и многомерным безгранично делимым распределениям, исследованным в 30-х годах Б. де Финетти (B. de Finetti), А. Н. Колмогоровым, П. Леви, А. Я. Хинчиным. После этого в § 1b будут приведены основные понятия и свойства, относящиеся к процессам Леви и устойчивым процессам.

Отметим, что широко используемыми пособиями по устойчивым и безгранично делимым распределениям и процессам являются, например, монографии [156], [188], [418], [484].

**2. Определение 1.** Невырожденная случайная величина  $X$  называется *устойчивой* или имеющей *устойчивое распределение*, если для любых двух положительных чисел  $a$  и  $b$  найдутся положительное число  $c$  и число  $d$ , для которых

$$\text{Law}(aX_1 + bX_2) = \text{Law}(cX + d), \quad (1)$$

где  $X_1$  и  $X_2$  — независимые случайные величины, являющиеся копиями величины  $X$  ( $\text{Law}(X_i) = \text{Law}(X)$ ,  $i = 1, 2$ ). Без ограничения общности все рассматриваемые случайные величины предполагаются заданными на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Доказывается (см. указанные выше монографии), что существует такое число  $\alpha \in (0, 2]$ , не зависящее от  $a$  и  $b$ , что константа  $c$  в формуле (1) такова, что

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha. \quad (2)$$

Часто используется иное, но равносильное данному, определение.

**Определение 2.** Случайная величина  $X$  называется *устойчивой*, если для всякого  $n \geq 2$  найдутся положительное число  $C_n$  и число  $D_n$ , для которых

$$\text{Law}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Law}(C_n X + D_n), \quad (3)$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые копии величины  $X$ .

Если в формуле (3) выполняются равенства  $D_n = 0$ ,  $n \geq 2$ , т. е.

$$\text{Law}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Law}(C_n X), \quad (4)$$

то  $X$  называется *строго (strictly) устойчивой* величиной.

Весьма замечательно, что в формулах (3) и (4) имеем

$$C_n = n^{1/\alpha}$$

для некоторого  $0 < \alpha \leq 2$ , где, конечно,  $\alpha$  — тот же самый параметр, что и в формуле (2).

Чтобы подчеркнуть роль и значение этого параметра  $\alpha$ , наряду с термином «устойчивость» часто используется термин « $\alpha$ -устойчивость».

Для полноты картины к данным двум определениям целесообразно еще добавить третье, раскрывающее роль устойчивых распределений как тех и только тех, которые могут возникать в качестве предельных (при соответствующей нормировке и центрировании) для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

**Определение 3.** Случайная величина  $X$  называется *имеющей устойчивое распределение* (или попросту *устойчивой*), если это распределение имеет область притяжения в том смысле, что найдутся последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин  $Y_1, Y_2, \dots$ , последовательности положительных чисел  $(d_n)$  и действительных чисел  $(a_n)$ , для которых

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{d_n} + a_n \xrightarrow{d} X; \quad (5)$$

« $\xrightarrow{d}$ » означает сходимость по распределению:

$$\text{Law}\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{d_n} + a_n\right) \rightarrow \text{Law}(X),$$

где сходимость законов понимается как *слабая* сходимость соответствующих мер.

Равносильность этого определения первым двум вытекает из следующего результата: случайная величина  $X$  может быть пределом по распределению величин  $\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{d_n} + a_n$ , где  $(Y_n)$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, в том и только том случае, когда  $X$  является устойчивой (в смысле первого или второго определений). (См. доказательство в [188]; [439, гл. III, § 5].)

**3. Замечательный результат теории вероятностей** (П. Леви, А. Я. Хинчин) дает следующее представление для характеристической функции

$$\varphi(\theta) = \mathbf{E} e^{i\theta X}$$

устойчивой случайной величины  $X$ :

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \exp\left\{i\mu\theta - \sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\beta (\operatorname{Sgn} \theta) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{i\mu\theta - \sigma |\theta| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\operatorname{Sgn} \theta) \ln |\theta|\right)\right\}, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} \quad (6)$$

где  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $|\beta| \leq 1$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Смысл участвующих здесь четырех параметров  $(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$  следующий:  
 $\alpha$  — индекс устойчивости, или характеристический параметр (тот же самый, естественно, что в формулах (2) и (4));

$\beta$  — параметр скошенности (skewness) плотности распределения;

$\sigma$  — параметр масштаба (scale);

$\mu$  — параметр положения (location).

Параметр  $\alpha$  «ответствен» за характер убывания хвостов распределений.

Если  $0 < \alpha < 2$ , то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \mathbf{P}(X > x) = C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha, \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \mathbf{P}(X < -x) = C_\alpha \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha, \quad (8)$$

где

$$C_\alpha = \left( \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (9)$$

В случае  $\alpha = 2$  из представления (6) получаем, что

$$\varphi(\theta) = e^{i\mu\theta - \sigma^2 \theta^2} = e^{i\mu\theta - \frac{\theta^2}{2} (2\sigma^2)}, \quad (10)$$

т. е.  $\varphi(\theta)$  является характеристической функцией нормального распределения,  $\mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2)$ , или нормально распределенной случайной величины  $X$ ,

$$\mathbf{E} X = \mu, \quad \mathbf{D} X = 2\sigma^2.$$

Хотя в формуле (6) значение параметра  $\beta$  не определяется однозначно (поскольку при  $\alpha = 2$  этот параметр входит в выражение  $\beta \operatorname{tg} \pi$ , которое равно нулю), обычно берется  $\beta = 0$ .

Понятно, что с точки зрения поведения *хвостов* распределений случаи  $\alpha < 2$  и  $\alpha = 2$  сильно отличаются друг от друга, поскольку, скажем, для  $\mu = 0$  и  $2\sigma^2 = 1$  имеем

$$P(|X| > x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-x^2/2}}{x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (11)$$

и сопоставление с формулами (7) и (8) показывает, что при  $\alpha < 2$  *хвосты* более *тяжелые* по отношению к быстрому их убыванию в нормальном случае. (Здесь уместно подчеркнуть, что у многих финансовых индексов  $S = (S_n)_{n \geq 0}$  величины «возврата»  $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$  имеют, как показывают статистические исследования, распределения с «тяжелыми хвостами». Это делает естественным рассмотрение класса устойчивых распределений в качестве кандидата для построения вероятностно-статистических моделей последовательностей  $h = (h_n)$ .)

Важно отметить, что, как это видно из формул (7) и (8), математическое ожидание  $E|X|$  конечно, если и только если  $\alpha > 1$ . Вообще,  $E|X|^p < \infty$  в том и только том случае, когда  $p < \alpha$ .

В связи с показательной асимптотикой в формулах (7) и (8) уместно сейчас вспомнить о *распределении Парето*, для которого плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f_{\alpha,b}(x) = \begin{cases} \frac{ab^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq b, \\ 0, & x < b, \end{cases} \quad (12)$$

с параметрами  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$  и, значит, соответствующая функция распределения  $F_{\alpha,b}(x)$  такова, что

$$1 - F_{\alpha,b}(x) = \left(\frac{b}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq b. \quad (13)$$

Сравнение с формулами (7) и (8) показывает, что на бесконечности устойчивые распределения ведут себя так же, как и распределения Парето. В этом смысле «хвостовая» часть устойчивых распределений относится к *паретовскому типу*.

Параметр *скошенности* (асимметрии)  $\beta \in [-1, 1]$  в формуле (6) характеризует степень несимметричности распределения. Если  $\beta = 0$ , то распределение симметрично. Когда  $\beta > 0$ , распределение скошено сильнее слева, и эта скошенность тем больше, чем значение  $\beta$  ближе к единице. Случай  $\beta < 0$  соответствует скошенности справа.

Параметр  $\sigma$  играет роль *масштабного* параметра. В случае нормального распределения ( $\alpha = 2$ ) имеем  $D X = 2\sigma^2$ . Подчеркнем, что дисперсия здесь равна  $2\sigma^2$ , а не  $\sigma^2$ , в отличие от стандартных обозначений. Если же  $\alpha < 2$ , то дисперсия  $D X$  не существует.

Параметр  $\mu$  назван параметром *положения*. Объясняется это тем, что в случае  $\alpha > 1$  математическое ожидание  $E|X|$  конечно и  $\mu = E X$ . В общем же случае такая интерпретация отсутствует, поскольку  $E X$  просто может быть не определено.

4. Следуя установившейся традиции, устойчивое распределение с параметрами  $\alpha, \beta, \sigma$  и  $\mu$  будем обозначать

$$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$$

и писать  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , подразумевая под этим, что  $X$  имеет устойчивое распределение с параметрами  $\alpha, \beta, \sigma$  и  $\mu$ .

Отметим, что распределение  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  является *симметричным* в том и только том случае, когда  $\beta = \mu = 0$ . (Из вида характеристической функции нетрудно заключить, что в этом случае константа  $D_n$  в формуле (3) равна нулю.) Это распределение *симметрично около (произвольного)  $\mu$*  тогда и только тогда, когда  $\beta = 0$ .

В симметричном случае ( $\beta = \mu = 0$ ) часто используют обозначение

$$X \sim S\alpha S.$$

В этом случае характеристическая функция имеет вид

$$\varphi(\theta) = e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha}. \quad (14)$$

5. Явный вид плотностей устойчивых распределений известен, к сожалению, лишь только при некоторых значениях параметров. Этими распределениями являются:

- *нормальное*,  $S_2(\sigma, 0, \mu) = \mathcal{N}(\mu, 2\sigma^2)$ , с плотностью

$$\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}}; \quad (15)$$

- *Коши (Cauchy)*,  $S_1(\sigma, 0, \mu)$ , с плотностью

$$\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)}; \quad (16)$$

- *одностороннее устойчивое распределение* с индексом  $\alpha = 1/2$ ,  $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$  (называемое также распределением Леви, распределением Смирнова), на  $(\mu, \infty)$  с плотностью

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right). \quad (17)$$

Отметим два интересных и полезных частных случая выражений (16) и (17):

если  $X \sim S_1(\sigma, 0, 0)$ , то для  $x > 0$  имеем

$$P(X \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{\sigma}; \quad (18)$$

если  $X \sim S_{1/2}(\sigma, 1, 0)$ , то для  $x > 0$  имеем

$$P(X \leq x) = 2\left(1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\sigma}{x}}\right)\right). \quad (19)$$

По поводу представлений плотностей устойчивых распределений в виде рядов см. [156], [225], [418], [484].

6. Предположим сейчас, что  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые случайные величины,

$$X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Хотя эти величины, вообще говоря, *разнораспределены*, но то, что они имеют один и тот же индекс устойчивости  $\alpha$ , показывает (см. вид характеристической функции (6)), что их сумма  $X = X_1 + \dots + X_n$  имеет распределение того же самого типа  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  с параметрами

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \dots + \beta_n \sigma_n^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \dots + \mu_n.$$

7. Перейдем теперь к более общему классу так называемых «безгранично делимых» распределений, который включает в себя и «устойчивые» распределения.

**Определение 4.** Случайная величина  $X$  называется *безгранично делимой*, а ее распределение вероятностей — *безгранично делимым*, если для любого  $n \geq 1$  можно найти такие *независимые одинаково* распределенные случайные величины  $X_{n1}, \dots, X_{nn}$ , что  $X \stackrel{d}{=} X_{n1} + \dots + X_{nn}$ .

Содержательный смысл класса безгранично делимых распределений состоит в том, что *они и только они* могут выступать в качестве предельных для распределений сумм  $\left(\sum_{k=1}^n X_{nk}\right)$  в *схеме серий*

$$\begin{array}{l} X_{11} \\ X_{21}, X_{22} \\ \dots\dots\dots \\ X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn} \\ \dots\dots\dots \end{array} \quad (20)$$

состоящих (при каждом  $n$ ) из последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин  $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$ . Заметим, что при этом может вовсе и не быть никакой связи между величинами в схеме (20) по *разным* срокам. (Подробнее см. [188]; [439, гл. III, § 5].)

Более же узкий класс — класс *устойчивых* распределений — возникает, когда в схеме (20) все величины  $X_{nk}$  порождаются *специальным* образом по-

средством одной и той же последовательности независимых случайных величин  $Y_1, Y_2, \dots$  (см. конец п. 2):

$$X_{nk} = \frac{Y_k}{d_n} + \frac{a_n}{n}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (21)$$

(Отметим, что к классу безгранично делимых относятся гиперболическое и гауссовское/обратно-гауссовское распределения, рассматриваемые далее в § 1d.)

Определение 4 относилось к скалярному случаю ( $X \in \mathbb{R}$ ). Оно непосредственно переносится и на векторный случай ( $X \in \mathbb{R}^d$ ) без каких-либо принципиальных изменений.

Пусть  $P = P(dx)$  — распределение вероятностей *безгранично делимого случайного вектора*  $X \in \mathbb{R}^d$  и

$$\varphi(\theta) = E e^{i(\theta, X)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\theta, x)} P(dx)$$

— его характеристическая функция;  $(\theta, x)$  — скалярное произведение векторов  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$  и  $x = (x_1, \dots, x_d)$ .

В результате трудов Б. де Финетти, затем А. Н. Колмогорова (в случае  $E|X|^2 < \infty$ ) и, наконец, П. Леви и А. Я. Хинчина в тридцатых годах XX в. была установлена следующая *формула Леви—Хинчина* для характеристической функции вектора  $X \in \mathbb{R}^d$ :

$$\varphi(\theta) = \exp \left\{ i(\theta, B) - \frac{1}{2}(\theta, C\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(\theta, x)} - 1 - i(\theta, x)I(|x| \leq 1)) \nu(dx) \right\}, \quad (22)$$

где  $B \in \mathbb{R}^d$ ,  $C = C(d \times d)$  — симметричная неотрицательно определенная матрица и  $\nu = \nu(dx)$  — положительная мера (называемая *мерой Леви*) на  $\mathbb{R}^d$ , удовлетворяющая условиям  $\nu(\{0\}) = 0$  и

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty. \quad (23)$$

(Заметим, что возможны как случай  $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$ , так и случай  $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$ .)

Важно подчеркнуть, что  $\varphi(\theta)$  определяется тремя характеристиками  $B$ ,  $C$  и  $\nu$  и что триплет  $(B, C, \nu)$ , входящий в формулу (22), определяется *единственным* образом.

**Примеры.** 1. Если  $X$  — вырожденная случайная величина,  $P(X = a) = 1$ , то  $B = a$ ,  $C = 0$ ,  $\nu = 0$  и

$$\varphi(\theta) = e^{i\theta a}.$$

2. Если  $X$  — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ , то  $\nu(dx) = \lambda I_{\{1\}}(dx)$  — мера, «сидящая» в точке  $x = 1$ ,  $B = \lambda$  и

$$\varphi(\theta) = e^{\lambda(e^{i\theta} - 1)}.$$

3. Если  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , то  $B = m$ ,  $C = \sigma^2$ ,  $\nu = 0$  и

$$\varphi(\theta) = e^{im\theta - \frac{\sigma^2}{2}\theta^2}.$$

4. Если  $X$  — случайная величина, имеющая распределение Коши с плотностью (16), то

$$\varphi(\theta) = e^{i\mu\theta - \sigma|\theta|}.$$

5. Если  $X$  — случайная величина с плотностью (17) (одностороннее устойчивое распределение с индексом  $\alpha = 1/2$ ), то

$$\varphi(\theta) = e^{i\mu\theta - \sigma|\theta|^{1/2}(1-i \operatorname{Sgn} \theta)}.$$

8. Представление характеристической функции  $\varphi(\theta)$  в виде (22) (с использованием «традиционно-канонической» функции «урезания»  $h(x) = x I(|x| \leq 1)$ ) не является единственным. Например, можно было бы вместо  $I(|x| \leq 1)$  использовать представление с  $I(|x| \leq a)$ , где  $a > 0$ . Но, разумеется, тогда должен измениться и соответствующий триплет характеристик. Весьма примечательно, что характеристики  $C$  и  $\nu$  при этом не меняются, являясь «внутренними» характеристиками, не зависящими от выбора функции урезания. Меняется же лишь только первая характеристика  $B$ .

Для точности формулировок введем следующее определение.

**Определение 5.** Ограниченная функция  $h = h(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , с компактным носителем и такая, что  $h(x) = x$  в окрестности нуля, будет называться *функцией урезания*.

Наряду с (22) для характеристической функции  $\varphi(\theta)$  имеют место (для всякой функции урезания  $h = h(x)$ ) следующие представления:

$$\varphi(\theta) = \exp \left\{ i(\theta, B(h)) - \frac{1}{2}(\theta, C\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(\theta, x)} - 1 - i(\theta, h(x))) \nu(dx) \right\}, \quad (24)$$

где  $C$  и  $\nu$  не зависят от выбора  $h$  и те же, что и в представлении (22), а  $B(h)$  для разных  $h$  пересчитываются следующим образом:

$$B(h) - B(h') = \int_{\mathbb{R}^d} (h(x) - h'(x)) \nu(dx). \quad (25)$$

Обратим внимание на то, что существование интегралов в правых частях формул (22) и (24) гарантируется условием (23), поскольку функция

$$e^{i(\theta, x)} - 1 - i(\theta, h(x))$$

ограничена, а при  $|x| \rightarrow 0$  имеет порядок  $O(|x|^2)$ .

Если условие (23) усилить, заменив его условием

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|x| \wedge 1) \nu(dx) < \infty, \quad (26)$$



то тогда в представлении (24) можно положить  $h(x) = 0$ :

$$\varphi(\theta) = \exp \left\{ i(\theta, B(0)) - \frac{1}{2}(\theta, C\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(\theta, x)} - 1) \nu(dx) \right\}. \quad (27)$$

Константа  $B(0)$  в этом представлении носит название «сносовой компоненты» (drift) случайной величины  $X$ .

Если, с другой стороны, условие (23) усилить, заменив условием

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge |x|) \nu(dx) < \infty, \quad (28)$$

то представление (24) будет справедливым с  $h(x) = x$ :

$$\varphi(\theta) = \exp \left\{ i(\theta, \tilde{B}) - \frac{1}{2}(\theta, C\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(\theta, x)} - 1 - i(\theta, x)) \nu(dx) \right\}. \quad (29)$$

В этом случае параметр  $\tilde{B}$ , называемый *центром*, на самом деле есть не что иное, как среднее значение  $\tilde{B} = \mathbf{E} X$ .

Заметим, что условие  $\mathbf{E} |X| < \infty$  эквивалентно условию

$$\int_{|x|>1} |x| \nu(dx) < \infty.$$

9. Как уже отмечалось выше, для устойчивых законов явная форма их распределений известна лишь в трех случаях. Этими распределениями являются (см. п. 5):

*нормальное распределение* ( $\alpha = 2$ ),  
*распределение Коши* ( $\alpha = 1$ ),  
*распределение Леви—Смирнова* ( $\alpha = 1/2$ ).

Класс безгранично делимых распределений значительно шире, и к нему относятся (помимо названных) следующие распределения, хотя установить это бывает и не просто:

*пуассоновское,*  
*Г-распределение,*  
*геометрическое,*  
*отрицательно-биномиальное,*  
*t-распределение (распределение Стьюдента),*  
*F-распределение (распределение Фишера),*  
*логарифмически нормальное,*  
*логистическое,*  
*распределение Парето,*  
*двустороннее экспоненциальное (распределение Лапласа),*  
*гиперболическое,*  
*гауссовское/обратно-гауссовское...*

Но многие известные распределения *не* являются безгранично делимыми: биномиальное, равномерное, всякое невырожденное распределение с конечным носителем, распределения с плотностью  $f(x)$  вида  $f(x) = Ce^{-|x|^a}$ , где  $a > 2$ .

Одни из упомянутых распределений являются *дискретными*, другие имеют *плотности* распределений. Для полноты картины и удобства ссылок в таблицах 6 и 7 приведен их явный вид.

Таблица 6 (дискретные распределения)

Распределение	Вероятности $p_k$	Параметры
Пуассоновское	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$	$\lambda > 0$
Геометрическое	$pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots$	$0 < p \leq 1, q = 1 - p$
Отрицательно-биномиальное	$C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}, k = r, r+1, \dots$	$0 < p \leq 1, q = 1 - p, r = 1, 2, \dots$
Биномиальное	$C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$	$0 \leq p \leq 1, q = 1 - p, n = 1, 2, \dots$

**10.** Понятие «устойчивых» случайных величин естественным образом распространяется и на векторный случай (ср. с определениями 1 и 2).

**Определение 6.** Случайный вектор

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$$

называется *устойчивым случайным вектором* в  $\mathbb{R}^d$  или *вектором с устойчивым  $d$ -мерным распределением*, если для любых двух положительных чисел  $A$  и  $B$  найдутся положительное число  $C$  и вектор  $D \in \mathbb{R}^d$ , для которых

$$\text{Law}(AX^{(1)} + BX^{(2)}) = \text{Law}(CX + D), \quad (30)$$

где  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$  — независимые копии  $X$ .

Можно показать (см., например, [418, с. 58]), что невырожденный случайный вектор  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  является устойчивым в том и только том случае, когда для каждого  $n \geq 2$  существуют число  $\alpha \in (0, 2]$  и вектор  $D_n$ , для которых

$$\text{Law}(X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)}) = \text{Law}(n^{1/\alpha} X + D_n), \quad (31)$$

где  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$  — независимые копии вектора  $X$ .

В том случае, когда  $D_n = 0$ , т. е.

$$\text{Law}(X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)}) = \text{Law}(n^{1/\alpha} X), \quad (32)$$

говорят, что вектор  $X$  является «*строго устойчивым* случайным вектором с индексом  $\alpha$ » или «*строго  $\alpha$ -устойчивым* случайным вектором».

Таблица 7 (распределения с плотностью)

Распределение	Плотность $p = p(x)$	Параметры
Равномерное на $[a, b]$	$\frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$
Нормальное, или гауссовское	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Гамма (Г-распределение)	$\frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, x \geq 0$	$\alpha > 0, \beta > 0$
Экспоненциальное (Г-распределение с $\alpha = 1, \beta = 1/\lambda$ )	$\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$\lambda > 0$
$t$ -распределение (Стюдента)	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R}$	$n = 1, 2, \dots$
Бета ( $\beta$ -распределение)	$\frac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{\beta(r, s)}, 0 \leq x \leq 1$	$r > 0, s > 0$
Двустороннее экспоненциальное (распределение Лапласа)	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x }, x \in \mathbb{R}$	$\lambda > 0$
Хи-квадрат ( $\chi^2$ -распределение, или Г-распределение с $\alpha = n/2, \beta = 2$ )	$\frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, x \geq 0$	$n = 1, 2, \dots$
Коши	$\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)}, x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Парето	$\frac{ab^\alpha}{x^{\alpha+1}}, x \geq b$	$\alpha > 0, b > 0$
Логарифмически нормальное	$\frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, x > 0$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Логистическое	$\frac{\beta e^{-(\alpha+\beta x)}}{(1 + e^{-(\alpha+\beta x)})^2}, x \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$
Гиперболическое	см. (2) в § 1d	$\alpha, \beta, \mu, \delta$ см. (5) в § 1d
Гауссовское/обратно-гауссовское	см. (14) в § 1d	$\alpha, \beta, \mu, \delta$ см. (5) в § 1d

**Замечание.** Наряду с записью  $\text{Law}(X) = \text{Law}(Y)$ , означающей совпадение распределений  $X$  и  $Y$ , часто используется запись  $X \stackrel{d}{=} Y$ , где  $\stackrel{d}{=}$  означает совпадение случайных элементов  $X$  и  $Y$  по распределению. Запись  $X^n \xrightarrow{d} X$  или  $\text{Law}(X^n) \rightarrow \text{Law}(X)$  означает, как уже отмечалось в п. 2, сходимость по распределению, т. е. слабую сходимость соответствующих распределений. (Подробнее см. [439, гл. III].) Если  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  и  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  — два случайных процесса, то запись

$$\{X_t, t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{Y_t, t \geq 0\},$$

или

$$\text{Law}(X_t, t \geq 0) = \text{Law}(Y_t, t \geq 0),$$

будет означать совпадение всех *конечномерных* распределений процессов  $X$  и  $Y$ , или, как говорят, совпадение процессов  $X$  и  $Y$  *по распределению*.

### § 1b. Процессы Леви

1. Будучи случайными процессами с независимыми приращениями, вводимые ниже процессы Леви образуют один из основных классов стохастических процессов, к которому относятся такие фундаментальные объекты теории вероятностей, как броуновское движение и процесс Пуассона.

**Определение 1.** Случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и принимающий значения в  $d$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^d$ , называется ( $d$ -мерным) *процессом Леви*, если выполнены следующие условия:

- 1)  $X_0 = 0$  (P-п. н.);
- 2) для любого  $n \geq 1$  и набора  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  величины  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  являются независимыми (свойство «независимости приращений»);
- 3) для любых  $s \geq 0$  и  $t \geq 0$  выполняется равенство

$$X_{t+s} - X_s \stackrel{d}{=} X_t - X_0$$

(свойство «стационарности», «однородности» приращений);

- 4) для каждого  $t \geq 0$  и  $\varepsilon > 0$  выполняется равенство

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0$$

(свойство «стохастической непрерывности»);

- 5) траектории  $(X_t(\omega))_{t \geq 0}$  для P-п. в.  $\omega \in \Omega$  принадлежат пространству  $D^d$ , состоящему из (векторных) функций  $f = (f_t)_{t \geq 0}$ ,  $f_t = (f_t^1, f_t^2, \dots, f_t^d)$ , каждая компонента которых  $f^i = (f_t^i)_{t \geq 0}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , непрерывна справа и имеет пределы слева при  $t > 0$ .

**Замечание 1.** Если в данном определении требовать от процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  только выполнения свойств 1–4, то можно показать, что *существует версия (модификация)*  $X' = (X'_t)_{t \geq 0}$  процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  (т. е. выполнено свойство  $P(X'_t \neq X_t) = 0, t \geq 0$ ), обладающая свойством 5. Тем самым, с точки зрения выполнения свойств 1–4 процесс  $X'$  ничем не отличается от  $X$ , но уже имеет некоторое свойство «регулярности» траекторий. Именно поэтому в определение *процессов Леви* сразу вносится (как видим, без ограничения общности) требование 5 на свойства траекторий.

**Замечание 2.** Исходя из смысла условий 1–5, можно переформулировать определение процесса Леви так: это *стохастически непрерывный процесс со стационарными независимыми приращениями, выходящий из нуля и имеющий траектории, непрерывные справа с левосторонними пределами*.

Классическим примером такого процесса является  $d$ -мерное броуновское движение  $X = (X^1, X^2, \dots, X^d)$ , состоящее из независимых между собой стандартных броуновских движений  $X^i = (X_t^i)_{t \geq 0}$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Имеет смысл дать определение (одномерного) броуновского движения непосредственно, без вложения его в общую схему процессов Леви.

**Определение 2.** Непрерывный гауссовский случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  называется (стандартным) броуновским движением или винеровским процессом, если  $X_0 = 0$  и

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_t &= 0, \\ \mathbb{E} X_s X_t &= \min(s, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Из гауссовости и свойств (1) автоматически следует, что такой процесс является процессом со стационарными независимыми (гауссовскими) приращениями. Поскольку

$$X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s), \quad t \geq s,$$

$\mathbb{E} |X_t - X_s|^3 = 3|t-s|^2$ , и из критерия Колмогорова [470, формула (7) в § 2b] следует существование непрерывной версии такого процесса. Отсюда видно, что винеровский процесс, или броуновское движение, будучи процессом Леви, имеет дополнительное важное свойство — непрерывность траекторий.

2. Процессы Леви  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  являются процессами с однородными независимыми приращениями, и поэтому их распределения полностью определяются одномерными распределениями  $P_t(dx) = \mathbb{P}(X_t \in dx)$ . (Напомним, что  $X_0 = 0$ .) Из самого определения этих процессов вытекает, что распределение  $P_t(dx)$  является при каждом  $t$  безгранично делимым.

Пусть

$$\varphi_t(\theta) = \mathbb{E} e^{i(\theta, X_t)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\theta, x)} P_t(dx) \quad (2)$$

— характеристическая функция. Тогда в соответствии с формулой (22) из § 1a (ср. также с формулой (24) из того же § 1a)

$$\begin{aligned} \varphi_t(\theta) = \exp \left\{ i(\theta, B_t) - \frac{1}{2}(\theta, C_t \theta) + \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(\theta, x)} - 1 - i(\theta, x)I(|x| \leq 1)) \nu_t(dx) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $B_t \in \mathbb{R}^d$ ,  $C_t$  — симметричная неотрицательно определенная матрица порядка  $d \times d$  и  $\nu_t(dx)$  — мера Леви (при каждом  $t$ ) со свойством (23) из § 1a.

В силу однородности и независимости приращений

$$\varphi_{t+s}(\theta) = \varphi_t(\theta) \varphi_s(\theta), \quad (4)$$

откуда следует, что  $\varphi_t(\theta)$  имеет вид

$$\varphi_t(\theta) = \exp\{t\psi(\theta)\}. \quad (5)$$

(Функцию  $\psi = \psi(\theta)$  называют *кумулянтной*.)

Поскольку триплеты  $(B_t, C_t, \nu_t)$  однозначно определяются по характеристической функции, из формулы (5) можно вывести (см., подробнее, например, [250, гл. II, 4.19]), что

$$B_t = t \cdot B, \quad C_t = t \cdot C, \quad \nu_t(dx) = t \cdot \nu(dx), \quad (6)$$

где  $B = B_1, C = C_1, \nu = \nu_1$ .

Понятно, тем самым, что в формуле (5) мы имеем

$$\psi(\theta) = i(\theta, B) - \frac{1}{2}(\theta, C\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(\theta, x)} - 1 - i(\theta, x)I(|x| \leq 1)) \nu(dx). \quad (7)$$

3. Представление (5) с кумулянтной  $\psi(\theta)$  из формулы (7) является основным средством изучения *аналитических* свойств процессов Леви. С точки же зрения их траекторных свойств важным является так называемое *каноническое представление* (подробнее см. § 3а гл. VI и [250, гл. II, § 2с]), обобщающее на случай непрерывного времени рассмотренные в гл. II, § 1b, канонические представления для стохастических последовательностей  $H = (H_n)_{n \geq 0}$  (см. формулу (16) в § 1b и § 3е гл. IV).

4. Остановимся на смысловой стороне компонент триплета  $(B_t, C_t, \nu_t)_{t \geq 0}$ . Образно говоря,  $(B_t)_{t \geq 0}$  — это «трендовая составляющая, ответственная за среднее движение процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ». Компонента  $(C_t)_{t \geq 0}$  определяет дисперсию непрерывной гауссовской составляющей процесса  $X$ , а *меры Леви*  $(\nu_t)_{t \geq 0}$  «ответственны за поведение скачкообразной компоненты процесса  $X$ , показывая, как часто появляются скачки и какова их величина».

Эта несколько вольная интерпретация должна быть, конечно, подкреплена точными утверждениями. Вот одно из них (общий случай см. в [250, гл. II, 2.21]).

Пусть процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  таков, что его «скачки» удовлетворяют условию  $|\Delta X_t| \leq 1, t \geq 0, X_0 = 0$ , и  $(B_t, C_t, \nu_t)_{t \geq 0}$  — его триплет. Тогда  $E X_t^2 < \infty, t \geq 0$ , и следующие процессы являются *мартингалами* (см. § 1с гл. II):

- (а)  $M_t \equiv X_t - B_t - X_0, t \geq 0$ ;
- (б)  $M_t^2 - C_t, t \geq 0$ ;
- (в)  $\int_0^t \int_{|x| \leq 1} g(x) \mu_t(dx) - \int_0^t \int_{|x| \leq 1} g(x) \nu_t(dx), t \geq 0$ ,

где  $\mu_t(A) = \sum_{0 < s \leq t} I(\Delta X_s \in A, \Delta X_s \neq 0)$  — мера «скачков» процесса  $X$  на временном интервале  $(0, t]$ ,  $g = g(x)$  — непрерывные функции, равные нулю в окрестности точки  $x = 0$ .

Как уже отмечено выше, классическим примером *непрерывного* процесса Леви является стандартное броуновское движение ( $B_t = 0$ ,  $C_t = t$ ,  $\nu_t \equiv 0$ ).

Обратимся теперь к примерам *разрывных* процессов Леви, что заодно даст лучшее понимание смысла меры Леви  $\nu = \nu(dx)$ .

**5. Случай конечной меры Леви:**  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ . Здесь классическим является, конечно, процесс Пуассона  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  с параметром  $\lambda > 0$ , т. е. (по определению) процесс Леви с  $X_0 = 0$ , для которого  $X_t$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda t$ :

$$P(X_t = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

В этом случае  $B_t = \lambda t$  ( $= E X_t$ ),  $C_t = 0$  и мера Леви «сидит» в одной точке:

$$\nu(dx) = \lambda I_{\{1\}}(dx).$$

Представление (3) имеет здесь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_t(\theta) &= \exp \left\{ i\theta(\lambda t) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I(x \leq 1)) \nu_t(dx) \right\} = \\ &= \exp \left\{ i\theta(\lambda t) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I(x = 1)) \lambda t I_{\{1\}}(dx) \right\} = \\ &= \exp \{ \lambda t (e^{i\theta} - 1) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Весьма примечательно, что, отправляясь от процесса Пуассона, можно получить широкий класс *чисто скачкообразных* процессов Леви.

Именно, пусть  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  — процесс Пуассона с параметром  $\lambda > 0$  и  $\xi = (\xi_j)_{j \geq 1}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (независимых также от  $N$ ), распределение которых имеет вид

$$P(\xi_j \in A) = \frac{\nu(A)}{\lambda}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

где  $\lambda = \nu(\mathbb{R}) < \infty$  и  $\nu(\{0\}) = 0$ .

Образуем процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ,  $X_0 = 0$  и

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j, \quad t > 0, \quad (9)$$

который может быть записан также в виде

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j I(\tau_j \leq t), \quad (10)$$

где  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$  — моменты скачков процесса  $N = (N_t)_{t \geq 0}$ .

Прямой подсчет показывает, что

$$\begin{aligned}\varphi_t(\theta) &= \mathbb{E} e^{i\theta X_t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{i\theta X_t} | N_t = k) \mathbb{P}(N_t = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E} e^{i\theta \xi_1})^k \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} = \exp \left\{ t \int (e^{i\theta x} - 1) \nu(dx) \right\}.\end{aligned}\quad (11)$$

Процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , образованный согласно формуле (10), называется *составным (compound) процессом Пуассона*. Нетрудно видеть, что этот процесс является процессом Леви. «Обычный» процесс Пуассона получается, если положить  $\xi_j \equiv 1$ ,  $j \geq 1$ .

**6. Случай бесконечной меры Леви:**  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ . Простейший пример процесса Леви с такой мерой  $\nu$ , что  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ , можно получить следующим образом.

Пусть  $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$  — последовательность положительных чисел,  $\beta = (\beta_k)_{k \geq 1}$  — такая последовательность чисел  $\beta_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k^2 < \infty. \quad (12)$$

Положим

$$\nu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k I_{\{\beta_k\}}(dx) \quad (13)$$

и обозначим через  $N^{(k)} = (N_t^{(k)})_{t \geq 0}$ ,  $k \geq 1$ , последовательность независимых процессов Пуассона с параметрами  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$ , соответственно.

Если положить

$$X_t^{(n)} = \sum_{k=1}^n \beta_k (N_t^{(k)} - \lambda_k t), \quad (14)$$

то нетрудно видеть, что при каждом  $n \geq 1$  процесс  $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{t \geq 0}$  является процессом Леви с мерой Леви

$$\nu^{(n)}(dx) = \sum_{k=1}^n \lambda_k I_{\{\beta_k\}}(dx) \quad (15)$$

и

$$\varphi_t^{(n)}(\theta) = \mathbb{E} e^{i\theta X_t^{(n)}} = \exp \left\{ t \int (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) \nu^{(n)}(dx) \right\}. \quad (16)$$

Предельный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ,

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (N_t^{(k)} - \lambda_k t), \quad (17)$$



понимаемый как  $L^2$ -предел величин  $X_t^{(n)}$ ,  $t \geq 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ , также является процессом Леви с мерой Леви, задаваемой формулой (13).

**Замечание 3.** Выполнение здесь свойства 5 из определения 1 вытекает из того, что  $X^{(n)}$  являются квадратично-интегрируемыми мартингалами, для которых в силу неравенства Дуба (см. формулу (36) в § 3b, а также [250, гл. I, 1.43] или [439, гл. VII, § 3])  $E \max_{s \leq t} |X_s^{(n)} - X_s|^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Замечание 4.** Поскольку  $\nu(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ ,  $\nu(\{0\}) = 0$  и

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \nu(dx) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k^2 < \infty,$$

мера  $\nu = \nu(dx)$ , определенная в формуле (13), удовлетворяет всем условиям, предъявляемым к мере Леви (см. формулы (22)–(23) из § 1a).

Если  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$ , но выполнено условие (12), то получаем пример процесса Леви, у которого мера Леви  $\nu$  такова, что  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ .

Приведем еще один известный «явный» случай процесса Леви с  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ . Мы имеем в виду так называемый  $\Gamma$ -процесс (Gamma process)  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , у которого  $X_0 = 0$  и (гамма-) распределение вероятностей  $P(X_t \leq x)$  имеет плотность (ср. с табл. 7 в § 1a)

$$p_t(x) = \frac{x^{t-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(t) \beta^t} I_{(0, \infty)}(x). \quad (18)$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_t(\theta) = (1 - i\theta\beta)^{-t}. \quad (19)$$

Покажем, что характеристическая функция  $\varphi_t(\theta)$  может быть представлена в виде

$$\varphi_t(\theta) = \exp \left\{ t \int_0^{\infty} (e^{i\theta x} - 1) \frac{e^{-x/\beta}}{x} dx \right\}, \quad (20)$$

из которого следует, что  $\nu_t(dx) = t\nu(dx)$ , где

$$\nu(dx) = I_{(0, \infty)}(x) \frac{e^{-x/\beta}}{x} dx. \quad (21)$$

Ясно, что здесь  $\nu(0, \infty) = \infty$ , но

$$\int_0^{\infty} (x^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty. \quad (22)$$

Обратимся к доказательству представления (20).

Рассмотрим преобразование Лапласа

$$\begin{aligned}
 L_t(u) &= \mathbf{E} e^{-uX_t} = \int_0^\infty e^{-ux} p_t(x) dx = (1 + \beta u)^{-t} = \\
 &= \exp\{-t \ln(1 + \beta u)\} = \exp\left\{-t \int_0^u \frac{dy}{\frac{1}{\beta} + y}\right\} = \\
 &= \exp\left\{-t \int_0^u dy \int_0^\infty e^{-x/\beta - yx} dx\right\} = \\
 &= \exp\left\{t \int_0^\infty (e^{-ux} - 1) \frac{e^{-x/\beta}}{x} dx\right\}.
 \end{aligned}$$

Аналитическое продолжение в комплексную полуплоскость  $\{z = a + ib, a \leq 0\}$  приводит к равенству

$$\int_{\mathbb{R}} e^{zx} p_t(dx) = \exp\left\{t \int_0^\infty (e^{zx} - 1) \frac{e^{-x/\beta}}{x} dx\right\},$$

из которого, полагая  $z = i\theta$ , получим требуемое представление (20).

7. В связи с «явными» представлениями (10), (14) и (17) некоторых (скачкообразных) процессов Леви мы получаем способ их *моделирования*, основанный на моделировании лишь случайных величин  $\xi_j$ ,  $\beta_k$  и экспоненциально распределенных величин  $\Delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$  (промежутков между двумя скачками в моменты  $\tau_{i-1}$  и  $\tau_i$  процесса Пуассона). В свою очередь, при моделировании безгранично делимых случайных величин важное значение приобретает вопрос об их представимости в виде функций от «простых», «стандартных» случайных величин. Вот пример, иллюстрирующий возникающие здесь возможности: пусть  $X$  и  $Y$  — две независимые случайные величины, причем  $X \geq 0$  (и произвольна), а  $Y$  имеет экспоненциальное распределение. Тогда, как показал Ч. Голди (Ch. Goldie), произведение  $XY$  является безгранично делимой случайной величиной.

В следующем параграфе мы увидим, как из просто устроенных процессов можно их «композицией» получать устойчивые процессы.

### § 1с. Устойчивые процессы

1. Начнем со случая *действительного* процесса  $X = (X_t)_{t \in T}$  с (произвольным) параметрическим множеством  $T$ , заданного на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

Обобщая определение устойчивого случайного вектора (см. определение 6 в § 1а), естественным образом приходим к следующему понятию.

**Определение 1.** Действительный случайный процесс  $X = (X_t)_{t \in T}$  называется *устойчивым*, если для любых  $k \geq 1$  и  $t_1, \dots, t_k$  из  $T$  случайные векторы

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  являются устойчивыми, т. е. все конечномерные распределения процесса  $X$  являются устойчивыми.

Нетрудно заметить, что если все конечномерные распределения устойчивы, то из соображений согласованности этих распределений вытекает, что у них один и тот же индекс устойчивости  $\alpha$ . Это объясняет, почему такие (устойчивые) процессы именуют  $\alpha$ -устойчивыми, когда желают подчеркнуть конкретное значение индекса устойчивости  $\alpha$ .

В дальнейшем для нас основной интерес будут представлять те  $\alpha$ -устойчивые процессы  $X = (X_t)_{t \in T}$ , которые в то же самое время являются процессами Леви (§ 1b). Такие процессы естественно называть « $\alpha$ -устойчивыми процессами Леви».

В § 1a (п. 10) приводились два равносильных определения устойчивых невырожденных случайных векторов (см. формулы (30) и (31) в § 1a). Применительно к устойчивым (одномерным) процессам  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , являющимся в то же время процессами Леви, отмеченная равносильность двух определений приводит к следующему предложению: невырожденный (см. далее определение 2) одномерный процесс Леви  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  является  $\alpha$ -устойчивым процессом ( $\alpha \in (0, 2]$ ) тогда и только тогда, когда для любого  $a > 0$  найдется такое число  $D$  (зависящее, вообще говоря, от  $a$ ), что

$$\{X_{at}, t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{a^{1/\alpha} X_t + Dt, t \geq 0\}. \quad (1)$$

Приведем теперь ряд определений, относящихся к многомерным процессам  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ .

**Определение 2.** Случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  со значениями в  $\mathbb{R}^d$  называется *вырожденным*, если  $X_t = \gamma t$  (П.-п. н.) для всех  $t \geq 0$  с некоторым вектором  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ . В противном случае процесс  $X$  называется *невырожденным*.

**Определение 3.** Невырожденный случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  со значениями в  $\mathbb{R}^d$  называется  $\alpha$ -устойчивым процессом Леви ( $\alpha \in (0, 2]$ ), если

1)  $X$  есть процесс Леви

и

2) для каждого  $a > 0$  найдется такой вектор  $D \in \mathbb{R}^d$  (зависящий, вообще говоря, от  $a$ ), что

$$\{X_{at}, t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{a^{1/\alpha} X_t + Dt, t \geq 0\}, \quad (2)$$

или, что равносильно,

$$\text{Law}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Law}(a^{1/\alpha} X_t + Dt, t \geq 0). \quad (3)$$

**Определение 4.**  $\alpha$ -устойчивый процесс Леви  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  называется *строго  $\alpha$ -устойчивым процессом Леви*, если в формулах (2), (3) вектор  $D$  равен 0, т. е.

$$\{X_{at}, t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{a^{1/\alpha} X_t, t \geq 0\}, \quad (4)$$

или, что равносильно,

$$\text{Law}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Law}(a^{1/\alpha} X_t, t \geq 0). \quad (5)$$

**Замечание 1.** Иногда (см., например, [423]), дается такое определение устойчивости векторного случайного процесса Леви  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ : для любого  $a > 0$  найдутся константа  $c$  и вектор  $D \in \mathbb{R}^n$ , для которых

$$\{X_{at}, t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{cX_t + Dt, t \geq 0\}, \quad (6)$$

или, что равносильно,

$$\text{Law}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Law}(cX_t + Dt, t \geq 0). \quad (7)$$

(Если  $D = 0$ , то говорят о строгой устойчивости.) Весьма замечательно, что, как и в случае устойчивых величин и векторов, для невырожденных процессов Леви константа  $c$  имеет вид  $c = a^{1/\alpha}$ , где  $\alpha$  — некоторый универсальный, т. е. не зависящий от  $a$ , параметр со значениями в  $(0, 2]$ . Этот результат, доказательство которого см., например, в [423], объясняет данные выше определения 3 и 4, в которых явно присутствует множитель  $a^{1/\alpha}$ .

**Замечание 2.** Полезно заметить, что условие

$$\text{Law}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Law}(cX_t, t \geq 0)$$

есть не что иное, как свойство *автомодельности*. Таким образом,  $\alpha$ -устойчивые процессы Леви, для которых  $c = a^{1/\alpha}$ , являются автомодельными. При этом значение  $\mathbb{H} = 1/\alpha$  носит название *показателя (параметра) Харста*. См. подробнее § 2с.

**Замечание 3.** Если процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  является одновременно и  $\alpha$ -устойчивым ( $0 < \alpha \leq 2$ ), и удовлетворяющим свойству автомодельности

$$\text{Law}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Law}(a^{\mathbb{H}} X_t, t \geq 0), \quad a > 0,$$

но не является процессом Леви, то формула  $\mathbb{H} = 1/\alpha$  уже не верна. У таких процессов допустимыми могут быть разные пары  $(\alpha, \mathbb{H})$ , для которых

$$\alpha < 1, \quad 0 < \mathbb{H} \leq 1/\alpha,$$

или

$$\alpha \geq 1, \quad 0 < \mathbb{H} \leq 1.$$

(См. [418, следствие 7.1.11 и рис. 7.1].)

2. Поскольку  $\alpha$ -устойчивые процессы являются частным случаем процессов Леви  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , для характеристических функций  $\varphi_t(\theta) = \mathbb{E} e^{i(\theta, X_t)}$  которых имеет место представление  $\varphi_t(\theta) = \exp\{t\psi(\theta)\}$  с кумулянтной  $\psi(\theta)$ , определяемой формулой (7) из § 1b, естественно поинтересоваться, каковы  $B$ ,

$C$  и  $\nu$  для этих ( $\alpha$ -устойчивых) процессов. Особый интерес представляет знание меры Леви  $\nu = \nu(dx)$ , «ответственной» за распределение величин скачков  $\Delta X_t \equiv X_t - X_{t-}$  процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ .

Приведем, следуя изложению [423], основные результаты в этом направлении.

**Теорема 1.** Пусть  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  — невырожденный процесс Леви в  $\mathbb{R}^d$  с триплетом  $(B, C, \nu)$ .

1. Процесс  $X$  является 2-устойчивым (процессом Леви) в том и только том случае, когда  $\nu = 0$ , т. е. в том и только том случае, когда этот процесс является гауссовским.
2. Процесс  $X$  является строго 2-устойчивым (процессом Леви) в том и только том случае, когда он является гауссовским с нулевым средним ( $B = 0$ ).

**Теорема 2.** Пусть  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  — невырожденный процесс Леви в  $\mathbb{R}^d$  с триплетом  $(B, C, \nu)$ . Пусть  $0 < \alpha < 2$ . Тогда процесс  $X$  является  $\alpha$ -устойчивым (процессом Леви) в том и только том случае, когда  $C = 0$  и мера Леви  $\nu$  имеет следующий вид:

$$\nu(A) = \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty I_A(r\xi) r^{-(1+\alpha)} dr, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \quad (8)$$

с некоторой ненулевой конечной мерой  $\lambda$  на  $S = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ .

Кумулянта  $\psi(\theta)$  такого процесса имеет следующую структуру:

$$\psi(\theta) = i(\theta, B) + \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty (e^{i(\theta, r\xi)} - 1 - i(\theta, r\xi) I_{(0,1]}(r)) r^{-(1+\alpha)} dr. \quad (9)$$

Интересно отметить, что в случае  $0 < \alpha < 2$  радиальная часть меры Леви имеет вид  $r^{-(1+\alpha)} dr$ . Если  $\alpha$  убывает, то  $r^{-(1+\alpha)}$  убывает при  $0 < r < 1$  и возрастает при  $1 < r < \infty$ . Тем самым, можно сказать, что при  $\alpha$ , близких к нулю, в траекториях процесса преобладают большие скачки; если же  $\alpha$  близко к двум, то процесс движется маленькими скачками. Наглядно это хорошо иллюстрируется компьютерными рисунками, приведенными в книге [253].

**Теорема 3.** Пусть  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  — невырожденный процесс Леви в  $\mathbb{R}^d$  с триплетом  $(B, C, \nu)$ .

1. Пусть  $\alpha \in (0, 1)$ . Процесс  $X$  является строго  $\alpha$ -устойчивым (процессом Леви) в том и только том случае, когда кумулянта имеет вид

$$\psi(\theta) = \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty (e^{i(\theta, r\xi)} - 1) r^{-(1+\alpha)} dr \quad (10)$$

с некоторой ненулевой конечной мерой  $\lambda$  на  $S$ , т. е. в том и только том случае, когда  $C = 0$  и «сносовая компонента» (drift) равна нулю (см. формулу (27) в § 1а).

2. Пусть  $\alpha \in (1, 2)$ . Процесс  $X$  является строго  $\alpha$ -устойчивым (процессом Леви) в том и только том случае, когда  $C = 0$  и «центр» (см. формулу (29) в § 1а) равен нулю (т. е.  $\mathbf{E} X = 0$ ), или, что равносильно, в том и только том случае, когда кумулянта имеет вид

$$\psi(\theta) = \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty (e^{i(\theta, r\xi)} - 1 - i(\theta, r\xi)) r^{-(1+\alpha)} dr \quad (11)$$

с некоторой ненулевой конечной мерой  $\lambda$  на  $S$ .

3. Пусть  $\alpha = 1$ . Процесс  $X$  является строго 1-устойчивым (процессом Леви) в том и только том случае, когда

$$\psi(\theta) = i(\theta, B) + \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty (e^{i(\theta, r\xi)} - 1 - i(\theta, r\xi)I_{(0,1]}) r^{-2} dr \quad (12)$$

с некоторой конечной мерой  $\lambda$  на  $S$  и константой  $B$ , удовлетворяющими условиям

$$\int_S x \lambda(d\xi) = 0 \quad (13)$$

и  $\lambda(S) + |B| > 0$ .

**Следствие.** Пусть  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  есть  $\alpha$ -устойчивый процесс Леви в  $\mathbb{R}^d$ . Если  $\alpha \neq 1$ , то всегда найдется такая константа  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ , что центрированный процесс  $X = (X_t - \gamma t)_{t \geq 0}$  будет уже строго  $\alpha$ -устойчивым.

Если же  $\alpha = 1$  и выполнено условие (13), то и сам процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  является строго 1-устойчивым.

В случае  $d = 1$  можно явно вычислить интегралы, входящие в представления кумулянт (9)–(11), и получить (ср. с формулой (6) в § 1а), что для  $0 < \alpha \leq 2$  справедливо представление

$$\psi(\theta) = \begin{cases} i\mu\theta - \sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\beta (\text{Sgn } \theta) \text{tg } \frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} i\mu\theta - \sigma |\theta| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{Sgn } \theta) \ln |\theta|\right), & \alpha = 1, \end{cases} \quad (15)$$

с такими константами  $\beta$ ,  $\sigma$  и  $\mu$ , что  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы (ненулевой)  $\alpha$ -устойчивый процесс Леви был строгим, состоит в том, что

$$\mu = 0, \quad \text{если } \alpha \neq 1,$$

и

$$\beta = 0, \quad \sigma + |\mu| > 0, \quad \text{если } \alpha = 1.$$

3. Обратимся к формулам (2) и (3) в определении  $\alpha$ -устойчивого процесса. Формула (1) при  $t = 1$  принимает следующий вид:

$$X_\alpha \stackrel{d}{=} a^{1/\alpha} X_1 + D_\alpha, \quad (16)$$

где  $D_\alpha$  — некоторая константа. Имея представления (14), (15) для характеристической функции этого процесса, находим

$$D_\alpha = \begin{cases} (a - a^{1/\alpha})\mu, & \alpha \neq 1, \\ \beta \frac{2}{\pi} \sigma^\alpha a \ln a, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (17)$$

4. Как ясно из изложенного выше материала, оперирование с распределениями устойчивых процессов сильно затруднено, поскольку явный вид устойчивых плотностей известен всего лишь в трех случаях (см. п. 5 в § 1а).

Однако в ряде случаев можно указать, как получать устойчивые процессы, например, из броуновского движения с помощью *случайной* (не зависящей от этого движения) *замены времени*.

Приведем один интересный результат в этом направлении, который дает возможность моделирования симметричных  $\alpha$ -устойчивых распределений с помощью *трех* независимых случайных величин: *равномерно распределенной, гауссовской и экспоненциально распределенной*.

Пусть  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  — симметричный  $\alpha$ -устойчивый процесс Леви с характеристической функцией

$$\varphi_t(\theta) = \mathbb{E} e^{i\theta Z_t} = e^{-t|\theta|^\alpha}, \quad (18)$$

где  $0 < \alpha < 2$ .

Из изложенного ниже будет следовать, что процесс  $Z$  может быть реализован в виде

$$Z_t = B_{T_t}, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

где  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — броуновское движение,  $\mathbb{E} B_t = 0$ ,  $\mathbb{E} B_t^2 = 2t$  и  $T = (T_t)_{t \geq 0}$  — некоторый неотрицательный неубывающий  $\alpha/2$ -устойчивый случайный процесс, носящий название *устойчивого субординатора* (stable subordinator). О процессе  $Z$ , получаемом посредством преобразования (19), говорят, что он образован из броуновского движения с помощью *случайной замены времени* (субординацией)  $T = (T_t)_{t \geq 0}$ .

Необходимый для представления (19) процесс  $T = (T_t)_{t \geq 0}$  строится следующим образом.

Пусть  $U^{(\alpha)} = U^{(\alpha)}(\omega)$  — неотрицательная устойчивая случайная величина с преобразованием Лапласа

$$\mathbb{E} e^{-\lambda U^{(\alpha)}} = e^{-\lambda^\alpha}, \quad \lambda > 0, \quad (20)$$

где  $0 < \alpha < 1$ .

Заметим, что если  $U^{(\alpha)}, U_1, \dots, U_n$  — независимые одинаково распределенные случайные величины, то случайная величина

$$n^{-1/\alpha} \sum_{j=1}^n U_j \quad (21)$$

имеет то же самое преобразование Лапласа, что и  $U^{(\alpha)}$ , и, значит,  $U^{(\alpha)}$  действительно есть устойчивая случайная величина.

Пусть  $0 < \alpha < 2$ . Построим неотрицательный неубывающий  $\alpha/2$ -устойчивый процесс  $T = (T_t)_{t \geq 0}$  таким образом, что  $\text{Law}(T_1) = \text{Law}(U^{(\alpha/2)})$ .

В силу свойства «автомодельности» (5) имеем

$$\text{Law}(T_t) = \text{Law}(t^{2/\alpha} T_1) = \text{Law}(t^{2/\alpha} U^{(\alpha/2)}), \quad (22)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{i\theta Z_t} &= \mathbb{E} e^{i\theta B_{T_t}} = \mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{i\theta B_{T_t}} | T_t)] = \\ &= \mathbb{E} e^{-\frac{\theta^2 2T_t}{2}} = \mathbb{E} e^{-\theta^2 T_t} = \mathbb{E} e^{-\theta^2 t^{2/\alpha} U^{(\alpha/2)}} = \\ &= e^{-(\theta^2 t^{2/\alpha})^{\alpha/2}} = e^{-t|\theta|^\alpha}, \end{aligned} \quad (23)$$

откуда следует требуемое представление (19).

Пусть  $p = p(x; \alpha)$  — плотность распределения вероятностей случайной величины  $U = U^{(\alpha)}$  с индексом  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Согласно работам [238] и [264], для этой плотности, сосредоточенной на множестве  $x \geq 0$ , известно следующее «явное» представление:

$$p(x; \alpha) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^\pi a(z; \alpha) \exp \left\{ - \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} a(z; \alpha) \right\} dz, \quad (24)$$

где

$$a(z; \alpha) = \left( \frac{\sin \alpha z}{\sin z} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\sin(1-\alpha)z}{\sin \alpha z}. \quad (25)$$

Как было замечено Г. Рубиным (Н. Rubin; см. [264, следствие 4.1]), плотность  $p(x; \alpha)$  является плотностью распределения случайной величины

$$\zeta = \left( \frac{a(\xi; \alpha)}{\eta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad (26)$$

где  $a = a(z; \alpha)$  задается формулой (25),  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные величины,  $\xi$  имеет равномерное распределение на  $[0, \pi]$ , а  $\eta$  — экспоненциальное распределение с единичным параметром.

**Замечание.** Проверка того, что случайная величина  $\zeta$  имеет плотность  $p(x; \alpha)$ , не представляет трудностей. Действительно, пусть

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(z; \alpha) \exp(-\alpha a(z; \alpha)) dz.$$

Очевидно, случайная величина  $\eta/a(\xi; \alpha)$  имеет свою плотностью функцию  $h = h(x)$ . Простая замена переменных тогда показывает, что  $p(x; \alpha)$  есть плотность распределения вероятностей величины  $\zeta$ .

Тем самым,

$$\text{Law}(T_1) = \text{Law}(U^{(\alpha/2)}) = \text{Law} \left( \left( \frac{a(\xi; \alpha/2)}{\eta} \right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \right), \quad (27)$$

и в силу формулы (22),

$$\text{Law}(T_t) = \text{Law}(t^{2/\alpha} T_1). \quad (28)$$



Из соотношений (27) и (28), обозначая через  $\gamma(0, 2)$  гауссовскую случайную величину с нулевым средним и дисперсией, равной 2, получаем

$$\begin{aligned} \text{Law}(Z_t - Z_s) &= \text{Law}(B_{T_t} - B_{T_s}) = \text{Law}(B_{T_t - T_s}) = \\ &= \text{Law}(\sqrt{T_t - T_s} \gamma(0, 2)) = \text{Law}(\sqrt{T_t - s} \gamma(0, 2)) = \\ &= \text{Law}((t - s)^{1/\alpha} \sqrt{T_1} \gamma(0, 2)) = \\ &= \text{Law}\left((t - s)^{1/\alpha} \left(\frac{a(\xi; \alpha/2)}{\eta}\right)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}} \gamma(0, 2)\right). \end{aligned}$$

Это представление для  $\text{Law}(Z_t - Z_s)$  показывает, как с помощью моделирования *трех* независимых случайных величин  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\gamma = \gamma(0, 2)$  можно получать выборку наблюдений над приращениями  $Z_t - Z_s$  симметричного  $\alpha$ -устойчивого случайного процесса.

**Замечание.** Общие результаты относительно получения процессов Леви с помощью субординаторов из других (более просто устроенных) процессов Леви приведены в работах [47], [409] и [483].

Процесс  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  применяется в работе [327] для описания поведения цен («модель Мандельброта—Тейлора»). Интересно отметить, что если  $t$  рассматривается как реальное «физическое» время, то  $T_t$  можно интерпретировать как «операционное» время (см. § 3d в гл. IV) или как случайное «число переходов» до момента времени  $t$ . (Эта несколько вольная интерпретация навеяна аналогией с суммами  $\sum_{k=1}^{T_n} \xi_k$  случайного числа  $T_n$  случайных величин  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$ .)

Подчеркнем, что при каждом  $t$  распределение величины  $Z_t = B_{T_t}$  есть смесь гауссовских распределений. По-другому можно сказать, что распределение величин  $Z_t$  является *условно-гауссовским*. Эти распределения уже рассматривались выше (см. § 1d, § 3a в гл. II). Далее, в § 1d, будут рассмотрены другие модели, основанные на «гиперболических» распределениях, которые также являются условно-гауссовскими и относятся к классу безгранично делимых распределений, не будучи устойчивыми. Все это говорит о том, что поиски «правильного» описания эволюции цен финансовых индексов идут, в некотором смысле, в направлении обращения к условно-гауссовским распределениям и процессам.

5. В заключение рассмотрим три случая устойчивых процессов Леви, которые соответствуют тем трем случаям (см. п. 5 в § 1a), где известен явный вид устойчивых плотностей.

**Пример 1.** Стандартное броуновское движение  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  в  $\mathbb{R}^d$  является строго 2-устойчивым процессом Леви. Для него вероятностное распределение  $P_1 = P_1(dx)$  величины  $X_1$  имеет следующий вид:

$$P_1(dx) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2} dx, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (29)$$

а характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_{X_t}(\theta) = \mathbf{E} e^{i(\theta, X_t)} = e^{-\frac{t}{2}|\theta|^2}, \quad (30)$$

и (ср. с формулой (14)) непосредственно видно, что

$$\varphi_{X_{at}}(\theta) = e^{-\frac{at}{2}|\theta|^2} = e^{-\frac{t}{2}|\sqrt{a}\theta|^2} = \varphi_{\sqrt{a}X_t}(\theta). \quad (31)$$

**Пример 2.** Стандартный процесс Коши в  $\mathbb{R}^d$  является строго 1-устойчивым процессом Леви, и для него

$$P_1(dx) = \pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) (1+|x|^2)^{-\frac{d+1}{2}} dx, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (32)$$

Характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_{X_t}(\theta) = e^{-t|\theta|}, \quad (33)$$

и видно (ср. с формулой (14)), что

$$\varphi_{X_{at}}(\theta) = e^{-at|\theta|} = e^{-t|a\theta|} = \varphi_{aX_t}(\theta). \quad (34)$$

**Пример 3.** Для одностороннего строго 1/2-устойчивого процесса Леви на  $(0, \infty)$  имеем

$$P_1(dx) = (2\pi)^{-1/2} I_{(0,\infty)}(x) e^{1/(2x)} x^{-3/2} dx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (35)$$

и

$$\varphi_{X_t}(\theta) = \exp\{-t\sqrt{|\theta|} (1 - i \operatorname{Sgn} \theta)\}. \quad (36)$$

Непосредственно видим, что

$$\begin{aligned} \varphi_{aX_t}(\theta) &= \exp\{-at\sqrt{|\theta|} (1 - \operatorname{Sgn} \theta)\} = \\ &= \exp\{-t\sqrt{|a^2\theta|} (1 - i \operatorname{Sgn}(a^2\theta))\} = \varphi_{a^2X_t}(\theta). \end{aligned} \quad (37)$$

Этими примерами, в сущности, и исчерпываются все те известные случаи, когда одномерные распределения для  $X_1$ , а значит, и для  $X_t$ , выражаются в элементарных функциях.

## § 1d. Гиперболические распределения и процессы

1. В 1977 году О. Барндорфф-Нильсен (О. Barndorff-Nielsen) [21] ввел интересный во многих отношениях класс распределений — так называемые *обобщенные гиперболические распределения*. Введение этих распределений мотивировалось целью дать адекватное объяснение некоторым эмпирическим закономерностям в геологии; впоследствии эти распределения нашли свое применение в геоморфологии, теории турбулентности и т. д., а также и в финансовой математике.

Обобщенные гиперболические распределения, не будучи устойчивыми, характеризуются, так же как и устойчивые, *четырьмя* параметрами, имеющими (см. п. 2) сходный смысл.

Из класса этих распределений мы выделяем два наиболее употребительные:

- 1) собственно *гиперболическое* распределение;
- 2) *гауссовское/обратно-гауссовское* распределение.

Следует отметить, что эти распределения являются *смесью* гауссовских. Поэтому они естественным образом относятся к классу моделей, основанных на *смесях* гауссовских распределений, на идеях использования *условно-гауссовских* распределений. Эти распределения являются и безгранично делимыми, образуя, тем самым, довольно-таки широкий подкласс класса безгранично делимых распределений. С точки зрения поведения «хвостов» эти распределения занимают как бы промежуточное положение между устойчивыми распределениями с индексом  $\alpha < 2$  и гауссовскими распределениями ( $\alpha = 2$ ): их «хвосты» убывают быстрее, нежели для устойчивых распределений ( $\alpha < 2$ ), но медленнее, нежели для гауссовских.

2. Происхождение термина «гиперболический» связано со следующим обстоятельством.

У *нормальной* (гауссовской) плотности

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

график логарифма  $\ln \varphi(x)$  является *параболой*. У *гиперболического* же распределения его плотность

$$h_1(x) = C_1(\alpha, \beta, \delta) \exp\{-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)\} \quad (2)$$

такова, что график логарифма  $\ln h_1(x)$  является *гиперболой*

$$f(x) = \ln C_1(\alpha, \beta, \delta) - \alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu) \quad (3)$$

с асимптотами

$$a(x) = -\alpha|x-\mu| + \beta(x-\mu). \quad (4)$$

В определении (2) предполагается, что *четыре* параметра  $(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ , определяющие гиперболическое распределение, таковы, что

$$\alpha > 0, \quad 0 \leq |\beta| < \alpha, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \delta \geq 0. \quad (5)$$

Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  «ответственны» за форму плотности,  $\mu$  — параметр расположения,  $\delta$  — масштабный параметр. Константа имеет вид

$$C_1(\alpha, \beta, \delta) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}, \quad (6)$$

где  $K_1(x)$  — модифицированная функция Бесселя третьего рода с индексом 1 (см. [23]).

Для описания гиперболического распределения часто используют другую параметризацию, полагая

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \gamma), \quad \beta = \frac{1}{2}(\varphi - \gamma), \quad (7)$$

так что  $\varphi\gamma = \alpha^2 - \beta^2$ .

В этих новых обозначениях плотность  $h_1(x) \equiv h_1(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ , обозначаемая  $h_2(x) \equiv h_2(x; \varphi, \gamma, \mu, \delta)$ , будет иметь следующий вид:

$$h_2(x) = C_2(\varphi, \gamma, \delta) \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi + \gamma)\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \frac{1}{2}(\varphi - \gamma)(x - \mu)\right\}, \quad (8)$$

где

$$C_2(\varphi, \gamma, \delta) = \frac{\omega}{\delta \chi K_1(\delta \chi)},$$

$\chi = (\varphi\gamma)^{1/2}$ ,  $\omega^{-1} = (\varphi^{-1} + \gamma^{-1})$ . (Такая параметризация используется в работе [289].)

Из формулы (8) видно, что если случайная величина  $X$  имеет плотность  $h_2(x; \varphi, \gamma, \mu, \delta)$ , то величина  $Y = (X - a)/b$  для  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$  имеет плотность  $h_2(x; b\varphi, b\gamma, \delta/b, (\mu - a)/b)$ . Тем самым, гиперболическое распределение инвариантно относительно сдвига и изменения масштаба.

Из формулы (8) видно также, что плотность  $h_2(x)$  положительна для всех  $x \in \mathbb{R}$  и «хвосты» у  $h_2(x)$  убывают экспоненциально со «скоростью»  $\varphi$  при  $x \rightarrow -\infty$  и «скоростью»  $\gamma$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Если  $\delta \rightarrow \infty$ ,  $\delta/\chi \rightarrow \sigma^2$ ,  $\varphi - \gamma \rightarrow 0$ , то

$$h_2(x; \varphi, \gamma, \mu, \delta) \rightarrow \varphi(x),$$

где  $\varphi(x) \equiv \varphi(x; \mu, \sigma^2)$  — нормальная плотность.

Если  $\delta \rightarrow 0$ , то в пределе получаем распределение Лапласа (несимметричное, если  $\varphi \neq \gamma$ ) с плотностью

$$\lambda(x; \varphi, \gamma, \mu) = \omega^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi + \gamma)|x - \mu| + \frac{1}{2}(\varphi - \gamma)(x - \mu)\right\}.$$

Если ввести параметры

$$\xi = (1 + \delta\sqrt{\varphi\gamma})^{-1/2} \quad \left(= (1 + \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^{-1/2}\right),$$

$$\chi = (\varphi - \gamma)(\varphi + \gamma)^{-1}\xi \quad \left(= \frac{\beta}{\alpha}\xi\right),$$

то можно заметить, что их значение не изменится, если от случайной величины  $X$  с гиперболической плотностью  $h_2(x; \varphi, \gamma, \mu, \delta)$  перейти к случайной величине  $Y = X - a$ , имеющей, согласно сказанному выше, плотность  $h_2(x; \varphi, \gamma, \mu - a, \delta)$ . Параметры  $\xi$  и  $\chi$  имеют смысл параметров «скошенности» (skewness) и «вытянутости» (kurtosis) и служат хорошими показателями отклонения от нормальности. (Подробнее см. § 2b гл. IV.)

Отметим, что область значений параметров  $\chi$  и  $\xi$  есть внутренность треугольника

$$\nabla = \{(\chi, \xi): 0 \leq |\chi| < \xi < 1\}$$

(см. рис. 26;  $\mathcal{N}$  — нормальное распределение,  $\mathcal{E}$  — экспоненциальное,  $\mathcal{L}$  — распределение Лапласа).

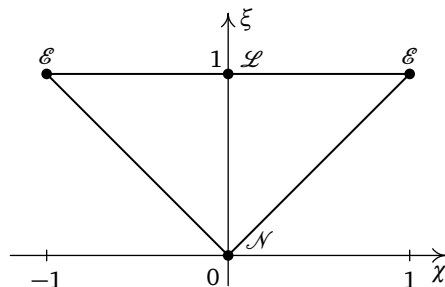


Рис. 26

Граничная точка  $(0, 0) \notin \nabla$  соответствует нормальному распределению; точки  $(-1, 1)$  и  $(1, 1)$ , также не входящие в  $\nabla$ , отвечают экспоненциальному распределению, а точка  $(0, 1) \notin \nabla$  — распределению Лапласа. При  $\chi \rightarrow \pm \xi$  в пределе получаем (см. [21]–[23], [25], [26]) так называемое обобщенное обратное гауссовское распределение (generalized inverse Gaussian distribution).

В работах [21]–[23], [25], [26] отмечается, что гиперболическое распределение является *смесью* гауссовских: если случайная величина  $X$  имеет плотность  $h_1(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ , то

$$\text{Law } X = \mathbf{E}'_{\sigma^2} \mathcal{N}(\mu + \beta \sigma^2, \sigma^2), \quad (9)$$

где  $\mathbf{E}'_{\sigma^2}$  означает усреднение по параметру  $\sigma^2$ , имеющему обратного-гауссовское распределение с плотностью

$$p'_{\sigma^2}(x) = \frac{\sqrt{a/b}}{2K_1(\sqrt{ab})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right\}, \quad (10)$$

где  $a = \alpha^2 - \beta^2$ ,  $b = \delta^2$ .

3. Обратимся теперь к другому представителю класса обобщенных гиперболических распределений, введенных О. Барндорфф-Нильсеном в работе [21], — так называемому *гауссовскому/обратно-гауссовскому* (GIG — Gaussian/Inverse Gaussian) распределению. (Позднее О. Барндорфф-Нильсен [22] стал называть эти распределения «нормальными обратно-гауссовскими распределениями» — normal inverse Gaussian distribution.)

Если следовать условной записи (9), то *гауссовское/обратно-гауссовское распределение*  $\text{Law } Y$  случайной величины  $Y$  определяется следующим обра-

ЗОМ:

$$\text{Law } Y = E''_{\sigma^2} \mathcal{N}(\mu + \beta \sigma^2, \sigma^2); \quad (11)$$

здесь усреднение  $E''_{\sigma^2}$  нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu + \beta \sigma^2, \sigma^2)$  производится по обратно-гауссовскому распределению с плотностью

$$p''_{\sigma^2}(x) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} e^{\sqrt{ab}} \frac{1}{x^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right\}, \quad (12)$$

где  $a = \alpha^2 - \beta^2$ ,  $b = \delta^2$ . (Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  и  $\delta$  такие же, как и в формуле (5).)

Интересно отметить, что если  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  — стандартное броуновское движение (винеровский процесс) и

$$T(t) = \inf\{s \geq 0: W_s + \sqrt{a}s \geq \sqrt{b}t\}$$

— момент первого достижения процессом  $(W_s + \sqrt{a}s)_{s \geq 0}$  уровня  $\sqrt{b}t$ , то  $T(1)$  имеет в точности распределение с плотностью (12). Тем самым, если  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — стандартное броуновское движение, не зависящее от  $W$ , то распределение  $Y$  совпадает с распределением величины

$$B_{T(1)} + (\mu + \beta T(1)). \quad (13)$$

(Ср. с формулой (19) в § 1с.)

Обозначим через  $g(x) = g(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$  плотность GIG-распределения.

Из соотношений (11) и (12) находим, что

$$g(x) = C_3(\alpha, \beta, \mu, \delta) \left[ q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right) \right]^{-1} K_1\left(\alpha \delta q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right) e^{\beta(x-\mu)}, \quad (14)$$

где

$$C_3(\alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\alpha}{\pi} e^{\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

$$\text{и } q(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Поскольку

$$K_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-1/2} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (15)$$

при  $|x| \rightarrow \infty$  имеем

$$g(x) \sim \left(\frac{\alpha}{2\pi\delta}\right)^{1/2} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2\right]^{3/4}} \exp\{-\alpha \sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)\}, \quad (16)$$

и, следовательно,

$$\ln \frac{h_1(x)}{g(x)} \sim \frac{3}{4} \ln\left(1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2\right), \quad |x| \rightarrow \infty; \quad (17)$$

последнее соотношение показывает, что  $h_1(x)$  имеет более «тяжелые хвосты», нежели  $g(x)$ .

4. Гиперболическое распределение (с плотностью  $h_1(x)$ ) устроено проще, нежели гауссовское/обратно-гауссовское (GIG-) распределение с плотностью  $g(x)$ . Есть, однако, одно принципиальное обстоятельство, отдающее (по некоторым свойствам) предпочтение второму из этих распределений. Дело в следующем.

Пусть  $Y$  — случайная величина с плотностью  $g(x) = g(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ . Производящая функция имеет вид

$$E e^{\lambda Y} = \exp\{\delta[\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \lambda)^2}] + \mu\lambda\}. \quad (18)$$

Отсюда видно, что если  $Y_1, \dots, Y_m$  — независимые GIG-распределенные величины с одними и теми же  $\alpha$  и  $\beta$ , но, вообще говоря, разными  $\mu_i$  и  $\delta_i$ , то их сумма  $Y = Y_1 + \dots + Y_m$  снова есть GIG-распределенная величина с теми же самыми  $\alpha$  и  $\beta$  и с  $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_m$ ,  $\delta = \delta_1 + \dots + \delta_m$ .

Иначе говоря, GIG-распределение замкнуто (в указанном смысле) относительно свертки.

Если же  $X$  имеет гиперболическое распределение, то, взяв для простоты  $\beta = \mu = 0$ , находим, что

$$E e^{\lambda X} = \frac{\alpha}{K_1(\alpha\delta)} \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2})}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}}. \quad (19)$$

Отсюда видно, что указанное выше свойство замкнутости GIG-распределения для гиперболического распределения отсутствует.

Важно отметить, что оба распределения, GIG- и гиперболическое, являются безгранично делимыми. Для GIG-распределения это видно непосредственно из формулы (18), а для гиперболического это отмечено в работах [21]–[23], [25], [26]. Из формулы (18) находим также простые выражения для среднего  $E Y$  и дисперсии  $D Y$ :

$$E Y = \mu + \frac{\delta \frac{\alpha}{\beta}}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad D Y = \frac{\delta}{\alpha \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

**Замечание.** По поводу использования этих распределений при анализе финансовых индексов см. работу Э. Эберлейна (E. Eberlein) и У. Келлера (U. Keller) [127], где приведены впечатляющие результаты статистической обработки ряда финансовых индексов (см. также § 2b в гл. II).

5. Коль скоро гиперболическое распределение является безгранично делимым, можно определить процесс Леви, т. е. процесс с однородными независимыми приращениями, у которого распределения приращений являются гиперболическими.

Ограничимся случаем симметричных центрированных плотностей  $h_1(x) = h_1(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$  с параметрами  $\beta = \mu = 0$ . В этом случае плотность  $h_1(x)$

может быть представлена в виде

$$h_1(x) = \frac{1}{2\delta K_1(\alpha\delta)} \exp\left\{-\alpha\delta\sqrt{1+\left(\frac{x}{\delta}\right)^2}\right\}. \quad (20)$$

Будем обозначать через  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  процесс Леви, у которого  $Z_1$  имеет распределение с плотностью (20).

Интересно отметить, что, поскольку  $E|Z_t| < \infty$ ,  $Z_0 = 0$  и  $Z = (Z_t)$  имеет независимые приращения, этот процесс является *мартингалом* (относительно естественного потока  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)$ ,  $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_s, s \leq t)$ ):

$$E(Z_t | \mathcal{F}_s) = Z_s, \quad t \geq s. \quad (21)$$

(Заметим, что  $E|Z_t|^p < \infty$  при всех  $p \geq 1$ .)

Пусть  $\varphi_t(\theta) = E \exp(i\theta Z_t)$  — характеристическая функция гиперболического процесса Леви  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ . Тогда (ср. с формулами (4) и (5) в § 1b)

$$\varphi_t(\theta) = (\varphi_1(\theta))^t. \quad (22)$$

Из формул (9) и (10) (с  $X = Z_1$ ) следует, что при  $\beta = \mu = 0$  выполняется равенство

$$\text{Law } Z_1 = E'_{\sigma^2} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (23)$$

где

$$p'_{\sigma^2}(x) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)}{2K_1(\alpha\delta)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\alpha^2 x + \frac{\delta^2}{x}\right)\right\}. \quad (24)$$

Отправляясь от этих представлений, Эберлейн и Келлер [127] нашли для  $\varphi_t(\theta)$  следующую формулу Леви—Хинчина (ср. с формулами (22) и (29) в § 1a):

$$\varphi_t(\theta) = \exp\left\{t \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x) \nu(dx)\right\}, \quad (25)$$

где мера Леви  $\nu$  имеет (довольно сложно выражаемую) плотность  $p_\nu(x)$  (по мере Лебега  $dx$ ):

$$p_\nu(x) = \frac{1}{\pi^2|x|} \int_0^\infty \frac{\exp(-|x|\sqrt{2y+\alpha^2})}{y(J_1^2(\delta\sqrt{2y}) + Y_1^2(\delta\sqrt{2y}))} dy + \frac{\exp(-|x|)}{|x|}. \quad (26)$$

Здесь  $J_1$  и  $Y_1$  — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

На основании асимптотических результатов относительно  $J_1$  и  $Y_1$  (формулы 9.1.7, 9 и 9.2.1, 2 в [1]) можно показать, что знаменатель в подынтегральном выражении в формуле (26) асимптотически является константой при  $y \rightarrow 0$  и ведет себя как  $y^{-1/2}$  при  $y \rightarrow \infty$ . Отсюда авторы работы [127] заключают, что плотность меры Леви удовлетворяет условию

$$p_\nu(x) \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad (27)$$

откуда следует, что у процесса  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  на любом сколь угодно малом интервале времени имеется бесконечное число малых скачков.



Действительно, пусть

$$\mu^Z(\omega; \Delta, B) = \sum_{s \in \Delta} I(Z_s(\omega) - Z_{s-}(\omega) \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

— мера скачков процесса  $Z$ , т. е. число тех  $s \in \Delta$ , для которых  $Z_s(\omega) - Z_{s-}(\omega)$  попадает в множество  $B$ . Тогда (см., например, [250, гл. II, 1.8]) для  $B_\varepsilon = \{x : \varepsilon < |x| < 1\}$ ,  $\varepsilon > 0$ , имеем

$$\mathbf{E} \mu^Z(\omega; \Delta, B_\varepsilon) = |\Delta| \nu(B_\varepsilon) \uparrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

поскольку  $\nu(B_0) = \infty$ .

## 2. Модели со свойствами самоподобия (автомодельности). Фрактальность

При статистическом анализе финансовых временных рядов давно было замечено, что многие из них обладают свойствами (статистического) *самоподобия*, проявляющимися в том, что, образно говоря, их «части устроены так же, как и целое». Например, если  $(S_n)_{n \geq 0}$  — *дневные* значения индекса S&P 500, то эмпирические плотности  $\hat{f}_1(x)$  и  $\hat{f}_k(x)$ ,  $k > 1$ , найденные по большому ряду величин

$$h_n \quad \left( = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} \right) \quad \text{и} \quad h_{kn} \quad \left( = \ln \frac{S_{kn}}{S_{k(n-1)}} \right), \quad n \geq 1,$$

соответственно, оказываются такими, что

$$\hat{f}_1(x) \approx k^{\mathbb{H}} \hat{f}_k(k^{\mathbb{H}}x),$$

где  $\mathbb{H}$  — некоторая константа, которая (в отличие от ожидаемой согласно центральной предельной теореме величины  $1/2$ ) значимым образом *больше*  $1/2$ .

Понятно, что подобные свойства требуют своего объяснения, и, как станет ясно из дальнейшего, оно может быть дано в рамках общей концепции (статистической) *автомодельности*, не только приведшей к таким важным понятиям, как *фрактальное броуновское движение*, *фрактальный гауссовский шум*, но и оказавшей решающее влияние на создание *фрактальной геометрии* (Б. Мандельброт). Концепция *автомодельности* самым тесным образом связана и с такими (невероятными) понятиями и теориями, как *хаос*, *нелинейные динамические системы*, которым (в связи с их возможными использованиями в финансовой математике) был посвящен раздел 4 гл. II.

### § 2а. Статистический феномен автомодельности Харста

1. В 1951 году британский климатолог Г. Харст (Harold Edwin Hurst), проведший более шестидесяти лет в Египте, участвуя в гидрологических проектах, связанных с Нилом, опубликовал работу [236], в которой излагался (экспериментально им обнаруженный) неожиданный эффект в поведении

флуктуаций годичной водности Нила и ряда других рек. Суть этого эффекта в следующем.

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — величины годичных уровней (скажем, Нила в некоторой его части) за  $n$  последовательных лет. «Хорошей» оценкой их среднего значения будет величина  $\frac{1}{n}X_n$ , где  $X_n = \sum_{k=1}^n x_k$ . Отклонение  $X_k$  за  $k$  последовательных лет от среднего (эмпирического) значения, подсчитанного по данным за  $n$  лет, есть величина

$$X_k - \frac{k}{n}X_n,$$

и, следовательно, минимальным и максимальным отклонениями являются величины

$$\min_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n}X_n \right) \quad \text{и} \quad \max_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n}X_n \right).$$

Обозначим через

$$\mathcal{R}_n = \max_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n}X_n \right) - \min_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n}X_n \right)$$

— величину «размаха», характеризующую степень отклонения кумулятивных величин  $X_k$  от их среднего значения  $\frac{k}{n}X_n$  за последовательные  $n$  лет.

В своей экспериментальной практике Г. Харст на самом деле оперировал не с величинами  $\mathcal{R}_n$ , а с нормированными величинами  $Q_n = \mathcal{R}_n / \mathcal{S}_n$ , где  $\mathcal{S}_n$  — эмпирическое стандартное отклонение,

$$\mathcal{S}_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2},$$

вводимое с целью получения статистики, *инвариантной* относительно замены

$$x_k \rightarrow c(x_k + m), \quad k \geq 1,$$

что является желательным свойством, поскольку даже среднее значение и дисперсия величин  $x_k$ , как правило, являются неизвестными.

Основываясь на большом фактическом материале наблюдений за стоками Нила в период 622–1469 гг. (т. е. за 847 лет), Г. Харст обнаружил, что для больших значений  $n$  статистика  $\mathcal{R}_n / \mathcal{S}_n$  «ведет себя» следующим образом:

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \sim c n^{\mathbb{H}}, \quad (1)$$

где  $c$  — некоторая константа, эквивалентность « $\sim$ » понимается в некотором подходящем смысле, а параметр  $\mathbb{H}$ , называемый теперь *показателем Харста*, оказался примерно равным 0,7. (Аналогичный результат Г. Харст получил и для других рек.) Этот результат был расценен Г. Харстом как *неожиданный*, поскольку ожидаемое им значение  $\mathbb{H}$  должно было быть равным 1/2 в силу следующего обстоятельства, проясненного несколько позже В. Феллером в [157].

Пусть  $x_1, x_2, \dots$  — последовательность *независимых одинаково распределенных* случайных величин,  $E x_n = 0$ ,  $E x_n^2 = 1$ . (Именно это и ожидалось Г. Харстом.) Тогда, как показано В. Феллером, при больших  $n$  выполняются соотношения

$$E \mathcal{R}_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{1/2}$$

и

$$D \mathcal{R}_n \sim \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \right) n.$$

Поскольку в рассматриваемом случае асимптотически  $\mathcal{S}_n \rightarrow 1$  (с вероятностью единица), естественно, что при больших  $n$  величины  $Q_n$  должны расти (по крайней мере в среднем) как  $n^{1/2}$ .

При исследовании статистических свойств последовательности  $(x_n)_{n \geq 1}$  вполне естественно было бы поинтересоваться и структурой эмпирической функции распределения  $\widehat{\text{Law}}(x_1 + \dots + x_n)$ , найденной по (большому) числу выборок, скажем,  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ , ... В случае, когда  $x_k$  являются отклонениями в уровне реки от некоторого «среднего» значения, обнаруживается (например, опять же для Нила), что

$$\widehat{\text{Law}}(x_1 + \dots + x_n) \approx \widehat{\text{Law}}(n^{\mathbb{H}} x_1), \quad (2)$$

где  $\mathbb{H} > 1/2$ .

2. Как же и за счет каких вероятностно-статистических свойств последовательности  $(x_n)$  в формуле (2) параметр  $\mathbb{H}$  может оказаться отличным от  $1/2$ ?

Если обратиться к формуле (4) из § 1а, то одно из объяснений значения параметра  $\mathbb{H} \sim 0,7$  могло бы состоять в том, что  $x_1, x_2, \dots$  являются *независимыми устойчивыми* случайными величинами с индексом устойчивости  $\alpha = 1/\mathbb{H} \sim 1,48$ .

Но есть и другое объяснение, состоящее в том, что свойство (2) с  $\mathbb{H} \neq 1/2$  может возникнуть даже в случае нормально распределенных величин  $x_1, x_2, \dots$ , но *зависимых*! При этом стационарная последовательность  $(x_n)$  непременно должна быть последовательностью с *сильным последствием*. (См. далее § 2с.)

3. Свойства (1) и (2), являющиеся своеобразной формой самоподобия (автомодельности), наблюдаются также и для многих финансовых индексов (с заменой  $x_n$  на  $h_n$ ). Поэтому неудивительно, что высказанные выше замечания относительно «независимости и устойчивости» величин  $(x_n)$  или «зависимости и нормальности» нашли широкое применение в финансовой математике, особенно при анализе «фрактальной» структуры «волатильности».

Работы Г. Харста и отмеченные наблюдения явились отправными для Б. Мандельброта, который предложил как в рассматриваемой им модели Харста, так и во многих других вероятностных моделях, в том числе и в

финансовой математике, использовать строго устойчивые процессы (§ 1с) и фрактальное броуновское движение (§ 2с), обладающие свойствами автомодельности.

Следует подчеркнуть, что свойствами самоподобия типа (1) и (2) обладают самые разнообразные системы с *нелинейной динамикой*, которые встречаются в природе (физические, геофизические, биологические, экономические и т. д.). И именно это свойство «самоподобия» играет центральную роль во *фрактальной геометрии*, а ее основатель Б. Мандельброт назвал свою книгу [320] «*The Fractal Geometry of Nature*», подчеркивая тем самым универсальность понятия автомодельности в природе.

Нужные нам в дальнейшем определения статистической автомодельности и фрактального броуновского движения будут даны в § 2с. Следующий же параграф, не связанный непосредственно с финансовой математикой и навеянный материалами работ [104], [379], [385], [386], [428], [456] и др., призван дать *общее* представление о концепции автомодельности, играющей, как уже отмечалось, центральную роль во *фрактальной геометрии*.

## § 2b. Экскурс во фрактальную геометрию

1. Как известно, евклидова геометрия возникла в Древней Греции в результате стремления редуцировать разнообразие наблюдаемых в природе форм к некоторым «простым», «чистым», «симметричным» объектам. Так появились «точки», «линии», «плоскости», трехмерные объекты (сферы, конусы, цилиндры и т. д.).

Однако, как указывал Б. Мандельброт (1984 г.): «Облака — это не сферы, горы — это не конусы, линии берега — это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой ...» Созданная им так называемая *фрактальная геометрия* как раз и призвана дать описание объектов, форм, явлений, ..., которые далеки от того, чтобы быть «простыми» и «симметричными», а наоборот, имеют весьма сложную структуру, но обладают, тем не менее, рядом свойств типа автомодельности, самоподобия, самовоспроизводимости и т. п.

Не преследуя цель дать математическое определение «фрактальной геометрии» и ее основного понятия «фрактала», но желая привлечь внимание читателя на важность *идеи фрактальности вообще и в финансовой математике в частности*, дадим «определение» лишь на описательно-наглядном уровне.

Часто дается такое «рабочее определение»: «Фрактал — это объект, части которого устроены так же, как и целое». (Термин *фрактал*, введенный Б. Мандельбротом в 1975 г., [315], происходит, видимо, от латинского «*fractio* (ecclesiastical Lat; feminine) — a breaking, breaking in pieces», см. [296]. (Breaking (англ.) — the action of break, fracture — ломать, переломить.)

Классическим примером такого объекта *пространственно-фрактальной* структуры является дерево («части» — это ветки, «целое» — это ствол).

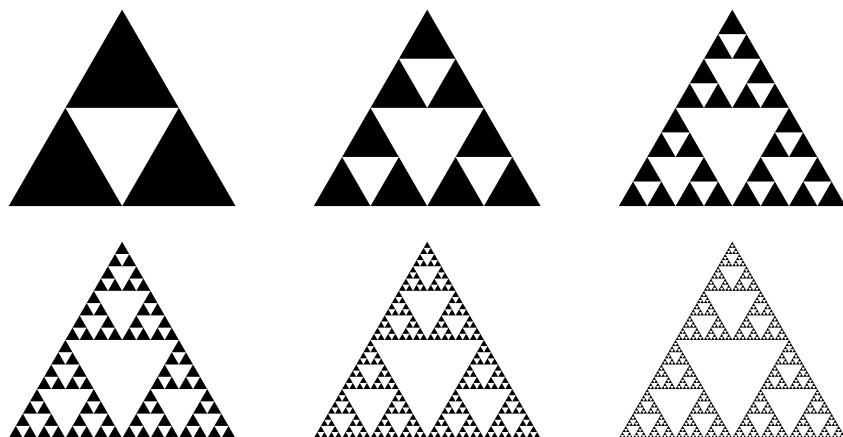


Рис. 27. Последовательные конструкции треугольника Серпинского

Другим наглядным примером является треугольник Серпинского<sup>1</sup>, получаемый из сплошного («черного») треугольника удалением внутренности центрального треугольника и последующим выниманием из каждого «черного» треугольника соответствующих внутренностей центральных треугольников (см. последовательные конструкции на рис. 27).

Получаемые таким образом множества остающихся «черных» точек притягиваются к множеству (которое и называется *треугольником Серпинского*), являющемуся примером объектов, известных под названием *аттракторы*.

Понятно, что треугольник Серпинского устроен так, что в нем слишком много пустот, и в этой связи естественным образом возникает вопрос о том, какова же «размерность» этого объекта.

Его нельзя, строго говоря, называть двумерным из-за большого количества «дыр», в то же самое время он, конечно, не является одномерным.

Этот простой пример показывает, что, видимо, треугольнику Серпинского можно приписать некоторую *фрактальную*, т. е. *дробную*, размерность. (При соответствующем определении эта «размерность» оказывается равной 1,58; см., например, [104], [428], [456].)

Треугольник Серпинского является примером *симметричного* фрактального объекта. В природе же доминируют, конечно, «несимметричные фракталы», что связано с *локальной случайностью* их образования. Это не исключает, тем не менее, *глобального детерминизма*, в подтверждение чего сошлемся на пример получения треугольника Серпинского как результата действия следующей стохастической процедуры, [386].

1 Польский математик Вацлав Серпинский (Wacław Sierpiński, 1882–1969) ввел «треугольник Серпинского» (в английской версии называемый также «the Sierpinski Gasket») и «ковёр Серпинского» («the Sierpinski Carpet») еще в 1916 году.

Рассмотрим равносторонний треугольник с вершинами  $A = A(1, 2)$ ,  $B = B(3, 4)$  и  $C = C(5, 6)$ , где появление чисел 1, 2, ..., 6 станет ясно из следующего построения.

Выберем в треугольнике произвольным образом точку ( $a$ ) и затем подбросим «честным» образом правильный кубик, стороны которого занумерованы числами 1, 2, ..., 6. Если выпадет, скажем, «5» или «6», то соединим точку ( $a$ ) с вершиной  $C = C(5, 6)$ , и пусть ( $b$ ) есть середина отрезка, соединяющего эти точки. Затем снова подбросим кубик и в зависимости от выпавшего результата аналогичным образом получим новую точку ( $c$ ) и т. д.

Весьма замечательно, что («почти всегда») предельное множество так получаемых точек ( $b$ ), ( $c$ ), ... будет образовывать треугольник Серпинского («черные» точки на рис. 27).

Математикам хорошо известен другой «классический» пример множества с фрактальной структурой — *канторово множество*, введенное Г. Кантором (Georg Cantor; 1845–1918) в 1883 году как пример множества особой структуры (*совершенное*, т. е. замкнутое и без изолированных точек), являющееся нигде не плотным на числовой прямой и имеющее мощность континуума. Напомним, что это множество есть подмножество отрезка  $[0, 1]$ , образованное числами вида  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}$ , где  $\varepsilon_i = 0$  или 2. Геометрически канторово множество получается из отрезка  $[0, 1]$  выбрасыванием его центрального (открытого) интервала  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  с последующим выбрасыванием из оставшихся отрезков  $[0, \frac{1}{3}]$  и  $[\frac{2}{3}, 1]$  их центральных подынтервалов  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  и  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  и т. д. Суммарная длина выбрасываемых таким образом интервалов равна единице, но, тем не менее, оставшееся «редкое» множество имеет на самом деле мощность континуума. Самоподобность канторова множества, т. е. то, что его «часть устроена так же, как и целое», ясна из самой геометрической конструкции этого множества, согласно которой это множество есть совокупность подмножеств, каждое из которых в «миниатюре» таково же, как и все множество в целом.

Из иных известных объектов со свойствами автомодельности упомянем *треугольник Паскаля* (В. Pascal), *снежинки Коха* (Н. van Koch), *кривую Пеано* (G. Peano), *множества Жюлиа* (G. Julia); см., например, [379].

2. Говоря выше о «размерности», мы не приводили точного определения (Ф. Хаусдорф — автор «хаусдорфовой размерности» — отмечал, что проблема «правильного» определения понятия «размерности» является очень трудной). Отсылая по этому поводу к специальной литературе (см., например, [104], [428], [456]), отметим лишь, что идея фрактальной размерности, скажем, кривой на плоскости, весьма проста — эта размерность показывает степень *заметания* плоскости рассматриваемой кривой. Если эта кривая есть *реализация*  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  некоторого процесса, то ее фрактальная размерность тем выше, чем больше в  $(X_t)_{t \geq 0}$  «высоочастотных» составляющих.

3. Предположим теперь, что  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  — это некоторый *стохастический, случайный* процесс. В этом случае естественно давать определение «фрактальной размерности» не для отдельной реализации, а для всей совокупности реализаций. Эта идея приводит к понятию *статистической фрактальной размерности*, определение которой дается в следующем параграфе.

## § 2с. Статистическая автомодельность. Фрактальное броуновское движение

**1. Определение 1.** Случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  со значениями в  $\mathbb{R}^d$  называется *автомодельным* (самоподобным, self-similar) или *удовлетворяющим свойству (статистической) автомодельности*, если для каждого  $a > 0$  можно найти такое  $b > 0$ , что

$$\text{Law}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Law}(bX_t, t \geq 0). \quad (1)$$

С наглядной точки зрения это означает, что *изменение временной шкалы* ( $t \rightarrow at$ ) *приводит к тому же самому результату, что и изменение фазовой шкалы* ( $x \rightarrow bx$ ).

В § 1с мы видели, что для (ненулевых) *строго устойчивых* процессов существует такая константа  $\mathbb{H}$ , что  $b = a^{\mathbb{H}}$ . При этом для строго  $\alpha$ -устойчивых процессов

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\alpha}. \quad (2)$$

В случае (общих) *устойчивых* процессов вместо равенства (1) мы имели (см. формулу (2) в § 1с) свойство

$$\text{Law}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Law}(a^{\mathbb{H}}X_t + tD_a, t \geq 0), \quad (3)$$

которое означает, что для этих процессов изменение временной шкалы приводит к тому же самому результату, что и изменение фазовой шкалы в сочетании с *трансляцией, определяемой сдвигом*  $tD_a$ ,  $t \geq 0$ . При этом для  $\alpha$ -устойчивых процессов  $\mathbb{H} = 1/\alpha$ .

2. Из сказанного следует, что целесообразно и естественно следующее определение.

**Определение 2.** Если в определении (1) для любого  $a > 0$  положить  $b = a^{\mathbb{H}}$ , то случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  будет называться *автомодельным процессом с показателем Харста  $\mathbb{H}$*  или процессом, удовлетворяющим *свойству статистической автомодельности с показателем Харста  $\mathbb{H}$* . Величина  $\mathbb{D} = \frac{1}{\mathbb{H}}$  называется *статистической фрактальной размерностью* случайного процесса  $X$ .

Классическим примером автомодельного процесса является *броуновское движение*  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ . Напомним, что для этого (гауссовского) процесса



$E X_t = 0$ ,  $E X_s X_t = \min(s, t)$ . Поэтому

$$E X_{as} X_{at} = \min(as, at) = a \min(s, t) = E(a^{1/2} X_s)(a^{1/2} X_t),$$

и, значит, двумерные распределения  $\text{Law}(X_s, X_t)$  обладают следующим свойством автомодельности:

$$\text{Law}(X_{as}, X_{at}) = \text{Law}(a^{1/2} X_s, a^{1/2} X_t).$$

В силу гауссовости отсюда вытекает, что броуновское движение удовлетворяет свойству статистической автомодельности с показателем Харста  $\mathbb{H} = 1/2$ .

Другим примером является *строго  $\alpha$ -устойчивое движение Леви*  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , для которого

$$X_t - X_s \sim S_\alpha((t-s)^{1/2}, 0, 0), \quad \alpha \in (0, 2].$$

Для этого процесса с однородными независимыми приращениями

$$X_{at} - X_{as} \stackrel{d}{=} a^{1/\alpha} (X_t - X_s),$$

и, значит,  $\mathbb{H} = 1/\alpha$  и  $\mathbb{D} = \alpha$ . При  $\alpha = 2$  мы получаем броуновское движение.

Подчеркнем, что рассмотренные в этих примерах процессы являются процессами с *независимыми* приращениями.

Следующий пример относится к случаю процессов с *зависимыми приращениями*.

### 3. Фрактальное броуновское движение. Рассмотрим функцию

$$A(s, t) = |s|^{2\mathbb{H}} + |t|^{2\mathbb{H}} - |t-s|^{2\mathbb{H}}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Эта функция при  $0 < \mathbb{H} \leq 1$  является неотрицательно определенной, и, следовательно, на некотором вероятностном пространстве (скажем, на пространстве действительных функций  $\omega = (\omega_t)_{t \in \mathbb{R}}$  существует (см., например, [439, гл. II, § 9]) *гауссовский* процесс с нулевым средним и автоковариационной функцией

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2} A(s, t),$$

т. е.

$$E X_s X_t = \frac{1}{2} \{ |s|^{2\mathbb{H}} + |t|^{2\mathbb{H}} - |t-s|^{2\mathbb{H}} \}. \quad (5)$$

Отсюда видим, что

$$E X_{as} X_{at} = a^{2\mathbb{H}} E X_s X_t = E(a^{\mathbb{H}} X_s)(a^{\mathbb{H}} X_t),$$

и, значит,

$$\text{Law}(X_{as}, X_{at}) = \text{Law}(a^{\mathbb{H}} X_s, a^{\mathbb{H}} X_t).$$

Так же, как и в случае броуновского движения, распределение которого полностью определяется двумерными распределениями, заключаем, что

рассматриваемый сейчас процесс  $X$  является автомодельным с показателем Харста  $\mathbb{H}$ .

Из формулы (5) находим

$$\mathbb{E} |X_t - X_s|^2 = |t - s|^{2\mathbb{H}}. \quad (6)$$

Напомним, что критерий Колмогорова (см., например, [470]) утверждает, что у случайного процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  существует непрерывная модификация, если найдутся такие константы  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  и  $c > 0$ , что для всех  $s, t \geq 0$  выполняется неравенство

$$\mathbb{E} |X_t - X_s|^\alpha \leq c |t - s|^{1+\beta}. \quad (7)$$

Поэтому если  $\mathbb{H} > 1/2$ , то из формулы (6) сразу следует (при  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2\mathbb{H} - 1$ ), что у рассматриваемого процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  существует непрерывная модификация. Если же  $0 < \mathbb{H} \leq 1/2$ , то в силу гауссовости для всякого  $0 < k < \mathbb{H}$  имеет место оценка

$$\mathbb{E} |X_t - X_s|^{1/k} \leq c |t - s|^{\mathbb{H}/k}$$

с некоторой константой  $c > 0$ . Тем самым, снова возможно применение критерия Колмогорова (с  $\alpha = 1/k$ ,  $\beta = \mathbb{H}/k - 1$ ).

Таким образом, у рассматриваемого гауссовского процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  при всех  $0 < \mathbb{H} \leq 1$  существует непрерывная модификация.

**Определение 3.** Непрерывный гауссовский процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  с нулевым средним и ковариационной функцией (5) называется (стандартным) *фрактальным броуновским движением с показателем автомодельности Харста*  $0 < \mathbb{H} \leq 1$ . (В дальнейшем для такого процесса будет часто использоваться обозначение  $B_{\mathbb{H}} = (B_{\mathbb{H}}(t))_{t \geq 0}$ .)

Из данного определения следует, что (стандартное) фрактальное броуновское движение  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  удовлетворяет следующим свойствам, которые можно было бы также принять в качестве определения этого процесса:

- 1)  $X_0 = 0$ ,  $\mathbb{E} X_t = 0$  для всех  $t \geq 0$ ;
- 2)  $X$  имеет стационарные приращения:

$$\text{Law}(X_{t+s} - X_s) = \text{Law}(X_t), \quad s, t \geq 0;$$

- 3)  $X$  является гауссовским процессом,

$$\mathbb{E} X_t^2 = |t|^{2\mathbb{H}}, \quad t \geq 0,$$

где  $0 < \mathbb{H} \leq 1$ ;

- 4)  $X$  имеет непрерывные траектории.

Из этих свойств снова следует, что фрактальное броуновское движение обладает свойством автомодельности.

В этой связи интересно отметить, что, в определенном смысле, верно и обратное [418, с. 318–319]: если невырожденный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ,  $X_0 = 0$ ,

имеет конечную дисперсию, является автомодельным процессом с показателем Харста  $\mathbb{H}$  и имеет стационарные приращения, то  $0 < \mathbb{H} \leq 1$ , и автоковариационная функция имеет вид  $\text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E} X_1^2 A(s, t)$ , где  $A(s, t)$ , задается формулой (4). Более того, в случае  $0 < \mathbb{H} < 1$  математическое ожидание  $\mathbb{E} X_t$  равно 0, а в случае  $\mathbb{H} = 1$  имеем  $X_t = tX_1$  (Р-п. н.).

Отметим также, что помимо гауссовских процессов с указанными свойствами существуют и негауссовские (см. [418, с. 320]).

4. Если  $\mathbb{H} = 1/2$ , то (стандартное) фрактальное броуновское движение есть не что иное, как (стандартное) броуновское движение, или винеровский процесс.

Введенные процессы  $B_{\mathbb{H}}$  впервые рассматривались А. Н. Колмогоровым в 1940 г. в его статье [278], где они назывались *спиралями Винера*. Термин *фрактальное*<sup>2</sup> *броуновское движение* был введен в 1968 г. в статье Мандельброта (B. Mandelbrot) и Ван Несса (J. van Ness) [328]. В отличие от Колмогорова, который при построении процесса  $B_{\mathbb{H}}$  исходил из вида автоковариационной функции (4), Мандельброт и Ван Несс использовали «явное» представление посредством стохастических интегралов по (некоторому) винеровскому процессу  $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ,  $W_0 = 0$ : для  $0 < \mathbb{H} < 1$  имеем

$$B_{\mathbb{H}}(t) = c_{\mathbb{H}} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{\mathbb{H}-1/2} - (-s)^{\mathbb{H}-1/2}] dW_s + \int_0^t (t-s)^{\mathbb{H}-1/2} dW_s \right\}, \quad (8)$$

где (нормирующая) константа

$$c_{\mathbb{H}} = \sqrt{\frac{2\mathbb{H} \Gamma(3/2 - \mathbb{H})}{\Gamma(1/2 + \mathbb{H})\Gamma(2 - 2\mathbb{H})}} \quad (9)$$

выбрана так, что  $\mathbb{E} B_{\mathbb{H}}^2(1) = 1$ .

**Замечание 1.** Разные формы представления правой части формулы (8) приводятся в статье [328]. В этой статье подробно комментируется также происхождение термина *fractional Brownian motion* и его аналогия с *fractional integral* (Holmgren—Riemann—Liouville)

$$\int_0^t (t-s)^{\mathbb{H}-1/2} dW_s, \quad (10)$$

где  $\mathbb{H}$  может быть любым положительным числом (см. также работу Г. Вейля [475]).

2 Статья [328] носит название «Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications», и вместо использованного нами термина «фрактальное (fractal) броуновское движение» буквально правильное было бы говорить о «дробном (fractional) броуновском движении». Однако из соображений благозвучия на русском языке мы решаемся вместо термина «дробный» употреблять термин «фрактальный», подчеркивая тем самым *фрактальную* природу процесса  $B_{\mathbb{H}}$ .

**Замечание 2.** Почти наверное траектории фрактального броуновского движения  $B_{\mathbb{H}}$  удовлетворяют условию Гёльдера с показателем  $\beta < \mathbb{H}$ . Они также нигде не дифференцируемы и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_{\mathbb{H}}(t) - B_{\mathbb{H}}(t_0)}{t - t_0} \right| = \infty \quad (\text{P-п. н.})$$

в любой точке  $t_0 \geq 0$ .

**Замечание 3.** Если в представлении (8) вместо  $\mathbb{H}$  взять гёльдеровскую функцию  $\mathbb{H}_t$  ( $|\mathbb{H}_t - \mathbb{H}_s| \leq c|t - s|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ) со значениями в  $(0, 1)$ , то получаем случайный процесс, носящий название *мультифрактального броуновского движения*. Этот процесс был введен и детально изучен в работе [381].

**Замечание 4.** В теории случайных процессов хорошо известна роль *семимартингалов* как того класса, для которого развита теория стохастического исчисления (см. далее раздел 5 и подробнее, например, [250], [304]). В этой связи полезно отметить, что фрактальное броуновское движение  $B_{\mathbb{H}}$ ,  $0 < \mathbb{H} \leq 1$ , не является (за исключением  $\mathbb{H} = 1/2$ , т. е. случая броуновского движения, и  $\mathbb{H} = 1$ ) *семимартингалом*. Доказательство этого факта для  $1/2 < \mathbb{H} < 1$  см. в монографии [304, гл. 4, § 9, пример 2].

**Замечание 5.** В связи с  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализом Харста (т. е. анализом, основанным на исследовании свойств размаха, эмпирического стандартного отклонения и их отношения; см. далее гл. IV, раздел 4) полезно, следуя [328], заметить, что если  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  является непрерывным автомодельным процессом с параметром Харста  $\mathbb{H}$ ,  $X_0 = 0$  и  $\tilde{\mathcal{R}}_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s - \inf_{0 \leq s \leq t} X_s$ , то  $\text{Law}(\tilde{\mathcal{R}}_t) = \text{Law}(t^{\mathbb{H}} \tilde{\mathcal{R}}_1)$ ,  $t > 0$ . В случае броуновского движения  $X = B_{1/2}$  В. Феллер [157] нашел точное распределение для  $\tilde{\mathcal{R}}_1$ . (Плотность этого распределения имеет вид  $8 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 \varphi(kx)$ ,  $x \geq 0$ , где  $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ .)

5. Существуют разнообразные обобщения свойства автомодельности (1). Например, пусть  $X(\alpha) = (X_t(\alpha))_{t \geq 0}$  — процесс (типа) Орнштейна—Уленбека с параметром  $\alpha \in \mathbb{R}$ , т. е. гауссовско-марковский процесс, определяемый формулой

$$X_t(\alpha) = \int_0^t e^{\alpha(t-s)} dW_s, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

где  $W = (W_s)_{s \geq 0}$  — стандартное броуновское движение; см. § 3а. (Заметим, что  $X(\alpha) = (X_t(\alpha))_{t \geq 0}$  есть решение линейного стохастического дифференциального уравнения  $dX_t(\alpha) = \alpha X_t(\alpha) dt + dW_t$ ,  $X_0(\alpha) = 0$ .) Из формулы (11) нетрудно вывести, что для каждого  $a \in \mathbb{R}$  выполняется равенство

$$\text{Law}(X_{at}(\alpha), t \in \mathbb{R}) = \text{Law}(a^{1/2} X_t(a\alpha), t \in \mathbb{R}),$$

что можно рассматривать как своеобразную форму автомодельности для семейства процессов  $\{X(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

6. Остановимся на одном принципиально важном методе «статистических выводов», основанном на свойствах автомодельности.

Представим себе, что  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  — автомодельный процесс с показателем автомодельности  $\mathbb{H}$ . Пусть  $\Delta > 0$ . Тогда

$$\text{Law}(X_\Delta) = \text{Law}(\Delta^{\mathbb{H}} X_1) \quad (12)$$

и, значит, если  $f_\Delta(x) = \frac{dP(X_\Delta \leq x)}{dx}$  — плотность распределения вероятностей  $X_\Delta$ , то

$$f_1(x) = \Delta^{\mathbb{H}} f_\Delta(x \Delta^{\mathbb{H}}). \quad (13)$$

В обычном статистическом анализе часто из общих соображений можно считать процесс  $X$  автомодельным с некоторым, вообще говоря, *неизвестным* значением параметра  $\mathbb{H}$ . Пусть мы сумели каким-то образом получить для  $\mathbb{H}$  некоторую «правдоподобную» оценку  $\widehat{\mathbb{H}}$ . Тогда для проверки гипотезы о том, что  $X$  действительно является автомодельным с параметром  $\widehat{\mathbb{H}}$ , можно поступить так.

Предположим, что по результатам независимых наблюдений над  $X_1$  и  $X_\Delta$  мы получили эмпирические плотности  $\widehat{f}_1(x)$  и  $\widehat{f}_\Delta(x)$  для достаточно многих значений  $\Delta$ . Тогда если

$$\widehat{f}_1(x) \approx \Delta^{\widehat{\mathbb{H}}} \widehat{f}_\Delta(x \Delta^{\widehat{\mathbb{H}}}) \quad (14)$$

для широкого диапазона значений  $x$  и  $\Delta$ , то можно считать, что мы имеем достаточно весомое подтверждение справедливости гипотезы об автомодельности процесса  $X$  с показателем  $\widehat{\mathbb{H}}$ .

Разумеется, если теоретическая плотность  $f_1(x)$ , зависящая, конечно, от  $\mathbb{H}$ , известна, то вместо проверки соотношения (14) следовало бы убедиться в справедливости приближенного «наложения» графиков функций  $\Delta^{\widehat{\mathbb{H}}} \widehat{f}_\Delta(x \Delta^{\widehat{\mathbb{H}}})$  на график функции  $f_1(x)$  с подстановкой в эту плотность в качестве показателя Харста значения  $\widehat{\mathbb{H}}$  или истинного значения этого параметра, если оно а priori известно.

7. Для  $\alpha$ -устойчивых процессов Леви показатель Харста  $\mathbb{H}$  равен  $1/\alpha$ , и, следовательно, для таких процессов оценивание  $\mathbb{H}$  сводится к оцениванию параметра  $\alpha$ . Для фрактального броуновского движения  $B_{\mathbb{H}} = (B_{\mathbb{H}}(t))_{t \geq 0}$  оценивание параметра  $\mathbb{H}$  по *дискретным* наблюдениям может быть осуществлено, например, следующим образом.

Рассмотрим временной интервал  $[0, 1]$ . Разобьем его на  $n$  равных частей, и пусть  $\Delta = 1/n$  — длина интервала разбиения.

Положим

$$v_1(B_{\mathbb{H}}; \Delta) = \frac{\sum_{k=1}^n |B_{\mathbb{H}}(k\Delta) - B_{\mathbb{H}}((k-1)\Delta)|}{n}$$

(ср. с формулой (19) в § 3а гл. IV).

Поскольку

$$\mathbb{E} |B_{\mathbb{H}}(t+s) - B_{\mathbb{H}}(t)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} s^{\mathbb{H}},$$

имеем

$$\mathbb{E} \nu_1(B_{\mathbb{H}}; \Delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta^{\mathbb{H}}.$$

Отсюда естественным образом напрашивается следующий вывод: в качестве оценки для  $\mathbb{H}$  надо взять статистику

$$\widehat{\mathbb{H}}_n = \frac{\ln[\sqrt{\pi/2} \nu_1(B_{\mathbb{H}}; \Delta)]}{\ln \Delta}.$$

(В работе [380] показано, что  $\widehat{\mathbb{H}}_n \rightarrow \mathbb{H}$  с вероятностью единица.)

## § 2d. Фрактальный гауссовский шум как процесс с сильным последствием

1. Во многих разделах прикладной теории вероятностей броуновское движение  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  используется в качестве модели, дающей простой способ получения *белого шума*.

Если положить

$$\beta_n = B_n - B_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

то получаемая последовательность  $\beta = (\beta_n)_{n \geq 1}$  будет гауссовской последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин с  $\mathbb{E} \beta_n = 0$ ,  $\mathbb{E} \beta_n^2 = 1$ .

В соответствии с § 2a гл. II такую последовательность мы называли *белым* (гауссовским) *шумом* и использовали как *источник случайности* при образовании разнообразных случайных процессов, как линейных (MA, AR, ARMA, ...), так и нелинейных (ARCH, GARCH, ...).

В этом смысле обращение к фрактальному броуновскому движению  $B_{\mathbb{H}}$  оказывается полезным для получения как *стационарных гауссовских последовательностей со свойствами сильного последствия* («long memory», «persistent system»), так и последовательностей с *быстрой перемежаемостью* («relaxation processes», «intermittency», «antipersistence»).

Положим, по аналогии с формулой (1),

$$\beta_n = B_{\mathbb{H}}(n) - B_{\mathbb{H}}(n-1), \quad n \geq 1, \quad (2)$$

и будем называть последовательность  $\beta = (\beta_n)_{n \geq 1}$  *фрактальным* (гауссовским) *шумом с параметром Харста  $\mathbb{H}$ ,  $0 < \mathbb{H} < 1$* .

Из формулы (5) из § 2c для ковариационной функции (стандартного) процесса  $B_{\mathbb{H}}$  следует, что ковариационная функция  $\rho_{\mathbb{H}}(n) = \text{Cov}(\beta_k, \beta_{k+n})$  имеет следующий вид:

$$\rho_{\mathbb{H}}(n) = \frac{1}{2} \{ |n+1|^{2\mathbb{H}} - 2|n|^{2\mathbb{H}} + |n-1|^{2\mathbb{H}} \}. \quad (3)$$

Отсюда видно, что

$$\rho_{\mathbb{H}}(n) \sim \mathbb{H}(2\mathbb{H}-1)|n|^{2\mathbb{H}-2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Тем самым, в случае  $\mathbb{H} = 1/2$  ковариация  $\rho_{\mathbb{H}}(n)$  равна 0 для  $n \neq 0$ , и  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  образует (как уже отмечалось выше) гауссовскую последовательность независимых случайных величин. Если же  $\mathbb{H} \neq 1/2$ , то из формулы (4) мы видим, что ковариация убывает с ростом  $n$  достаточно медленно (как  $|n|^{-(2-2\mathbb{H})}$ ), что обычно интерпретируется как наличие «долгой памяти», или «сильного последействия».

Полезно отметить принципиальную разницу в случаях  $0 < \mathbb{H} < 1/2$  и  $1/2 < \mathbb{H} < 1$ .

Если  $0 < \mathbb{H} < 1/2$ , то ковариация отрицательна ( $\rho_{\mathbb{H}}(n) < 0$ ,  $n > 0$ ), при этом  $\sum_{n=0}^{\infty} |\rho_{\mathbb{H}}(n)| < \infty$ .

Если же  $1/2 < \mathbb{H} < 1$ , то ковариация положительна ( $\rho_{\mathbb{H}}(n) > 0$ ,  $n \geq 0$ ), при этом  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{\mathbb{H}}(n) = \infty$ .

Положительность ковариации означает, что вслед за положительными (отрицательными) значениями  $\beta_n$  следует ожидать также положительные (отрицательные) значения. Тем самым, фрактальный гауссовский шум с  $1/2 < \mathbb{H} < 1$  может служить подходящей моделью при описании эффектов «кластерности» (гл. IV, § 3е), реально наблюдаемых при эмпирическом анализе величин возврата  $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$  для многих финансовых индексов  $S = (S_n)$ .

Отрицательность же ковариации означает, что вслед за положительными (отрицательными) значениями следуют ожидать отрицательные (положительные) значения. Такая ситуация *сильной перемежаемости* («вверх-вниз-вверх-...») действительно наблюдается при анализе поведения волатильности (подробнее см. разделы 3 и 4 в гл. IV).

2. Последовательность  $\beta = (\beta_n)$  является гауссовской *стационарной* последовательностью с корреляционной функцией  $\rho_{\mathbb{H}}(n)$ , задаваемой формулой (3).

Непосредственно можно убедиться в том, что в спектральном представлении

$$\rho_{\mathbb{H}}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_{\mathbb{H}}(\lambda) d\lambda \quad (5)$$

спектральная плотность  $f_{\mathbb{H}}(\lambda)$  может быть представлена в виде

$$f_{\mathbb{H}}(\lambda) = \frac{\int_0^{\infty} (\cos x\lambda) \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) x^{-2\mathbb{H}-1} dx}{\int_0^{\infty} \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) x^{-2\mathbb{H}-1} dx}. \quad (6)$$

Произведя соответствующие вычисления интегралов, можно найти (подробнее см. [418]), что

$$f_{\mathbb{H}}(\lambda) = K(\mathbb{H}) |e^{i\lambda} - 1|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda + 2\pi k|^{2\mathbb{H}+1}}, \quad |\lambda| \leq \pi, \quad (7)$$

где  $K(\mathbb{H}) = \left( \frac{\pi}{\mathbb{H} \Gamma(2\mathbb{H}) \sin(\mathbb{H}\pi)} \right)^{-1}$ .

**3. Случай  $\mathbb{H} = 1/2$ .** Имея в виду применение фрактального броуновского движения к описанию динамики финансовых индексов, выберем некоторую единицу измерения времени  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и положим

$$H_n = B_{\mathbb{H}}(n), \quad h_n = H_n - H_{n-1}.$$

Ясно, что  $E h_n = 0$  и  $D h_n^2 = 1$ .

Соответствующую этому случаю последовательность  $h = (h_n)$ , являющуюся гауссовской последовательностью независимых одинаково распределенных величин, называют, как указывалось выше, *белым* (гауссовским) *шумом*.

**4. Случай  $1/2 < \mathbb{H} < 1$ .** Соответствующий шум  $h = (h_n)$  часто называют *черным*. Для этого шума характерно *сильное последствие, сильная память*. (В англоязычной литературе для этих свойств используется термин «persistence» — *настойчивость*.)

Подобного рода эффекты наблюдаются, например, в поведении уровней рек, характере солнечной активности, последовательной толщине колец деревьев и, наконец, что для нас наиболее интересно, — в значениях величин  $h_n = \ln(S_n/S_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ , для цен акций, обменных курсов и других финансовых показателей (см. далее гл. IV).

Если  $\mathbb{H} = 1/2$ , то стандартное отклонение  $\sqrt{D(h_1 + \dots + h_n)}$  растет с ростом  $n$  как  $\sqrt{n}$ . В случае же  $\mathbb{H} > 1/2$  этот рост более быстрый — порядка  $n^{\mathbb{H}}$ . Иначе говоря, результирующее значение  $H_n = h_1 + \dots + h_n$  имеет больший разброс, нежели для случая *белого шума* ( $\mathbb{H} = 1/2$ ).

Полезно заметить, что в случае  $\mathbb{H} = 1$  фрактальное броуновское движение имеет вид  $B_{\mathbb{H}}(t) = tB_{\mathbb{H}}(1)$  (Р-п. н.). И, следовательно, в этом случае последовательность  $h = (h_n)$  приращений  $h_n = B_{\mathbb{H}}(n) - B_{\mathbb{H}}(n-1)$ ,  $n \geq 1$ , носит тривиальный характер: все величины  $h_n \equiv B_{\mathbb{H}}(1)$ ,  $n \geq 1$ , что можно было бы назвать случаем «идеальной настойчивости».

**5. Случай  $0 < \mathbb{H} < 1/2$ .** Типичными примерами систем, в которых наблюдаются такие значения параметра Харста  $\mathbb{H}$ , является турбулентность. Знаменитый *закон двух третей* Колмогорова ([276], 1941 г.) устанавливает, что в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса средний квадрат разности скоростей в двух точках, находящихся друг от друга на не слишком малом и не слишком большом расстоянии  $r$ , пропорционален  $r^{2\mathbb{H}}$ , где  $\mathbb{H} = 1/3$ .



Фрактальный шум  $h = (h_n)$ ,  $0 < \mathbb{H} < 1/2$  (розовый шум), имеет отрицательную ковариацию, что, как уже отмечалось, соответствует быстрой переменяемости в значениях  $h_n$ . Именно таким свойством и характеризуются турбулентные явления, что (вместе со свойствами самоподобия) говорит о том, что фрактальное броуновское движение с  $0 < \mathbb{H} < 1/2$  может служить хорошей моделью для описания турбулентных явлений.

Примером финансовой турбулентности, где  $0 < \mathbb{H} < 1/2$ , является последовательность  $\hat{r} = (\hat{r}_n)$  с  $\hat{r}_n = \ln \frac{\hat{\sigma}_n}{\hat{\sigma}_{n-1}}$  и

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (h_k - \bar{h}_n)^2$$

— эмпирическая дисперсия (волатильность) последовательности логарифмических возвратов  $h = (h_n)$ ,  $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ , для цен акций, индексов Dow, S&P 500 и др. (см. § 3а гл. IV).

Многие авторы (см., например, [180], [385], [386]) усматривают большую аналогию между свойствами гидродинамической турбулентности и поведением цен на финансовых рынках. Эта аналогия приводит, например, авторов статьи [180] к заключению, что «*есть основания надеяться, что качественная картина турбулентности, развитая в последние семьдесят лет, поможет лучшему пониманию, казалось бы, столь отдаленной области, как финансовые рынки*».

### 3. Модели, основанные на броуновском движении

#### § 3а. Броуновское движение и его роль как базисного процесса

1. При конструктивном способе задания случайных последовательностей  $h = (h_n)$ , описывающих динамику величин «возврата», «отдачи»  $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$  (от, скажем, акции, стоимость которой в момент времени  $n$  есть  $S_n$ ), обычно предполагается, как в линейных, так и в нелинейных моделях, что имеется некоторая базисная последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ , являющаяся «носителем» случайности и порождающая последовательность  $h = (h_n)$ . Как правило, эта последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  считается белым (гауссовским) шумом.

Выбор такой последовательности  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  в качестве базисной отвечает естественному желанию строить «сложные» объекты (какими являются, вообще говоря, величины  $h_n$ ) исходя из «просто» устроенных.

При этом последовательность  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  действительно может считаться «простой», поскольку она состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с классическим нормальным (гауссовским) распределением  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

2. В случае непрерывного времени аналогичную роль в построении многих моделей со «сложной» структурой играет броуновское движение, введенное как математический объект в работах Л. Башелье ([12]; 1900 г.) и А. Эйнштейна ([132]; 1905 г.). Строгую математическую теорию броуновского движения, его меру в функциональном пространстве построил в 1923 г. Н. Винер [476], в честь которого это движение называется также винеровским процессом, а соответствующая мера — винеровской.

Согласно определению 2 в § 1b стандартное броуновское движение  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  является непрерывным гауссовским случайным процессом с однородными независимыми приращениями с  $B_0 = 0$ ,  $E B_t = 0$ ,  $E B_t^2 = t$ . Ковариационная функция такого процесса —  $E B_s B_t = \min(s, t)$ .

Выше уже не раз отмечалось свойство автомодельности броуновского движения: для всякого  $a > 0$  выполняется равенство

$$\text{Law}(B_{at}; t \geq 0) = \text{Law}(a^{1/2} B_t; t \geq 0).$$

Из этого свойства вытекает, что процесс  $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}\right)_{t \geq 0}$  также является броуновским движением. Наряду с этим свойством отметим ряд других преобразований, при которых получающиеся новые процессы  $B^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , также являются броуновскими движениями:  $B_t^{(1)} = -B_t$ ;  $B_t^{(2)} = tB_{1/t}$  для  $t > 0$  и  $B_0^{(2)} = 0$ ;  $B_t^{(3)} = B_{t+s} - B_s$  для  $s > 0$ ;  $B_t^{(4)} = B_T - B_{T-t}$  для  $0 \leq t \leq T$  и  $T > 0$ .

Многомерный процесс  $B = (B^1, \dots, B^d)$ , состоящий из  $d$  независимых между собой стандартных броуновских движений  $B^i = (B_t^i)_{t \geq 0}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , называют  $d$ -мерным стандартным броуновским движением.

Обладая «богатой» структурой, броуновское движение дает возможность использовать его для построения разных классов случайных процессов.

Так, броуновское движение выступает в роли «базисного» в конструкции диффузионных марковских процессов  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  как решений стохастических дифференциальных уравнений

$$dX_t = a(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad (1)$$

интерпретируемых в том (интегральном) смысле, что для всех  $t > 0$  выполняется равенство

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s. \quad (2)$$

Участвующий в этом выражении интеграл

$$I_t = \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad (3)$$

понимается как *стохастический интеграл Ито* по броуновскому движению. (Вопросы, относящиеся к стохастическому интегрированию и стохастическим дифференциальным уравнениям, рассматриваются далее в § 3с.)

В финансовой математике важную роль играет *геометрическое броуновское движение*  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ , подчиняющееся стохастическому дифференциальному уравнению

$$dS_t = S_t(a dt + \sigma dB_t) \quad (4)$$

с коэффициентами  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ .

Это уравнение с начальным условием  $S_0$ , не зависящим от броуновского движения  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ , имеет явное решение

$$S_t = S_0 e^{at} e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}, \quad (5)$$

из которого видно, что в записи

$$S_t = S_0 e^{H_t}$$

(ср. с формулой (1) в § 1а гл. II) имеем

$$H_t = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t. \quad (6)$$

Процесс  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  называют броуновским движением с локальным сносом  $(a - \sigma^2/2)$  и диффузией  $\sigma^2$ . Из формулы (6) следует, что локальный снос характеризует среднюю скорость изменения  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ ; диффузию  $\sigma^2$  часто называют дифференциальной дисперсией, а в финансовой литературе — волатильностью.

Видимо, П. Самуэльсон ([420]; 1965 г.) был первым, кто осознал важность геометрического броуновского движения при описании эволюции цен, называя его также экономическим броуновским движением.

Другими известными примерами процессов, которые можно получить как решения стохастических дифференциальных уравнений (1) при подходящем выборе коэффициентов  $a(t, x)$  и  $\sigma(t, x)$ , являются следующие.

**Броуновский мост**  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $X_0 = \alpha$ ,  $X_T = \beta$ , есть процесс, подчиняющийся уравнению

$$dX_t = \frac{\beta - X_t}{T - t} dt + dB_t, \quad 0 < t < T, \quad (7)$$

с некоторым броуновским движением  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ .

Можно убедиться, например, с помощью формулы Ито (см. далее § 3d), что процесс  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ,

$$X_t = \alpha \left(1 - \frac{t}{T}\right) + \beta \frac{t}{T} + (T - t) \int_0^t \frac{dB_s}{T - s}, \quad (8)$$

где интеграл понимается как стохастический интеграл по броуновскому движению, является решением уравнения (2). Поскольку это уравнение имеет единственное решение (см. § 3e), броуновский мост, выходящий в момент времени  $t = 0$  из точки  $\alpha$  и приходящий в момент времени  $t = T$  в точку  $\beta$ , может быть определен формулой (8).

Для стандартного броуновского движения его автоковариационная функция имеет вид  $\rho(s, t) = \min(s, t)$ . Для рассматриваемого броуновского моста соответствующая автоковариационная функция имеет вид  $\rho(s, t) = \min(s, t) - \frac{st}{T}$ . Среднее значение:  $E X_t = \alpha \left(1 - \frac{t}{T}\right) + \beta \frac{t}{T}$ .

Нетрудно проверить, что для всякого стандартного броуновского движения  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  процесс  $W^0 = (W_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ , определяемый формулой

$$W_t^0 = W_t - \frac{t}{T} W_T, \quad (9)$$

имеет ковариационную функцию  $\rho(s, t)$ , равную  $\min(s, t) - \frac{st}{T}$ . Отсюда следует, что наряду с процессом  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ , определяемым формулой (8), процесс  $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ ,

$$Y_t = \alpha \left(1 - \frac{t}{T}\right) + \beta \frac{t}{T} + W_t^0, \quad (10)$$

имеет те же самые конечномерные распределения  $\text{Law}(Y_t, t \leq T) = \text{Law}(X_t, t \leq T)$  и, тем самым, может рассматриваться как одна из версий броуновского моста.

**Процесс Орнштейна—Уленбека** ([466]; 1930 г.) есть решение (линейного) стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t, \quad \alpha > 0. \quad (11)$$

Вновь используя формулу Ито, можно убедиться в том, что процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ,

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s, \quad (12)$$

является (и притом единственным; см. § 3е) решением уравнения (11).

Если начальное значение  $X_0$  не зависит от броуновского движения  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  и имеет конечный второй момент, то

$$\mathbb{E} X_t = e^{-\alpha t} \mathbb{E} X_0, \quad (13)$$

$$\mathbb{D} X_t = \frac{\sigma^2}{2\alpha} + \left( \mathbb{D} X_0 - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) e^{2\alpha t}, \quad (14)$$

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \left[ \mathbb{D} X_0 + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (e^{2\alpha \min(s,t)} - 1) \right] e^{-\alpha(s+t)}. \quad (15)$$

В том случае, когда  $X_0$  имеет нормальное (гауссовское) распределение с  $\mathbb{E} X_0 = 0$  и  $\mathbb{D} X_0 = \sigma^2/(2\alpha)$ , процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  будет стационарным гауссовским процессом с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\rho(s, t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|t-s|}. \quad (16)$$

В связи с уравнением Орнштейна—Уленбека (11) полезно отметить, что оно является корректной формой уравнения Ланжевена ([295]; 1908 г.)

$$m \frac{dV_t}{dt} = -\beta V_t + \sigma \frac{dB_t}{dt}, \quad (17)$$

описывающего поведение скорости  $V_t$  частицы с массой  $m$ , находящейся в жидкости и двигающейся под воздействием молекулярного бомбардирования, описываемого броуновским движением, при наличии сил трения  $(-\beta V_t)$ .

В форме (17) уравнение не имеет, вообще говоря, смысла в обычном понимании понятия производной, поскольку для (почти всех реализаций) броуновского движения производная  $dB_t/dt$  не существует (см. далее п. 7 в § 3б).

Однако этому уравнению можно придать точный смысл, если его понимать как уравнение Орнштейна—Уленбека

$$dV_t = -\frac{\beta}{m} V_t dt + \frac{\sigma}{m} dB_t, \quad (18)$$

решение которого при  $V_0 = 0$  задается, согласно соотношению (12), формулой

$$V_t = \frac{\sigma}{m} \int_0^t e^{\frac{\beta}{m}(t-s)} dB_s. \quad (19)$$

**Процесс Бесселя порядка  $\alpha > 1$**  по определению есть процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , управляемый (нелинейным) стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = \frac{\alpha-1}{2} \frac{dt}{X_t} + dB_t \quad (20)$$

с начальным значением  $X_0 = x \geq 0$  и броуновским движением  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ . (Это уравнение имеет, и притом единственное, сильное решение; см. далее § 3е.)

В случае  $\alpha = d$ , где  $d = 2, 3, \dots$ , процесс  $X$  может быть реализован [402] как радиальная часть  $R = (R_t)_{t \geq 0}$   $d$ -мерного броуновского движения  $B^{(x)} = (x_1 + B_t^1, \dots, x_d + B_t^d)_{t \geq 0}$ ,  $x_1^2 + \dots + x_d^2 = x^2$ :

$$R_t = \sqrt{(x_1 + B_t^1)^2 + \dots + (x_d + B_t^d)^2} \quad (21)$$

с независимыми между собой стандартными броуновскими движениями  $B^i = (B_t^i)_{t \geq 0}$ .

Ряд других интересных процессов, управляемых стохастическими дифференциальными уравнениями, приводится в разделе 4 в связи с построением моделей для описания динамики рыночной цены  $P(t, T)$  облигаций (см. § 1b гл. I).

### § 3б. Броуновское движение: сводка классических результатов

**1. Броуновское движение как предел случайных блужданий.** Различные источники (см., например, [201, с. 254], [266, с. 47]) свидетельствуют, что около 1827 года ботаник Р. Броун (Robert Brown) обнаружил, что частички цветочной пыльцы, помещенные в жидкость, совершают хаотические, беспорядочные перемещения.

Это движение получило название *броуновского движения*, вызванного, как позже стало ясно, ударами молекул жидкости на помещенные в нее частицы. Построение *физико-математической модели* этого движения было осуществлено в 1905 году А. Эйнштейном [132]. Однако справедливости ради следует подчеркнуть, что, по существу, такая модель была еще раньше, в 1900 г., построена Л. Башелье [12] в связи с описанием движения цен акций и других финансовых индексов на парижском рынке ценных бумаг.

В гл. I (§ 1b) отмечалось, что у Л. Башелье броуновское движение возникло, в сущности, как (формальный) предел простейших случайных блужданий.

Именно, пусть  $(\xi_k)_{k \geq 1}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих два значения  $\pm 1$  с вероятностями  $\frac{1}{2}$  («схема Бернулли»). Возьмем полупрямую  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  и для каждого  $\Delta > 0$  образуем процесс  $S^{(\Delta)} = (S_t^{(\Delta)})_{t \geq 0}$  с кусочно постоянными тра-

екториями

$$S_t^{(\Delta)} = x + \sum_{k=1}^{\lfloor t/\Delta \rfloor} \sqrt{\Delta} \xi_k. \quad (1)$$

По процессам  $S^{(\Delta)}$  можно образовать также случайные процессы  $\bar{S}^{(\Delta)} = (\bar{S}_t^{(\Delta)})_{t \geq 0}$  с непрерывными траекториями, полагая

$$\bar{S}_t^{(\Delta)} = S_{k\Delta}^{(\Delta)} + \frac{1}{\Delta}(t - k\Delta)(S_{(k+1)\Delta}^{(\Delta)} - S_{k\Delta}^{(\Delta)}). \quad (2)$$

Из многомерной центральной предельной теоремы (см., например, [51, гл. 8], [439, гл. VII, § 8]) можно заключить, что для любых  $t_1, \dots, t_k$ ,  $k \geq 1$ , конечномерные распределения  $\text{Law}(S_{t_1}^{(\Delta)}, \dots, S_{t_k}^{(\Delta)})$  и  $\text{Law}(\bar{S}_{t_1}^{(\Delta)}, \dots, \bar{S}_{t_k}^{(\Delta)})$  сходятся (слабо) к конечномерным распределениям  $\text{Law}(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ , где  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — стандартное броуновское движение.

На самом деле можно утверждать больше:

$$\text{Law}(S_t^{(\Delta)}, t \geq 0) \rightarrow \text{Law}(B_t, t \geq 0)$$

и

$$\text{Law}(\bar{S}_t^{(\Delta)}, t \geq 0) \rightarrow \text{Law}(B_t, t \geq 0)$$

в смысле слабой сходимости законов распределения в пространствах  $D$  (функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева) и  $C$  (непрерывных функций); подробнее см., например, [39], [250].

**2. Броуновское движение как марковский процесс.** Будем считать заданным вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Пусть  $B = (B_t(\omega))_{t \geq 0}$  — броуновское движение, заданное на этом пространстве.

Обозначим через  $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(B_s, s \leq t)$   $\sigma$ -алгебру событий, порожденную значениями  $B_s$ ,  $s \leq t$ , и пусть

$$\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s^0 \quad (3)$$

—  $\sigma$ -алгебра событий, наблюдаемых не только на интервале  $[0, t]$ , но и в «инфинитезимальном будущем» после момента  $t$ .

Отметим, что, в отличие от  $(\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$ , семейство  $(\mathcal{F}_t^+)_{t \geq 0}$  обладает важным свойством непрерывности справа:

$$\bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s^+ = \mathcal{F}_t^+. \quad (4)$$

На самом же деле между  $\sigma$ -алгебрами  $\mathcal{F}_t^0$  и  $\mathcal{F}_t^+$  нет существенной разницы в следующем смысле. Пусть  $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbf{P}(A) = 0\}$  — совокупность событий из  $\mathcal{F}$ , имеющих нулевую вероятность. Тогда  $\sigma$ -алгебра  $\sigma(\mathcal{F}_t^+ \cup \mathcal{N})$ , порожденная событиями из  $\mathcal{F}_t^+$  и  $\mathcal{N}$ , совпадает с  $\sigma$ -алгеброй  $\sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N})$ , порожденной событиями из  $\mathcal{F}_t^0$  и  $\mathcal{N}$ :

$$\sigma(\mathcal{F}_t^+ \cup \mathcal{N}) = \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}). \quad (5)$$

Это оправдывает введение нового семейства  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  с  $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}) \equiv \sigma(\mathcal{F}_t^+ \cup \mathcal{N})$ , обладающего, очевидно, свойством пополненности каждой  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_t$  множествами нулевой вероятности и свойством непрерывности справа,  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ . (О соответствующем стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  говорят, что он удовлетворяет *обычным условиям*; см. далее п. 3.)

Пусть  $T > 0$  и  $\tilde{B}(T) = (\tilde{B}_t(T; \omega))_{t \geq 0}$  — процесс, получаемый из броуновского движения  $B = (B_t(\omega))_{t \geq 0}$  по формуле

$$\tilde{B}_t(T; \omega) = B_{t+T}(\omega) - B_T(\omega).$$

В п. 2 § 3а уже отмечалось, что 1) процесс  $\tilde{B}(T)$  также является *броуновским движением*, и нетрудно показать, что 2)  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_T^0 = \sigma(B_s, s \leq T)$  и  $\tilde{\mathcal{F}}_\infty^0(T) = \sigma(\tilde{B}_s(T), s \geq 0)$  независимы. (Как обычно, сначала устанавливается независимость событий из алгебр соответствующих цилиндрических множеств с последующим использованием метода «монотонных» классов; см., например, [439, гл. II, § 2].)

Часто именно эти два факта называют *марковским свойством* броуновского движения (см., скажем, [288, гл. II]), из которого затем выводят иные формы, например следующее традиционное марковское свойство независимости «будущего» и «прошлого» при фиксированном «настоящем»: если  $f = f(x)$  — ограниченная борелевская функция и  $\sigma(B_T)$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная процессом  $B_T$ , то для всякого  $t > 0$  (Р-п. н.) выполняется равенство

$$\mathbf{E}(f(B_{T+t}) | \mathcal{F}_T^0) = \mathbf{E}(f(B_{T+t}) | \sigma(B_T)). \quad (6)$$

Эта аналитическая форма марковского свойства допускает разнообразные обобщения. Например, вместо  $\mathcal{F}_T^0$  можно рассматривать  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}_T$ , а вместо  $f(B_{T+t})$  — ограниченные «функционалы от траектории  $f(B_{T+t}, t \geq 0)$ ». Подробнее см., например, [123], [126].

Следующее обобщение, приводящее к *строго марковскому* свойству, относится к распространению изложенных выше марковских свойств на тот случай, когда вместо (детерминированных) моментов  $T$  рассматриваются случайные марковские моменты  $\tau = \tau(\omega)$ .

С этой целью предположим, что  $\tau = \tau(\omega)$  является конечным марковским моментом (относительно потока  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ).

По аналогии с процессом  $\tilde{B}(T)$  введем процесс  $\tilde{B}(\tau) = (\tilde{B}_t(\tau(\omega); \omega))_{t \geq 0}$ , полагая

$$\tilde{B}_t(\tau(\omega); \omega) = B_{t+\tau(\omega)}(\omega) - B_{\tau(\omega)}(\omega). \quad (7)$$

Согласно простейшей версии строго марковского свойства процесс  $\tilde{B}(\tau)$  также является броуновским движением, и  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_\tau$  (см. определение 2 в § 1f гл. II) и  $\tilde{\mathcal{F}}_\infty^0(\tau) \equiv \sigma(\tilde{\mathcal{F}}_\infty^0(\tau) \cup \mathcal{N})$  независимы; см., например, [123], [126], [288].



Аналитическое свойство (6) допускает следующее вполне естественное обобщение:

$$\mathbb{E}(f(B_{\tau(\omega)+t}(\omega)) | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(f(B_{\tau(\omega)+t}(\omega)) | \sigma(B_\tau)) \quad (\text{Р-п. н.}). \quad (8)$$

(«Функциональные» расширения этого свойства приведены, например, в указанных выше книгах [123], [126], [288].)

**3. Броуновское движение и квадратично интегрируемые мартингалы.** Непосредственно из определения броуновского движения  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  следует выполнение следующих свойств: для  $t \geq 0$

$$B_t \text{ являются } \mathcal{F}_t\text{-измеримыми,} \quad (9)$$

$$\mathbb{E} |B_t| < \infty, \quad (10)$$

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s \quad (\text{Р-п. н.}) \text{ для } s \leq t. \quad (11)$$

Эти три свойства в точности есть определение того, что процесс  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  является *мартингалом* относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)$  и вероятностной меры  $\mathbb{P}$ . (Ср. с определением 2 в § 1с гл. II.)

Далее, поскольку

$$\mathbb{E}(B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{F}_s) = t - s, \quad (12)$$

процесс  $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$  также является мартингалом.

Предположим теперь, что  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  есть *некоторый* процесс, удовлетворяющий свойствам (9)–(12). Весьма замечательно, что, в сущности, этими свойствами однозначно определяется вероятностная структура этого процесса.

Именно, будем предполагать, что  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  — некоторое фильтрованное вероятностное пространство с потоком  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , удовлетворяющих *обычным условиям* [250, гл. I, § 1]: непрерывности справа и пополненности по мере  $\mathbb{P}$ . (Отметим, что здесь  $\mathcal{F}_t$  —  $\sigma$ -алгебры, вовсе не обязательно совпадающие с введенными ранее  $\sigma$ -алгебрами  $\sigma(\mathcal{F}_t^+ \cup \mathcal{N})$ .)

Всякий процесс  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ , удовлетворяющий свойствам (9)–(11), называется *мартингалом*. Чтобы подчеркнуть свойство измеримости относительно потока  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  и меры  $\mathbb{P}$ , для  $B$  часто используют также запись  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)$  или  $B = (B_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ . (Ср. с определениями в § 1с гл. II для случая дискретного времени.)

**Теорема (Леви, [298]).** Пусть  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — непрерывный квадратично интегрируемый мартингал, заданный на некотором фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . Пусть выполнено свойство (12), т. е.  $(B_t^2 - t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  также является мартингалом.

Тогда  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  является стандартным броуновским движением.

Доказательство см. далее в § 5с.

**4. Тождества Вальда. Теоремы о сходимости и остановке для равномерно интегрируемых мартингалов.** Для броуновского движения

$$\mathbb{E} B_t = 0, \quad \mathbb{E} B_t^2 = t.$$

Во многих вопросах стохастического анализа возникает необходимость в отыскании  $\mathbb{E} B_\tau$  и  $\mathbb{E} B_\tau^2$  для марковских моментов  $\tau$  (относительно потока  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ).

Следующие соотношения являются расширенными версиями *тождеств Вальда* для  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sqrt{\tau} < \infty &\Rightarrow \mathbb{E} B_\tau = 0, \\ \mathbb{E} \tau < \infty &\Rightarrow \mathbb{E} B_\tau^2 = \mathbb{E} \tau. \end{aligned}$$

В том частном случае, когда  $\tau$  является ограниченным марковским моментом ( $\mathbb{P}(\tau \leq c) = 1$  для некоторой константы  $c > 0$ ), равенства  $\mathbb{E} B_\tau = 0$  и  $\mathbb{E} B_\tau^2 = \mathbb{E} \tau$  непосредственно вытекают из следующего результата.

**Теорема 1** (Дж. Л. Дуб, [109]). Пусть  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — равномерно интегрируемый мартингал (т. е. такой, что  $\sup_t \mathbb{E}(|X_t| |I(|X_t| > N)|) \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ ). Тогда

- 1) существует такая интегрируемая случайная величина  $X_\infty$ , что при  $t \rightarrow \infty$  имеют место сходимости

$$\begin{aligned} X_t &\rightarrow X_\infty \quad (\text{Р-п. н.}), \\ \mathbb{E} |X_t - X_\infty| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

и для всех  $t \geq 0$  выполняется равенство

$$\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) = X_t \quad (\text{Р-п. н.});$$

- 2) для любых марковских моментов  $\sigma$  и  $\tau$  выполняется равенство

$$X_{\tau \wedge \sigma} = \mathbb{E}(X_\sigma | \mathcal{F}_\tau) \quad (\text{Р-п. н.}),$$

где  $\tau \wedge \sigma = \min(\tau, \sigma)$ .

(Ср. с теоремами Дуба о сходимости и остановке для случая дискретного времени в § 3а гл. V.)

**5. Стохастическая экспонента.** В § 1а гл. II было дано определение *стохастической экспоненты*  $\mathcal{E}(\widehat{H})_t$  для процессов  $\widehat{H} = (\widehat{H}_t)_{t \geq 0}$ , являющихся семимартингалами.

Применительно к случаю  $\widehat{H}_t = \lambda B_t$  стохастическая экспонента  $\mathcal{E}(\lambda B)_t$  определяется равенством

$$\mathcal{E}(\lambda B)_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}. \quad (13)$$

Из формулы Ито (§ 3d) непосредственно следует, что  $X_t = \mathcal{E}(\lambda B)_t$  удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = \lambda X_t dB_t \quad (14)$$

с начальным условием  $X_0 = 1$ .

Если  $\xi$  имеет распределение  $\mathcal{N}(0, 1)$ , то

$$\mathbb{E} e^{\lambda \xi - \frac{\lambda^2}{2}} = 1.$$

Из этого свойства и автомодельности броуновского движения ( $\text{Law}(\lambda B_t) = \text{Law}(\lambda \sqrt{t} B_1)$ ) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\left\{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right\} &= \mathbb{E} \exp\left\{\lambda B_t - \frac{(\lambda \sqrt{t})^2}{2}\right\} = \\ &= \mathbb{E} \exp\left\{(\lambda \sqrt{t}) B_1 - \frac{(\lambda \sqrt{t})^2}{2}\right\} = 1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом показывается, что для всех  $s \leq t$  выполняется равенство

$$\mathbb{E}(\mathcal{E}(\lambda B)_t | \mathcal{F}_s) = \mathcal{E}(\lambda B)_s \quad (\text{Р-п. н.}). \quad (15)$$

Иначе говоря, стохастическая экспонента  $\mathcal{E}(\lambda B) = (\mathcal{E}(\lambda B)_t)_{t \geq 0}$  является мартингалом.

**6. Конструкции броуновского движения.** Пусть  $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \geq 0}$  — гауссовский белый шум, т. е. последовательность независимых нормально распределенных,  $\mathcal{N}(0, 1)$ , случайных величин. Будем через  $H_k = H_k(t)$ ,  $k \geq 0$ , обозначать функции Хаара (см., например, [439, гл. II, § 11], определенные на временном интервале  $[0, 1]$ , и пусть

$$S_k(t) = \int_0^t H_k(s) ds$$

— функции Шаудера.

Положим

$$B_t^{(n)} = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k S_k(t).$$

Из результатов П. Леви [298] и З. Чисельского [76] следует, что (Р-п. н.) случайные функции  $(B_t^{(n)})_{0 \leq t \leq 1}$  сходятся (по  $t$ ) равномерно и их непрерывный предел является стандартным броуновским движением.

Более ранняя конструкция броуновского движения была дана в 1934 году Р. Пэли и Н. Винером [374] в виде (равномерно сходящегося) ряда

$$B_t \equiv \varepsilon_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \sqrt{2} \varepsilon_k \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \right).$$

**7. Локальные свойства траекторий.** Следующие результаты хорошо известны, и их доказательство содержится во многих монографиях и учебных пособиях (см., например, [124], [245], [266], [470]).

С вероятностью единица броуновские траектории

а) удовлетворяют условию Гёльдера

$$|B_t - B_s| \leq c |t - s|^\gamma$$

с любым  $\gamma < \frac{1}{2}$ ;

б) не удовлетворяют условию Липшица и, следовательно, недифференцируемы в каждой точке  $t > 0$ ;

с) имеют неограниченную вариацию на любом интервале  $(a, b)$ :  $\int_{(a,b)} |dB_s| = \infty$ .

**8. Нули траекторий броуновского движения.** Пусть  $(B_t(\omega))_{t \geq 0}$  — некоторая траектория броуновского движения, соответствующая элементарному исходу  $\omega \in \Omega$ , и пусть

$$\mathfrak{N}(\omega) = \{0 \leq t < \infty : B_t(\omega) = 0\}$$

— множество нулей.

Имеют место следующие свойства ([124], [245], [266], [470]): Р-п. н.

а) мера Лебега  $\lambda(\mathfrak{N}(\omega))$  равна 0;

б) точка  $t = 0$  является точкой сгущения нулей;

с) на  $(0, \infty)$  нет изолированных нулей, и, следовательно, множество  $\mathfrak{N}(\omega)$  плотно в себе;

д) множество  $\mathfrak{N}(\omega)$  замкнуто и неограничено.

**9. Поведение в нуле.** Локальный закон повторного логарифма утверждает, что (Р-п. н.)

$$\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t \ln |\ln t|}} = 1.$$

Из этого свойства применительно к броуновским движениям  $(B_{t+h} - B_t)_{h \geq 0}$  вытекает, что (Р-п. н.) для любого  $t \geq 0$  выполняется равенство

$$\overline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{h}} = \infty,$$

откуда, в частности, следует, что броуновские траектории не удовлетворяют, как уже было отмечено выше, условию Липшица.

**10. Модуль непрерывности** является наглядной мерой, позволяющей судить о характере осцилляций функций, траекторий и т. д. Известный результат П. Леви [298] относительно модуля непрерывности для траекторий

броуновского движения утверждает, что с вероятностью единица

$$\overline{\lim}_{h \downarrow 0} \frac{\max_{0 \leq s < t \leq 1, t-s \leq h} |B_t - B_s|}{\sqrt{2h \ln(1/h)}} = 1.$$

### 11. Поведение при $t \rightarrow \infty$ . С вероятностью единица

$$\frac{B_t}{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

(усиленный закон больших чисел).

Более того,

$$\frac{B_t}{\sqrt{t \ln t}} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (\text{Р-п. н.}),$$

но

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|B_t|}{\sqrt{t}} = \infty \quad (\text{Р-п. н.}).$$

Точный характер поведения траекторий броуновского движения при  $t \rightarrow \infty$  описывается законом повторного логарифма:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \quad (\text{Р-п. н.}). \quad (16)$$

**12. Квадратическая вариация.** Хотя траектории броуновского движения (Р-п. н.) имеют неограниченную вариацию,  $\int_{(a,b)} |dB_s| = \infty$ , однако в определенном смысле можно утверждать, что  $\int_{(a,b)} |dB_s|^2 = b - a$ .

Соответствующее утверждение, играющее ключевую роль во многих вопросах стохастического анализа (например, при доказательстве формулы Ито; § 3d), формулируется следующим образом.

Пусть  $T^{(n)} = (t_0^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)})$  — такое разбиение отрезка  $[a, b]$ , что

$$a = t_0^{(n)} \leq \dots \leq t_{k_n}^{(n)} = b.$$

Пусть

$$\|T^{(n)}\| = \sup_{0 \leq k < k_n} |t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}|. \quad (17)$$

Тогда

а) если  $\|T^{(n)}\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} |B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}}|^2 \xrightarrow{P} b - a; \quad (18)$$

б) если  $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^{(n)}\| < \infty$ , то в формуле (18) сходимость имеет место с вероятностью единица;

с) если  $B^{(1)}$  и  $B^{(2)}$  — два независимых броуновских движения и  $\|T^{(n)}\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} (B_{t_{k+1}}^{(1)} - B_{t_k}^{(1)}) (B_{t_{k+1}}^{(2)} - B_{t_k}^{(2)}) \xrightarrow{P} 0. \quad (19)$$

В символической форме утверждения (18) и (19) часто записывают в следующем виде:

$$(dB_t)^2 = dt, \quad dB_t^{(1)} dB_t^{(2)} = 0. \quad (20)$$

**13. Моменты достижения уровней.** а) Пусть  $a > 0$  и  $T_a = \inf\{t \geq 0: B_t = a\}$ . Очевидно, что

$$P(T_a < t) = P(\sup_{s \leq t} B_s > a), \quad (21)$$

и с помощью принципа отражения Д. Андрэ (D. André) находим, что

$$P(T_a < t) = 2P(B_t \geq a). \quad (22)$$

(См., например, [124], [266], [439].)

Поскольку

$$P(B_t \geq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}} dx, \quad (23)$$

получаем, что

$$P(T_a < t) = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} ds, \quad (24)$$

и, следовательно, плотность  $p_a(t) = \frac{\partial P(T_a < t)}{\partial t}$  определяется формулой

$$p_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}. \quad (25)$$

Отсюда вытекает, между прочим, что  $P(T_a < \infty) = 1$ ,  $E T_a = \infty$  и преобразование Лапласа имеет вид

$$E e^{-\lambda T_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}. \quad (26)$$

Полезно отметить, что процесс  $T = (T_a)_{a \geq 0}$  является (в силу строго марковского свойства броуновского движения) процессом со стационарными независимыми приращениями. Более того, этот процесс является устойчивым с параметром  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\text{Law}(T_a) = \text{Law}(a^2 T_1)$ . Ср. с п. 4 в § 1с.

б) Пусть  $a > 0$  и  $S_a = \inf\{t \geq 0: |B_t| = a\}$ . Покажем, что  $E S_a = a^2$  и преобразование Лапласа имеет вид

$$E e^{-\lambda S_a} = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}. \quad (27)$$

В силу тождества Вальда для всякого  $t > 0$  имеем  $E B_{S_a \wedge t}^2 = E(S_a \wedge t)$ , и, значит,  $E(S_a \wedge t) \leq a^2$ . Следовательно, по теореме о монотонной сходимости

$E S_a = \lim_{t \rightarrow \infty} E(S_a \wedge t) \leq a^2$ . (Отсюда, конечно, следует, что  $S_a < \infty$  с вероятностью единица.) Но коль скоро  $E S_a < \infty$ , то снова согласно тождеству Вальда  $E B_{S_a}^2 = E S_a$ . С учетом равенства  $B_{S_a}^2 = a$  отсюда находим, что  $E S_a = a^2$ .

С целью доказательства равенства (27) рассмотрим мартингал  $X^{(a)} = (X_{t \wedge S_a}, \mathcal{F}_t)$ ,

$$X_{t \wedge S_a} = \exp\left\{\lambda B_{t \wedge S_a} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge S_a)\right\}. \quad (28)$$

Поскольку  $|B_{t \wedge S_a}| \leq a$ , этот мартингал является равномерно интегрируемым, и согласно теореме Дуба из п. 4 имеем

$$E X_{t \wedge S_a} = 1. \quad (29)$$

По теореме о мажорируемой сходимости в этом равенстве можно перейти к пределу по  $t \rightarrow \infty$ , что дает соотношение

$$E X_{S_a} = 1,$$

т. е.

$$E \exp\left\{\lambda B_{S_a} - \frac{\lambda^2}{2} S_a\right\} = 1. \quad (30)$$

Поскольку  $P(S_a < \infty) = 1$  и  $P(B_{S_a} = a) = P(B_{S_a} = -a) = \frac{1}{2}$  из соображений симметрии, из формулы (30) следует требуемое равенство (27).

с) Пусть  $T_{a,b} = \inf\{t : B_t = a + bt\}$ ,  $a > 0$ . Если  $b \leq 0$ , то  $P(T_{a,b} < \infty) = 1$ , и из мартингалности процесса  $(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t})_{t \geq 0}$  получаем, полагая  $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$ , что преобразование Лапласа имеет вид

$$E e^{-\lambda T_{a,b}} = \exp\{-a[b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}]\}. \quad (31)$$

Из этой формулы или непосредственно из тождества Вальда  $0 = E B_{T_{a,b}}$  ( $= a + b E T_{a,b}$ ) находим, что (для всех  $t \geq 0$ ,  $\omega \in \Omega$  таких, что  $B_t(\omega) \leq a + bt$ )

$$E T_{a,b} = -\frac{a}{b}.$$

(С помощью приема, изложенного после формулы (27), доказывается, что  $E T_{a,b} < \infty$ .)

Если  $b > 0$ , то, рассматривая мартингал  $(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t})_{t \geq 0}$  с  $\theta = 2b$ , находим, что

$$\exp\left\{2bB_t - \frac{(2b)^2 t}{2}\right\} \leq \exp\left\{2b(a + bt) - \frac{(2b)^2 t}{2}\right\} \leq e^{2ab},$$

и, значит, этот мартингал является равномерно интегрируемым. Поэтому

$$\begin{aligned} 1 &= E \exp\left\{\theta B_{T_{a,b}} - \frac{\theta^2}{2} T_{a,b}\right\} = \\ &= E \exp\left\{\theta B_{T_{a,b}} - \frac{\theta^2}{2} T_{a,b}\right\} I(T_{a,b} < \infty) = P(T_{a,b} < \infty) e^{2ab}, \end{aligned}$$

и, тем самым, в случае  $a > 0$ ,  $b > 0$  (или  $a < 0$ ,  $b < 0$ ) имеем

$$P(T_{a,b} < \infty) = e^{-2ab}. \quad (32)$$

**14. Максимальные неравенства.** Пусть  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — броуновское движение. Тогда для  $\lambda > 0$ ,  $p \geq 1$  и конечного марковского момента  $T$  имеем

$$P(\max_{t \leq T} |B_t| \geq \lambda) \leq \frac{E |B_T|^p}{\lambda^p}; \quad (33)$$

в случае  $p > 1$  получаем

$$E |B_T|^p \leq E \max_{t \leq T} |B_t|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E |B_T|^p. \quad (34)$$

В частности, при  $p = 2$  имеем

$$P(\max_{t \leq T} |B_t| \geq \lambda) \leq \frac{E B_T^2}{\lambda^2}, \quad (35)$$

$$E \max_{t \leq T} B_t^2 \leq 4 E B_T^2. \quad (36)$$

Неравенства (33) и (35) носят название «неравенств Колмогорова и Дуба», неравенства (34), (36) — «неравенств Дуба». См., например, [109], [110], [124], [303], [304], [402].

Из неравенства (36) следует, что

$$E \max_{t \leq T} |B_t| \leq 2 \sqrt{E B_T^2}. \quad (37)$$

Если  $E T < \infty$ , то  $E B_T^2 = E T$  и, следовательно,

$$E \max_{t \leq T} |B_t| \leq 2 \sqrt{E T}. \quad (38)$$

Как показано в работе [116], неравенство (38) может быть уточнено: на самом деле

$$E \max_{t \leq T} |B_t| \leq \sqrt{2} \sqrt{E T}, \quad (39)$$

при этом константа  $\sqrt{2}$  является оптимальной.

Из неравенства (39) следует, что для  $T = 1$  имеем

$$E \max_{t \leq 1} |B_t| \leq \sqrt{2}. \quad (40)$$

Интересно, конечно, найти точное значение  $E \max_{t \leq 1} |B_t|$ .

Следующие рассуждения показывают, что

$$E \max_{t \leq 1} |B_t| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (41)$$



Из автомодельности броуновского движения ( $S_1 = \inf\{t \geq 0: |B_t| = 1\}$ ) получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{t \leq 1} |B_t| \leq x \right\} &= \left\{ \sup_{t \leq 1} \frac{1}{x} |B_t| \leq 1 \right\} = \left\{ \sup_{t \leq 1} |B_{t/x^2}| \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ \sup_{t \leq 1/x^2} |B_t| \leq 1 \right\} = \left\{ S_1 \geq \frac{1}{x^2} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{S_1}} \leq x \right\}. \end{aligned}$$

Тем самым,  $\text{Law}(\sup_{t \leq 1} |B_t|) = \text{Law}\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}\right)$ .

Далее, из свойств нормального интеграла следует, что для всякого  $\sigma > 0$  выполняется равенство

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

поэтому, взяв  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{S_1}}$ , из формулы (27) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \max_{t \leq 1} |B_t| &= \mathbb{E} \frac{1}{\sqrt{S_1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbb{E} e^{-\frac{x^2 S_1}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{dx}{\text{ch } x} = \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_1^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \arctg x \Big|_1^\infty = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

что и доказывает требуемую формулу (41).

### § 3с. Стохастический интеграл по броуновскому движению

1. В классическом анализе имеются различные подходы к «операциям интегрирования», приводящие к таким, вообще говоря, отличающимся друг от друга понятиям, как, например, интегралы Римана, Лебега, Римана—Стилтьеса, Лебега—Стилтьеса, Данжуа и др. (См. статью А. Н. Колмогорова «Исследование понятия интеграла» в книге [277].)

В стохастическом анализе также рассматриваются разные подходы к интегрированию случайных функций по случайным процессам, случайным мерам и т. д., приводящие к различным конструкциям «стохастических интегралов».

Видимо, Н. Винер был первым, кто дал определение стохастического интеграла

$$I_t(f) \equiv \int_{(0,t]} f(s) dB_s \quad (1)$$

для детерминированных гладких функций  $f = f(s)$ ,  $s \geq 0$ , воспользовавшись идеей «интегрирования по частям». (См. [375] и [476].)

Именно, отправляясь от «естественности» формулы  $d(fB) = f dB + B df$ , по определению полагаем

$$I_t(f) = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds, \quad (2)$$

где интеграл  $\int_0^t f'(s)B_s ds$  понимается как потраекторный (т. е. для каждого  $\omega \in \Omega$ ) интеграл Римана от непрерывных функций  $f'(s)B_s(\omega)$ ,  $s \geq 0$ .

2. В 1944 году К. Ито [244] сделал существенный шаг в расширении понятия «стохастический интеграл», заложив тем самым фундамент *современного стохастического исчисления*, являющегося одним из мощных и эффективных средств исследования случайных процессов.

Конструкция К. Ито состоит в следующем.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  — фильтрованное вероятностное пространство, удовлетворяющее обычным условиям (см. п. 2 в § 3b и подробнее, например, [250]). Пусть  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — стандартное броуновское движение и  $f = (f(t, \omega))_{t \geq 0, \omega \in \Omega}$  — случайная функция, являющаяся измеримой по  $(t, \omega)$  и *неупреждающей* (не зависящей от «будущего»), т. е. такой, что при каждом  $t \geq 0$

величина  $f(t, \omega)$  является  $\mathcal{F}_t$ -измеримой.

Такие функции  $f = f(t, \omega)$  называют также *согласованными* или *адаптированными* (с семейством  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ).

Примером такой функции является *элементарная* функция

$$f(t, \omega) = Y(\omega)I_{\{0\}}(t), \quad (3)$$

где  $Y(\omega)$  —  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина.

Другим примером может служить функция (также называемая *элементарной*)

$$f(t, \omega) = Y(\omega)I_{[r, s]}(t), \quad (4)$$

где  $0 \leq r < s$  и случайная величина  $Y(\omega)$  является  $\mathcal{F}_r$ -измеримой.

Для функций типа (3), «сидящих» (по времени) в точке  $t = 0$ , «естественно определенное» значение стохастического интеграла

$$I_t(f) = \int_{(0, t]} f(s, \omega) dB_s$$

есть ноль. Для функции же типа (4) «естественным» значением  $I_t(f)$  является значение  $Y(\omega)[B_{s \wedge t} - B_{r \wedge t}]$ .

Если имеется *простая* функция  $f = f(t, \omega)$ , являющаяся линейной комбинацией элементарных функций,

$$f(t, \omega) = Y_0(\omega)I_{\{0\}}(t) + \sum_i Y_i(\omega)I_{[t_i, s_i]}(t), \quad (5)$$

то по определению положим

$$I_t(f) = \int_{(0,t]} f(s, \omega) dB_s = \sum_i Y_i(\omega)(B_{s_i \wedge t} - B_{r_i \wedge t}). \quad (6)$$

**Замечание 1.** Подчеркнем, что при определении таких интегралов от элементарных функций вовсе нет необходимости предполагать, что  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — броуновское движение. В качестве процесса, по которому производится интегрирование, может выступать любой процесс. Однако специфика рассматриваемого сейчас броуновского движения становится существенной, если стремиться к тому, чтобы определить «стохастический интеграл» с простыми свойствами для более широкого запаса функций  $f = f(t, \omega)$ , а не только для элементарных и их линейных комбинаций — простых функций.

Условимся в дальнейшем под интегралами (обычными или стохастическими)  $\int_0^t \dots$  понимать интегралы  $\int_{(0,t]} \dots$  по множеству  $(0, t]$ . Величины  $Y_i(\omega)$  являются  $\mathcal{F}_{r_i}$ -измеримыми, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_i(\omega)(B_{r_i \wedge t} - B_{s_i \wedge t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_i(\omega)(B_{r_i \wedge t} - B_{s_i \wedge t}) | \mathcal{F}_{r_i}]] = \\ &= \mathbb{E}[Y_i(\omega) \mathbb{E}(B_{r_i \wedge t} - B_{s_i \wedge t}) | \mathcal{F}_{r_i}] = 0 \end{aligned}$$

и аналогично

$$\mathbb{E}[Y_i(\omega)(B_{r_i \wedge t} - B_{s_i \wedge t})]^2 = \mathbb{E}Y_i^2(r_i \wedge t - s_i \wedge t).$$

Отсюда следует, что если  $f = f(t, \omega)$  — простая функция, то

$$\mathbb{E} \int_0^t f(s, \omega) dB_s = 0 \quad (7)$$

и

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t f(s, \omega) dB_s \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^t f^2(s, \omega) ds, \quad (8)$$

или, в более компактной форме,

$$\mathbb{E} I_t(f) = 0, \quad (7')$$

$$\mathbb{E} I_t^2(f) = \mathbb{E} \int_0^t f^2(s, \omega) ds. \quad (8')$$

**3.** Опишем теперь те классы функций  $f = f(t, \omega)$ , на которые можно распространить понятие «стохастического интеграла» с сохранением «естественных» свойств, например, типа (7) и (8).

Будем предполагать, что все рассматриваемые функции  $f = f(t, \omega)$  заданы на  $\mathbb{R}_t \times \Omega$  и являются неупреждающими.

Если для каждого  $t > 0$  выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty\right) = 1, \quad (9)$$

то будем говорить, что  $f$  принадлежит классу  $J_1$ .

Если к тому же для всех  $t > 0$  выполняется неравенство

$$\mathbf{E} \int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty, \quad (10)$$

то будем говорить, что  $f$  принадлежит классу  $J_2$ .

Именно для этих классов функций К. Ито дал в [244] «естественное» определение стохастических интегралов  $I_t(f)$ , основываясь на следующих соображениях.

Поскольку траектории броуновского движения (Р-п. н.) имеют неограниченную вариацию (см. п. 7 в § 3b), интегралы  $I_t(f) = \int_0^t f(s, \omega) dB_s$  нельзя понимать как потраекторные интегралы Лебега—Стилтьеса. Идея К. Ито заключалась в том, чтобы определить этот интеграл как предел (в подходящем вероятностном смысле) интегралов  $I_t(f_n)$  от простых функций  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , аппроксимирующих исходные функции  $f$ .

Оказалось (см. [244] и подробнее, например, [303, гл. 4]), что если  $f \in J_2$ , то можно найти такую последовательность простых функций  $f_n = f_n(t, \omega)$ , что для каждого  $t \geq 0$

$$\mathbf{E} \int_0^t [f(s, \omega) - f_n(s, \omega)]^2 ds \rightarrow 0. \quad (11)$$

Тем самым, если  $f \in J_2$ , то

$$\mathbf{E} \int_0^t [f_n(s, \omega) - f_m(s, \omega)]^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В силу соотношения (8) выполнено *свойство изометрии*

$$\mathbf{E}[I_t(f_n) - I_t(f_m)]^2 = \mathbf{E} \int_0^t [f_n(s, \omega) - f_m(s, \omega)]^2 ds, \quad (13)$$

которое вместе с соотношением (12) показывает, что последовательность случайных величин  $\{I_t(f_n)\}_{n \geq 1}$  является фундаментальной в смысле сходимости в среднем квадратическом (т. е. в  $L^2$ ).

Отсюда и из критерия Коши сходимости в  $L^2$  (см., например, [439, гл. II, § 10]) вытекает, что существует случайная величина в  $L^2$ , обозначаемая  $I_t(f)$ , для которой

$$I_t(f) = \text{l.i.m. } I_t(f_n),$$

т. е.

$$\mathbf{E}[I_t(f) - I_t(f_n)]^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для полученного таким образом предела  $I_t(f)$ , не зависящего, как легко показать, от выбора аппроксимирующей последовательности  $(f_n)_{n \geq 1}$ , используется также обозначение  $\int_0^t f(s, \omega) dB_s$ , которое называют *стохастическим интегралом* от (неупреждающей) функции  $f = f(s, \omega)$  по броуновскому движению  $B = (B_s)_{s \geq 0}$  на временном интервале  $(0, t]$ .

Остановимся на свойствах определенных таким образом интегралов  $I_t(f)$ ,  $t > 0$ , для  $f \in J_2$ , отсылая за подробностями, например, к [123], [250], [288], [303].

(а) Если  $f, g \in J_2$ , то для констант  $a$  и  $b$  выполняется равенство

$$I_t(af + bg) = aI_t(f) + bI_t(g).$$

(б) Согласованным образом можно выбрать такие версии случайных величин  $I_t(f)$ ,  $t > 0$ , что процесс  $I(f) = (I_t(f))_{t \geq 0}$  с  $I_0(f) = 0$  будет непрерывным случайным процессом (именно такая модификация всюду далее и рассматривается), при этом

$$I_s(f) = I_t(fI_{(0,s]}), \quad s \leq t. \quad (14)$$

(с) Если  $\tau = \tau(\omega)$  — такой марковский момент, что  $\tau(\omega) \leq T$ , то

$$I_\tau(f) = I_T(fI_{(0,\tau]}), \quad (15)$$

где по определению  $I_\tau(f) = I_{\tau(\omega)}(f)$ .

(д) Процесс  $I(f) = (I_t(f))_{t \geq 0}$  является квадратично интегрируемым мартингалом, т. е.

$I_t(f)$  являются  $\mathcal{F}_t$ -измеримыми,  $t > 0$ ;

$$\mathbb{E} I_t^2(f) < \infty, \quad t > 0;$$

$$\mathbb{E}(I_t(f) | \mathcal{F}_s) = I_s(f).$$

При этом если  $f, g \in J_2$ , то

$$\mathbb{E} I_t(f) I_t(g) = \mathbb{E} \int_0^t f(s, \omega) g(s, \omega) ds. \quad (16)$$

**Замечание 2.** По аналогии с обозначениями, которые мы уже использовали в случае дискретного времени (см. определение 7 в § 1с гл. II), для  $I_t(f)$  часто используется также обозначение  $(f \cdot B)_t$ , ср. с [250, гл. I, § 4d].

Перейдем теперь к определению стохастических интегралов  $I_t(f)$  для функций из класса  $J_1$ , отсылая за деталями к [303, гл. 4, § 4].

Пусть  $f \in J_1$ , т. е.  $\mathbb{P}(\int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty) = 1$ ,  $t > 0$ . Тогда существует такая последовательность функций  $f^{(m)} \in J_2$ ,  $m \geq 1$ , что для всякого  $t > 0$  выполняется условие

$$\int_0^t [f(s, \omega) - f^{(m)}(s, \omega)]^2 ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

(символ « $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ » означает сходимость по вероятности).

Для  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  имеем

$$\mathbf{P}\{|I_t(f^{(m)}) - I_t(f^{(n)})| > \delta\} \leq \frac{\varepsilon}{\delta^2} + \mathbf{P}\left(\int_0^t [f^{(m)}(s, \omega) - f^{(n)}(s, \omega)]^2 ds > \varepsilon\right),$$

поэтому, переходя к пределу сначала при  $m, n \rightarrow \infty$ , а затем при  $\varepsilon \downarrow 0$ , находим, что для всякого  $\delta > 0$  выполняется условие

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|I_t(f^{(m)}) - I_t(f^{(n)})| > \delta\} = 0.$$

Тем самым, последовательность  $I_t(f^{(m)})$ ,  $m \geq 1$ , является фундаментальной по вероятности, и, значит, согласно критерию Коши сходимости по вероятности [439, гл. II, § 10], существует такая случайная величина, обозначаемая  $I_t(f)$ , что

$$I_t(f^{(m)}) \xrightarrow{\mathbf{P}} I_t(f), \quad m \rightarrow \infty.$$

Величину  $I_t(f)$ , обозначаемую также  $(f \cdot B)_t$ ,  $\int_{(0, t]} f(s, \omega) dB_s$  или  $\int_0^t f(s, \omega) dB_s$ , называют стохастическим интегралом от функции  $f$  на интервале  $(0, t]$ .

Отметим ряд свойств стохастических интегралов  $I_t(f)$ ,  $t > 0$ , для функций  $f \in J_1$ .

Показывается, что снова можно согласованным образом так определить при разных  $t > 0$  стохастические интегралы  $I_t(f)$ , что процесс  $I(f) = (I_t(f))_{t \geq 0}$  будет иметь (P-п. н.) непрерывные траектории.

Отмеченные выше для функций  $f \in J_2$  свойства (а), (б), (с) также сохраняются и для функций  $f$  из класса  $J_1$ . Однако, свойство (d), вообще говоря, уже не имеет места и заменяется здесь на следующее.

(d') для  $f \in J_1$  процесс  $I(f) = (I_t(f))_{t \geq 0}$  является *локальным мартингалом*, т. е. существует такая последовательность  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  моментов остановки, что  $\tau_n \uparrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и для каждого  $n \geq 1$  «остановленные» процессы

$$I^{\tau_n}(f) = (I_{t \wedge \tau_n}(f))_{t \geq 0}$$

являются мартингалами. (Ср. с определением 4 в § 1с гл. II.)

4. Пусть  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — броуновское движение, заданное на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , и  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — семейство  $\sigma$ -алгебр, порожденных этим процессом (см. п. 2 в § 3b; для наглядности будем  $\mathcal{F}_t$  обозначать также через  $\mathcal{F}_t^B$ ,  $t \geq 0$ ).

Следующая теорема, основанная на понятии стохастического интеграла, описывает структуру броуновских функционалов.

**Теорема 1.** Пусть  $X = X(\omega)$  является  $\mathcal{F}_T$ -измеримой случайной величиной.

1. Если  $\mathbf{E} X^2 < \infty$ , то найдется такой случайный процесс  $f = (f_t(\omega), \mathcal{F}_t^B)_{t \leq T}$ , что

$$\mathbf{E} \int_0^T f_t^2(\omega) dt < \infty \quad (17)$$

и (Р-п. н.)

$$X = \mathbb{E} X + \int_0^T f_t(\omega) dB_t. \quad (18)$$

2. Если  $\mathbb{E} |X| < \infty$ , то представление (18) справедливо с некоторым процессом  $f = (f_t(\omega), \mathcal{F}_t^B)_{t \leq T}$ , удовлетворяющим условию

$$\mathbb{P} \left( \int_0^T f_t^2(\omega) dt < \infty \right) = 1. \quad (19)$$

3. Пусть  $X = X(\omega)$  является положительной случайной величиной ( $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ ) и  $\mathbb{E} X < \infty$ . Тогда найдется такой процесс  $\varphi = (\varphi_t(\omega), \mathcal{F}_t^B)_{t \leq T}$ , что  $\mathbb{P} \left( \int_0^T \varphi_t^2(\omega) dt < \infty \right) = 1$  и (Р-п. н.)

$$X = \mathbb{E} X \cdot \exp \left\{ \int_0^T \varphi_t(\omega) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T \varphi_t^2(\omega) dt \right\}. \quad (20)$$

Из этой теоремы выводится следующий результат о структуре броуновских мартингалов.

**Теорема 2. 1.** Пусть  $M = (M_t, \mathcal{F}_t^B)_{t \leq T}$  — квадратично интегрируемый мартингал. Тогда найдется процесс  $f = (f_t(\omega), \mathcal{F}_t^B)_{t \leq T}$ , удовлетворяющий свойству (17) и такой, что

$$M_t = M_0 + \int_0^t f_s(\omega) dB_s. \quad (21)$$

2. Пусть  $M = (M_t, \mathcal{F}_t^B)_{t \leq T}$  является локальным мартингалом, тогда представление (21) имеет место с некоторым процессом  $f = (f_t(\omega), \mathcal{F}_t^B)_{t \leq T}$ , подчиняющимся условию (19).

3. Пусть  $M = (M_t, \mathcal{F}_t^B)_{t \leq T}$  является положительным локальным мартингалом, тогда найдется такой процесс  $\varphi = (\varphi_t(\omega), \mathcal{F}_t^B)_{t \leq T}$ , что

$$\mathbb{P} \left( \int_0^T \varphi_t^2(\omega) dt < \infty \right) = 1$$

и

$$M_t = M_0 \exp \left\{ \int_0^t \varphi_s(\omega) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_s^2(\omega) ds \right\}.$$

Доказательство этих теорем, принадлежащих в основном Дж. Кларку (J. M. C. Clark, [77]) и в различных вариантах данных К. Ито и Дж. Дубом [109], [110], приводится во многих монографиях. См., например, [266], [303], [402].

### § 3d. Процессы и формула Ито

1. Данное выше понятие стохастического интеграла играет ключевую роль при определении следующего важного класса непрерывных случайных процессов.

Будем говорить, что случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , заданный на фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  с потоком  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , удовлетворяющим *обычным* условиям (см. п. 3 в § 3b), является *процессом Ито*, если существуют два неупреждающих процесса  $a = (a(t, \omega))_{t \geq 0}$  и  $b = (b(t, \omega))_{t \geq 0}$ , удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t |a(s, \omega)| ds < \infty\right) = 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t b^2(s, \omega) ds < \infty\right) = 1, \quad t > 0, \quad (2)$$

и такие, что

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t b(s, \omega) dB_s, \quad (3)$$

где  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — броуновское движение и  $X_0$  —  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина.

Для краткости вместо интегральной записи (3) часто используют (формальную) дифференциальную:

$$dX_t = a(t, \omega) dt + b(t, \omega) dB_t, \quad (4)$$

говоря при этом, что процесс Ито  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  имеет стохастический дифференциал (4).

**2.** Пусть теперь  $F(t, x)$  — заданная на  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  непрерывная функция из класса  $C^{1,2}$ , т. е. имеющая непрерывные производные  $\frac{\partial F}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ , и  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  — процесс с дифференциалом (4).

Как установлено К. Ито, при этих предположениях процесс  $F = (F(t, X_t))_{t \geq 0}$  также имеет стохастический дифференциал:

$$dF(t, X_t) = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + a(t, \omega) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(t, \omega) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + \frac{\partial F}{\partial x} b(t, \omega) dB_t. \quad (5)$$

Говоря более строго, при каждом  $t > 0$  для  $F(t, X_t)$  справедлива следующая *формула Ито (формула замены переменных)*:

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \left[ \frac{\partial F}{\partial s} + a(s, \omega) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(s, \omega) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x} b(s, \omega) dB_s. \quad (6)$$

(Доказательство можно найти во многих монографиях; см., например, [123], [250, гл. I, § 4e], [303, гл. 4, § 3].)



3. Приведем также многомерное обобщение формулы (6).

Будем предполагать, что  $B = (B^1, \dots, B^d)$  является  $d$ -мерным броуновским движением с независимыми (одномерными) броуновскими компонентами  $B^i = (B_t^i)_{t \geq 0}$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Говорят, что процесс  $X = (X^1, \dots, X^d)$  с  $X^i = (X_t^i)_{t \geq 0}$  есть  $d$ -мерный процесс Ито, если найдутся такие вектор  $a = (a^1, \dots, a^d)$  и матрица  $b = \|b^{ij}\|$  порядка  $d \times d$  с неупреждающими компонентами  $a^i = a^i(t, \omega)$  и  $b^{ij} = b^{ij}(t, \omega)$ , удовлетворяющими при  $t > 0$  условиям

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\int_0^t |a^i(s, \omega)| ds < \infty\right) &= 1, \\ \mathbb{P}\left(\int_0^t (b^{ij}(s, \omega))^2 ds < \infty\right) &= 1, \end{aligned}$$

что для  $i = 1, \dots, d$  выполняются соотношения

$$dX_t^i = a^i(t, \omega) dt + \sum_{j=1}^d b^{ij}(t, \omega) dB_t^j, \quad (7)$$

или, в векторной записи,

$$dX_t = a(t, \omega) dt + b(t, \omega) dB_t,$$

где векторы  $a(t, \omega) = (a^1(t, \omega), \dots, a^d(t, \omega))$ ,  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$  рассматриваются как вектор-столбцы.

Пусть теперь  $F(t, x_1, \dots, x_d)$  — непрерывная функция с непрерывными производными  $\frac{\partial F}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ ;  $i, j = 1, \dots, d$ .

Тогда имеет место следующий  $d$ -мерный вариант формулы Ито:

$$\begin{aligned} F(t, X_t^1, \dots, X_t^d) &= F(0, X_0^1, \dots, X_0^d) + \\ &+ \int_0^t \left[ \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s^1, \dots, X_s^d) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X_s^1, \dots, X_s^d) a^i(s, \omega) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s^1, \dots, X_s^d) \sum_{k=1}^d b^{ik}(s, \omega) b^{jk}(s, \omega) \right) \right] ds + \\ &+ \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X_s^1, \dots, X_s^d) b^{ij}(s, \omega) dB_s^j. \end{aligned} \quad (8)$$

Для непрерывных процессов  $X^i = (X_t^i)_{t \geq 0}$  введем обозначение  $\langle X^i, X^j \rangle = (\langle X^i, X^j \rangle_t)_{t \geq 0}$ , полагая

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t b^{ik}(s, \omega) b^{jk}(s, \omega) ds.$$

Тогда формуле (8) можно будет придать следующую компактную форму:

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s, \quad (9)$$

которая в терминах дифференциалов запишется в виде ( $F = F(t, X_t)$ )

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^i, X^j \rangle_t. \quad (10)$$

Интересно отметить, что если формально написать, пользуясь формулой Тейлора

$$dF = \frac{\partial F}{\partial s} dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dX_t^i dX_t^j, \quad (11)$$

то при соглашении, что

$$(dB_t^i)^2 = dt, \quad (12)$$

$$dB_t^i dt = 0, \quad (13)$$

$$dB_t^i dB_t^j = 0, \quad i \neq j, \quad (14)$$

из формулы (11) приходим к представлению (10), поскольку

$$dX_t^i dX_t^j = d\langle X^i, X^j \rangle_t. \quad (15)$$

**Замечание.** Формальным выражениям (15) и (14) можно придать вполне разумный смысл, если их понимать как условную запись предельных соотношений (2) и (3) из предыдущего параграфа 3б. Аналогично интерпретируется и выражение (13).

Доказательство формулы Ито в многомерном случае см., например, в монографии [250, гл. I, § 4е]. Обобщения этой формулы на функции  $F \notin C^{1,2}$  приведены, например, в работах [166], [402].

4. Приведем некоторые примеры, основанные на применении формулы Ито.

**Пример 1.** Пусть  $F(x) = x^2$  и  $X_t = B_t$ . Тогда согласно соотношению (11), формально имеем

$$dB_t^2 = 2B_t dB_t + (dB_t)^2$$

и с учетом равенства (12), находим, что

$$dB_t^2 = 2B_t dB_t + dt, \quad (16)$$

или, в интегральном виде,

$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t. \quad (17)$$

**Пример 2.** Пусть  $F(x) = e^x$  и  $X_t = B_t$ . Тогда

$$d(e^{B_t}) = e^{B_t} dB_t + \frac{1}{2} e^{B_t} (dB_t)^2,$$

т. е., с учетом равенства (11),

$$d(e^{B_t}) = e^{B_t} \left( dB_t + \frac{1}{2} dt \right). \quad (18)$$

Пусть  $F(t, x) = e^{x - \frac{1}{2}t}$  и  $X_t = B_t$ . Тогда формально имеем

$$dF(t, B_t) = -\frac{1}{2} F(t, B_t) dt + F(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} F(t, B_t) (dB_t)^2.$$

С учетом соглашения (12) видим, что

$$dF(t, B_t) = F(t, B_t) dB_t.$$

Пусть

$$\mathcal{E}(B)_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t} \quad (19)$$

— *стохастическая экспонента* (см. формулу (13) в § 1а гл. II). Тогда мы видим, что она допускает стохастический дифференциал

$$d\mathcal{E}(B)_t = \mathcal{E}(B)_t dB_t. \quad (20)$$

Это соотношение можно рассматривать как стохастическое дифференциальное уравнение (см. § 3а и далее, § 3е), решение которого задается формулой (19).

**Пример 3.** Обобщая предшествующий пример, рассмотрим процесс

$$Z_t = \exp \left\{ \int_0^t b(s, \omega) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(s, \omega) ds \right\}, \quad (21)$$

где  $b = (b(t, \omega))_{t \geq 0}$  является неупреждающим процессом,

$$\mathbb{P} \left( \int_0^t b^2(s, \omega) ds < \infty \right) = 1, \quad t > 0.$$

Если положить

$$X_t = \int_0^t b(s, \omega) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(s, \omega) ds$$

и  $F(x) = e^x$ , то, применяя формулу Ито (5), найдем, что процесс  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ , называемый «гирсановской экспонентой», имеет стохастический дифференциал

$$dZ_t = Z_t b(t, \omega) dB_t. \quad (22)$$

**Пример 4.** Пусть  $X_t = B_t$  и  $Y_t = t$ . Тогда

$$d(B_t t) = t dB_t + B_t dt,$$

или, в интегральном виде,

$$B_t t = \int_0^t s dB_s + \int_0^t B_s ds. \quad (23)$$

(Ср. с определением Н. Винера стохастического интеграла  $\int_0^t s dB_s$ , приведенным в п. 1 § 3с.)

**Пример 5.** Пусть  $F(x_1, x_2) = x_1 x_2$  и  $X^1 = (X_t^1)_{t \geq 0}$ ,  $X^2 = (X_t^2)_{t \geq 0}$  — два процесса, имеющие дифференциалы Ито. Тогда формально

$$d(X_t^1 X_t^2) = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + dX_t^1 dX_t^2. \quad (24)$$

Если, в частности,

$$dX_t^i = a^i(t, \omega) dt + b^i(t, \omega) dB_t^i, \quad i = 1, 2,$$

то

$$d(X_t^1 X_t^2) = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1. \quad (25)$$

Если же

$$dX_t^i = a^i(t, \omega) dt + b^i(t, \omega) dB_t, \quad i = 1, 2,$$

то

$$d(X_t^1 X_t^2) = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + b^1(t, \omega) b^2(t, \omega) dt. \quad (26)$$

**Пример 6.** Пусть  $X = (X^1, \dots, X^d)$  есть  $d$ -мерный процесс Ито, компоненты которого  $X^i$  имеют стохастические дифференциалы (7).

Пусть  $V = V(x)$  — действительная дважды непрерывно дифференцируемая функция  $x = (x_1, \dots, x_d)$  и

$$(L_t V)(x, \omega) = \sum_{i=1}^d a^i(t, \omega) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^d \left( \sum_{k=1}^d b^{ik}(t, \omega) b^{jk}(t, \omega) \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (27)$$

Тогда процесс  $(V(X_t))_{t \geq 0}$  имеет стохастический дифференциал (в матрично-векторной записи):

$$dV(X_t) = (L_t V)(X_t, \omega) dt + \frac{\partial V}{\partial x}(X_t) b(t, \omega) dB_t, \quad (28)$$

где

$$\frac{\partial V}{\partial x}(X_t) b(t, \omega) dB_t = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial V}{\partial x_i}(X_t) b^{ij}(t, \omega) dB_t^j. \quad (29)$$

**Пример 7.** Пусть  $V = V(t, x)$  — действительная непрерывная на  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$  функция, имеющая непрерывные производные  $\frac{\partial V}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ . Пусть также

$$\varphi_t = \int_0^t C(s, \omega) ds,$$

где  $C = C(t, \omega)$  — неупреждающая функция,

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t |C(s, \omega)| ds < \omega\right) = 1, \quad t > 0.$$

Тогда процесс  $(e^{-\varphi_t} V(t, X_t))_{t \geq 0}$  является процессом Ито со стохастическим дифференциалом

$$\begin{aligned} d(e^{-\varphi_t} V(t, X_t)) = e^{-\varphi_t} \left[ \frac{\partial V}{\partial t}(t, X_t) + (L_t V)(X_t, \omega) - C(t, \omega) V(t, X_t) \right] dt + \\ + e^{-\varphi_t} \frac{\partial V}{\partial x}(t, X_t) b(t, \omega) dB_t. \end{aligned} \quad (30)$$

### § 3е. Стохастические дифференциальные уравнения

1. Среди процессов Ито  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , имеющих стохастический дифференциал

$$dX_t = \alpha(t, \omega) dt + \beta(t, \omega) dB_t, \quad (1)$$

важную роль играют те, для которых коэффициенты  $\alpha(t, \omega)$  и  $\beta(t, \omega)$  зависят от  $\omega$  через значения  $X_t(\omega)$ :

$$\alpha(t, \omega) = a(t, X_t(\omega)), \quad \beta(t, \omega) = b(t, X_t(\omega)), \quad (2)$$

где  $a = a(t, x)$  и  $b = b(t, x)$  — измеримые функции на  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ .

Так, например, процесс

$$S_t = S_0 e^{at} e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t}, \quad (3)$$

называемый геометрическим или экономическим броуновским движением (см. § 3а), имеет (согласно формуле Ито) стохастический дифференциал

$$dS_t = aS_t dt + \sigma S_t dB_t. \quad (4)$$

Процесс

$$Y_t = \int_0^t \frac{S_t}{S_u} du \quad (5)$$

имеет, как легко убедиться опять-таки с помощью формулы Ито, дифференциал

$$dY_t = (1 + aY_t) dt + \sigma Y_t dB_t. \quad (6)$$

(Процесс  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  играет важную роль в задачах скорейшего обнаружения изменений в локальном сносе броуновского движения; см. [441].)

Если

$$Z_t = S_t \left[ Z_0 + (c_1 - \sigma c_2) \int_0^t \frac{du}{S_u} + c_2 \int_0^t \frac{dB_u}{S_u} \right] \quad (7)$$

с некоторыми константами  $c_1$  и  $c_2$ , то, опять-таки с помощью формулы Ито, проверяется, что

$$dZ_t = (c_1 + \alpha Z_t) dt + (c_2 + \sigma Z_t) dB_t. \quad (8)$$

В приведенных примерах мы отправлялись от «явного» вида процессов  $S = (S_t)$ ,  $Y = (Y_t)$ ,  $Z = (Z_t)$  и с помощью формулы Ито получали их стохастические дифференциалы (4), (6) и (8).

Можно, однако, изменить точку зрения, а именно, рассматривать (4), (6) и (8) как стохастические дифференциальные уравнения относительно неизвестных процессов  $S = (S_t)$ ,  $Y = (Y_t)$ ,  $Z = (Z_t)$  и попытаться установить, что найденные их решения (3), (5) и (7) являются (в определенном смысле) единственными решениями этих уравнений.

Естественно, надо придать точный смысл самому понятию «стохастическое дифференциальное уравнение», определить, что есть его «решение», в каком смысле следует понимать «единственность» решения.

При определении всех этих понятий, рассматриваемых далее, ключевую роль играет введенное выше понятие стохастического интеграла.

2. Будем считать заданным фильтрованное вероятностное пространство (стохастический базис)  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  с обычными условиями (п. 2 § 7а) и пусть  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — броуновское движение.

Пусть  $a = a(t, x)$  и  $b = b(t, x)$  — измеримые функции на  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ .

**Определение 1.** Говорят, что стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dB_t \quad (9)$$

с  $\mathcal{F}_0$ -измеримым начальным условием  $X_0$  имеет непрерывное сильное решение (или просто решение)  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , если при каждом  $t > 0$

величины  $X_t$  являются  $\mathcal{F}$ -измеримыми,

$$P \left( \int_0^t |a(s, X_s)| ds < \infty \right) = 1, \quad (10)$$

$$P \left( \int_0^t b^2(s, X_s) ds < \infty \right) = 1 \quad (11)$$

и (Р-п. н.)

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dB_s. \quad (12)$$

**Определение 2.** Два непрерывных случайных процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  и  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  называются *стохастически неразличимыми*, если для любого  $t > 0$  выполняется равенство

$$P\left(\sup_{s \leq t} |X_s - Y_s| > 0\right) = 0. \quad (13)$$

**Определение 3.** Будем говорить, что измеримая функция  $f = f(t, x)$ , определенная на  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , удовлетворяет (по фазовой переменной  $x$ ) *локальному условию Липшица*, если для всякого  $n \geq 1$  найдется такая константа  $K(n)$ , что для всех  $t \geq 0$  и  $|x| \leq n, |y| \leq n$  выполняется неравенство

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K(n)|x - y|. \quad (14)$$

**Теорема 1** (К. Ито [242], [243]; см. также, например, [123, гл. 9], [288, гл. V], [303, гл. 4]). Пусть коэффициенты  $a(t, x)$  и  $b(t, x)$  удовлетворяют локальному условию Липшица и условию линейного роста:

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq K(1)|x|, \quad (14')$$

и пусть начальное условие  $X_0$  является  $\mathcal{F}_0$ -измеримым.

Тогда стохастическое дифференциальное уравнение (9) имеет, и притом единственное (с точностью до стохастической неразличимости), непрерывное решение  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ , являющееся марковским процессом.

Существуют обобщения этого результата в разных направлениях: ослабляется локальное условие Липшица, допускается зависимость (но специального характера) коэффициентов от  $\omega$ , рассматриваются случаи зависимости коэффициентов  $a = a(t, X_t)$  и  $b = b(t, X_t)$  от «прошлого» (в несколько вольной записи:  $a = a(t; X_s, s \leq t)$ ,  $b = b(t; X_s, s \leq t)$ ).

Имеются также обобщения на многомерный случай, когда  $X = (X^1, \dots, X^d)$  — векторный процесс,  $a = a(t, x)$  — вектор,  $b = b(t, x)$  — матрица и  $B = (B^1, \dots, B^d)$  —  $d$ -мерное броуновское движение. См. по этому поводу, например, [123], [288], [303].

Приведем из различного рода обобщений лишь один несколько неожиданный результат А. К. Звонкина [485], утверждающий, что для существования *сильного* решения стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = a(t, X_t) dt + dB_t \quad (15)$$

вовсе нет надобности требовать выполнения локального условия Липшица, а достаточна лишь измеримость по  $(t, x)$  и равномерная ограниченность коэффициента  $a(t, x)$ . (Многомерное обобщение этого результата получено А. Ю. Веретенниковым [471].)

Тем самым, например, стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = \sigma(X_t) dt + dB_t, \quad X_0 = 0, \quad (16)$$

с «плохим» коэффициентом

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad (17)$$

имеет, и притом единственное, *сильное* решение.

Отметим, однако, что если вместо уравнения (16) рассмотреть уравнение

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t, \quad X_0 = 0, \quad (18)$$

с той же самой функцией  $\sigma(x)$ , то ситуация резко меняется, поскольку, во-первых, существуют вероятностные пространства, на которых у этого уравнения заведомо есть *по крайней мере два разных решения* (см. далее п. 3), и, во-вторых, на *некоторых* вероятностных пространствах у этого уравнения может вовсе и не быть *сильного* решения.

Чтобы показать справедливость первого утверждения, рассмотрим на пространстве непрерывных функций  $\omega = (\omega_t)_{t \geq 0}$  с винеровской мерой координатно заданный винеровский процесс  $W = (W_t)_{t \geq 0}$ , т. е. такой, что  $W_t(\omega) = \omega_t$ ,  $t \geq 0$ .

Тогда по теореме Леви (см. п. 3 в § 3b) процесс  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  при

$$B_t = \int_0^t \sigma(W_s) dW_s$$

также будет винеровским процессом (броуновским движением). И легко видеть, что

$$\int_0^t \sigma(W_s) dB_s = \int_0^t \sigma^2(W_s) dW_s = W_t,$$

поскольку  $\sigma^2(x) = 1$ .

Тем самым, процесс  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  является (на рассматриваемом вероятностном пространстве) решением уравнения (18) со специальным образом подобранным броуновским движением  $B$ . Но, поскольку  $\sigma(-x) = -\sigma(x)$ , получаем, что

$$\int_0^t \sigma(-W_s) dB_s = - \int_0^t \sigma(W_s) dB_s = -W_t,$$

т. е. наряду с  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  процесс  $-W = (-W_t)_{t \geq 0}$  также есть решение уравнения (18).

Что же касается второго утверждения, то предположим, что у уравнения

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s) dB_s$$

существует сильное решение (относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ , порожденных броуновским движением  $B$ ). Из теоремы Леви следует, что тогда процесс  $X = (X_t, \mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$  является броуновским движением.



По формуле Танака (см. далее § 5с и ср. с примером в § 1b гл. II):

$$|X_t| = \int_0^t \sigma(X_s) dX_s + L_t(0),$$

где

$$L_t(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|X_s| \leq \varepsilon) ds$$

— локальное время (Леви) броуновского движения  $X$ , которое оно проводит в нуле на интервале  $[0, t]$ .

Поэтому (Р-п. н.)

$$B_t = \int_0^t \sigma(X_s) dX_s = |X_t| - L_t(0)$$

и, значит,  $\mathcal{F}_t^B \subseteq \mathcal{F}_t^{|X|}$ .

Сделанное выше предположение, что  $X$  является адаптированным относительно потока  $\mathcal{F}^B = (\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ , дает включение  $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t^{|X|}$ , которое, разумеется, не может иметь места для броуновского движения  $X$ . Все это показывает, что на а priori заданном вероятностном пространстве с заданным броуновским движением сильного решения уравнения может и не существовать. (В работе [20] М. Барлоу показал, что у уравнения (18) может не быть сильного решения в случае непрерывных ограниченных функций  $\sigma = \sigma(X) > 0$ .)

3. Заметим, что найденные для уравнения (18) два решения  $W$  и  $-W$  на самом деле имеют одно и то же распределение:

$$\text{Law}(W_s, s \geq 0) = \text{Law}(-W_s, s \geq 0).$$

Это обстоятельство может рассматриваться как объяснение целесообразности вводимой ниже концепции *слабых решений* стохастических дифференциальных уравнений, суть которых раскрывает следующее определение.

**Определение 4.** Пусть  $\mu$  — некоторая вероятностная мера на борелевских множествах числовой прямой  $\mathbb{R}$ .

Говорят, что стохастическое дифференциальное уравнение (9) с таким начальным условием  $X_0$ , что  $\text{Law}(X_0) = \mu$ , имеет *слабое решение*, если найдутся фильтрованное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , броуновское движение  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  на нем и непрерывный случайный процесс  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , для которых  $\text{Law}(X_0 | \mathbb{P}) = \mu$  и для каждого  $t > 0$  (Р-п. н.) выполнено равенство (12).

Важно подчеркнуть, что, в отличие от сильного решения, рассматриваемого на заданном а priori фильтрованном вероятностном пространстве с а priori данным броуновским движением, в определении слабого решения такие объекты (вероятностное пространство и броуновское движение) заранее не фиксируются, а требуется лишь, чтобы они нашлись.

Из приведенных определений ясно, что существование слабого решения можно ожидать при менее ограничительных условиях на коэффициенты уравнений (9).

Один из первых результатов в этом направлении (см. [446], [457]) формулируется следующим образом.

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dB_t \quad (19)$$

с таким начальным распределением  $\text{Law}(X_0) = \mu$ , что  $\int x^{2(1+\varepsilon)} \mu(dx) < \infty$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .

Если коэффициенты  $a = a(x)$  и  $b = b(x)$  являются *непрерывными ограниченными* функциями, то уравнение (19) имеет слабое решение.

Если, к тому же,  $b^2(x) > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , то имеет место единственность (по распределению) слабого решения.

**Замечание 1.** В предположении ограниченности и невырожденности коэффициента  $b(x)$  утверждение о существовании и единственности (по распределению) слабого решения остается в силе, если потребовать, чтобы имела место лишь *ограниченность* и *измеримость* коэффициента  $a(x)$ . См. [457].

4. Приведенные результаты о слабых решениях допускают различные обобщения: на многомерный случай, на случаи коэффициентов, зависящих от прошлого, и пр.

Один из наиболее прозрачных результатов в этом направлении основан на применении «теоремы Гирсанова» об абсолютно непрерывной замене меры, которую приведем здесь ввиду ее важности и во многих других вопросах. (О применении этой теоремы для случая дискретного времени будет говориться в § 3b, 3d в гл. V.)

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  — некоторое фильтрованное вероятностное пространство,  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  —  $d$ -мерное броуновское движение,  $B = (B^1, \dots, B^d)$ , и пусть  $a = (a_t, \mathcal{F}_t)$  —  $d$ -мерный случайный процесс,  $a = (a^1, \dots, a^d)$ , с условием

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t \|a_s\|^2 ds < \infty\right) = 1, \quad t \leq T, \quad (20)$$

где  $\|a_t\|^2 = (a_t^1)^2 + \dots + (a_t^d)^2$  и  $T < \infty$ .

Образует процесс  $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ , полагая

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t (a_s, dB_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|a_s\|^2 ds\right\}, \quad (21)$$

где скалярное произведение определяется по формуле

$$(a_s, dB_s) = \sum_{i=1}^d a_s^i dB_s^i \quad (= a_s^* dB_s).$$

Если

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \|a_s\|^2 ds \right\} < \infty$$

(«условие Новикова»; ср. также с соответствующим условием для случая дискретного времени в § 3b гл. V), то

$$\mathbb{E} Z_T = 1 \quad (22)$$

и, значит, процесс  $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t \leq T}$  будет равномерно интегрируемым мартингалом.

В силу положительности  $Z_t$  (Р-п. н.) и условия (22) на  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  можно ввести вероятностную меру  $\tilde{\mathbb{P}}_T$ , полагая

$$\tilde{\mathbb{P}}_T(A) = \mathbb{E}[I_A Z_T], \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

Понятно, что если  $\mathbb{P}_T = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$  — сужение меры  $\mathbb{P}$  на  $\mathcal{F}_T$ , то  $\tilde{\mathbb{P}}_T \sim \mathbb{P}_T$ .

**Теорема 2** (И. В. Гирсанов, [183]). Пусть

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t a_s ds, \quad t \leq T.$$

Тогда  $\tilde{B} = (\tilde{B}_t, \mathcal{F}_t, \tilde{\mathbb{P}}_T)_{t \leq T}$  является броуновским движением.

Доказательство приведено в работе [183] и далее в § 3b гл. VII; см. также [266], [303].

Рассмотрим вопрос о существовании слабого решения одномерного стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = a(t, X) dt + dB_t, \quad (23)$$

где коэффициент  $a = a(t, X)$  предполагается зависящим, вообще говоря, от «прошлых» значений  $X_s$ ,  $s \leq t$ . (Случай  $d > 1$  рассматривается аналогично.)

Обозначим через  $C$  пространство непрерывных функций  $x = (x_t)_{t \geq 0}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\mathcal{C}_t = \sigma(x: x_s, s \leq t)$ ,  $\mathcal{C} = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{C}_t\right)$ , и пусть  $\mathbb{P}^W$  — винеровская мера на  $(C, \mathcal{C})$ .

Функционал  $a = a(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in C$ , называется измеримым, если он является измеримым отображением  $\mathbb{R}_+ \times C$  в  $\mathbb{R}$ , и прогрессивно измеримым, если к тому же при каждом  $t > 0$  множества  $\{(s \leq t, x \in C): a(s, x) \in A\}$  принадлежат  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{C}_t$  для каждого борелевского множества  $A$ .

Будем предполагать, что уравнение (23) рассматривается для  $t \leq T$ ,  $X_0 = 0$  (для простоты) и выполнены следующие условия:  $a = a(t, x)$  является про-

грессивно измеримым функционалом,

$$\mathbf{P}^W \left\{ x: \int_0^t a^2(t, x) dt < \infty \right\} = 1, \quad (24)$$

$$\mathbf{E}^W \exp \left\{ \int_0^T a(t, x) dW_t(x) - \frac{1}{2} \int_0^T a^2(t, x) dt \right\} = 1, \quad (25)$$

где  $W = (W_t(x))_{t \geq 0}$  — координатно заданный ( $W_t(x) = x_t$ ) винеровский процесс и  $\mathbf{E}^W(\cdot)$  — усреднение по винеровской мере  $\mathbf{P}^W$ .

В соответствии с концепцией слабого решения мы должны *построить* некоторое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}, \mathbf{P})$  и на нем такие процессы  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$  и  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ , что  $B$  относительно меры  $\mathbf{P}$  является броуновским движением и ( $\mathbf{P}$ -п. н.) для каждого  $t \leq T$  выполняется равенство

$$X_t = \int_0^t a(s, X) ds + B_t. \quad (26)$$

Положим

$$\Omega = C, \quad \mathcal{F} = \mathcal{C}, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{C}_t$$

и определим меру  $\mathbf{P}$  на  $\mathcal{F}_T$ , полагая

$$\mathbf{P}(dx) = Z_T(x) \mathbf{P}^W(dx),$$

где

$$Z_T(x) = \exp \left\{ \int_0^T a(t, x) dW_t(x) - \frac{1}{2} \int_0^T a^2(t, x) dt \right\}.$$

На вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$  процесс

$$B_t(x) = W_t(x) - \int_0^t a(s, W(x)) ds, \quad t \leq T,$$

по теореме Гирсанова является броуновским движением. Следовательно, полагая  $X_t(x) = W_t(x)$ , находим, что

$$X_t(x) = \int_0^t a(s, X(x)) ds + B_t(x), \quad t \leq T,$$

что и доказывает (в предположениях (24) и (25)) существование слабого решения у стохастического дифференциального уравнения (23).

**Замечание 2.** Условия (24) и (25) заведомо выполнены, если  $|a(t, x)| \leq c$  для всех  $t \leq T$  и  $x \in C$ . Следовательно, в этом предположении уравнение (23) имеет слабое решение. Однако подчеркнем, что у такого уравнения может не быть *сильного* решения, как показывает пример Б. Цирельсона (см., например, [303, § 4.4]). В этой связи напомним, что у уравнения  $dX_t = a(t, X_t) dt + dB_t$ , где коэффициент  $a(t, X_t)$  зависит *лишь* от «настоящего»  $X_t$ , а не от

всего «прошлого»  $X_s$ ,  $s \leq t$  (как в формуле (23)), есть не только слабое, но и сильное решение (см. выше п. 2 в связи с результатом А. К. Звонкина [485]).

### § 3f. Прямые и обратные уравнения Колмогорова.

#### Вероятностное представление решений

1. Ниже излагаются некоторые результаты и методы теории диффузионных марковских процессов, заложенные в фундаментальной работе А. Н. Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей» [280], опубликованной в 1931 году.

П. С. Александров и А. Я. Хинчин так писали в статье [5] об этой работе, устанавливающей тесные связи теории случайных процессов с математическим анализом и, в частности, с теорией дифференциальных уравнений (с обычными и частными производными):

«Во всей теории вероятностей XX столетия трудно указать другое исследование, которое оказалось бы столь основополагающим для дальнейшего развития науки ....»

В работе [280] А. Н. Колмогоров не оперирует непосредственно с траекториями, скажем,  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  марковских процессов, а изучает свойства переходных вероятностей

$$P(s, x; t, A) = P(X_t \in A | X_s = x), \quad x \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

того, что в момент времени  $t$  траектория процесса  $X$  окажется в множестве  $A$  в предположении, что  $X_s = x$  в момент времени  $s$ .

Исходным для всякого анализа является уравнение ( $0 \leq s < u < t$ )

$$P(s, x; t, A) = \int_{\mathbb{R}} P(s, x; u, dy) P(u, y; t, A), \quad (1)$$

выражающее марковское свойство. (Уравнение (1) принято называть *уравнением Колмогорова—Чепмена*.)

В предположении существования плотностей

$$f(s, x; t, y) = \frac{\partial F(s, x; t, y)}{\partial y}, \quad (2)$$

где

$$F(s, x; t, y) = P(s, x; t, (-\infty, y]),$$

и существования пределов

$$a(s, x) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) f(s, x; s + \Delta, y) dy, \quad (3)$$

$$b^2(s, x) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 f(s, x; s + \Delta, y) dy, \quad (4)$$

а также при некоторых предположениях гладкости рассматриваемых функций и предположении ( $\delta > 0$ ), что

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{\mathbb{R}} |y - x|^{2+\delta} f(s, x; s + \Delta, y) dy = 0, \quad (5)$$

из уравнения (1) А. Н. Колмогоров выводит (подробнее см. [280] или, например, [170], [182]) для таких процессов, называемых *диффузионными, обратные параболические дифференциальные уравнения* (по  $x \in \mathbb{R}$  и  $s < t$ ):

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = a(s, x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(s, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (6)$$

и *прямые параболические дифференциальные уравнения* (по  $y \in \mathbb{R}$  и  $t > s$ ):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} [a(t, y)f] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b^2(t, y)f], \quad (7)$$

а также рассматривает вопросы существования решений этих уравнений, единственности, гладкости и др. (Уравнения (7) рассматривались А. Д. Фоккером [161] и М. Планком [389] в физических работах по теории диффузии.)

2. Следующий важный шаг в развитии теории и методов марковских случайных процессов был сделан в сороковых-пятидесятых годах XX в. К. Ито [242]–[244], который задался целью «явного» конструктивного построения диффузионных (а также диффузионно-скачкообразных) процессов с локальными характеристиками  $a(s, x)$  и  $b^2(s, x)$ , определяемыми формулами (3) и (4).

Этот замысел был реализован им конструированием соответствующих процессов как решений стохастических дифференциальных уравнений

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dB_t, \quad (8)$$

строющихся по некоторому «базисному» броуновскому движению  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ .

В соответствии с работами [242]–[244] (см. также § 3е) уравнение (8) с  $X_0 = \text{Const}$ , коэффициенты которого удовлетворяют по фазовой переменной локальному условию Липшица и линейному ограничению на их рост, имеет, и притом единственное, сильное решение. Если к тому же от коэффициентов  $a(t, x)$  и  $b(t, x)$  потребовать непрерывности по  $(t, x)$ , то процесс  $X$  будет диффузионным марковским процессом с выполнением, в частности, свойств (3)–(5), и, значит, при дополнительных условиях на гладкость переходных плотностей и коэффициентов  $a(t, x)$  и  $b(t, x)$  (подробнее см., например, § 14 в [182]) будут выполнены прямые и обратные уравнения Колмогорова.

Аналогичным образом рассматривается и случай  $d$ -мерных процессов  $X = (X^1, \dots, X^d)$ :

$$dX_t^i = a^i(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^d b^{ij}(t, X_t) dB_t^j. \quad (9)$$

Если положить

$$\sigma^{ij} = \sum_{k=1}^d b^{ik} b^{jk} \quad (10)$$

и (ср. с формулой (27) в § 3d)

$$L(s, x)f = \sum_{i=1}^d a^i(s, x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sigma^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (11)$$

$$L^*(t, y)f = - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial y_i} [a^i(t, y)f] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [\sigma^{ij}(t, y)f], \quad (12)$$

то обратные и прямые параболические уравнения Колмогорова будут иметь следующий вид:

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = L(s, x)f \quad (13)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial t} = L^*(t, y)f. \quad (14)$$

Отметим особо тот случай, когда коэффициенты  $a^i$  и  $b^{ij}$  не зависят от временного параметра:

$$a^i = a^i(x), \quad b^{ij} = b^{ij}(x).$$

В этом случае для  $0 \leq s < t$  имеем

$$f(s, x; t, y) = f(0, x; t-s, y).$$

Если ввести функцию  $g = g(x, t; y)$ , полагая по определению

$$g(x, t; y) = f(0, x; t, y),$$

то из уравнения (13) найдем, что эта функция по  $(t, x)$  удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial t} = L(x)g, \quad (15)$$

$$\text{где } L(x)g = \sum_{i=1}^d a^i(x) \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sigma^{ij}(x) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}.$$

3. Перейдем теперь к изложению ряда хорошо известных результатов о том, как с помощью броуновского движения и решений стохастических дифференциальных уравнений можно дать вероятностное представление решений параболических уравнений (15) для ряда классических задач теории дифференциальных уравнений с частными производными.

**А. Задача Коши.** В области  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$  требуется найти такую непрерывную функцию  $u = u(t, x)$ , что

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (16)$$

для заданной функции  $\varphi = \varphi(x)$ , удовлетворяющую одному из приводимых ниже параболических уравнений (ср. с (15)).

**A1. Уравнение теплопроводности**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u, \quad (17)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

Функция

$$v(t, x) = E_x f(B_t) \quad (17')$$

является решением, называемым *вероятностным решением*, задачи Коши для уравнения (17). (В формуле (17')  $E_x$  — усреднение по мере  $P_x$ , отвечающей броуновскому движению, начинающемуся в точке  $x$ , т. е.  $B_0 = x$ .)

**A2. Неоднородное уравнение теплопроводности**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + \psi, \quad (18)$$

где  $\psi = \psi(t, x)$ .

Вероятностным решением является функция

$$v(t, x) = E_x \left( \varphi(B_t) + \int_0^t \psi(t-s, B_t) ds \right). \quad (18')$$

**A3. Уравнение Фейнмана—Каца**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + cu, \quad (19)$$

где  $c = c(x)$ .

Вероятностное решение есть функция

$$v(t, x) = E_x \left( \varphi(B_t) \exp \left\{ \int_0^t c(B_s) ds \right\} \right). \quad (19')$$

**A4. Уравнение Камерона—Мартина**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + (a, \nabla u), \quad (20)$$

где  $a = (a^1(x), \dots, a^d(x))$ ,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$ .

Вероятностное решение есть функция

$$v(t, x) = E_x \left( \varphi(B_t) \exp \left\{ \int_0^t a(B_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |a(B_s)|^2 ds \right\} \right). \quad (20')$$



**Замечание 1.** Разумеется, для того чтобы функции  $v(t, x)$  в формулах (17')–(20') были решениями, нужна прежде всего определенность математических ожиданий в этих формулах. Для этого достаточно, например, потребовать ограниченности функций  $\varphi(x)$ ,  $\psi(t, x)$ ,  $c(x)$ ,  $a(x)$ . (Во многих задачах эти предположения оказываются слишком стесняющими, что требует более тщательного рассмотрения этих вопросов.)

**Замечание 2.** Когда говорят о «вероятностном решении», то имеют в виду не то, что это есть решение в каком-то специальном «вероятностном классе», а лишь только то, что оно определяется с помощью понятий теории вероятностей, таких, как, например, усреднение по винеровской мере.

**В. Задача Дирихле.** Рассматривается некоторая открытая область  $G \subseteq \mathbb{R}^d$ , и ищется функция  $u = u(x)$  из класса  $C^2$ , удовлетворяющая уравнению

$$\Delta u = 0, \quad x \in G \quad (21)$$

(т. е. гармоническая), и условию

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\partial G}. \quad (22)$$

Пусть

$$\tau = \inf\{t: B_t \notin G\}.$$

Тогда вероятностное решение есть функция

$$v(x) = E_x \varphi(B_\tau). \quad (23)$$

**Замечание 3.** Здесь также нужны некоторые предположения относительно области  $G$ , для того чтобы момент  $\tau$  был марковским, а также необходимы условия интегрируемости  $\varphi(B_\tau)$ .

**4.** Остановимся на основных моментах доказательства того, что функция  $v(x)$ , определенная формулой (23), действительно является (при некоторых дополнительных предположениях) решением уравнения (21).

Будем предполагать, что открытое множество  $G$  в  $\mathbb{R}^d$  является ограниченным и  $\varphi = \varphi(x)$  — ограниченная функция. Предположим также, что функция  $v(x) = E_x \varphi(B_\tau)$  принадлежит классу  $C^2$ .

Тогда по формуле Ито находим, что

$$v(B_t) = v(B_0) + \frac{1}{2} \int_0^t (\Delta v)(B_s) ds + \int_0^t (\nabla v)(B_s) dB_s. \quad (24)$$

Если функция  $v$  такова, что

$$P\left(\int_0^\tau \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}(B_s)\right)^2 ds < \infty\right) = 1,$$

то последний интеграл в формуле (24) будет локальным мартингалом.

В силу марковского свойства броуновского движения на множестве  $\{\omega: s < \tau\}$  (Р-п. н.)

$$E_x(\varphi(B_\tau) | \mathcal{F}_s) = v(B_s), \quad (25)$$

т. е. (на этом множестве)  $v(B_s)$  является мартингалом.

Тем самым, из (24) следует, что процесс — интеграл  $(\int_0^t \Delta v(B_s) ds)_{s \leq \tau}$  — является на множестве  $\{s < \tau\}$  локальным мартингалом, и, поскольку в то же самое время он является непрерывным процессом ограниченной вариации, он равен нулю. (Этот факт, являющийся следствием разложения Дуба—Мейера для субмартингалов, постоянно используется в вопросах проверки того, что вероятностные решения удовлетворяют тем или иным уравнениям; см. [250, § 3b, гл. I] и далее § 5b.)

Отсюда заключаем, что  $\Delta v(x) = 0$ ,  $x \in G$ , поскольку если бы это было не так в некоторой точке  $x_0 \in G$ , то из непрерывности  $\Delta v(x)$  следовало бы, что  $\Delta v(x) \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ , и тогда с положительной вероятностью процесс  $(\int_0^t \Delta v(B_s) ds)_{t \leq \tau}$  не был бы равным нулю.

**Замечание 4.** Вопросы единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений, представимости любого решения  $u(x)$  этой задачи в виде  $E_x \varphi(B_\tau)$  рассматриваются, например, в монографиях [123, 8.5], [170, т. 1, гл. 6, § 2].

5. В идейном плане весьма сходным образом рассматривается вопрос о вероятностных решениях и в задаче Коши.

Рассмотрим, например, уравнение теплопроводности (17) и покажем, что функция  $v(t, x) = E_x \varphi(B_t)$  является решением этого уравнения (при некоторых дополнительных предположениях) с начальным условием  $u(0, x) = \varphi(x)$ .

В самом деле, в силу марковского свойства броуновского движения

$$E_x(f(B_t) | \mathcal{F}_s) = v(t-s, B_s). \quad (26)$$

Поскольку  $(E_x(f(B_t) | \mathcal{F}_s))_{s \leq t}$  есть мартингал (по крайней мере для  $|f| \leq c$ ),  $(v(t-s, B_s))_{s \leq t}$  также является мартингалом.

Далее, в предположении, что  $v \in C^2$ , можно применить формулу Ито:

$$\begin{aligned} v(t-s, B_s) = v(t, B_0) + \int_0^t \left( -\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta v \right) (t-r, B_r) dr + \\ + \int_0^t \nabla v(t-r, B_r) dB_r. \end{aligned} \quad (27)$$

Если при каждом  $t$  выполняется равенство

$$P \left\{ \int_0^t \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} (x_i - r, B_r) \right)^2 dr < \infty \right\} = 1, \quad (28)$$

то последний интеграл в (27) будет локальным мартингалом. Поэтому процесс

$$\left( \int_0^t \left( -\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta v \right) (t-r, B_r) dr \right)_{t \geq 0}$$

неотличим (Р-п. н.) от нулевого, как являющийся и локальным мартингалом, и непрерывным процессом ограниченной вариации.

Если к тому же функция  $\varphi = \varphi(x)$  непрерывна, то  $v(t, x) \rightarrow \varphi(x)$ ,  $t \rightarrow 0$ .

Аналогичным образом, с помощью формулы Ито устанавливается, что вероятностные решения задач (17)–(20) определяются формулами (17')–(20') соответственно.

**Замечание 5.** Более детальное рассмотрение сформулированных выше задач Коши и Дирихле для параболических уравнений, а также соответствующих задач для прямых и обратных уравнений Колмогорова, см., например, в монографиях [123], [170], [182], [288].

## 4. Диффузионные модели эволюции процентных ставок, стоимостей акций и облигаций

### § 4а. Стохастические процентные ставки

1. Простейшей моделью, в которой мы сталкиваемся со *стохастическими процентными ставками*  $r = (r_n)_{n \geq 1}$ , является модель банковского счета  $B = (B_n)_{n \geq 0}$ , для которого (по определению)

$$r_n = \frac{\Delta B_n}{B_{n-1}}. \quad (1)$$

Если  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, P)$  — стохастический базис (фильтрованное вероятностное пространство), описывающий стохастику финансового рынка и имеющуюся на нем «информацию»  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , то, как уже отмечалось (§ 1е, гл. II), значения банковского счета  $B_n$  естественно считать  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми.

Тем самым, и последовательность  $B = (B_n)_{n \geq 0}$ , и последовательность  $r = (r_n)_{n \geq 1}$  являются предсказуемыми (см. § 1а гл. II).

Это обстоятельство поясняет, почему в случае непрерывного времени на процентные ставки  $r = (r(t))_{t \geq 0}$  обычно накладывается требование *предсказуемости* (см. § 5а и подробнее [250, гл. I]), которое автоматически выполнено, если  $r = (r(t))_{t \geq 0}$  является непрерывным (или только непрерывным слева) процессом.

В дальнейшем мы рассматриваем лишь модели, в которых *процентные ставки*  $r = (r(t))_{t \geq 0}$  являются диффузионными случайными процессами и, следовательно, имеют непрерывные траектории (так что упоминания о требовании предсказуемости становятся излишними).

В случае непрерывного времени  $t \geq 0$  обычное определение *процентной ставки*  $r = (r(t))_{t \geq 0}$  банковского счета  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  дается посредством соотношения

$$dB_t = r(t)B_t dt, \quad (2)$$

являющегося естественным «непрерывным» аналогом формулы (1).

Ясно, что

$$r(t) = (\ln B_t)' \quad (3)$$

и

$$B_t = B_0 \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\}. \quad (4)$$

Еще более важную роль понятие процентной ставки (short rate of interest, spot rate, instantaneous interest rate) играет при «опосредованном» задании эволюции стоимостей облигаций (см. далее § 4с). Это обстоятельство объясняет большое число разнообразных моделей процентных ставок  $r = (r(t))_{t \geq 0}$ , описываемых диффузионными уравнениями вида

$$dr(t) = a(t, r(t)) dt + b(t, r(t)) dW_t \quad (5)$$

или, скажем, уравнениями моделями типа «диффузия со скачками»:

$$dr(t) = a(t, r(t)) dt + b(t, r(t)) dW_t + \int c(t, r(t-), x) (\mu(dt, dx) - \nu(dt, dx)), \quad (6)$$

где  $\mu = \mu(dt, dx)$  — случайная пуассоновская мера на  $\mathbb{R}_t \times E \times \mathbb{R}^d$  и  $\nu = \nu(dt, dx)$  — ее компенсатор (подробнее см. [250, гл. III, § 2с]).

2. Приведем некоторые популярные модели процентных ставок  $r = (r(t))_{t \geq 0}$ , относящиеся к диффузионным моделям (5), где  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  — стандартный винеровский процесс (броуновское движение), заданный на некотором стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ .

*Модель Мертона* (R. C. Merton [346], 1973 г.):

$$dr(t) = \alpha dt + \gamma dW_t. \quad (7)$$

*Модель Васичека* (O. Vasiček [472], 1977 г.):

$$dr(t) = (\alpha - \beta r(t)) dt + \gamma dW_t. \quad (8)$$

*Модель Дотхана* (L. Dothan [111], 1978 г.):

$$dr(t) = \alpha r(t) dt + \gamma r(t) dW_t. \quad (9)$$

*Модели Кокса, Ингерсолла и Росса* (J. C. Cox, J. E. J. Ingersoll, S. A. Ross [80], 1980 г.; [81], 1985 г.):

$$dr(t) = \beta (r(t))^{3/2} dW_t, \quad (10)$$

$$dr(t) = (\alpha - \beta r(t)) dt + \gamma (r(t))^{1/2} dW_t. \quad (11)$$

*Модель Хо и Ли* (T. Ho, S. Lee [224], 1986 г.):

$$dr(t) = \alpha(t) dt + \gamma dW_t. \quad (12)$$

Модель Блэка, Дермана и Тоя (F. Black, E. Derman, W. Toy [42], 1990 г.):

$$dr(t) = \alpha(t)r(t) dt + \gamma(t) dW_t. \quad (13)$$

Модели Халла и Уайта (J. Hull, A. White [234], 1990 г.):

$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t)) dt + \gamma(t) dW_t, \quad (14)$$

$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t)) dt + \gamma(t)(r(t))^{1/2} dW_t. \quad (15)$$

Модель Блэка и Карасинского (F. Black, P. Karasinski [43], 1991 г.):

$$dr(t) = r(t)(\alpha(t) - \beta(t) \ln r(t)) dt + \gamma(t)r(t) dW_t. \quad (16)$$

Модель Зандмана и Зондермана (K. Sandmann, D. Sondermann [422], 1993 г.):

$$r(t) = \ln(1 + \xi(t)), \quad (17)$$

где

$$d\xi(t) = \xi(t)(\alpha(t) dt + \gamma(t) dW_t). \quad (18)$$

3. В статьях, где вводятся приведенные модели, дается и соответствующая мотивировка их рассмотрения.

Так, например, модель Васичека (8) вполне естественна, если считать, что процентная ставка колеблется около некоторого постоянного уровня  $\alpha/\beta$ . (Из уравнения (8) видно, что при  $r(t) < \alpha/\beta$  у процесса появляется положительный снос, а при  $r(t) > \alpha/\beta$  — отрицательный; если  $\alpha = 0$ , то уравнение (8) превращается в уравнение Орнштейна—Уленбека, рассмотренное в § 3а.)

Следует, однако, отметить, что многие эмпирические исследования поведения процентных ставок у облигаций (см., например, [69], [70]) показывают, что, вообще говоря, нельзя считать, что есть некоторое *постоянное* среднее значение ( $\alpha/\beta$ ), удаляясь от которого процентная ставка имеет тенденцию возвращения к этому значению (такое явление в англоязычной литературе называют *mean reversion*).

Это обстоятельство учитывается в моделях Халла и Уайта, в которых постоянный уровень  $\alpha/\beta$  заменяется на *переменный*  $\alpha(t)/\beta(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Можно пойти и дальше, а именно, считать, что этот переменный уровень сам по себе является случайным процессом.

В этом отношении примером может служить модель Чена (L. Chen [70], 1995 г.):

$$dr(t) = (\alpha(t) - r(t)) dt + (\gamma(t)r(t))^{1/2} dW_t^1, \quad (19)$$

где  $\alpha(t)$  и  $\gamma(t)$  являются случайными процессами диффузионного типа,

$$d\alpha(t) = (\alpha - \alpha(t)) dt + (\alpha(t))^{1/2} dW_t^2, \quad (20)$$

$$d\gamma(t) = (\gamma - \gamma(t)) dt + (\gamma(t))^{1/2} dW_t^3 \quad (21)$$

( $\alpha, \gamma$  — константы;  $W^1, W^2$  и  $W^3$  — независимые винеровские процессы).

Во многих приведенных моделях коэффициент диффузии («волатильность») считается зависящим от значения процентной ставки  $r(t)$ , что объясняется, например, следующим образом: если процентная ставка становится большой, то должен быть и больший риск в обладании активом с соответствующей процентной ставкой, который определяется флуктуационными членами, скажем,  $(r(t))^{1/2} dW_t$  в соответствующих уравнениях для  $r(t)$ .

4. Приведем еще одну (весьма упрощенную) модель эволюции процентных ставок, навеянную следующими соображениями.

Естественно, что стохастический процесс  $r = (r(t))_{t \geq 0}$  есть, в определенном смысле, отражение состояния «экономики», некоторая оценка этого состояния.

Исходя из этого предположим, что состояние «экономики» моделируется, скажем, однородным скачкообразным марковским процессом  $\theta = (\theta(t))_{t \geq 0}$  с всего лишь (для простоты рассуждений) двумя состояниями:  $i = 0, 1$ . Пусть  $P(\theta(0) = 0) = P(\theta(0) = 1) = 1/2$  и плотности вероятностей перехода  $\lambda_{ij}$  таковы, что  $\lambda_{ii} = -\lambda$  и  $\lambda_{ij} = \lambda$ , если  $i \neq j$ .

Таким образом, «экономика» находится то в состоянии  $i = 0$ , то в состоянии  $i = 1$  с экспоненциальным распределением времени пребывания с параметром  $\lambda$ .

Будем предполагать, что о состоянии «экономики»  $\theta = (\theta(t))_{t \geq 0}$  можно судить лишь косвенным образом, наблюдая процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  с дифференциалом

$$dX_t = \theta(t) dt + d\widetilde{W}_t, \quad (22)$$

где  $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t \geq 0}$  — некоторый винеровский процесс.

Пусть

$$r(t) = E(\theta(t) | \mathcal{F}_t^X) \quad (23)$$

— оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка состояния  $\theta(t)$  по наблюдениям  $X_s, s \leq t$  ( $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$ ).

Из общей теории нелинейной фильтрации находим (см. [303, формула (9.86)]), что

$$dr(t) = \lambda(1 - 2r(t)) dt + r(t)(1 - r(t))(dX_t - r(t) dt). \quad (24)$$

Заметим, что процесс  $W = (W_t)_{t \geq 0}$ ,

$$W_t = X_t - \int_0^t r(s) ds, \quad (25)$$

является винеровским процессом относительно потока  $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$  (см. [303, теорема 7.12]; см. также теорему 5 в § 3b гл. VII). Поэтому (24) является уравнением типа (5):

$$dr(t) = \lambda(1 - 2r(t)) dt + r(t)(1 - r(t)) dW_t. \quad (26)$$

Интересно отметить также, что из уравнения (24) с учетом (22) следует, что

$$dr(t) = a(r(t), \theta(t)) dt + b(r(t)) d\widetilde{W}_t, \quad (27)$$

где

$$a(r, \theta) = \lambda(1 - 2r) + r(1 - r)(\theta - r), \quad b(r) = r(1 - r).$$

(Ср. с моделью Чена (19).)

5. Рассмотренные выше модели динамики процентных ставок  $r = (r(t))_{t \geq 0}$  основывались на стохастических дифференциальных уравнениях с некоторым базисным винеровским процессом.

В то же самое время можно заметить, что многие из рассмотренных уравнений допускают «явное» решение как функционалы от винеровского процесса. Например, в модели Васичека (8) и ее обобщении — модели Халла и Уайта (14) — решение может быть (в силу линейности уравнений (8) и (14)) представлено в виде

$$r(t) = g(t) \left[ r(0) + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{g(s)} ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{g(s)} dW_s \right], \quad (28)$$

где

$$g(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \beta(s) ds \right\}, \quad (29)$$

что легко устанавливается с помощью формулы Ито; ср. с формулой (7) в § 3е.

Обозначим

$$T(t) = \int_0^t \left( \frac{\gamma(s)}{g(s)} \right)^2 ds \quad (30)$$

и, предполагая, что  $T(t) < \infty$  при всех  $t > 0$  и  $T(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , определим по «старому» времени  $t$  «новое» время  $\theta$  по формуле  $\theta = T(t)$ . (Подробнее см. § 3д гл. IV в связи с интерпретацией «нового» времени как «операционного».)

Хорошо известно (см., например, [303, лемма 17.4]), что при сделанных предположениях найдется (новый) винеровский процесс  $W^* = (W_t^*)_{t \geq 0}$ , для которого

$$\int_0^t \left( \frac{\gamma(s)}{g(s)} \right) dW_s = W_{T(t)}^*. \quad (31)$$

Тем самым, для  $r(t)$  из формулы (28) получаем следующее представление:

$$r(t) = f(t) + g(t) W_{T(t)}^*, \quad (32)$$

где

$$f(t) = g(t) \left[ r(0) + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{g(s)} ds \right]. \quad (33)$$

Если

$$T^*(\theta) = \inf\{t: T(t) = \theta\},$$



то возврат от «нового» времени  $\theta = T(t)$  к «старому» будет определяться формулой  $t = T^*(\theta)$ . Поэтому в «новом» времени  $\theta$  процесс  $r^* = (r^*(\theta))_{\theta \geq 0}$  с  $r^*(\theta) = r(T^*(\theta))$  будет иметь совсем простую структуру:

$$r^*(\theta) = f^*(\theta) + g^*(\theta)W_{\theta}^*,$$

где  $f^*(\theta) = f(T^*(\theta))$ ,  $g^*(\theta) = g(T^*(\theta))$ .

В модели Блэка и Карасинского (16) имеем

$$d \ln r(t) = (\alpha(t) - \gamma^2(t) - \beta(t) \ln r(t)) dt + \gamma(t) dW_t. \quad (34)$$

Определяя  $T(t)$  по той же самой формуле (30), находим, что (с некоторым новым винеровским процессом  $W^* = (W_t^*)_{t \geq 0}$ )

$$r(t) = F(f(t) + g(t)W_{T(t)}^*), \quad (35)$$

где  $g(t)$  определяется формулой (29),

$$f(t) = g(t) \left[ r(0) + \int_0^t \frac{\alpha(s) - \gamma^2(s)}{g(s)} ds \right] \quad (36)$$

и  $F(x) = e^x$ .

Аналогичным образом для модели Зандмана и Зондермана (17)–(18) находим, что

$$r(t) = F(f(t) + W_{T(t)}^*), \quad (37)$$

где  $F(x) = \ln(1 + e^x)$ ,  $T(t) = \int_0^t \gamma^2(s) ds$ ,

$$f(t) = \ln \xi(0) + \int_0^t \left( \alpha(s) - \frac{1}{2} \gamma^2(s) \right) ds.$$

Как отмечает В. Шмидт в работе [426], во всех рассмотренных «явных» представлениях процентные ставки  $r(t)$  имеют вид (35). Это обстоятельство приводит к следующей весьма общей модели.

*Модель Шмидта* (W. Schmidt, [426]; 1997 г.):

$$r(t) = F(f(t) + g(t)W_{T(t)}), \quad (38)$$

где  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  — некоторый винеровский процесс,  $T(t)$ ;  $F(x)$  — неотрицательные непрерывные строго возрастающие функции,  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $f = f(t)$  и  $g = g(t)$  являются непрерывными функциями, причем  $g(t) > 0$ .

Отметим, что в этой модели «новое» время  $\theta = T(t)$  есть детерминированная функция «старого» времени  $t$  и, следовательно, процесс  $X_t = f(t) + g(t)W_{T(t)}$  является гауссовским, и выбором подходящей функции  $F(x)$  можно получать разнообразные распределения для процентных ставок  $r(t)$ .

**6. Модель Шмидта** (38) привлекательна также тем, что ее «дискретизация» позволяет естественным образом получать *дискретные модели* эволюции процентных ставок, воспользовавшись той или иной аппроксимацией винеровского процесса с помощью случайного блуждания.

Например, если для  $n \geq 1$  имеем

$$T_i^{(n)} = \inf \left\{ t \geq 0 : T(t) > \frac{i}{n} \right\},$$

$i = 0, 1, \dots$ , и  $(\xi_i^{(n)})$  — последовательность бернуллиевских случайных величин  $P(\xi_i^{(n)} = \pm 1/\sqrt{n}) = 1/2$ , то (кусочно постоянный) процесс  $W^{(n)} = (W_t^{(n)})_{t \geq 0}$ , где

$$W_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{[nT(t)]} \xi_i^{(n)}, \quad W_0^{(n)} = 0,$$

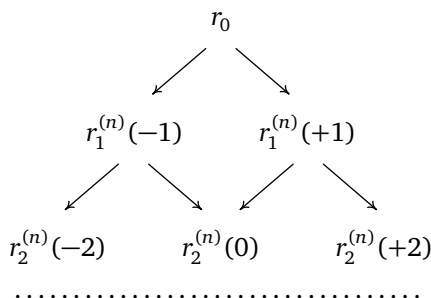
слабо сходится (при  $n \rightarrow \infty$ ) к винеровскому процессу  $W = (W_t)_{t \geq 0}$ .

Положим

$$r_i^{(n)}(j) = F\left(f(t_i^{(n)}) + g(t_i^{(n)}) \frac{j}{\sqrt{n}}\right), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm i.$$

Дискретный вариант эволюции последовательностей  $r^{(n)} = (r_i^{(n)})_{i=0,1,\dots}$  процентных ставок  $r_i^{(n)}$  со значениями  $r_i^{(n)}(j)$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots, \pm i$ , получаем, если считать, что  $r_0^{(n)} = r_0$ , и затем полагать, что с вероятностями  $1/2$  состояние  $r_i^{(n)}(j)$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots, \pm i$ , переходит или в состояние  $r_{i+1}^{(n)}(j+1)$ , или в состояние  $r_{i+1}^{(n)}(j-1)$ .

Эта конструкция очевидным образом приводит (см. [426]) к биномиальной модели эволюции процентных ставок, которую можно изобразить (для данного  $n = 1, 2, \dots$ ) следующим образом:



#### § 4b. Стандартная диффузионная модель стоимости акций (геометрическое броуновское движение) и ее обобщения

1. Ранее уже отмечалось (гл. I, § 1b), что первой моделью для описания эволюции стоимостей акций  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  была линейная модель Л. Башелье (1900 г.)

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad (1)$$

где  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  — стандартное броуновское движение (винеровский процесс).

Хотя с принципиальной точки зрения это был решительный шаг в применении к анализу финансового рынка концепций теории вероятностей, с самого начала было ясно, что модель (1) страдает многими недостатками и прежде всего тем, что величины  $S_t$  (по смыслу являющиеся *стоимостями* акций) принимают *отрицательные* значения.

В этом отношении важен был следующий шаг, сделанный П. Самуэльсоном, [420], который предложил описывать стоимости акций геометрическим (или, как он также говорил, *экономическим*) броуновским движением:

$$S_t = S_0 e^{\mu t} e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}. \quad (2)$$

Иначе говоря, П. Самуэльсон предлагал считать, что *не* стоимости  $S_t$ , а *логарифмы* этих стоимостей подчиняются линейной модели типа (1):

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t. \quad (3)$$

Из формулы Ито (§ 3d) сразу следует, что

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t). \quad (4)$$

Тем самым, если переписать это выражение в (несколько вольной) форме

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (5)$$

то становится понятным, что дискретное (по времени, с шагом  $\Delta$ ) приближение может быть записано в виде  $(\Delta S_t = S_t - S_{t-\Delta})$

$$\frac{\Delta S_t}{S_{t-\Delta}} \approx \mu \Delta + \sigma \Delta W_t,$$

весьма напоминающем выражение

$$\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \rho_n \quad (6)$$

с  $\mathcal{F}_n$ -измеримыми  $\rho_n$ , которое использовалось выше (см., например, п. 6 в § 2а гл. II) при описании эволюции акций (точнее, их стоимостей) в случае дискретного времени.

Представление (5) интересно также сравнить с выражением для (сопутствующего) банковского счета  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ , подчиняющегося уравнению

$$dB_t = r B_t dt \quad (7)$$

с (постоянной) процентной ставкой  $r > 0$ .

Если рассматриваемый финансовый рынок состоит из банковского счета  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  и акции  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ , подчиняющихся уравнениям (7) и (4) соответственно, то будем говорить, что мы имеем дело со *стандартной диффузионной*  $(B, S)$ -моделью (Блэка—Мертон—Шоулса) или *стандартным диффузионным*  $(B, S)$ -рынком.

Эта стандартная диффузионная модель была в 1973 году рассмотрена при расчетах стоимостей опционов Ф. Блэком и М. Шоулсом [44], и Р. Мертоном [346]. И именно с этой моделью связана знаменитая *формула Блэка и Шоулса* для рациональной (справедливой) стоимости опционов-колл европейского типа. (Этим вопросам посвящается гл. VIII.)

Довольно-таки очевидно, что стандартная модель основана на не слишком реалистических предположениях. В самом деле, в ней предполагается, что процентная ставка  $r$  банковского счета является постоянной (на самом деле она флуктуирует) и коэффициенты изменчивости (волатильности)  $\sigma$  и роста  $\mu$  постоянны (в действительности они меняются со временем). При выводе *формулы Блэка и Шоулса* предполагается также (см. далее § 1b, 1c в гл. VIII), что  $(B, S)$ -рынок является рынком «без трения» (отсутствуют операционные издержки, нет выплаты дивидендов, нет запаздывания в получении данных и принятии решений и т. п.), имеется возможность как брать с банковского счета, так и помещать на него любую сумму, а также покупать и продавать акции в любом количестве.

Все это говорит о том, что стандартная диффузионная модель  $(B, S)$ -рынка сильно упрощает действительность, оставаясь, однако, одной из самых популярных моделей.

В этой связи небезынтересно следующее высказывание Ф. Блэка ([41], 1988 г.) по поводу «простоты» рассматриваемой модели:

«В простоте есть и своя сила. Люди принимают эту простую модель, поскольку они могут легко понять заложенные в ней предположения. Эта модель хороша как первое приближение, и если вы видите „дыры“ в сделанных допущениях, то вы можете эту модель усовершенствовать, заменяя ее более изощренной».

2. Одно из таких *a priori* напрашивающихся усовершенствований состоит в рассмотрении моделей, в которых постоянные  $r$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  заменяются на детерминированные или случайные (согласованные с  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ) функции  $r(t)$ ,  $\mu(t)$  и  $\sigma(t)$ :

$$dB_t = r(t)B_t dt, \quad (8)$$

$$dS_t = S_t(\mu(t) dt + \sigma(t) dW_t). \quad (9)$$

Конечно, при рассмотрении более сложных моделей нужно прежде всего исходить из тех экспериментально обнаруживаемых фактов, которые не объясняются, не «ухватываются» стандартной  $(B, S)$ -моделью. Но, с другой стороны, более изощренные модели не должны быть настолько сложными, чтобы «нельзя было ничего сосчитать».

В этом отношении следует отметить так называемый *смайл-эффект* (smile effect), являющийся как раз тем фактом, который не объясняется стандартной  $(B, S)$ -моделью, что привело к разнообразным ее обобщениям и усовершенствованиям.

Суть смайл-эффекта состоит в следующем.

Пусть цена акции управляется уравнением (4) с  $S_0 = 1$  (для простоты) и  $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\sigma, T, K)$  — рациональная стоимость стандартного опциона-колл европейского типа с функцией выплаты  $f_T = \max(S_T - K, 0)$ .

Формула Блэка и Шоулса для  $\mathbb{C}$  (см. формулу (9) в § 1b гл. I, и, более подробно, § 1b, 1с в гл. VIII) дает явную зависимость этой стоимости от значения волатильности  $\sigma$ , момента исполнения  $T$  и цены исполнения  $K$ .

Можно, однако, обратиться к *реально* существующим на финансовых рынках стоимостям этих опционов с заданными  $T$  и  $K$  и сравнить их с теоретическими значениями  $\mathbb{C}$ .

Пусть эта (реальная) стоимость на финансовых рынках есть  $\widehat{\mathbb{C}}(T, K)$ .

Найдем  $\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(T, K)$  как решение уравнения

$$\mathbb{C}(\sigma, T, K) = \widehat{\mathbb{C}}(T, K),$$

где  $\mathbb{C}(\sigma, T, K)$  определяется формулой Блэка и Шоулса.

Величина  $\widehat{\sigma}(T, K)$ , называемая *предполагаемой* (implied) волатильностью, оказалась той характеристикой, которая позволяет выявить некоторые «дыры» (по выражению Ф. Блэка) в исходной стандартной модели. В самом деле, экспериментально устанавливается, что

- (a) при фиксированном  $K$  величина  $\widehat{\sigma}(T, K)$  меняется с изменением  $T$ ;
- (b) при фиксированном  $T$  величина  $\widehat{\sigma}(T, K)$  также меняется с изменением  $K$ , будучи функцией, выпуклой вниз (это и объясняет название «смайл-эффект»).

Для учета наблюдаемого эффекта (a) Р. Мертон предложил ([346], 1973 г.) в стандартной модели считать  $\mu$  и  $\sigma$  функциями времени ( $\mu = \mu(t)$ ,  $\sigma = \sigma(t)$ ), и такого рода схемы действительно используются на финансовых рынках, особенно при расчетах с опционами американского типа.

Смайл-эффект (b) оказывается более деликатным, и для его объяснения вводятся самые разнообразные усложнения стандартной модели (в том числе модели типа «диффузии со скачками», «стохастической волатильности» и др.).

В этом отношении наиболее прозрачной является модель, предложенная Б. Дюпири (B. Dupire, [121], [122]), в которой предполагается, что

$$dS_t = S_t(\mu(t) dt + \sigma(S_t, t) dW_t), \quad (10)$$

где  $\sigma = \sigma(S, t)$  — некоторая функция, зависящая от состояния  $S$  и времени  $t$ .

В упомянутых работах [121] и [122] Б. Дюпири показал также, что идеи «безарбитражности и полноты» рынка позволяют оценить неизвестную волатильность, пользуясь знанием *реально наблюдаемых* (в момент времени  $t \leq T$  в состояниях  $S_t = s$ ) цен  $\mathbb{C}_{s,t}(K, T)$  стандартных опционов-колл европейского типа с моментом исполнения  $T$  и ценой исполнения  $K$ .

3. Усложнение стандартной диффузионной  $(B, S)$ -модели (4) и (7) в идейном плане весьма схоже с тем, как усложнялись простейшие модели в случае дискретного времени.

Имея это в виду, напомним (см. § 1d гл. II), что в случае дискретного времени мы исходили из представления

$$S_n = S_0 e^{H_n} \quad (11)$$

с  $H_n = h_1 + \dots + h_n$  и  $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$ , где  $\mu_n$  и  $\sigma_n$  — неслучайные величины и  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Если в формуле (9) коэффициенты  $\mu(t)$  и  $\sigma(t)$  являются неслучайными, то  $S_t$  может быть записано в виде

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \quad (12)$$

где

$$H_t = \int_0^t \left( \mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s. \quad (13)$$

Понятно, что в этом случае  $H_t$  имеет гауссовское распределение и (12) является непрерывным аналогом представления (11).

Далее, в § 1d гл. II были рассмотрены модели  $AR$ ,  $MA$ ,  $ARMA$ , в которых волатильность  $\sigma_n$  считалась постоянной ( $\sigma_n \equiv \sigma = \text{Const}$ ), а  $\mu_n$  определялись «прошлыми» значениями  $h_{n-1}, h_{n-2}, \dots$  и  $\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \dots$

Наконец, в моделях  $ARCH$  и  $GARCH$  предполагалось, что  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , причем волатильность  $\sigma_n$  считалась зависящей от «прошлого» (см., например, формулу (19) в § 1d гл. II).

Подчеркнем, что во всех этих моделях был один источник случайности — белый (гауссовский) шум  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ .

В модели же «стохастической волатильности» (см. п. 7 в § 1d гл. II) предполагалось, что имеются два источника случайности — независимые белые (гауссовские) шумы  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$  и  $\delta = (\delta_n)$ . При этом  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , где  $\sigma_n = e^{\frac{1}{2} \Delta_n}$ ,

$$\Delta_n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta_{n-i} + c \delta_n \quad (14)$$

(см. § 3с гл. II).

Точно так же и в случае непрерывного времени рассматриваются различные аналоги моделей типа  $ARCH$ – $GARCH$  и моделей типа стохастической волатильности.

Ко второму типу относятся, например, модели вида (ср. с формулами (37) и (38) в § 3а гл. II)

$$dS_t = S_t (\mu(t, S_t, \sigma_t) dt + \sigma_t dW_t^\varepsilon), \quad (15)$$

$$d\Delta_t = a(t, \Delta_t) dt + b(t, \Delta_t) dW_t^\delta, \quad (16)$$

где  $\Delta_t = \ln \sigma_t^2$  и  $W^\varepsilon = (W_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ ,  $W^\delta = (W_t^\delta)_{t \geq 0}$  — два независимых винеровских процесса. (Подобного рода модели рассматриваются в работах [235], [364], [432], [477].)

При оперировании с моделями типа (15) и (16), когда наблюдается только процесс  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  (и не наблюдается процесс волатильности  $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ ), мы сталкиваемся с «проблемой неполноты» рынка, приводящей к тому, что на таком рынке не определено однозначно, например, такое важное понятие, как *рациональная стоимость* опционов, и приходится прибегать к более сложному анализу *верхних* и *нижних* цен. См. § 1b гл. V.

В этом отношении привлекательны диффузионные модели типа ARCH–GARCH в случае непрерывного времени, поскольку они позволяют в расчетах финансовых активов использовать хорошо развитую технику «безарбитражности и полноты».

Примером такой модели *марковского типа* является рассмотренная выше модель Б. Дюпири (10).

Следуя идее «зависимости от прошлого» в моделях ARCH–GARCH, естественно привлечь к рассмотрению, например, те представления

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \quad (17)$$

в которых диффузионный процесс  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  есть компонента *многомерного диффузионного процесса*  $(H_t, H_t^1, \dots, H_t^{n-1})_{t \geq 0}$ , порожденного одним винеровским процессом.

Соответствующим примером может служить гауссовский стационарный процесс с рациональной спектральной плотностью, который можно рассматривать как компоненту многомерного марковского процесса, удовлетворяющего линейной системе стохастических дифференциальных уравнений. (Подробнее см. теорему 15.4 и систему уравнений (15.64) в книге [303].)

4. Мы продолжим рассмотрение введенных выше диффузионных моделей, описывающих динамику стоимостей акций, в гл. VII, где эти модели будут исследоваться с точки зрения «безарбитражности и полноты».

В первой главе отмечалось, что *концепция отсутствия арбитража* является именно той экономической концепцией *рационально* устроенного рынка, которой мы придерживаемся в нашем изложении. В случае дискретного времени «первая фундаментальная теорема расчета финансовых активов» (см. § 2b гл. V) дает мартингальный критерий отсутствия арбитражных возможностей на  $(B, S)$ -рынке, что накладывает определенные ограничения и на банковский счет  $B = (B_n)_{n \geq 0}$ , и на акции  $S = (S_n)_{n \geq 0}$ .

Точно так же и в случае непрерывного времени естественно придерживаться *концепции безарбитражности*  $(B, S)$ -рынка, что накладывает определенные ограничения и на динамику цен акции, и на динамику банковского счета (см. гл. VII).

Нужно отметить, что случай непрерывного времени является (по сравнению с дискретным временем) более деликатным, что во многом связано как

с техническими сложностями соответствующего аппарата стохастического исчисления, так и с принципиальными различиями в возможностях непрерывного и дискретного трейдинга.

Другой важный вопрос, относящийся к конкретизации структуры  $(B, S)$ -рынка, связан с *полнотой* этого рынка, т. е. возможностью построения портфеля, капитал которого в нужный момент будет воспроизводить «платежное обязательство» (подробнее см. § 1b гл. V).

Вообще говоря, это желательное свойство является скорее исключением, нежели правилом. Весьма, однако, замечательно, что в случае диффузионных  $(B, S)$ -рынков при довольно-таки общих условиях полнота будет иметь место (см. § 4a в гл. VII).

#### § 4с. Диффузионные модели временной структуры стоимостей семейства облигаций

1. На описательном уровне представление об облигациях (бонах) как о долговых финансовых обязательствах и их рыночных ценах  $P(t, T)$  было дано в самом начале книги (гл. I, § 1a).

Там же были введены некоторые характеристики облигаций, такие как *начальная цена*  $P(0, T)$ , *номинальная стоимость*  $P(T, T)$  (предполагаемая, для определенности равная единице), *текущая процентная ставка*, *доходность* до момента погашения и др. Также отмечалось, что вопрос о структуре цен  $P(t, T)$ ,  $0 \leq t < T$ , как семейства стохастических объектов является, в определенном отношении, более сложным, нежели вопрос о вероятностной структуре акций.

Одна из трудностей состоит здесь в том, что если при данном  $T$  на функцию  $P(t, T)$  смотреть как на случайный процесс для  $0 \leq t \leq T$ , то следует прежде всего отметить, что этот процесс должен быть *условным*, поскольку  $P(T, T) = 1$ .

Типичным примером такого процесса является рассмотренный в § 3a броуновский мост  $X = (X_t)_{t \leq T}$ , подчиняющийся уравнению

$$dX_t = \frac{1 - X_t}{T - t} dt + dW_t$$

с  $X_0 = \alpha$  и имеющий то свойство, что  $X_t \rightarrow 1$  при  $t \uparrow T$ .

Подобно тому как Л. Башелье использовал линейное броуновское движение (см. (1) в § 4b) для моделирования стоимости акций, так и в случае облигаций процесс  $X = (X_t)_{t \leq T}$  можно было бы считать некоторой возможной моделью, описывающей эволюцию цен  $P(t, T)$ ,  $t \leq T$ .

Возникающие здесь трудности те же, что и в случае акций, — величины  $X_t$ ,  $t > 0$ , принимают любые, вообще говоря, значения из  $\mathbb{R}$ , а по самому смыслу цен облигаций должно быть выполнено условие  $0 < P(t, T) \leq 1$ .

Другая трудность при построении моделей стоимостей облигаций связана с тем, что обычно на финансовых рынках облигаций присутствуют облига-



ции с разными временами исполнения  $T$ , и портфели покупателей могут включать в себя разные облигации. Поэтому разумные модели эволюции стоимостей облигаций должны строиться не для фиксированного  $T$ , а сразу для некоторого подмножества  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}_+$ , включающего в себя все возможные значения времен исполнения облигаций, присутствующих на рынке. При этом на финансовом рынке должны отсутствовать арбитражные возможности, т. е., образно говоря, должны отсутствовать возможности купить какую-то облигацию и затем ее выгодно продать без какого-либо риска.

2. При построении моделей временной структуры стоимостей  $P(t, T)$ ,  $t \leq T$ , облигаций с временами исполнения  $T$  (будем их называть  $T$ -облигациями или  $T$ -бонами) предположим, что  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ . Иначе говоря, будем считать, что имеется целое (континуальное) семейство облигаций со стоимостями  $\{P(t, T), 0 \leq t \leq T, T \in \mathbb{R}_+\}$ .

При этом будем также считать, что у всех облигаций отсутствуют промежуточные (купонные) выплаты, т. е. будем рассматривать только облигации с нулевыми купонами (zero-coupon bonds).

**Замечание 1.** В англоязычной финансовой литературе вся проблематика построения моделей, описывающих временную структуру стоимостей акций, носит (ставшее популярным) название «*The term structure of interest rates*».

3. При оперировании с одной  $T$ -облигацией или семейством  $T$ -облигаций,  $T > 0$ , вводится ряд их характеристик, постоянно используемых при построении различных моделей и их анализе.

С этой целью представим стоимость  $P(t, T)$  в следующем виде:

$$P(t, T) = e^{-r(t, T)(T-t)}, \quad t \leq T, \quad (1)$$

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}, \quad t \leq T, \quad (2)$$

с некоторыми неотрицательными функциями  $r(t, T)$  и  $f(t, s)$ ,  $0 \leq t \leq s \leq T$ .

Ясно, что

$$r(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}, \quad t < T, \quad (3)$$

и (в предположении дифференцируемости  $P(t, T)$  по  $T > t$ )

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T), \quad t \leq T. \quad (4)$$

Для случая одной  $T$ -облигации с нулевыми купонными выплатами мы ввели (см. формулу (6) в § 1а гл. I) для  $t \leq T$  ее доходность, или доход  $\rho(T-t, T)$  до момента погашения, посредством формулы

$$P(t, T) = e^{-(T-t) \ln(1+\rho(T-t, T))}. \quad (5)$$

Сопоставляя эту формулу с соотношением (1), видим, что

$$r(t, T) = \ln(1 + \rho(T-t, T)). \quad (6)$$

Эту величину также принято называть *доходностью* (yield)  $T$ -облигации за оставшееся время  $T - t$ , а функцию  $t \rightsquigarrow r(t, T)$  называют (для  $t \leq T$ ) *кривой доходности  $T$ -облигации*.

Величины  $r(t, T)$  полезны и тогда, когда рассматриваются *разные*  $T$ -облигации с разными временами исполнения  $T > t$ . В этом случае функцию  $T \rightsquigarrow r(t, T)$  тоже называют *кривой доходности семейства  $T$ -облигаций* (в момент времени  $t$ ).

Чтобы не различать далее случаи одной облигации или семейства облигаций, мы будем рассматривать функцию  $r(t, T)$  как функцию *двух переменных*  $t$  и  $T$ , считая, что  $0 \leq t \leq T$  и  $T > 0$ , и называть ее также *доходностью*.

Величины  $f(t, T)$  обычно называют *форвардными процентными ставками* для контракта, заключаемого в момент времени  $t$ .

Во всем дальнейшем анализе ключевую роль играет *процентная ставка* (spot rate)  $r(t)$  в момент  $t$ , определяемая посредством форвардной процентной ставки:

$$r(t) = f(t, t). \quad (7)$$

Из этого определения ясно, что процентная ставка  $r(t)$ , отнесенная к моменту времени  $t$ , характеризует скорость изменения стоимости облигации в инфинитезимальном интервале  $(t, t + dt)$ .

Отметим также, что  $r(t, T)$  и  $f(t, T)$  связаны между собой соотношением

$$f(t, T) = r(t, T) + (T - t) \frac{\partial r(t, T)}{\partial T}, \quad (8)$$

непосредственно следующим из формул (4) и (1).

Тем самым, скажем, в предположении конечности производной  $\frac{\partial r(t, T)}{\partial T}$  при  $T = t$ , находим, что

$$r(t) = f(t, t) = r(t, t) \quad \left( = \lim_{T \downarrow t} r(t, T) \right). \quad (9)$$

4. Обратимся теперь к вопросу о том, как описывать динамику стоимостей  $P(t, T)$  облигаций. Здесь есть два основных подхода — *опосредованный* и *прямой*. (Ср. со с. 23.)

В первом из них стоимости  $P(t, T)$  представляют в виде

$$P(t, T) = F(t, r(t); T), \quad (10)$$

где  $r = (r(t))_{t \geq 0}$  — некоторая «процентная ставка».

В таких моделях вся структура стоимостей определяется *единственным фактором*,  $r = (r(t))_{t \geq 0}$ , что объясняет, почему такие модели называют *однофакторными*.

Важный, и аналитически поддающийся исследованию подкласс таких моделей описывается функциями  $F(t, r(t); T)$  вида

$$F(t, r(t); T) = e^{\alpha(t, T) - r(t)\beta(t, T)}. \quad (11)$$

Такие модели называют *аффинными* или иногда *экспоненциально-аффинными* [117], [119], поскольку  $\ln F(t, x; T)$  есть линейная по  $x$  функция  $\alpha(t, T) - x\beta(t, T)$  с некоторыми  $\alpha(t, T)$  и  $\beta(t, T)$ .

Другой широко известный подход был использован в работе [219], по имени авторов которой (D. Heath, R. Jarrow, A. Morton) соответствующую модель называют *НЖМ-моделью*.

Суть предложенного в работе [219] подхода состоит в том, чтобы искать стоимости  $P(t, T)$  как решения стохастических дифференциальных уравнений (ср. с формулой (4) в § 4b)

$$dP(t, T) = P(t, T)(A(t, T) dt + B(t, T) dW_t), \quad (12)$$

$A(T, T) = B(T, T) = 0$  и  $P(T, T) = 1$ , или уравнений

$$df(t, T) = a(t, T) dt + b(t, T) dW_t \quad (13)$$

для форвардных процентных ставок  $f(t, T)$ .

Сейчас уместно будет напомнить, что всюду здесь и далее предполагается заданным некоторое фильтрованное вероятностное пространство (стохастический базис)

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P).$$

Предполагается, что все рассматриваемые функции ( $P(t, T)$ ,  $f(t, T)$ ,  $A(t, T)$  и т. д.) являются  $\mathcal{F}_t$ -измеримыми для  $t \leq T$ . Как обычно,  $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — стандартный винеровский процесс, и предполагается, что выполнены необходимые условия интегрируемости, обеспечивающие существование стохастических интегралов в формулах (12) и (13) и существование решения уравнений (12).

Из соотношения (2) между стоимостями  $P(t, T)$  и форвардными процентными ставками  $f(t, T)$  можно найти, пользуясь формулой Ито и стохастической теоремой Фубини (см. лемму 12.5 в монографии [303] или [395]), следующие формулы связи между коэффициентами ( $A(t, T)$ ,  $B(t, T)$ ) и ( $a(t, T)$ ,  $b(t, T)$ ) в уравнениях (12) и (13), приведенные в работе [219]:

$$a(t, T) = \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} B(t, T) - \frac{\partial A(t, T)}{\partial T}, \quad (14)$$

$$b(t, T) = -\frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \quad (15)$$

и

$$A(t, T) = r(t) - \int_t^T a(t, s) ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^T b(t, s) ds \right)^2, \quad (16)$$

$$B(t, T) = - \int_t^T b(t, s) ds. \quad (17)$$

Из формулы (13) находим также, что

$$dr(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial T}(t, t) + a(t, t) \right) dt + b(t, t) dW_t. \quad (18)$$

**Замечание 2.** В ряде работ (см., например, [38], [359], [421]) вместо форвардной процентной ставки  $f(t, T)$  используется некоторая ее модификация  $\tilde{r}(t, x)$ , где

$$\tilde{r}(t, x) = f(t, t + x),$$

предпочтительность использования которой оправдывается рядом аналитических упрощений. При такой *репараметризации*, например, формула (2) выглядит несколько проще:

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_0^{T-t} \tilde{r}(t, x) dx \right\}. \quad (19)$$

5. Дальнейшая детализация структур стоимостей облигаций  $P(t, T)$ , структур форвардных процентных ставок  $f(t, T)$  и процентных ставок  $r(t)$  с точки зрения «безарбитражности и полноты» соответствующего рынка  $T$ -облигаций будет дана в гл. VII. Сейчас же лишь отметим, что, как и в случае  $(B, S)$ -рынка (см. п. 4 в предшествующем § 4b), принимаемая нами *концепция безарбитражности* рынка  $T$ -облигаций автоматически накладывает определенные структурные ограничения и на коэффициенты в уравнениях (12) и (13), и на коэффициенты  $\alpha(t, T)$  и  $\beta(t, T)$  и процентные ставки в аффинных моделях (11), выделяя тем самым естественные классы *безарбитражных* моделей рынка облигаций.

## 5. Семимартингальные модели

### § 5а. Семимартингалы и стохастические интегралы

1. Разнообразие представленных выше моделей, призванных описывать эволюцию финансовых показателей, таких как, например, стоимость акции, естественно ставит вопрос о выделении некоторого достаточно общего класса стохастических процессов, который, с одной стороны, содержал бы многие из рассмотренных выше моделей и, с другой стороны, поддавался бы аналитическому исследованию.

Во многих отношениях таким классом является класс *семимартингалов*, т. е. таких случайных процессов  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , которые представимы (быть может, и неоднозначно) в виде

$$X_t = X_0 + A_t + M_t, \quad (1)$$

где  $A = (A_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — процесс ограниченной вариации ( $A \in \mathcal{V}$ ), а  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — локальный мартингал ( $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ ), определенные на некотором *фильтрованном вероятностном пространстве*

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P),$$

называемом также *стохастическим базисом*, удовлетворяющем обычным условиям, т. е. свойству непрерывности справа  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \geq 0$ , и требованию, чтобы  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \geq 0$ , содержали все множества из  $\mathcal{F}$  нулевой  $P$ -вероятности (ср. с п. 3 в § 3b).

Предполагается, что  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  является *согласованным (адаптированным)* процессом с  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  и имеет непрерывные справа траектории  $t \mapsto X_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , у которых при каждом  $t > 0$  существуют пределы слева. (Во французском языке такие процессы называют *càdlàg* от Continu À Droite avec des Limites À Gauche).

2. Обращение к семимартингалам объясняется несколькими причинами. Во-первых, этот класс весьма широк — включает в себя процессы с дискретным временем  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  (в том смысле, что они находятся во взаимно однозначном соответствии с процессами  $X^* = (X^*_t)_{t \geq 0}$ , где  $X^*_t = X_{[t]}$ , которые,

очевидно, принадлежат классу  $\mathcal{V}$ ), диффузионные процессы, диффузионные процессы со скачками, точечные процессы, процессы с независимыми приращениями (за некоторым исключением; см. [250, гл. II, § 4с]) и многие другие.

Класс семимартингалов *устойчив* относительно многих преобразований — абсолютно непрерывной замены меры, замены времени, процедуры локализации, замены фильтраций и др. (Подробнее см. [250, гл. I, § 4с].)

Во-вторых, для семимартингалов существует хорошо развитый аппарат стохастического исчисления, оперирующий с такими понятиями, как *марковские моменты, мартингалы, супермартингалы и субмартингалы, локальные мартингалы, опциональные и предсказуемые  $\sigma$ -алгебры и процессы* и т. д.

В определенном смысле успех стохастического исчисления для семимартингалов определяется тем, что по ним можно определить *стохастический интеграл* и для них имеет место *формула Ито* (§ 5с).

**Замечание 1.** В работе [139, Appendix] П.-А. Мейер, один из создателей современного стохастического исчисления, дал сжатое и увлекательно написанное изложение основных понятий и идей стохастического анализа семимартингалов и стохастических интегралов по ним.

Важным ингредиентом стохастических базисов  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ , на которых предполагаются заданными семимартингалы, является понятие *потока  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$* . Как уже отмечалось в § 2а гл. I, для теории финансов это понятие также играет ключевую роль, будучи тем потоком «информации», который имеется на финансовом рынке и основываясь на котором инвесторы, трейдеры принимают свои решения.

Надо, конечно, отметить, что при построении «естественных» (с точки зрения теории финансов) моделей приходится обращаться и к процессам, которые *не являются* семимартингалами. Типичным в этом отношении является рассмотренное выше (§ 2с) фрактальное броуновское движение  $B^{\mathbb{H}} = (B_t^{\mathbb{H}})_{t \geq 0}$  с любым параметром Харста  $0 < \mathbb{H} < 1$ , за исключением лишь случая  $\mathbb{H} = 1/2$ , соответствующего (обычному) броуновскому движению.

**3.** Обратимся сейчас к понятию стохастического интеграла по семимартингалам, которое как нельзя лучше подходит для описания эволюции капитала самофинансируемых стратегий.

Пусть  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  — некоторый семимартингал на стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  и  $\mathcal{E}$  — класс *простых функций* вида

$$f(t, \omega) = Y_0(\omega)I_{\{0\}}(t) + \sum_i Y_i(\omega)I_{[r_i, s_i]}(t), \quad (2)$$

являющихся линейной комбинацией конечного числа *элементарных функций*

$$f_i(t, \omega) = Y_i(\omega)I_{[r_i, s_i]}(t) \quad (3)$$

с  $\mathcal{F}_{r_i}$ -измеримыми случайными величинами  $Y_i(\omega)$ ; ср. с § 3с.

Как и в случае винеровского процесса (броуновского движения), «естественным» определением *стохастического интеграла*  $I_t(f)$  от простых функций  $f$  вида (2) по семимартингалу  $X$ , обозначаемого  $(f \cdot X)_t$ ,  $\int_0^t f(s, \omega) dX_s$  и  $\int_{(0,t]} f(s, \omega) dX_s$ , является значение

$$I_t(f) = \sum_i Y_i(\omega) [X_{s_i \wedge t} - X_{t_i \wedge t}], \quad (4)$$

где  $a \wedge b = \min(a, b)$ .

**Замечание 2.** С точки зрения теории финансов, стохастический интеграл

$$I_t(f_i) = Y_i(\omega) [X_{s_i \wedge t} - X_{t_i \wedge t}]$$

имеет совершенно прозрачную интерпретацию: если  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  есть, скажем, цена акции и в момент  $t_i$  вы покупаете их в «количестве  $Y_i(\omega)$ » по цене  $X_{t_i}$ , то  $Y_i(\omega) [X_{s_i} - X_{t_i}]$  есть в точности величина вашего выигрыша (может быть, и отрицательного) от продажи этих акций в момент времени  $s_i$ , когда их цена становится равной  $X_{s_i}$ .

Следует подчеркнуть, что при данном определении стохастических интегралов  $I(f) = (I_t(f))_{t \geq 0}$  от простых функций вовсе нет никакой необходимости предполагать, что  $X$  — это семимартингал, поскольку выражение (4) имеет смысл для *любого* процесса  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ .

Однако предположение семимартингальности становится решающим, когда требуется *распространить* понятие интеграла (с сохранением его «естественных» свойств) с класса простых функций на более широкие классы функций  $f = f(t, \omega)$ .

В случае, когда процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  есть броуновское движение, стохастический интеграл  $I_t(f)$  согласно § 3с можно определить для всякой (измеримой) функции  $f = (f(s, \omega))_{s \leq t}$ , лишь бы только  $f(s, \omega)$  были  $\mathcal{F}_s$ -измеримыми и выполнялось условие

$$\int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty \quad (\text{P-п. н.}). \quad (5)$$

При этом ключевым явилось то обстоятельство, что такие функции можно *аппроксимировать* простыми  $(f_n, n \geq 1)$ , для которых соответствующие интегралы  $(I_t(f_n), n \geq 1)$  сходятся, по крайней мере по вероятности. Соответствующее предельное значение обозначалось  $I_t(f)$  и называлось стохастическим интегралом от  $f$  по броуновскому движению (на интервале  $(0, t]$ ).

В случае, когда вместо броуновского движения рассматривается *произвольный* семимартингал, конструкция стохастического интеграла  $I_t(f)$  также основана на идее аппроксимации  $f$  простыми функциями  $(f_n, n \geq 1)$ , для которых интегралы  $I_t(f_n)$  определены, с последующим предельным переходом при  $n \rightarrow \infty$ .

Однако здесь проблема аппроксимации становится более сложной, и на функции  $f$  приходится накладывать некоторые ограничения, «согласованные» со свойствами семимартингала  $X$ .

4. Для иллюстрации сказанного приведем относящиеся сюда результаты для того случая, когда  $X = M$ , где  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  является *квадратично интегрируемым мартингалом* класса  $\mathcal{H}^2$  ( $M \in \mathcal{H}^2$ ), т. е. мартингалом со свойством

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E} M_t^2 < \infty. \quad (6)$$

Пусть  $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — квадратическая характеристика мартингала  $M \in \mathcal{H}^2$  (или  $M \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ ), являющаяся по определению предсказуемым (см. ниже определение 2) неубывающим процессом, для которого процесс  $M^2 - \langle M \rangle = (M_t^2 - \langle M \rangle_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  есть мартингал (см. § 5b и ср. с § 1b гл. II).

Известно (см., например, [303, гл. 5]), что справедливы следующие утверждения.

А. Если процесс  $\langle M \rangle$  является *абсолютно* непрерывным (Р-п. н.) по  $t$ , то множество  $\mathcal{E}$  простых функций плотно в пространстве  $L_1^2$  измеримых функций  $f = f(t, \omega)$ , для которых

$$\mathbb{E} \int_0^\infty f^2(t, \omega) d\langle M \rangle_t < \infty. \quad (7)$$

Иначе говоря, найдется такая последовательность простых функций  $f_n = (f_n(t, \omega))_{t \geq 0}$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $n \geq 1$ , что

$$\mathbb{E} \int_0^\infty |f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|^2 d\langle M \rangle_t \rightarrow 0. \quad (8)$$

Заметим, что для стандартного броуновского движения  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  его квадратическая характеристика имеет вид  $\langle B \rangle_t \equiv t$ ,  $t \geq 0$ .

В. Если процесс  $\langle M \rangle$  является *непрерывным* (Р-п. н.), то множество  $\mathcal{E}$  простых функций плотно в пространстве  $L_2^2$ , состоящем из тех измеримых функций  $f = (f(t, \omega))_{t \geq 0}$ , для которых выполнено неравенство (7) и для каждого (конечного) марковского момента  $\tau = \tau(\omega)$  величины  $f(\tau(\omega), \omega)$  являются  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримыми.

С. В общем случае, когда на  $\langle M \rangle$  не накладываются дополнительные условия гладкости траекторий, множество  $\mathcal{E}$  простых функций плотно в пространстве  $L_2^2$  измеримых функций  $f = (f(t, \omega), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , для которых выполнено условие (7) и которые являются *предсказуемыми* в следующем смысле.

Пусть сначала  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — некоторая стохастическая последовательность, заданная на стохастическом базисе. В соответствии со стандартным определением (см. § 1b гл. II), *предсказуемость* последовательности  $X$  означает, что величины  $X_n$  являются  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми для всех  $n \geq 1$ .



В случае же непрерывного времени наиболее удачной формой понятия предсказуемости (на стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ ) оказалась следующая.

Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  минимальную  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{P}$ , относительно которой измеримы все отображения  $(t, \omega) \rightsquigarrow Y(t, \omega)$ , порожденные  $\mathcal{F}_t$ -измеримыми при каждом  $t \geq 0$  (измеримыми) функциями  $Y = (Y(t, \omega))_{t \geq 0, \omega \in \Omega}$ , имеющими непрерывные слева траектории (по  $t$  при каждом  $\omega \in \Omega$ ).

**Определение 1.**  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{P}$  подмножеств в  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй предсказуемых множеств.

**Определение 2.** Случайный процесс  $X = (X_t(\omega))_{t \geq 0}$ , заданный на стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ , называется предсказуемым, если отображение  $(t, \omega) \rightsquigarrow X(t, \omega) (= X_t(\omega))$  является  $\mathcal{P}$ -измеримым.

5. Приведенные результаты об аппроксимации функций  $f$  позволяют по аналогии со случаем броуновского движения определить (по изометрии) стохастический интеграл

$$I_\infty(f) = \int_0^\infty f(s, \omega) dM_s \quad (9)$$

для всякого  $M \in \mathcal{H}^2$ .

Интегралы  $I_t(f)$  для  $t > 0$  тогда определяются с помощью формулы

$$I_t(f) = \int_0^t I(s \leq t) f(s, \omega) dM_s. \quad (10)$$

Важно подчеркнуть, что если на  $\langle M \rangle$  не накладываются условия гладкости (как в условиях А и В), то приведенные рассуждения показывают, что в случае  $M \in \mathcal{H}^2$  стохастические интегралы  $I(f) = (I_t(f))_{t \geq 0}$  определены для любой предсказуемой ограниченной функции  $f$ .

Следующий шаг в распространении понятия стохастических интегралов  $I_t(f)$ , обозначаемых также  $(f \cdot X)_t$ , что подчеркивает и роль процесса  $X$ , по которому производится интегрирование, состоит в рассмотрении предсказуемых локально ограниченных функций  $f$  и локально квадратично интегрируемых мартингалов  $M$  класса  $\mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ . (Если  $\mathcal{K}$  — некоторый класс процессов, то говорят, что процесс  $Y = (Y_t(\omega))_{t \geq 0}$  принадлежит классу  $\mathcal{K}_{\text{loc}}$ , если найдется такая последовательность  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  марковских моментов, что  $\tau_n \uparrow \infty$  и «остановленные» процессы  $Y^{\tau_n} = (Y_{t \wedge \tau_n})_{t \geq 0}$  принадлежат классу  $\mathcal{K}$  при каждом  $n \geq 1$ ; ср. с определением в § 1с гл. II.)

Если  $(\tau_n)$  — локализирующая последовательность (для локально ограниченной функции  $f$  и  $M \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ ), то согласно данной выше конструкции стохастических интегралов для ограниченных функций  $f$  и  $M \in \mathcal{H}^2$  определены интегралы  $f \cdot M^{\tau_n} = ((f \cdot M^{\tau_n})_t)_{t \geq 0}$ . При этом, как нетрудно видеть, выполне-

но следующее свойство их *согласованности* для разных  $n \geq 1$ :  $(f \cdot M^{\tau_{n+1}})^{\tau_n} = f \cdot M^{\tau_n}$ .

Отсюда вытекает, что существует, и притом единственный (с точностью до стохастической неразличимости), процесс, обозначаемый  $f \cdot M = ((f \cdot M)_t)_{t \geq 0}$ , для которого

$$(f \cdot M)^{\tau_n} = f \cdot M^{\tau_n}$$

для всех  $n \geq 1$ .

Так определенный процесс  $f \cdot M = (f \cdot M)_{t \geq 0}$  принадлежит классу  $\mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  (подробнее см. [250, гл. I § 4d]), и его называют *стохастическим интегралом* или *стохастическим процесс-интегралом* от  $f$  по  $M$ .

**6.** Заключительный шаг в конструкции стохастических интегралов  $f \cdot X$  от локально ограниченных предсказуемых функций  $f = f(t, \omega)$  по семимартингалам  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  основан на следующем замечании о структуре семимартингалов.

По определению семимартингал  $X$  есть процесс, представимый в виде (1), где  $A = (A_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — процесс ограниченной вариации, т. е.  $\int_0^t |dA_s(\omega)| < \infty$ ,  $t > 0$ ,  $\omega \in \Omega$ , и  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$  — локальный мартингал.

Важный результат общей теории мартингалов состоит в том, что *всякий локальный мартингал  $M$  допускает* (вообще говоря, не единственное) *разложение*

$$M_t = M_0 + M'_t + M''_t, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

где  $M' = (M'_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  и  $M'' = (M''_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  являются локальными мартингалами,  $M'_0 = M''_0 = 0$ , причем  $M''$  имеет ограниченную вариацию (обозначение:  $M'' \in \mathcal{V}$ ), а  $M' \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ . (См. предложение 4.17, гл. I в [250].)

Тем самым, всякий семимартингал  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  может быть представлен в виде

$$X_t = X_0 + A'_t + M'_t, \quad (12)$$

где  $A' = A + M''$  и  $M' \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ .

Для локально ограниченных функций  $f$  определены (для каждого  $\omega \in \Omega$ ) интегралы Лебега—Стилтьеса

$$(f \cdot A')_t = \int_{(0,t]} f(s, \omega) dA'_s, \quad (13)$$

а если функция  $f$  является к тому же еще и *предсказуемой*, то определены стохастические интегралы  $(f \cdot M')_t$ ; естественно также определить интегралы  $(f \cdot X)_t$ , полагая

$$(f \cdot X)_t = (f \cdot A')_t + (f \cdot M')_t. \quad (14)$$

Для проверки корректности такого определения стохастических интегралов нужно, конечно, показать, что их значение (с точностью до стохастической эквивалентности) не зависит от специфики представления (12), т. е.

если к тому же  $X_t = X_0 + \bar{A}_t + \bar{M}_t$  с  $\bar{A} \in \mathcal{V}$ ,  $\bar{M} \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ , то

$$f \cdot A' + f \cdot M' = f \cdot \bar{A} + f \cdot \bar{M}. \quad (15)$$

Для элементарных функций  $f$  это свойство очевидно, и по линейности оно остается верным и для простых функций ( $f \in \mathcal{E}$ ). Если функции  $f$  являются предсказуемыми и ограниченными, то они могут быть аппроксимированы простыми функциями  $f_n$ , поточечно сходящимися к  $f$ . Используя этот факт и процедуру локализации, получаем требуемое свойство (15).

**Замечание 3.** Детали доказательств приведенных выше утверждений, а также различные другие конструкции стохастических интегралов по семимартингалам (в том числе и *векторным*) приведены, например, в монографиях [248], [250], [303] и также далее в § 1а гл. VII.

7. Остановимся на некоторых свойствах стохастических интегралов от локально ограниченных функций  $f$  по семимартингалам (см. свойства (4.33)–(4.37) в [250, гл. I]): 5

- а)  $f \cdot X$  есть семимартингал;
- б) отображение  $f \rightsquigarrow f \cdot X$  линейно;
- с) если  $X$  является локальным мартингалом ( $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ ), то  $f \cdot X$  также будет локальным мартингалом;
- д) если  $X \in \mathcal{V}$ , то стохастический интеграл будет совпадать с интегралом Стильтьеса;
- е)  $(f \cdot X)_0 = 0$  и  $f \cdot X = f \cdot (X - X_0)$ ;
- ф)  $\Delta(f \cdot X) = f \Delta X$ , где  $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ ;
- г) если  $g$  является предсказуемой локально ограниченной функцией, то  $g \cdot (f \cdot X) = (g \cdot f) \cdot X$ .

Особо выделим также следующий результат (типа теоремы Лебега о мажорируемой сходимости) относительно возможности предельного перехода под знаком стохастического интеграла:

- h) если  $g_n = g_n(t, \omega)$  — предсказуемые процессы, поточечно сходящиеся к  $g = g(t, \omega)$ , и  $|g_n(t, \omega)| \leq G(t, \omega)$ , где  $G = (G(t, \omega))_{t \geq 0}$  — некоторый локально ограниченный предсказуемый процесс, то имеет место сходимость  $g_n \cdot X \rightarrow g \cdot X$  по мере (равномерно на любом конечном интервале):

$$\sup_{s \leq t} |g_n \cdot X - g \cdot X| \xrightarrow{P} 0. \quad (16)$$

8. В связи с описанной выше конструкцией стохастических интегралов  $f \cdot X$  от предсказуемых функций  $f$  по семимартингалам  $X$  естественно возникает вопрос о возможности их получения с помощью более простых процедур, например основанных на идеях «интеграла Римана».

В этом отношении представляет интерес случай функций  $f = (f(t, \omega))_{t \geq 0}$ , являющихся непрерывными слева.

Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем следующее определение [250, гл. I, § 4d].

Для каждого  $n \geq 1$  пусть

$$T^{(n)} = \{\tau^{(n)}(m), m \geq 1\}$$

— такое семейство марковских моментов  $\tau^{(n)}(m)$ , что  $\tau^{(n)}(m) \leq \tau^{(n)}(m+1)$  на множестве  $\{\tau^{(n)}(m) < \infty\}$ .

Будем говорить, что последовательности  $T^{(n)}$ ,  $n \geq 1$ , являются *римановскими*, если для каждого  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $\omega \in \Omega$  имеет место сходимость

$$\sup_m [\tau^{(n)}(m+1) \wedge t - \tau^{(n)}(m) \wedge t] \rightarrow 0. \quad (17)$$

Свяжем со стохастическими интегралами  $(f \cdot X)_t$  их  $T^{(n)}$ -римановские аппроксимации:

$$T^{(n)}(f \cdot X)_t = \sum_m f(\tau^{(n)}(m), \omega) [X_{\tau^{(n)}(m+1) \wedge t} - X_{\tau^{(n)}(m) \wedge t}]. \quad (18)$$

Оказывается, в случае процессов  $f = (f(t, \omega), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , имеющих непрерывные слева траектории, введенные  $T^{(n)}$ -римановские аппроксимации  $T^{(n)}(f \cdot X)$  сходятся к  $f \cdot X$  по мере равномерно на каждом конечном временном интервале  $[0, t]$ ,  $t > 0$ :

$$\sup_{u \leq t} |T^{(n)}(f \cdot X)_u - (f \cdot X)_u| \xrightarrow{P} 0. \quad (19)$$

Доказательство весьма просто. Положим

$$f^{(n)}(t, \omega) = \sum_m f(\tau^{(n)}(m), \omega) I\{t, \omega : \tau^{(n)}(m) < t \leq \tau^{(n)}(m+1)\}. \quad (20)$$

Функции  $f^{(n)} = f^{(n)}(t, \omega)$  являются предсказуемыми и поточно сходящимися к  $f$ , поскольку  $f$  непрерывна слева.

Пусть  $K_t = \sup_{s \leq t} |f_s|$ . Ясно, что процесс  $K = (K_t, \mathcal{F}_t)$  является непрерывным слева, локально ограниченным и  $|f^{(n)}| \leq K$ .

Тогда по свойству (h)

$$\sup_{u \leq t} |(f^{(n)} \cdot X)_u - (f \cdot X)_u| \xrightarrow{P} 0,$$

и требуемое утверждение (19) следует из того замечания, что  $T^{(n)}(f \cdot X) = f^{(n)} \cdot X$ .

## § 5b. Разложение Дуба—Мейера. Компенсаторы. Квадратическая вариация

1. В случае дискретного времени важным средством «мартингального» анализа (произвольных!) стохастических последовательностей  $H = (H_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $E|H_n| < \infty$ ,  $n \geq 0$ , является разложение Дуба

$$H_n = H_0 + A_n + M_n, \quad (1)$$

где  $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})$  — предсказуемая последовательность, а  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)$  — мартингал (см. формулы (1)–(5) в § 1b гл. II).

Точно так же и в случае непрерывного времени соответствующую роль (для супермартингалов) играет разложение Дуба—Мейера, которое вместе с понятием стохастического интеграла лежит в основе стохастического исчисления для семимартингалов.

Пусть  $H = (H_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  является субмартингалом, т. е. стохастическим процессом с  $\mathcal{F}_t$ -измеримыми и интегрируемыми величинами  $H_t$ ,  $t \geq 0$ , имеющими càdlàg-траектории (непрерывные справа и с левосторонними пределами), и выполнено субмартингальное свойство:

$$E(H_t | \mathcal{F}_s) \geq H_s \quad (\text{P-п. н.}), \quad s \leq t. \quad (2)$$

Будем говорить, что произвольный случайный процесс  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  принадлежит классу Дирихле (D), если

$$\sup_{\tau} E\{|Y_{\tau}| I(|Y_{\tau}| \geq c)\} \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где  $\sup$  берется по всем конечным марковским моментам. Иначе говоря, семейство случайных величин

$$\{Y_{\tau} : \tau \text{ — конечные марковские моменты}\}$$

является равномерно интегрируемым.

**Теорема 1** (разложение Дуба—Мейера). *Всякий субмартингал  $H$  класса (D) допускает (и притом единственное) разложение*

$$H_t = H_0 + A_t + M_t, \quad (4)$$

где  $A = (A_t, \mathcal{F}_t)$  является предсказуемым возрастающим процессом,  $E A_t < \infty$ ,  $t > 0$ ,  $A_0 = 0$ , а  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$  есть равномерно интегрируемый мартингал.

Из соотношения (4) видно, что всякий субмартингал класса (D) является семимартингалом, к тому же с тем свойством, что процесс  $A$ , принадлежащий классу  $\mathcal{V}$  (см. п. 6 в § 5a), оказывается предсказуемым.

Это обстоятельство послужило основанием к выделению в классе семимартингалов  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  подкласса специальных семимартингалов, для которых существует представление (4) с предсказуемым процессом  $A = (A_t, \mathcal{F}_t)$ .

В случае дискретного времени разложение Дуба обладало свойством *единственности* (см. § 1b гл. II). Точно так же, если для *специального* семимартингала есть два представления (4) с *предсказуемыми* процессами ограниченной вариации, то эти представления совпадают.

Полезно также заметить, что на самом деле всякий специальный семимартингал есть разность двух локальных субмартингалов (или, что равносильно, локальных супермартингалов).

**Замечание 1.** Разложение Дуба—Мейера относится к числу трудных результатов «теории мартингалов». Не приводя здесь доказательства (см., например, [103], [248], [303]), остановимся на том, как можно было бы его получить, отправляясь от разложения Дуба для дискретного времени.

Пусть  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — субмартингал и  $X^{(\Delta)} = (X_t^{(\Delta)}, \mathcal{F}_t^{(\Delta)})_{t \geq 0}$  — его дискретная  $\Delta$ -аппроксимация,

$$X_t^{(\Delta)} = X_{[t/\Delta]\Delta}, \quad \mathcal{F}_t^{(\Delta)} = \mathcal{F}_{[t/\Delta]\Delta}.$$

Согласно разложению Дуба для дискретного времени

$$X_t^{(\Delta)} = X_0 + A_t^{(\Delta)} + M_t^{(\Delta)},$$

где

$$\begin{aligned} A_t^{(\Delta)} &= A_{[t/\Delta]\Delta}^{(\Delta)} = \sum_{i=1}^{[t/\Delta]} \mathbb{E}(X_{i\Delta}^{(\Delta)} - X_{(i-1)\Delta}^{(\Delta)} | \mathcal{F}_{(i-1)\Delta}^{(\Delta)}) = \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_0^{[t/\Delta]\Delta} \mathbb{E}(X_{[s/\Delta]\Delta + \Delta} - X_{[s/\Delta]\Delta} | \mathcal{F}_{[s/\Delta]\Delta}) ds. \end{aligned}$$

Поэтому естественно ожидать, что участвующий в разложении Дуба—Мейера неубывающий предсказуемый процесс  $A = (A_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  можно искать в виде

$$A_t = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_0^t \mathbb{E}(X_{s+\Delta} - X_s | \mathcal{F}_s) ds,$$

и если такой процесс определен, то все, что остается сделать, — это доказать, что *скомпенсированный* процесс  $X - A = (X_t - A_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  есть равномерно интегрируемый мартингал.

Из сказанного становится понятным, почему в разложении Дуба—Мейера процесс  $A = (A_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  называют *компенсатором* субмартингала  $X$ .

**2.** Из разложения Дуба—Мейера вытекает несколько полезных следствий (см. [250, гл. I, § 3b]), из которых отметим следующие.

**Следствие 1.** *Каждый предсказуемый локальный мартингал  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ,  $X_0 = 0$ , имеющий ограниченную вариацию, стохастически неотличим от нуля.*

**Следствие 2.** Пусть  $A = (A_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  принадлежит классу  $\mathcal{A}_{\text{loc}}$ , т. е. является локально интегрируемым процессом. Тогда существует, и притом единственный (с точностью до стохастической неразличимости), такой предсказуемый процесс  $\tilde{A} = (\tilde{A}_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , называемый компенсатором процесса  $A$ , что  $A - \tilde{A}$  является локальным мартингалом. Если к тому же процесс  $A$  является неубывающим, то неубывающим будет и компенсатор  $\tilde{A}$ .

**3.** Обратимся к понятиям квадратической вариации и квадратической ковариации для семимартингалов, которые играют важную роль в стохастическом анализе. (Эти характеристики семимартингалов явно участвуют, например, в приводимой ниже в § 5с формуле Ито.)

В случае дискретного времени квадратическая вариация мартингалов была введена в § 1b гл. II.

На случай непрерывного времени это определение обобщается следующим образом.

**Определение 1.** Квадратической ковариацией двух семимартингалов  $X$  и  $Y$  называется процесс  $[X, Y] = ([X, Y]_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , где

$$[X, Y]_t = X_t Y_t - \int_0^t X_{s-} dY_s - \int_0^t Y_{s-} dX_s - X_0 Y_0. \quad (5)$$

(Заметим, что участвующие в формуле (5) стохастические интегралы определены, поскольку непрерывные слева процессы  $(X_{t-})$  и  $(Y_{t-})$  являются локально ограниченными.)

**Определение 2.** Квадратической вариацией семимартингала  $X$  называется процесс  $[X, X] = ([X, X]_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ,

$$[X, X]_t = X_t^2 - 2 \int_0^t X_{s-} dX_s - X_0^2. \quad (6)$$

Для  $[X, X]$  используется также обозначение  $[X]$ ; ср. с формулой (10) в § 1b гл. II.

Заметим, что из определений (5) и (6) непосредственно вытекает «поляризационное» соотношение:

$$[X, Y] = \frac{1}{4}([X + Y, X + Y] - [X - Y, X - Y]). \quad (7)$$

Следующие рассуждения оправдывают данные наименования квадратической ковариации и квадратической вариации для  $[X, Y]$  и  $[X, X]$ .

Пусть  $T^{(n)}$ ,  $n \geq 1$ , являются римановскими последовательностями (см. п. 8 в § 5a) и

$$S_t^{(n)}(X, Y) = \sum_m (X_{\tau^{(n)}(m+1) \wedge t} - X_{\tau^{(n)}(m) \wedge t})(Y_{\tau^{(n)}(m+1) \wedge t} - Y_{\tau^{(n)}(m) \wedge t}). \quad (8)$$

Тогда для каждого  $t > 0$  имеем

$$\sup_{u \leq t} |S_u^{(n)}(X, Y) - [X, Y]_u| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

и, в частности,

$$\sup_{u \leq t} |S_u^{(n)}(X, X) - [X, X]_u| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Для доказательства соотношения (10) достаточно заметить, что (см. формулу (6))

$$S_u^{(n)}(X, X) = X_u^2 - X_0^2 - 2T^{(n)}(X_- \cdot X)_u \quad (11)$$

и что согласно свойству (19) из § 5а

$$T^{(n)}(X_- \cdot X)_u \rightarrow (X_- \cdot X)_u = \int_0^u X_{s-} dX_s.$$

Утверждение (9) следует из формулы (10) и «поляризационного» соотношения (7).

4. Из формулы (10) видно, что процесс  $[X, X]$  является неубывающим. Поскольку это *cádlág*-процесс (с. 317),  $[X, X] \in \mathcal{V}^+$ , и, значит (в силу формулы (7)), процесс  $[X, Y]$  принадлежит  $\mathcal{V}$ , т. е. имеет ограниченную вариацию.

Последний факт вместе с формулой (5) доказывает следующий результат: *произведение двух семимартингалов также является семимартингалом.*

Формулу (5), переписанную в форме

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_{s-} dY_s + \int_0^t Y_{s-} dX_s + [X, Y]_t \quad (12)$$

с процессом  $[X, Y]$ , определенным формулой (7), можно рассматривать как *формулу интегрирования по частям для семимартингалов*, которая принимает наглядный вид, если ее записывать в дифференциальной форме:

$$d(XY) = X_- dY + Y_- dX + d[X, Y]. \quad (13)$$

Понятно, что эту формулу можно рассматривать как *семимартингальное обобщение классического соотношения*

$$\Delta(X_n Y_n) = X_{n-1} \Delta Y_n + Y_{n-1} \Delta X_n + \Delta X_n \Delta Y_n \quad (14)$$

для последовательностей  $X = (X_n)$  и  $Y = (Y_n)$ .

Сводку свойств квадратической ковариации и квадратической вариации при различных предположениях относительно  $X$  и  $Y$  можно найти, например, в книге [250, гл. I, § 4e].

Отметим лишь некоторые из них, предполагая, что  $Y \in \mathcal{V}$ :

а) если один из семимартингалов  $X$  или  $Y$  является непрерывным, то  $[X, Y] = 0$ ;



b) если  $X$  — семимартингал и  $Y$  является предсказуемым процессом ограниченной вариации, то

$$[X, Y] = \Delta Y \cdot X \quad \text{и} \quad XY = Y \cdot X + X_- \cdot Y;$$

c) если  $Y$  — предсказуемый процесс и  $X$  — локальный мартингал, то  $[X, Y]$  является локальным мартингалом;

d)  $\Delta[X, Y] = \Delta X \Delta Y$ .

5. Помимо введенных процессов  $[X, Y]$  и  $[X, X]$ , часто образно называемых «квадратными скобками», важную роль в стохастическом анализе играют вводимые ниже процессы  $\langle X, Y \rangle$  и  $\langle X, X \rangle$ , называемые «угловыми скобками».

Пусть  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  является квадратично интегрируемым мартингалом класса  $\mathcal{H}^2$ . Тогда в силу неравенства Дуба (см., например, [303]; для случая броуновского движения см. также формулу (36) в § 3b)

$$E \sup_t M_t^2 \leq 4 \sup_t E M_t^2 < \infty. \quad (15)$$

Отсюда вытекает, что процесс  $M^2$ , являющийся субмартингалом (согласно неравенству Йенсена), принадлежит классу (D). Тогда из разложения Дуба—Мейера следует, что существует такой неубывающий предсказуемый интегрируемый процесс, обозначаемый  $\langle M, M \rangle$  или  $\langle M \rangle$ , что разность  $M^2 - \langle M, M \rangle$  является равномерно интегрируемым мартингалом.

В том случае, когда  $M \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ , соответствующей локализацией убеждаемся в том, что также существует такой неубывающий предсказуемый процесс, снова обозначаемый  $\langle M, M \rangle$  или  $\langle M \rangle$ , что  $M^2 - \langle M \rangle$  является локально квадратично интегрируемым мартингалом.

Если имеются два мартингала  $M$  и  $N$  из класса  $\mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ , то их взаимная «угловая скобка»  $\langle M, N \rangle$  определяется формулой

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{4} (\langle M + N, M + N \rangle - \langle M - N, M - N \rangle). \quad (16)$$

Непосредственно видно, что  $\langle M, N \rangle$  является предсказуемым процессом ограниченной вариации, причем  $MN - \langle M, N \rangle$  есть локальный мартингал.

Из формулы (5) следует, что  $MN - \langle M, N \rangle$  также является локальным мартингалом. Следовательно, если мартингалы  $M$  и  $N$  принадлежат классу  $\mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ , то  $[M, N] - \langle M, N \rangle$  — локальный мартингал.

В соответствии со следствием 2 в п. 2 предсказуемый процесс  $\langle M, N \rangle$  называют компенсатором процесса  $[M, N]$ . При этом часто используется следующее обозначение:

$$\langle M, N \rangle = \widetilde{[M, N]}. \quad (17)$$

**Замечание 2.** В случае дискретного времени для квадратично интегрируемых мартингалов  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)$  и  $N = (N_n, \mathcal{F}_n)$  соответствующие последова-

тельности  $[M, N]$  и  $\langle M, N \rangle$  определяются формулами

$$[M, N]_n = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \Delta N_k \quad (18)$$

и

$$\langle M, N \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta M_k \Delta N_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad (19)$$

где  $\Delta M_k = M_k - M_{k-1}$ ,  $\Delta N_k = N_k - N_{k-1}$ . (Ср. с § 1b гл. II.)

Формула (19) подсказывает хотя и формальную, но, тем не менее, наглядную запись для квадратической ковариации в случае непрерывного времени:

$$\langle M, N \rangle_t = \int_0^t \mathbb{E}(dM_s dN_s | \mathcal{F}_s). \quad (20)$$

(Ср. с формулой для  $A_t$  в замечании 1 в конце п. 1.)

**6.** Остановимся на вопросе определения «угловых скобок» для семимартингалов и их связи с «квадратными скобками».

Пусть  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — семимартингал с разложением  $X = X_0 + M + A$ , где  $M$  — локальный мартингал ( $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ ) и  $A$  — процесс ограниченной вариации ( $A \in \mathcal{V}$ ).

Наряду с уже использованным выше представлением локального мартингала  $M$  в виде  $M = M_0 + M' + M''$  с  $M'' \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_{\text{loc}}$ ,  $M' \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2 \cap \mathcal{M}_{\text{loc}}$  (см. формулу (11) в § 5а), каждый локальный мартингал  $M$  может быть представлен (и притом *единственным* образом) в виде

$$M = M_0 + M^c + M^d, \quad (21)$$

где  $M^c = (M_t^c, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  есть непрерывный локальный мартингал и  $M^d = (M_t^d, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — *чисто разрывный* локальный мартингал. (Локальный мартингал  $X$  называется *чисто разрывным*, если  $X_0 = 0$  и он *ортогонален* всем непрерывным мартингалам  $Y$ , т. е.  $XY$  является локальным мартингалом; подробнее см. [250, гл. I, § 4b].)

Поэтому всякий семимартингал  $X$  может быть представлен в виде

$$X = X_0 + M^c + M^d + A.$$

Весьма замечательно, что *непрерывная* мартингальная составляющая  $M^c$  для семимартингала  $X$  определяется однозначным образом (это — следствие разложения Дуба—Мейера; подробнее см. [250, гл. I, 4.18 и 4.27]), что объясняет общепринятое для нее обозначение  $X^c$ .

Доказывается [250, гл. I, 4.52], что если  $X$  — семимартингал, то

$$[X, X]_t = \langle X^c, X^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta X_s)^2, \quad (22)$$

и если  $X$  и  $Y$  — семимартингалы, то  $(\langle X, Y \rangle_t \equiv \langle X^c, Y^c \rangle_t)$

$$[X, Y]_t = \langle X, Y \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s. \quad (23)$$

**Замечание 3.** Для локальных мартингалов  $M$  при каждом  $t > 0$  имеем

$$\sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 < \infty \quad (\text{P-п. н.}) \quad (24)$$

и

$$[M, M] \in \mathcal{A}_{\text{loc}} \quad (25)$$

(см., например, [250, гл. I, § 4]).

Поскольку для процессов  $A$  ограниченной вариации  $\sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^2 < \infty$  (P п. н.),  $t > 0$ , для всякого семимартингала  $X = X_0 + M + A$  имеем

$$\sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^2 < \infty \quad (\text{P-п. н.}), \quad t > 0. \quad (26)$$

Поэтому с учетом формулы (24) получаем

$$\sum_{s \leq t} (\Delta X_s)^2 < \infty \quad (\text{P-п. н.}), \quad t > 0.$$

Следовательно, правые части формул (22) и (23) определены и конечны (P-п. н.).

## § 5с. Формула Ито для семимартингалов. Некоторые обобщения

**1. Теорема (формула Ито).** Пусть процесс

$$X = (X^1, \dots, X^d)$$

является  $d$ -мерным семимартингалом и  $F = F(x_1, \dots, x_d)$  — функция класса  $C^2$  на  $\mathbb{R}^d$ .

Тогда процесс  $F(X)$  также является семимартингалом и

$$\begin{aligned} F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i \leq d} (D_i F(X_-)) \cdot X^i + \frac{1}{2} \sum_{i, j \leq d} (D_{ij} F(X_-)) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle + \\ + \sum_{s \leq t} \left[ F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_{i \leq d} D_i F(X_{s-}) \Delta X_s^i \right], \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{где } D_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad D_{ij} F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Доказательство приводится во многих руководствах по стохастическому исчислению (см., например, [103], [248], [250]).

2. Остановимся на двух примерах, показывающих эффективность формулы Ито в разных вопросах стохастического анализа.

**Пример 1** (уравнение и стохастическая экспонента Долеан). Пусть  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — заданный семимартингал. Рассматривается вопрос об отыскании в классе càdlàg-процессов (с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями) решения  $Y = (Y_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  уравнения Долеан

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-} dX_s, \quad (2)$$

или, в дифференциальной форме, уравнения

$$dY = Y_- dX, \quad Y_0 = 1. \quad (3)$$

По формуле Ито, примененной к процессам

$$\begin{aligned} X_t^1 &= X_t - X_0 - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t, \\ X_t^2 &= \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}, \quad X_0^2 = 1, \end{aligned} \quad (4)$$

и функции  $F(x_1, x_2) = e^{x_1} \cdot x_2$ , проверяется, что процесс

$$\mathcal{E}(X)_t = F(X_t^1, X_t^2), \quad t \geq 0,$$

т. е. процесс

$$\mathcal{E}(X) = (\mathcal{E}(X)_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \quad (5)$$

$$\mathcal{E}(X)_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}, \quad (6)$$

1) является семимартингалом;

2) удовлетворяет стохастическому уравнению Долеан (2);

более того, в классе процессов с càdlàg-траекториями процесс  $\mathcal{E}(X)$ , называемый *стохастической экспонентой* (Долеан), является единственным (с точностью до стохастической неразличимости) решением уравнения (2). (Доказательство и обобщение на случай комплекснозначных семимартингалов см. в [250, гл. I, § 4f].)

**Пример 2** (теорема Леви; § 3b). Пусть  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  является непрерывным локальным мартингалом,  $\langle X \rangle_t \equiv t$ . Тогда  $X$  — броуновское движение.

Для доказательства рассмотрим функцию  $F(x) = e^{i\lambda x}$  и воспользуемся формулой Ито (применяемой отдельно для действительной и мнимой частей). Тогда найдем, что

$$e^{i\lambda X_t} = 1 + i\lambda \int_0^t e^{i\lambda X_s} dX_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t e^{i\lambda X_s} ds. \quad (7)$$

Интеграл  $\int_0^t e^{i\lambda X_s} dX_s$  является локальным мартингалом. Положим  $\tau_n = \inf\{t: |X_t| \geq n\}$ , и пусть  $E(\cdot; A)$  обозначает усреднение по множеству  $A$ . Тогда если  $A \in \mathcal{F}_0$ , то из формулы (7) находим, что

$$E(e^{i\lambda X_{t \wedge \tau_n}}; A) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} E\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} e^{i\lambda X_s} ds; A\right). \quad (8)$$

Отсюда при  $n \rightarrow \infty$  для  $f_A(t) = E(e^{i\lambda X_t}; A)$ ,  $t \geq 0$ , получаем соотношение

$$f_A(t) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t f_A(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

причем ясно, что  $|f_A(t)| \leq 1$  и  $f_A(0) = P(A)$ .

Единственное решение уравнения (9), подчиняющееся сформулированным условиям, есть

$$f(A) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} P(A). \quad (10)$$

Тем самым,

$$E(e^{i\lambda X_t} | \mathcal{F}_0) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}.$$

Аналогично показывается, что для любых  $s \leq t$  выполняется равенство

$$E(e^{i\lambda(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}. \quad (11)$$

Следовательно, процесс  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  имеет независимые гауссовские приращения,  $E(X_t - X_s) = 0$ ,  $E(X_t - X_s)^2 = t - s$ . Вместе с предположенной непрерывностью траекторий отсюда следует, что  $X$  (по определению; см. § 1b) является броуновским движением.

**3.** Формула Ито, являющаяся важным инструментом стохастического анализа, обобщается в разных направлениях: на *несемимартингалы* (см., например, [299]), на случай *негладких* функций  $F = F(X_1, \dots, X_d)$  и т. д.

Приведем здесь, следуя работе [166], один результат в этом направлении для случая  $d = 1$ , когда  $X$  — стандартное броуновское движение  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ .

Пусть функция  $F = F(x)$  является абсолютно непрерывной:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(y) dy; \quad (12)$$

при этом будем предполагать, что (измеримая) функция  $f = f(y)$  принадлежит классу  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$ , т. е.

$$\int_{|x| \leq K} f^2(x) dx < \infty \quad (13)$$

для всякого  $K > 0$ .

Заметим, что и процесс  $f(B) = (f(B_t))_{t \geq 0}$ , и процесс  $F = (F(B_t))_{t \geq 0}$  не являются, вообще говоря, семимартингалами, и поэтому формула Ито в форме (1) не применима.

В [166] показывается, однако, что имеет место следующая формула:

$$F(B_t) = F(0) + \int_0^t f(B_s) dB_s + \frac{1}{2} [f(B), B]_t, \quad (14)$$

где  $[f(B), B]$  — квадратическая ковариация процессов  $f(B)$  и  $B$ , определяемая следующим образом:

$$[f(B), B]_t = P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_m \left( f(B_{t^{(n)}(m+1) \wedge t}) - f(B_{t^{(n)}(m) \wedge t}) \right) \times \\ \times (B_{t^{(n)}(m+1) \wedge t} - B_{t^{(n)}(m) \wedge t}), \quad (15)$$

где  $T^{(n)} = \{t^{(n)}(m), m \geq 1\}$ ,  $n \geq 1$ , — римановские последовательности (детерминированных) моментов  $t^{(n)}(m)$ , удовлетворяющих свойствам, приведенным в п. 8, § 5а.

Важно подчеркнуть, что, поскольку процесс  $f(B)$  не является, вообще говоря, семимартингалом, нетривиален факт существования в формуле (15) предела (по вероятности  $P$ ). Один из результатов работы [166] состоит именно в доказательстве существования этого предела.

**Следствие 1.** Пусть  $F(x) \in C^2$ . Тогда

$$[f(B), B]_t = \int_0^t f'(B_s) ds$$

и формула (14) переходит в формулу Ито.

**Следствие 2.** Пусть  $F(x) = |x|$ . Тогда  $[f(B), B]_t = 2L_t(0)$ , где

$$L_t(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leq \varepsilon) ds \quad (16)$$

— локальное время, которое броуновское движение проводит в нуле на интервале  $[0, t]$ . Тем самым, из формулы (14) получаем формулу Танака:

$$|B_t| = \int_0^t \text{Sgn } B_s dB_s + L_t(0) \quad (17)$$

(ср. с примером в § 1b, гл. II и § 3e).

Заметим, что процесс  $|B| = (|B_t|, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  является субмартингалом, стохастический интеграл есть мартингал и  $L(0) = (L_t(0), \mathcal{F}_t)$  является непрерывным (а, значит, и предсказуемым) неубывающим процессом.

Следовательно, формулу (17) можно рассматривать как явную форму разложения Дуба—Мейера субмартингала  $|B|$ .



Статистический анализ финансовых данных

1. Эмпирические данные. Вероятностно-статистические модели их описания. Статистика «тиков» . . . . . 337

§ 1a. Структурные изменения в сборе и анализе финансовых данных, 337. — § 1b. О «географических» особенностях статистических данных обменных курсов, 341. — § 1с. Описание эволюции финансовых индексов как стохастических процессов с дискретным вмешательством случая, 344. — § 1d. К статистике «тиков», 347.

2. Статистика одномерных распределений . . . . . 349

§ 2a. Дискретизация статистических данных, 349. — § 2b. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. I. Отклонение от гауссовости. «Вытянутость» эмпирических плотностей, 351. — § 2с. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. II. «Тяжелые хвосты» и их статистика, 355. — § 2d. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. III. Структура распределений в центральной области, 362.

3. Статистика волатильности, корреляционной зависимости и последствий в ценах . . . . . 367

§ 3a. Волатильность. Определение и примеры, 367. — § 3b. Периодичность и фрактальная структура волатильности в обменных курсах, 373. — § 3с. Корреляционные свойства, 376. — § 3d. «Деволатилизация». Операционное время, 380. — § 3e. Эффекты «кластерности» и последствия в ценах, 387.

4. Статистический  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ . . . . . 390

§ 4a. Истоки и методология  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа, 390. — § 4b.  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ некоторых финансовых временных рядов, 399.



## 1. Эмпирические данные. Вероятностно-статистические модели их описания. Статистика «тиков»

### § 1а. Структурные изменения в сборе и анализе финансовых данных

1. Проследивая изменения в эмпирическом анализе временных финансовых данных, можно выявить следующие обстоятельства.

В 70-х годах XX в. и ранее в основном оперировали с данными, фиксируемыми через *большие* временные интервалы — год, квартал, месяц, неделя. Типичными вероятностно-статистическими моделями (для приращений логарифмов финансовых индексов) здесь являлись, да и остаются до сих пор, модели типа случайного блуждания (см. гл. I, § 2а), авторегрессии, скользящего среднего, их комбинации и т. п. (см. гл. II, § 1d). Важно подчеркнуть, что, как правило, все рассматриваемые модели являлись *линейными*.

В 80-х годах в связи с анализом *дневных* данных появились *нелинейные* модели, среди которых наиболее известны модели ARCH, GARCH и многочисленные их модификации (см. гл. II, § 1d).

В 90-х годах появились возможности *внутридневного* анализа данных, и связано это прежде всего с тем, что электронно-компьютерный прогресс и развитие информатики резко повысили (по сравнению с «бумажной» технологией записи и обработки данных) эффективность в получении, записи, хранении и анализе статистической информации, поступающей, можно сказать, *почти непрерывным образом*.

2. Помимо уже ставшей рутинной информации, печатающейся даже в ежедневных газетах и наблюдаемой на экранах TV (например, информации о курсах валют, значений разных индексов, цен «открытия» и «закрытия» и т. п.), многие информационные агентства (Reuters, Telerate, Knight Ridder, Bloomberg и др.) постоянно доставляют потребителям миллионы битов информации самого разнообразного содержания, например цены покупки и продажи (bid and ask prices) валют в данный момент времени, название и местоположение банка, объявившего эти цены.

Вот как, например, выглядит информация от агентства Рейтер (Reuters) о курсах валют (по отношению к USD), которую потребители видят на при-

емном мониторе в моменты времени, сразу следующие после 7 ч. 27 мин. (см. [204]):

0727	DEM	RABO	RABOBANK	UTR	1,6290/00	DEM	1,6365	1,6270
0727	FRF	BUEX	UECIC	PAR	5,5620/30	FRF	5,5835	5,5588
0726	NLG	RABO	RABOBANK	UTR	1,8233/38	NLG	1,8309	1,8220

Здесь 0727 и 0726 — время по Гринвичу (GMT — Greenwich Mean Time) объявления банком своих котировок; DEM, FRF, NLG — сокращенные названия валют (немецкой марки, французского франка, нидерландского гульдена); RABO и BUEX — сокращенные названия RABOBANK'а и UECIC-банка, находящихся в Утрехте (UTR) и Париже (PAR) соответственно; 1,6290 — цена покупки (bid price); «00» после цены покупки означают, что цена продажи (ask price) есть 1,6300; 1,6365 и 1,6270 указывают на максимальную и минимальную цены за прошедшие сутки, отсчитываемые от 7 ч. 27 мин. В третьей строчке «0726» означает, что RABOBANK объявил (или продолжал держать) свои котировки (1,8233/38) относительно гульдена в 7 ч. 26 мин. и за прошедшую по крайней мере одну минуту ни один банк (в том числе и RABOBANK) не объявляли новых котировок.

Если взять за начало временного отсчета момент  $t_0 = 7$  ч. 27 мин., то цена  $S^a \equiv (\text{DEM}/\text{USD})^a$  продажи (ask price) одного доллара за немецкие марки

$$S_t^a = \left( \frac{\text{DEM}}{\text{USD}} \right)_t^a, \quad t \geq t_0,$$

будет вести себя так, как это изображено на рис. 28 (ср. с рис. 6, с. 30).

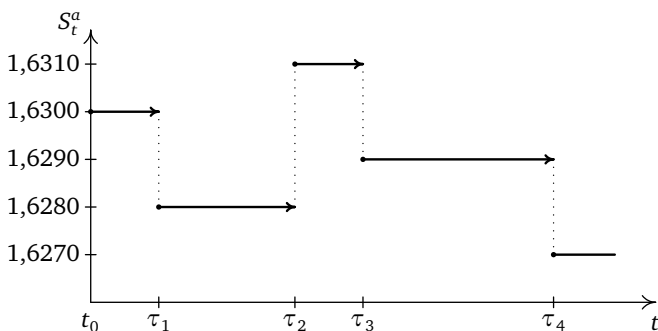


Рис. 28. Поведение обменного курса  $S_t^a = \left( \frac{\text{DEM}}{\text{USD}} \right)_t^a, t \geq t_0$

Иначе говоря, некоторое время (на интервале  $[t_0, \tau_1)$ ) цена  $S_t^a$  «стоит» на одном и том же уровне, т. е. не меняется; затем в момент  $\tau_1$  происходит ее изменение, или, как говорят, происходит *тик* (tick), означающий, что какой-то банк объявил в момент  $\tau_1$  новую котировку  $S_{\tau_1}^a$ , и т. д.

Здесь сразу возникают два вопроса:

- I) какова статистика длин междутиковых интервалов ( $\tau_{k+1} - \tau_k$ );  
 II) какова статистика изменений в значениях цен ( $S_{\tau_{k+1}}^a - S_{\tau_k}^a$  в абсолютных величинах или  $S_{\tau_{k+1}}^a / S_{\tau_k}^a$  — в относительных)?

Извлечение из поступающих данных этой информации является *первоочередной задачей статистического анализа* эволюции обменных курсов и других финансовых индексов, временная динамика которых во многих случаях носит именно такой характер, какой представлен на рис. 28.

Понятно, конечно, что такой статистический анализ имеет своей целью построение *вероятностно-статистических моделей* процесса — цен продажи ( $S_t^a$ ), процесса — цен покупки ( $S_t^b$ ) и др., что, в конечном итоге, важно и для понимания эволюции финансовых индексов и механизмов ценообразования, и для конструкции прогноза будущего движения цен.

Нельзя не отметить, что сбор, запись, хранение, обработка, препарирование статистической информации в виде, удобном для ее быстрого извлечения, является делом весьма трудоемким, и без высокой технологии здесь не обойтись. Но ясно также, что обладание результатами статистической обработки и возможность их оперативного использования дают безусловные преимущества при оперировании на рынке ценных бумаг — для построения *эффективных портфелей, рационального инвестирования* в различные проекты, ценные бумаги и т. п.

3. Возможности современного почти непрерывного сбора и получения статистической информации выявляют *высокочастотный* характер поведения финансовых индексов, весьма к тому же хаотично развивающихся во времени. Этот *высокочастотный* характер пропадает, когда производится дискретизация (как по временной, так и по фазовым переменным). Так что появление в финансовой математике «высокочастотной» проблематики обусловлено именно новыми возможностями почти *непрерывного* получения статистической информации, и именно эта современная техника сбора поступающей информации позволила, помимо *высокочастотного характера изменений во времени*, выявить ряд специфических особенностей в динамике финансовых индексов, среди которых отметим, не останавливаясь сейчас на деталях<sup>1</sup>, например,

*нелинейный характер* формирования значений финансовых индексов и *последствие*, выражающееся в том, что многие индексы, цены и т. д. «помнят» прошлое.

1 Подробнее см. материалы [393] «Первой международной конференции по высокочастотным финансовым данным» (The First International Conference — HFDF-I), организованной Research Institute for Applied Economics «Olsen & Associates» (29–31 марта 1995 г., Цюрих, Швейцария). Вводная лекция Гудхарта и О'Хара (C. A. E. Goodhart and M. O'Hara) «High Frequency Data in Financial Markets: Issues and Applications» на этой конференции дает великолепное введение в «высокочастотную» проблематику с описанием новых эффектов, особенностей, результатов, их интерпретаций и программой возможных направлений исследований.

4. Чтобы дать представление о том, какова *высоочастотность*, иначе — *интенсивность*, появления *тиков* в обменных курсах валют, эволюционирующих так, как это представлено на приведенном выше рисунке, а также и представление об *объемах* статистической информации, сошлемся на данные института «Olsen & Associates», упомянутого в сноске на данной странице; см. [91] и [204], а также [90].

За период 1.01.1987–31.12.1993 было зарегистрировано (по данным агентства Рейтер)

8 238 532

изменения (*тиков*, ticks) в обменном курсе DEM/USD. Из них 1 466 946 тиков приходилось на один годовой период с 1.10.1992 по 30.09.1993. В этот же период было зарегистрировано 570 814 тиков для обменного курса JPY/USD. (См. также таблицу в § 1b.)

О высокочастотном характере этих данных можно судить по тому, что во время типичного бизнес-дня в среднем происходит 4,5 тыс. тиков в обменном курсе DEM/USD и порядка 2 тыс. тиков для JPY/USD. В июле 1994 года в некоторые дни количество тиков в курсе DEM/USD было порядка 9 тыс., и в минуту происходило 15–20 тиков. (В обычные дни в минуту происходит в среднем 3–4 тика.)

Вообще, стоит отметить, что среди разных валют наиболее активно меняется, наиболее высокочастотен курс DEM/USD. Полезно также иметь в виду, что доставляемые разными агентствами котировки (т. е. значения цен покупки и продажи) *не являются истинными торговыми ценами* (transaction prices) при конкретных сделках. Такие данные, а также данные о размерах сделок, насколько нам известно, трудно доступны.

5. Приведенные данные относились к обменным курсам валют, однако сходный характер поведения присущ и многим другим финансовым индексам. В качестве примера сошлемся на работу [127, с. 284], где приведен график «внутридневного» поведения цен акций компании «Сименс» (Siemens) на Франкфуртской фондовой бирже (Frankfurt Stock Exchange) 2 марта 1992 года с момента открытия в 10 ч. 30 мин. Характер поведения — тот же, что и на приведенном выше рисунке, т. е. цена «стоит» некоторое время на одном уровне, затем (в случайный момент времени) изменяет свое значение.

6. Большой статистический материал, касающийся «тиковой» информации для цен акций, приведен в работе [217].

Разнообразная информация относительно показателей разных видов ценных бумаг (в том числе акций, облигаций) доставляется, например,

ISSM — Institute for the Study of Securities Markets,  
NYSE — New York Stock Exchange.

The Berkeley Options Data предоставляет данные о ценах продажи и покупки (ask and bid prices) опционов, о текущих ценах на CBOE (Chicago Board of Options Exchange); от Commodity Futures Trading Commission (CFTC) можно получать данные по фьючерсному рынку в США. Текущие цены по рынку акций в США можно получить, например, из M.I.T. Artificial Intelligence Laboratory (<http://www.stockmaster.com>).

### § 1b. О «географических» особенностях статистических данных обменных курсов

1. В отличие, скажем, от бирж, занимающихся торговлей акциями, облигациями, фьючерсными контрактами и открытых только в «рабочие дни», рынок обмена валют, или

#### *FX-рынок*

(Foreign Exchange, или Forex), имеет ряд специфических особенностей (типа «цикличности»), на которых целесообразно остановиться подробнее.

Прежде всего надо отметить, что FX-рынок *интернационален* по самой своей сути. Он не локализован, не имеет специального места (как NYSE, CBOE и т. д.), а состоит из широко разветвленной сети банков, обменных пунктов, разбросанных по всему свету и хорошо технически вооруженных современными средствами связи.

FX-рынок работает *непрерывно 24 часа в сутки*. Активно — в течение пяти рабочих дней недели и с понижением активности — в выходные, а также в некоторые дни, приходящиеся на праздники (как, например, Easter Monday).

2. Обычно принято рассматривать следующие *три географические зоны активности* валютных операций в течение суток (время указано по Гринвичу):

- Восточно-Азиатская с центром в Токио, 21:00–7:00;
- Европейская с центром в Лондоне, 7:00–13:00;
- Американская с центром в Нью-Йорке, 13:00–20:00.

По данным [90] к *Восточно-Азиатской зоне* относятся: Австралия, Гонконг, Индия, Индонезия, Малайзия, Новая Зеландия, Сингапур, Южная Корея, Япония.

В *Европейскую зону* входят: Австрия, Англия, Бахрейн, Бельгия, Германия, Голландия, Греция, Дания, Израиль, Иордания, Ирландия, Испания, Италия, Кувейт, Люксембург, Норвегия, Объединенные Арабские Эмираты, Саудовская Аравия, Турция, Финляндия, Франция, Швейцария, Швеция, Южно-Африканская Республика.

В *Американскую зону* входят: Аргентина, Канада, Мексика, США.

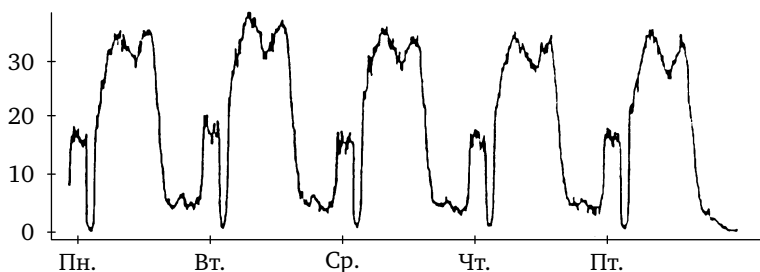
Иногда вместо трех выделяют четыре зоны, где четвертая — это *Тихоокеанская*, которая в схеме «трех зон» отнесена к Восточно-Азиатской.

К выделенным основным центрам — Токио, Лондон, Нью-Йорк — нужно отнести также: Сидней, Гонконг, Сингапур (в Восточно-Азиатской зоне), Франкфурт-на-Майне, Цюрих (в Европейской зоне) и Торонто (в Американской зоне).

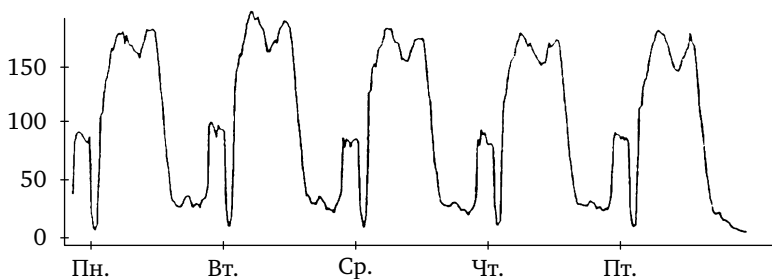
Если за базовую валюту принимать доллар США (USD), то по отношению к ней наиболее активны следующие *основные* валюты: DEM, JPY, GBP и CHF. (Согласно стандартным сокращениям, принятым *Международной организацией по стандартизации* (*International Organization for Standardization* — ISO, code 4217): USD — доллар США, DEM — немецкая марка, JPY — японская иена, GBP — британский фунт и CHF — швейцарский франк.)

Эти основные валюты, включая, разумеется, и доллар США, торгуются повсеместно. Другие виды валют торгуются в основном в своих географических зонах.

3. Об активности обменов, т. е. частоте появления тиков в изменениях на FX-рынке, являющемся, как уже отмечено, интернациональным рынком, можно судить по следующим графикам *активности* обменного курса DEM/USD, взятым из [181]. По горизонтали отложено время с 5-минутным интервалом на рис. 29 и 20-минутным на рис. 30. По вертикальной оси отложено *среднее* число изменений, тиков, происшедших на этом интервале.



**Рис. 29.** дающий представление о характере активности обменного курса DEM/USD от понедельника до пятницы с 5-минутным интервалом

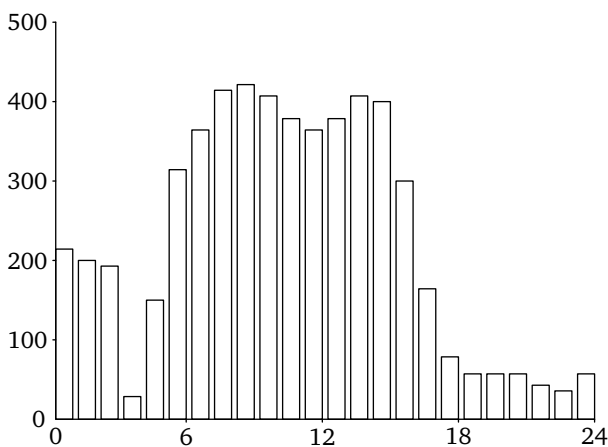


**Рис. 30.** То же, что и на рис. 29, но с 20-минутным интервалом

На этих графиках четко видна суточная *цикличность*, обусловленная, конечно, вращением Земли, и *неоднородность* в числе изменений (тиков). При этом явно выделяются три пика *активности*, относящиеся к трем разным географическим зонам.

Видно, что пики активности в Европе и Америке примерно одинаково. В Европе пик активности приходится на раннее послеполуденное время, когда в Америке наступает утро и начинается бизнес-день. Минимум активности в точности приходится на время ленча в Токио. В Европе и Америке в это время — ночь.

К рис. 29 и 30 добавим также следующий рисунок из работы [427], показывающий *внутридневную* активность (т. е. среднее число тиков в течение каждого из 24 часов) обменного курса DEM/USD, по данным агентства Рейтер, в период 5.10.1992–26.9.1993.



**Рис. 31.** Среднее число «тиков» в течение одного бизнес-дня (24 часа) для обменного курса DEM/USD. Точка «0» соответствует 0:00 по Гринвичу

4. FX-рынок является наибольшим среди финансовых рынков. По данным Банка международных расчетов (Bank for International Settlements, Швеция, 1993 г.) *дневной* оборот этого рынка в 1992 году составлял примерно 832 миллиарда долларов ( $832 \cdot 10^9$ )!

Насколько нам известно, одна из самых значительных баз данных FX-рынка принадлежит «Olsen & Associates» (см. сноску в § 1а, п. 4). Согласно этой базе данных, представление об активности на FX-рынке (в период 01.01.1987–31.12.1993) можно получить из таблицы, приведенной на следующей странице.

5. Представленное выше описание динамики обменных курсов затрагивало лишь их «временную» картину, т. е. частоту, интенсивность изменений со временем. По классификации в § 1а, п. 2, изложение относилось к во-

Курс	Общее число тиков в базе данных	Среднее число тиков в сутки (52 недели в году, 5 бизнес-дней в неделю)
DEM/USD	8 238 532	4 500
JPY/USD	4 230 041	2 300
GBP/USD	3 469 421	1 900
CHF/USD	3 452 559	1 900
FRF/USD	2 098 679	1 150
JPY/DEM	190 967	630
FRF/DEM	132 089	440
ITL/DEM	118 114	390
GBP/DEM	96 537	320
NLG/DEM	20 355	70

просу (I) о статистике междутиковых интервалов. Пока, однако, ничего не говорилось о характере *изменений* в значениях цен, происходящих в моменты тиков. К этому вопросу (II) мы обратимся в § 1d. В следующем же параграфе речь пойдет о вероятностно-статистических моделях, естественным образом возникающих в связи с траекторным поведением цен ( $S_t^a$ ), представленным на рис. 28.

### § 1c. Описание эволюции финансовых индексов как стохастических процессов с дискретным вмешательством случая

1. Согласно данному выше описанию мониторинговых данных о состоянии FX-рынка, поступающих, скажем, от агентства Рейтер, в каждый момент времени  $t$  становятся известными две котировки — цена продажи (ask price)  $S_t^a$  и цена покупки (bid price)  $S_t^b$ , скажем, одного доллара США (USD) за немецкие марки (DEM).

Разница в ценах  $S_t^a - S_t^b$ , называемая *спрэдом*, является важной характеристикой состояния рынка. Хорошо известно, что спрэд положительно коррелирован с *волатильностью* цен (понимаемой здесь просто как обычное стандартное отклонение). Тем самым, возрастание волатильности, увеличивающее риск в связи с меньшей точностью прогноза в движении цен, приводит торговцев к увеличению спрэда как средства компенсации за больший риск.

2. Представим цены  $S_t^a$  и  $S_t^b$  в виде

$$S_t^a = S_0^a e^{H_t^a}, \quad S_t^b = S_0^b e^{H_t^b} \quad (1)$$

и положим

$$H_t = \frac{1}{2}(H_t^a + H_t^b), \quad (2)$$

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \quad S_0 = \sqrt{S_0^a \cdot S_0^b}. \quad (3)$$



Таким образом,

$$H_t = \ln \sqrt{S_t^a \cdot S_t^b} \quad (4)$$

— логарифм геометрического среднего и

$$S_t = \sqrt{S_t^a \cdot S_t^b}. \quad (5)$$

Именно с определенными таким образом ценами  $S = (S_t)$  и их логарифмами  $H = (H_t)$  обычно и оперируют при анализе эволюции обменных курсов, сводя две реально существующие цены  $(S_t^a)$  и  $(S_t^b)$  в одну  $(S_t)$ . При этом эволюция  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  и  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ ,  $H_t = \ln \frac{S_t}{S_0}$ , естественным образом (см. рис. 28 в § 1a) описывается случайными процессами с дискретным вмешательством случая:

$$S_t = S_0 + \sum_{k \geq 1} s_{\tau_k} I(\tau_k \leq t) \quad (6)$$

и

$$H_t = \sum_{k \geq 1} h_{\tau_k} I(\tau_k \leq t), \quad (7)$$

где  $0 \equiv \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$  — последовательные моменты поступлений тиков, т. е. моменты изменений в ценах, а

$$s_{\tau_k} = \Delta S_{\tau_k} \quad \text{и} \quad h_{\tau_k} = \Delta H_{\tau_k}$$

являются  $\mathcal{F}_{\tau_k}$ -измеримыми величинами ( $\Delta S_{\tau_k} = S_{\tau_k} - S_{\tau_k-} = S_{\tau_k} - S_{\tau_{k-1}}$  и аналогично для  $\Delta H_{\tau_k}$ ).

Ясно, что

$$h_{\tau_k} = \Delta H_{\tau_k} = \ln \frac{S_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta S_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}} \right) = \ln \left( 1 + \frac{s_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}} \right).$$

Процессы типа (6) и (7) уже вводились в § 1f гл. II. Напомним сейчас некоторые понятия, связанные с этими важными для дальнейшего процессами, применяемыми к рассматриваемому случаю эволюции обменных курсов, а также других финансовых индексов.

Положим для простоты обозначений

$$\xi_k \equiv s_{\tau_k} = \Delta S_{\tau_k}.$$

Распределение вероятностей процесса  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ , обозначаемое  $\text{Law}(S)$ ,  $\text{Law}(S_t, t \geq 0)$ , полностью определяется совместным распределением вероятностей  $\text{Law}(\tau, \xi)$  последовательностей

$$(\tau, \xi) = (\tau_k, \xi_k)_{k \geq 1},$$

состоящих из моментов тиков  $\tau_k$  и соответствующих им «марок», или «меток»,  $\xi_k$ . Такие последовательности принято называть *маркированным точечным процессом* или *мультивариантным точечным процессом*, см., например, [250, гл. III, § 1c].

Сам же термин *точечный процесс* обычно относится (см. § 1f гл. II, и, более подробно, [250, гл. II, § 3с]) только к последовательности  $\tau = (\tau_k)$ , в рассматриваемом случае являющейся последовательностью *моментов скачков цен*,  $\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$

Если положить

$$N_t = \sum_{k \geq 1} I(\tau_k \leq t), \quad (8)$$

то

$$\tau_k = \inf\{t: N_t = k\}. \quad (9)$$

(Как обычно, мы полагаем  $\tau_k = \infty$ , если  $\inf\{t: N_t = k\} = \emptyset$ .)

Процесс  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  носит название *считающего* процесса, и ясно, что между  $N$  и  $\tau$  есть взаимно однозначное соответствие,  $N \leftrightarrow \tau$ , определяемое формулами (8) и (9). Понятно, что с точки зрения распределений закон *распределения*  $\text{Law}(\tau, \xi)$  полностью определяется условными распределениями

$$\text{Law}(\tau_{k+1} \mid \tau_0, \dots, \tau_k, \xi_0, \dots, \xi_k), \quad (10)$$

$\tau_0 = 0, \xi_0 = S_0$ , и

$$\text{Law}(\xi_{k+1} \mid \tau_0, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}, \xi_0, \dots, \xi_k). \quad (11)$$

3. До сих пор ничего не было явно сказано о  $\tau_k$  и  $\xi_k$  как *случайных* величинах, определенных на некотором вероятностном пространстве. Сейчас уместно остановиться на этом вопросе несколько подробнее.

Чтобы иметь возможность использовать хорошо развитый аппарат стохастического исчисления при анализе случайных процессов, в том числе и рассматриваемых мультивариантных точечных процессов, а также для того, чтобы учесть поток «информации», формирующей механизм ценообразования, мы предполагаем изначально заданным некоторое *фильтрованное вероятностное пространство* (стохастический базис)

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P}).$$

Здесь  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — поток (фильтрация), состоящий из  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ , являющихся «носителями информации на рынке, доступной на интервалах времени  $[0, t]$ ».

Коль скоро задано это фильтрованное вероятностное пространство, моменты  $\tau_k$  естественно считать случайными величинами  $\tau_k = \tau_k(\omega)$ , являющимися *марковскими моментами* относительно  $(\mathcal{F}_t)$ :

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

(см. определение 1 в § 1f, гл. II). Точно так же будем считать  $\xi_k$  случайными величинами  $\xi_k = \xi_k(\omega)$ , являющимися  $\mathcal{F}_{\tau_k}$ -измеримыми, где  $\mathcal{F}_{\tau_k}$  —  $\sigma$ -алгебра событий, наблюдаемых на  $[0, \tau_k]$ , т. е. состоящая из событий  $A \in \mathcal{F}$ , которые

обладают тем свойством, что для каждого  $t \geq 0$  выполняется включение

$$A \cap \{\tau_k \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (13)$$

## § 1d. К статистике «тиков»

1. Рассмотрим вопрос о том, что известно относительно безусловных распределений вероятностей  $\text{Law}(\tau_1, \tau_2, \dots)$ .

Для  $k \geq 1$  обозначим

$$\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1},$$

полагая  $\tau_0 = 0$ . Ясно, что знание распределения  $\text{Law}(\Delta_1, \Delta_2, \dots)$  равносильно знанию  $\text{Law}(\tau_1, \tau_2, \dots)$ . Тем самым, можно оперировать лишь с распределением промежутков между тиками.

Если исходить из гипотезы, что величины  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$  одинаково распределены и независимы (это предположение дает возможность обосновать, опираясь на закон больших чисел, состоятельность обычных статистических процедур построения оценок параметров, распределений и т. д.), то наглядное представление о характере их распределения вероятностей можно получить из гистограммы (эмпирической плотности)  $\hat{p}(\Delta)$ , построенной по имеющимся статистическим данным.

В работе [145] приводятся следующие результаты такого анализа для промежутков между 1472 241 тиками в обменном курсе DEM/USD (по данным «Olsen & Associates»; [221]).

С точностью до константы эмпирическая плотность имеет вид

$$\hat{p}(\Delta) \sim \begin{cases} \Delta^{-(1+\lambda_1)}, & 23 \text{ сек.} \leq \Delta < 3 \text{ мин.}, \\ \Delta^{-(1+\lambda_2)}, & 3 \text{ мин.} \leq \Delta < 3 \text{ часа}, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\lambda_1 \approx 0,13 \quad \text{и} \quad \lambda_2 \approx 0,61. \quad (2)$$

(Этот результат получен на основе анализа  $\ln \hat{p}(\Delta)$  как функций от  $\ln \Delta$  с оценкой  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  по методу наименьших квадратов.)

В связи с соотношением (1) уместно напомнить, что в математической статистике хорошо известно распределение со *степенным* характером убывания плотности — это *распределение Парето* с плотностью ( $\alpha > 0, b > 0$ )

$$f_{ab}(x) = \begin{cases} \frac{ab^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq b, \\ 0, & x < b. \end{cases} \quad (3)$$

(См. таблицу 7 в § 1a гл. III.)

Отметим, что часто, особенно в финансовой литературе, распределениями *типа* Парето и даже просто *распределениями Парето* называют распределения вероятностей, плотность которых на бесконечности убывает (как у  $\alpha$ -устойчивых законов,  $0 < \alpha < 2$ ; см. формулы (7) и (8) в § 1a гл. III) сте-

пенным образом. Если следовать этой терминологии, то можно сказать, что соотношение (1) свидетельствует о том, что на интервале [23 сек., 3 мин.) «действует» распределение Парето с показателем  $\alpha = \lambda_1$ , а на интервале [3 мин., 3 час.) — с другим параметром  $\alpha = \lambda_2$ .

Следует отметить, что при описании вероятностных свойств того или иного индекса трудно рассчитывать (и это часто показывает статистический анализ типа приведенного выше) на то, что такое описание может быть получено с помощью какого-то одного, «стандартного» распределения, определяемого небольшим числом неизвестных параметров. И это, скорее всего, объясняется тем, что действующие на рынке «агенты» имеют различные целевые установки, различные ограничения и разное отношение к степени «риска».

2. Вообще говоря, нет никаких априорных оснований считать величины  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$  независимыми. Более того, эмпирический анализ показывает, что время появления следующего тика существенно зависит от степени интенсивности, частоты появления тиков в прошлом. Поэтому становится актуальной задача «правильного» описания условных распределений  $\text{Law}(\Delta_k | \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1})$ .

В этой связи приведем, следуя работе [143], одну интересную модель — ACD (Autoregressive Conditional Duration Model) — такого описания, родственную моделям типа ARCH.

Пусть существуют такие (достаточные) статистики  $\psi_k = \psi_k(\Delta_1, \dots, \Delta_{k-1})$ , что

$$P(\Delta_k \leq x | \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}) = P(\Delta_k \leq x | \psi_k). \quad (4)$$

Простейшим напрашивающимся условным распределением для  $\Delta_k$  при условии  $\psi_k$  является экспоненциальное распределение с плотностью

$$p(\Delta | \psi_k) = \frac{1}{\psi_k} e^{-\Delta/\psi_k}, \quad \Delta \geq 0, \quad (5)$$

для которого (случайные) параметры  $(\psi_k)$  определяются рекуррентным образом:

$$\psi_k = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta_{k-1} + \beta_1 \psi_{k-1}, \quad (6)$$

$$\Delta_0 = 0, \psi_0 = 0, \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0 \text{ и } \beta_1 \geq 0.$$

Ясно, что формулы (4)–(6) полностью определяют условные распределения  $\text{Law}(\Delta_k | \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1})$ , при этом величины  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$  будут, вообще говоря, зависимыми.

Заметим, что в рассматриваемой модели условное среднее определяется по формуле

$$E(\Delta_k | \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}) = \psi_k. \quad (7)$$

Понятно также, что авторегрессионная модель первого порядка (6) допускает очевидные обобщения на модели более высокого порядка (см. § 1d гл. II и [143]).

## 2. Статистика одномерных распределений

### § 2а. Дискретизация статистических данных

1. Имея некоторое представление о характере интенсивности, частоты появления тиков (по крайней мере, на примере обменных курсов валют), а также представление об одномерных распределениях междутиковых интервалов  $(\tau_k - \tau_{k-1})$ , естественно теперь обратиться к статистике в поведении изменений в ценах, т. е. статистике последовательности  $(S_{\tau_k} - S_{\tau_{k-1}})_{k \geq 1}$  или связанных с нею других величин, скажем,  $h_{\tau_k} = \ln \frac{S_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}}$ .

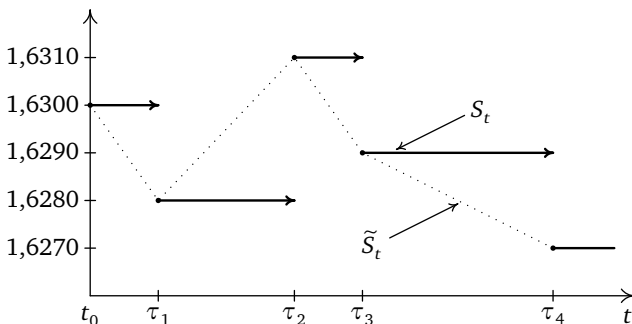
Сразу следует отметить отличие «дневных», «недельных», «месячных» и т. д. данных от «внутридневных». Первые рассматриваются как данные, поступающие через равноотстоящие, регулярные интервалы времени  $\Delta$ . Скажем,  $\Delta$  может составлять «один день», «одну неделю» и т. д. При обращении же к внутридневной статистике приходится иметь дело с данными, поступающими *нерегулярно*, в случайные неравноотстоящие моменты  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , с разными интервалами  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ , где  $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ .

Эта нерегулярность вносит определенные трудности в применение уже имеющихся методов статистического анализа данных. Поэтому, как правило, статистические данные сначала подвергаются некоторой предварительной обработке (дискретизация, отбраковка аномальных наблюдений, сглаживание, выделение трендовых составляющих и т. п.).

Остановимся подробнее на приемах *дискретизации*.

Зафиксируем некоторый «разумный» интервал (реального физического) времени  $\Delta$ . Этот интервал не должен быть слишком «малым». Применительно к статистике обменных курсов нужно, чтобы этот интервал был *репрезентативным* в том смысле, что в него попадает значительное число тиков, или, по-другому, чтобы  $\Delta$  было значительно больше среднего времени между двумя тиками. В противном случае образуемое дискретизацией статистическое «сырье» будет содержать слишком много «пустых» данных.

В случае обменных курсов основных валют в работе [204] рекомендуется брать  $\Delta \geq 10$  мин., что (помимо требуемой репрезентативности) позволяет также избежать *неопределенности*, возникающей в связи с тем, что при мень-



**Рис. 32.** Кусочно постоянный процесс  $(S_t)$  и его непрерывная модификация  $(\tilde{S}_t)$

ших значениях  $\Delta$  размер спреда и диапазон изменений в ценах покупки и продажи становятся сопоставимыми.

Простейший метод дискретизации состоит в том, что после выбора  $\Delta$  (скажем, 10 мин., 20 мин., 24 часа, ...) вместо кусочно постоянного процесса  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  с непрерывным временем  $t \geq 0$  рассматривается новая последовательность  $S^\Delta = (S_{t_k})$  с дискретным временем  $t_k = k\Delta$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Другой широко распространенный метод дискретизации состоит в том, что сначала кусочно постоянный процесс

$$S_t = S_0 + \sum_{k \geq 1} \xi_k I(\tau_k \leq t) \quad (1)$$

заменяется на его непрерывную модификацию  $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)$ , получаемую линейной интерполяцией между значениями  $(S_{\tau_k})$ :

$$\tilde{S}_t = S_{\tau_k} \frac{\tau_{k+1} - t}{\tau_{k+1} - \tau_k} + S_{\tau_{k+1}} \frac{t - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k}, \quad \tau_k < t \leq \tau_{k+1}. \quad (2)$$

Затем проводится дискретизация этой модификации  $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)$  так, как это описано выше в простейшем методе, т. е. образуется последовательность  $\tilde{S}^\Delta = (\tilde{S}_{t_k})$  в точках  $t_k = k\Delta$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , с параметром  $\Delta$ , определяющим тот временной интервал (месяц, неделя, день, 20 мин., 5 мин., ...), который интересует инвестора, трейдера и т. п.

**2.** Помимо дискретизации во времени статистические данные могут квантоваться, или, попросту говоря, округляться также и по фазовой переменной. Обычно это делается следующим образом.

Выбирается некоторое  $\gamma > 0$ , и вместо исходного процесса  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  вводится новый процесс  $S(\gamma) = (S_t(\gamma))_{t \geq 0}$  со значениями

$$S_t(\gamma) = \gamma \left\lceil \frac{S_t}{\gamma} \right\rceil. \quad (3)$$

Так, если  $\gamma = 1$  и  $S_t = 10,54$ , то  $S_t(1) = 10$ ; если же  $\gamma = 3$ , то  $S_t(3) = 9$ ; тем

самым, понятно, что определение (3) соответствует процедуре округления с ошибкой округления  $\gamma$ .

Если производится сначала  $\gamma$ -квантование, а затем  $\Delta$ -дискретизация, то из  $(S_t)$  получаем новую последовательность  $S^\Delta(\gamma)$  или  $\tilde{S}^\Delta(\gamma)$ .

Поскольку  $S_t(\gamma) \rightarrow S_t$  при  $\gamma \rightarrow 0$ , возникает важный вопрос о том, как согласованным образом надо выбирать  $\Delta$  и  $\gamma$  для того, чтобы значения  $(S_{t_k}(\gamma))$  в моменты времени  $t_k = k\Delta$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , содержали «почти ту же самую информацию, что и  $(S_t)$ ». В качестве первого подхода к ответу на этот вопрос представляется естественным (как это предлагается Ж. Жакодом) сначала выяснить, при каких условиях на скорости сходимости  $\Delta \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$  имеет место и сходимость соответствующих конечномерных распределений процессов  $S^\Delta(\gamma)$ ,  $\tilde{S}^\Delta(\gamma)$  к предельному процессу  $S$ .

## § 2b. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. I. Отклонение от гауссовости. «Вытянутость» эмпирических плотностей

1. Рассмотрим некоторый валютный курс (скажем, DEM/USD)

$$S = (S_t)_{t \geq 0},$$

$S_t = \sqrt{S_t^a \cdot S_t^b}$ . Обозначим через  $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$  непрерывную модификацию процесса  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ , полученную посредством линейной интерполяции.

Пусть, далее,  $\tilde{S}^\Delta = (\tilde{S}_{t_k})_{k \geq 0}$  —  $\Delta$ -дискретизация процесса  $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ ,  $t_k = k\Delta$ .

Как уже не раз отмечалось выше (см., например, п. 4 в § 2а гл. I), при рассмотрении изменений в ценах реальное экономическое значение имеют не сами величины изменений в ценах  $\Delta \tilde{S}_{t_k} \equiv \tilde{S}_{t_k} - \tilde{S}_{t_{k-1}}$ , а их относительное изменение  $\frac{\Delta \tilde{S}_{t_k}}{\tilde{S}_{t_{k-1}}} = \frac{\tilde{S}_{t_k}}{\tilde{S}_{t_{k-1}}} - 1$ . В этой связи оправдан обычный интерес к распределениям не величин  $(\tilde{S}_{t_k})$ , а величин  $(\tilde{H}_{t_k})$ , где  $\tilde{H}_{t_k} = \ln\left(\frac{\tilde{S}_{t_k}}{\tilde{S}_0}\right)$ .

Будем обозначать

$$\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)} = \Delta \tilde{H}_{t_k} \quad (= \tilde{H}_{t_k} - \tilde{H}_{t_{k-1}}), \quad (1)$$

где  $t_k = k\Delta$ ,  $k \geq 0$ ,  $\tilde{H}_0 = 0$ .

С учетом способа получения  $\tilde{S}^\Delta$  из  $S$ , а также введенных в § 2а обозначений  $(h_t = \Delta H_t, H_t = \ln \frac{S_t}{S_0})$  находим, что

$$\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)} = \sum_{\{i: t_{k-1} < \tau_i \leq t_k\}} h_{\tau_i} + \tilde{r}_{t_k}^{(\Delta)}, \quad (2)$$

где слагаемое  $\tilde{r}_{t_k}^{(\Delta)}$  определяется «концевыми эффектами» и может быть названо «остаточным» членом по причине его малости по сравнению с величиной выражения, определяемого суммой.

В самом деле, если, например,  $\Delta = 1$  час, то, согласно данным табл. из п. 4 § 1b среднее число тиков для DEM/USD будет равно примерно 187 ( $= 4500 : 24$ ). Таким образом, величина суммы в формуле (2) определяется 187 значениями  $h_{\tau_i}$ . В то же время модуль  $|\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}|$  заведомо меньше или равен сумме модулей четырех значений  $h_{\cdot}$ , отвечающих тем моментам тиков, которые непосредственно предшествуют моментам  $t_{k-1}$ ,  $t_k$  и следуют за ними.

Важно подчеркнуть, что сумма, стоящая в формуле (2), есть сумма *случайного числа случайных величин*, распределение которой может быть достаточно сложным, даже когда отдельные составляющие и случайное число членов имеют сравнительно простые распределения. Это обстоятельство может рассматриваться как некоторое формальное объяснение того, что, как будет показано далее, распределение величин  $\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  не может считаться гауссовским. Правда, мы увидим, что при увеличении  $\Delta$ , влекущем за собой увеличение числа членов в сумме в формуле (2), гипотеза о гауссовости распределений величин  $\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  становится более правдоподобной — начинает сказываться феномен справедливости центральной предельной теоремы при суммировании большого числа слагаемых.

**Замечание.** Обозначение  $\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  довольно-таки громоздко, хотя и говорит о способе образования этих величин. В дальнейшем для упрощения записи эти величины будут обозначаться также  $\tilde{h}_k$  (с указанием способа их формирования и выбранного значения  $\Delta$ ).

2. Итак, будем считать заданным  $\Delta > 0$ . При исследовании вопроса о совместных распределениях  $\text{Law}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots)$  последовательности значений  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots$  естественно прежде всего заняться их *одномерными* распределениями, считая, что эти величины *одинаково* распределены и плотности их распределений являются *одновершинными*. (В первом приближении эта гипотеза однородности хорошо подтверждается статистическим анализом для многих финансовых индексов, по крайней мере на не очень больших временных интервалах. См. также далее § 3с в связи с иным способом формирования значений  $\tilde{h}_i$  с учетом «географического» эффекта суточной цикличности.)

Как уже отмечалось выше, по данным «Olsen & Associates» в период 01.01.1987–31.12.1993 было зарегистрировано 8 238 532 тика в обменном курсе DEM/USD. О значениях *характеристик* одномерного распределения величин  $\tilde{h}_i = \tilde{h}_{t_i}^{(\Delta)}$ , оцениваемых по этим статистическим данным, можно судить по следующей таблице из работы [204]:

$\Delta$	$N$	Среднее $\bar{h}_N$	Дисперсия $\hat{m}_2$	Скошенность $\hat{S}_N$	Вытянутость $\hat{K}_N$
10 мин.	368 000	$-2,73 \cdot 10^{-7}$	$2,62 \cdot 10^{-7}$	0,17	35,11
1 час	61 200	$-1,63 \cdot 10^{-6}$	$1,45 \cdot 10^{-6}$	0,26	23,55
6 час.	10 200	$-9,84 \cdot 10^{-6}$	$9,20 \cdot 10^{-6}$	0,24	9,44
24 час,	2 100	$-4,00 \cdot 10^{-5}$	$3,81 \cdot 10^{-5}$	0,08	3,33



В этой таблице  $N$  — число выборочных точек (вида  $t_i = i\Delta$ ),

$$\bar{h}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{h}_{t_i}, \quad \hat{m}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{h}_{t_i} - \bar{h}_N)^k,$$

$$\hat{S}_N = \frac{\hat{m}_3}{\hat{m}_2^{3/2}}$$

— эмпирический коэффициент *скошенности* (асимметрии, skewness) и

$$\hat{K}_N = \frac{\hat{m}_4}{(\hat{m}_2)^2} - 3$$

— эмпирический коэффициент *вытянутости* (экссесса, kurtosis).

Для нормального распределения теоретический коэффициент скошенности  $S_N$  равен нулю. Положительность эмпирического коэффициента скошенности  $\hat{S}_N$  означает, что эмпирическая, а возможно, и истинная плотность распределения *асимметрична* с более крутым падением слева, нежели справа.

Из таблицы также видно, что среднее значение (по модулю) значительно меньше стандартного отклонения (квадратного корня из дисперсии) и поэтому практически может считаться равным нулю.

Наиболее весомым аргументом в пользу *отклонения* гипотезы «нормальности» является, конечно, *слишком большое* значение коэффициента вытянутости (экссесса), растущего, как видим, с уменьшением  $\Delta$ . Поскольку коэффициент вытянутости определяется через четвертый момент, это обстоятельство наводит также на мысль, что распределение величин  $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  имеет «тяжелые» хвосты, что проще всего понимать так, что соответствующая плотность распределения  $p^{(\Delta)}(x)$  *сравнительно* (с нормальной плотностью) *медленно* убывает при  $|x| \rightarrow \infty$ .

**3.** Отклонение от нормальности (гауссовости) величин  $\tilde{h}_k$ , наблюдаемое не только для обменных курсов валют, но также и для других финансовых показателей (например, цен акций), подтверждается не только видом эмпирических плотностей (гистограмм), но и стандартными статистическими приемами обнаружения отклонений от нормальности, такими как

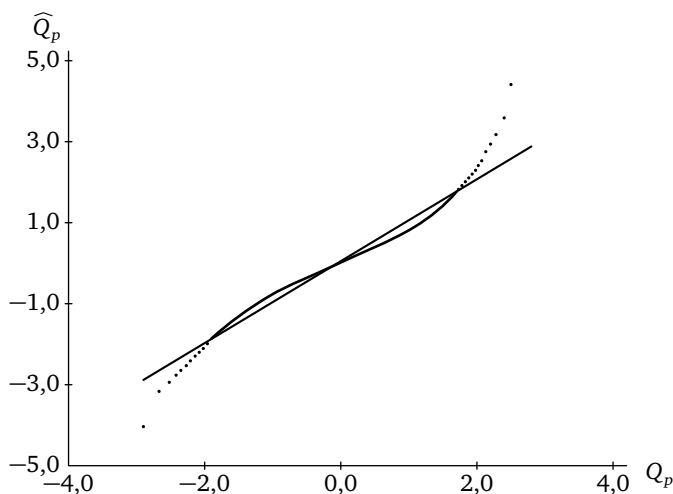
- *квантильный метод*,
- $\chi^2$ -*тест*,
- *ранговые критерии*.

Напомним суть этих приемов.

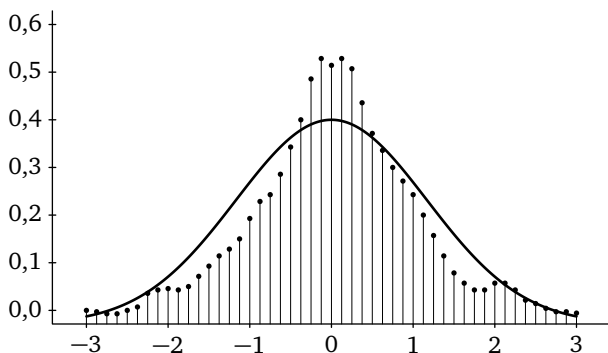
Квантильный метод проще всего иллюстрируется  $Q\hat{Q}$ -графиком (см. рис. 33), на котором по горизонтальной оси откладываются квантили соответствующего нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , оцениваемыми по статистическим данным, а по вертикальной оси — квантили эмпирического распределения величин  $\tilde{h}_k$ . (*Квантиль*  $Q_p$  порядка  $p$ ,

$0 < p < 1$ , распределения случайной величины  $\xi$  есть по определению то значение  $x$ , для которого  $P(\xi \leq x) \geq p$  и  $P(\xi \geq x) \geq 1 - p$ .)

В случае «хорошего» согласия эмпирического распределения с теоретическим множество точек  $(Q_p, \widehat{Q}_p)$  должно быть сконцентрировано около диагональной прямой. Однако статистические данные (по курсам валют, ценам многих акций и т. д.) показывают, что это не так, и график  $(Q_p, \widehat{Q}_p)$ , изображенный на рис. 33, соответствует тому, что теоретическая (нормальная) и эмпирическая плотности имеют вид, представленный на рис. 34.



**Рис. 33.**  $Q\widehat{Q}$ -квантильный анализ обменного курса DEM/USD с интервалом  $\Delta = 20$  мин. (по данным агентства Рейтер, 5.10.92–26.9.93; [427]). По вертикальной оси отложены квантили  $\widehat{Q}_p$  эмпирического распределения величин  $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ ,  $t_k = k\Delta$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; по горизонтальной оси — квантили  $Q_p$  нормального распределения



**Рис. 34.** Типичный график эмпирической плотности (величин  $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ) и соответствующей теоретической (нормальной) плотности

4. Применение  $\chi^2$ -теста К. Пирсона как критерия согласия основано на построении статистики

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i},$$

где  $v_i$  есть число наблюдений, попавших в интервалы  $I_i$ ,  $\sum_{i=1}^k I_i = \mathbb{R}$ , играющие роль интервалов «группирования» данных ( $v_1 + \dots + v_k = n$ ), и  $p_i$  — вероятности попадания в эти множества, соответствующие проверяемому теоретическому распределению.

В соответствии с критерием согласия К. Пирсона гипотеза

$\mathcal{H}_0$ : эмпирические данные согласуются с теоретической моделью

отвергается с уровнем значимости  $\alpha$ , если выполнено неравенство  $\hat{\chi}^2 > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$ , где  $\chi_{k-1, 1-\alpha}^2$  есть  $Q_{1-\alpha}$ -квантиль (т. е. квантиль порядка  $1 - \alpha$ ) распределения  $\chi^2$  с  $k - 1$  степенями свободы.

Напомним, что  $\chi^2$ -распределение с  $m$  степенями свободы — это распределение случайной величины

$$\chi_m^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_m^2,$$

где  $\xi_1, \dots, \xi_m$  — независимые стандартные нормально распределенные,  $\mathcal{N}(0, 1)$ , случайные величины. Плотность  $f_m(x)$  такого распределения задается формулой

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(m/2)} x^{m/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

В работе [127] приведены результаты статистической обработки с целью проверки гипотезы  $\mathcal{H}_0$  с уровнем значимости  $\alpha = 1\%$  для акций десяти крупных немецких компаний и банков (BASF, BMW, Daimler Benz, Deutsche Bank, Dresdner Bank, Höchst, Preussag, Siemens, Thyssen, VW) по трехлетним данным (2.10.1989–30.09.1992). Подсчет  $\hat{\chi}^2$  и  $\chi_{k-1, 1-\alpha}^2$  ( $k = 22$ , число наблюдений  $m = 745$ ) показывает, что гипотеза  $\mathcal{H}_0$  должна быть отвергнута для всех этих десяти компаний без исключения. Например, для BASF и Deutsche Bank для  $\hat{\chi}^2$  ( $p_i = 1/k$ ,  $k = 22$ ) получены значения 104,02 и 88,02, в то время как критическое значение  $\chi_{k-1, 1-\alpha}^2 = 38,93$  при  $k = 22$ ,  $\alpha = 0,01$ . Тем самым,  $\hat{\chi}^2$  значительно больше  $\chi_{k-1, 1-\alpha}^2$ , и согласно  $\chi^2$ -критерию гипотеза  $\mathcal{H}_0$  отвергается.

## § 2с. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. II. «Тяжелые хвосты» и их статистика

1. Отклонение от нормальности и наличие «тяжелых хвостов» эмпирических плотностей привело к единодушному мнению, что для «правых хво-

стов», т. е. при  $x \rightarrow +\infty$  имеем

$$P(\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)} > x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad (1)$$

где «хвостовой индекс»  $\alpha = \alpha(\Delta)$  положителен и  $L = L(x)$  — медленно меняющаяся функция:  $\frac{L(xy)}{L(x)} \rightarrow 1$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , для любого  $y > 0$ . Аналогичное заключение делается и относительно «левых хвостов».

Отметим, что разного рода дискуссии в финансовой литературе на тему *тяжелых хвостов* и *вытянутости* можно найти в работах [46], [361], [419], а также уже в работах шестидесятых годов (см., например, [150], [317]).

В этих работах отмечается, что вытянутость и тяжелые хвосты плотности распределения возникают, например, в *моделях ARCH, GARCH* (см. п. 6 § 3с гл. II), при рассмотрении *смесей* нормальных распределений. (В этой связи см. § 1d в гл. III, где объясняется, как, например, гиперболические распределения могут быть получены в результате *смешивания* нормальных распределений с разными дисперсиями.)

В ряде работ (см., например, [46] и [390]) для распределений величин  $\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  предлагается использовать *t*-распределение Стьюдента, имеющее плотность

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (2)$$

где целочисленный параметр  $n$  носит название «число степеней свободы». Из формулы (2) видно, что это распределение относится к распределениям типа Парето с тяжелыми хвостами.

2. После работ Б. Мандельброта (см., например, [318], [319], [321], [322], [324]) и Е. Фама (см. [150]) в финансовой литературе широкую популярность получили модели финансовых индексов, основанные на *устойчивых* распределениях (подробнее см. § 1a в гл. III). Эти распределения имеют свой «индекс устойчивости»  $\alpha$ , принимающий значения из интервала  $(0, 2]$ . В случае  $\alpha = 2$  устойчивое распределение является нормальным; при  $0 < \alpha < 2$  соответствующее распределение является распределением типа Парето (1), где «хвостовой индекс»  $\alpha$  есть в точности «индекс устойчивости».

Таким образом, гипотеза *устойчивого* распределения с  $0 < \alpha < 2$  для описания распределений  $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  естественна, поскольку для этого распределения имеются и *тяжелые хвосты* и *вытянутость*, наблюдаемые в статистических данных. Помимо этого, обращение к устойчивым распределениям оправдывается следующим характеристическим свойством автомодельности (§ 2b гл. III) этих распределений: если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют устойчивое распределение с индексом устойчивости  $\alpha$ , то их сумма также имеет устойчивое распределение с тем же самым индексом, или, что то же самое, *композиция* распределений  $X$  и  $Y$  является распределением того же типа.

С экономической точки зрения это есть вполне естественное требование *сохранения характера* распределений данных при *временной агрегации* (time aggregation), выполнение которого для устойчивых распределений делает их применение еще более оправданным.

Однако при оперировании с устойчивыми распределениями возникает ряд существенных трудностей, вызванных следующими причинами.

Если  $X$  — случайная величина с устойчивым распределением индекса  $\alpha \in (0, 2)$ , то  $E|X| < \infty$ , если только  $\alpha > 1$ . И вообще,  $E|X|^p < \infty$  тогда и только тогда, когда  $p < \alpha$ .

Тем самым, у устойчивого распределения с индексом  $\alpha \in (0, 2)$  хвосты настолько «тяжелы», что второй момент является бесконечным. Это обстоятельство вносит значительные трудности теоретического характера (например, при анализе качества различных оценок, критериев, основанных на использовании дисперсии) и, с другой стороны, трудно поддается и экономическому объяснению, и реальной проверке, в силу того что имеется, как правило, лишь ограниченное число статистических данных.

В связи с последним обстоятельством отметим, что оценка истинного значения «хвостового индекса»  $\alpha$  является, вообще говоря, делом довольно-таки деликатным.

Связано это с тем, что для «хорошей» оценки  $\alpha$  надо, с одной стороны, иметь достаточно *много* наблюдений, с тем чтобы набрать значительное число экстремальных значений, по которым только и можно оценить «хвостовые эффекты» и «хвостовой индекс». Но, с другой стороны, наличие *большого* числа «неэкстремальных» наблюдений будет вносить, к сожалению, *смещение* при оценивании истинного значения  $\alpha$ .

**3.** Из свойств устойчивых распределений следует, что если их использовать для описания распределений финансовых индексов, то не удастся совместить сразу три требования: *сохранение типа распределений при композиции, наличие тяжелых хвостов с индексом  $\alpha \in (0, 2)$  и конечность второго момента, а значит, и дисперсии.*

Понятно, что *конечность дисперсии* имеет место для распределений типа Парето с «хвостовым индексом»  $\alpha > 3$ . И хотя такие распределения не обладают свойством замкнутости относительно композиции, они обладают, тем не менее, важным свойством *сохранения характера убывания плотности* распределения при композиции: если  $X$  и  $Y$  имеют одно и то же распределение типа Парето с «хвостовым индексом»  $\alpha$  и независимы, то их сумма  $X + Y$  также имеет распределение типа Парето с тем же самым «хвостовым индексом»  $\alpha$ . С этой точки зрения распределения типа Парето можно считать удовлетворяющими желаемому свойству «устойчивости хвостового индекса»  $\alpha$  при композиции.

Даже только из сказанного выше становится понятно, почему индексу  $\alpha$ , определяющему характер поведения распределений величин  $\hat{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  на бесконечности, уделяется столь большое внимание. Можно дать также и экономи-

ко-финансовое объяснение интереса к индексу  $\alpha$ . Дело в том, что «хвостовой индекс» показывает, в частности, насколько активны на рынке игроки со спекулятивными интересами. Если «хвостовой индекс»  $\alpha$  большой, то это говорит о том, что на рынке редки аномальные выбросы в значениях цен, что рынок ведет себя «гладко», без больших колебаний в значениях цен. В этом смысле рынок при больших значениях  $\alpha$  может рассматриваться как эффективно функционирующий, и, тем самым, значение индекса  $\alpha$  является некоторой мерой этой эффективности. (Дискуссию по этому поводу см., например, в [204]).

4. Обратимся к вопросу об оценивании «индекса устойчивости» для устойчивых распределений и, более общим образом, к «хвостовому индексу» для распределений типа Парето.

Сразу следует отметить, что в финансовой литературе нет единодушного мнения о том, каково же все-таки истинное значение «хвостового индекса»  $\alpha$  для тех или иных обменных курсов, акций и других финансовых показателей. Объясняется это, как уже отмечалось, трудностью построения эффективных оценок  $\hat{\alpha}_N$  ( $N$  — число наблюдений) параметра  $\alpha$ . Сама же по себе постановка задачи оценивания этого параметра требует аккуратного формулирования всех предпосылок получения статистического «сырья»  $\{\hat{h}_{t_k}^{(\Delta)}\}$ , правильного выбора значений  $\Delta$  и т. д.

В финансовой литературе для оценки «индекса устойчивости»  $\alpha$  часто используют (эффективные) оценки  $\hat{\alpha}_N$ , предложенные в работах [152] и [153] и определяемые следующим образом:

$$\hat{\alpha}_N = 0,827 \frac{\hat{Q}_f - \hat{Q}_{1-f}}{\hat{Q}_{0,72} - \hat{Q}_{0,28}}, \quad 0,95 \leq f \leq 0,97, \quad (3)$$

где  $\hat{Q}_f$  есть квантиль порядка  $f$ , построенный по выборке объема  $N$  в предположении, что наблюдения подчиняются симметричному устойчивому распределению.

В случае справедливости гипотезы о принадлежности закона распределения  $\text{Law}(\tilde{h}_k)$ ,  $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ , к классу устойчивых распределений (с индексом устойчивости  $\alpha$ ) можно было бы, естественно, рассчитывать на то, что  $\hat{\alpha}_N$  с ростом объема наблюдений  $N$  стабилизируются (и имеет место сходимость  $\hat{\alpha}_N$  к некоторому значению  $\alpha < 2$ ).

Однако здесь, как уже отмечалось, нет единодушия. В ряде работ есть утверждения о «хорошей» стабилизации строящихся оценок для некоторых финансовых индексов — см., например, [88] и [474]. С другой же стороны, во многих работах приводятся результаты статистического анализа, показывающие, что  $\hat{\alpha}_N$  имеют не только тенденцию роста, но даже стремление к значениям, равным или большим 2, — см., например, работы [27] и [207], в которых говорится об акциях на американском рынке, и статью [127] об акциях крупных немецких компаний и банков. Это заставляет к гипотезе

устойчивости относиться с осторожностью, хотя, разумеется, не противоречит гипотезе о том, что «хвосты» описываются распределениями типа Парето.

5. Приведем, следуя работе [204], результаты относительно значений «хвостового индекса»  $\alpha$  обменных курсов валют в предположении, что для  $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  действует распределение типа Парето (1).

Согласно данным работы [204] для «хвостового индекса»  $\alpha = \alpha(\Delta)$  были получены следующие значения.

курс	$\Delta$			
	10 мин.	30 мин.	1 час	6 час.
DEM/USD	$3,11 \pm 0,33$	$3,35 \pm 0,29$	$3,50 \pm 0,57$	$4,48 \pm 1,64$
JPY/USD	$3,53 \pm 0,21$	$3,55 \pm 0,47$	$3,62 \pm 0,46$	$3,86 \pm 1,81$
GBP/USD	$3,44 \pm 0,22$	$3,52 \pm 0,46$	$4,01 \pm 1,09$	$6,93 \pm 10,79$
CHF/USD	$3,64 \pm 0,41$	$3,74 \pm 0,82$	$3,84 \pm 0,77$	$4,39 \pm 4,64$
FRF/USD	$3,34 \pm 0,22$	$3,29 \pm 0,47$	$3,40 \pm 0,69$	$4,61 \pm 1,21$
FRF/DEM	$3,11 \pm 0,41$	$2,55 \pm 0,23$	$2,43 \pm 0,23$	$3,54 \pm 1,42$
NLG/DEM	$3,05 \pm 0,27$	$2,44 \pm 0,08$	$2,19 \pm 0,12$	$3,37 \pm 1,43$
ITL/DEM	$3,31 \pm 0,51$	$2,93 \pm 1,17$	$2,54 \pm 0,49$	$2,86 \pm 0,98$
GBP/DEM	$3,68 \pm 0,35$	$3,63 \pm 0,42$	$4,18 \pm 1,67$	$3,22 \pm 0,79$
JPY/DEM	$3,69 \pm 0,41$	$4,18 \pm 0,90$	$4,13 \pm 1,05$	$4,71 \pm 1,61$

Сделаем некоторые комментарии к этой таблице.

Оценки  $\hat{\alpha}$  параметра  $\alpha$ , конструкция которых описана ниже в п. 6, строились на базе данных «Olsen & Associates» (§ 1b). В случае  $\Delta = 6$  часов точность оценивания уменьшается, что связано с недостаточным объемом наблюдений.

Важный вывод, который можно сделать из анализа значений этой таблицы (составленной по *большой базе данных*, а потому и представляющей *надежной*), состоит в том, что по отношению к USD курсы основных валют FX-рынка имеют (для  $\Delta = 10$  мин.) распределение типа Парето с «хвостовым индексом»  $\alpha \approx 3,5$  с его возрастанием при увеличении интервала  $\Delta$ . Тем самым, становится весьма правдоподобным, что дисперсия величин  $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  конечна (свойство весьма желательное!), хотя этого нельзя сказать о четвертом моменте, определяющем величину вытянутости распределений в окрестности центральных значений.

В другой работе «Olsen & Associates» [91] приводятся также данные курсов XAU/USD и XAG/USD (XAU — золото, XAG — серебро). Для  $\Delta = 10$  мин. соответствующими оценками  $\alpha$  являются  $4,32 \pm 0,56$  и  $4,04 \pm 1,71$ ; для  $\Delta = 30$  мин. эти оценочные значения есть  $3,88 \pm 1,04$  и  $3,92 \pm 0,73$  соответственно.

6. В этом пункте будет описана только *идея* построения оценок  $\hat{\alpha}$  «хвостового индекса»  $\alpha$  (с применением техники *бутстреп* (bootstrap) и *складного ножа* (jackknife) при определении смещения и стандартного отклонения оценок), вошедших в представленную выше таблицу из работы [204].

Рассмотрим *распределение Парето* с плотностью

$$f_{ab}(x) = \frac{ab^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq b, \quad (4)$$

и  $f_{ab}(x) = 0$  для  $x < b$ .

При  $x \geq b$  имеем

$$\ln f_{ab}(x) = \ln a + \alpha \ln b - (\alpha + 1) \ln x. \quad (5)$$

Отсюда находим, что оценка максимального правдоподобия  $\hat{\alpha}_N$  по  $N$  независимым наблюдениям  $(X_1, \dots, X_N)$ , отыскиваемая из условия

$$\max_{\alpha} \prod_{k=1}^N f_{ab}(X_k) = \prod_{k=1}^N f_{\hat{\alpha}_N b}(X_k), \quad (6)$$

определяется из соотношения

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{X_i}{b}\right). \quad (7)$$

Для  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  имеем

$$\alpha \int_{\beta}^{\infty} (\ln x) x^{-(\alpha+1)} dx = \beta^{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha} + \ln \beta \right),$$

поэтому

$$\mathbb{E} \ln \frac{X_i}{b} = \alpha b^{\alpha} \int_b^{\infty} \left( \ln \frac{x}{b} \right) x^{-(\alpha+1)} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Тем самым,

$$\mathbb{E} \left( \frac{1}{\hat{\alpha}_N} \right) = \frac{1}{\alpha},$$

т.е. величина  $1/\hat{\alpha}_N$  несмещенным образом оценивает  $1/\alpha$ , так что найденная оценка  $\hat{\alpha}_N$  параметра  $\alpha$  обладает вполне хорошими свойствами, но, конечно, *в предположении*, что истинное распределение является (*точно*) распределением Парето с известным «началом»  $b$ , а не распределением *типа* Парето, для которого «начало»  $b$  просто не определено.

Тем не менее, возникает естественная идея (см. [223]) использования формулы (7) для оценки параметра  $\alpha$  в распределениях *типа* Парето, но с заменой неизвестного «начала»  $b$  некоторой подходящей оценкой.

Можно поступить, например, так. Выберем некоторое достаточно большое (но не очень большое по сравнению с  $N$ ) число  $M$  и воспользуемся для построения оценки параметра  $\alpha$  модификацией формулы (7) с заменой  $b$  на  $M$  и суммированием по тем  $i \leq N$ , для которых  $X_i \geq M$ .



С этой целью определим

$$\hat{\gamma}_{N,M} = \frac{\sum_{\{i \leq N : X_i \geq M\}} \ln \frac{X_i}{M}}{\sum_{\{i \leq N : X_i \geq M\}} I_M(X_i)}, \quad (8)$$

где

$$I_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq M, \\ 0, & \text{если } x < M. \end{cases}$$

Если обозначить

$$v_{N,M} = \sum_{\{i \leq N : X_i \geq M\}} I_M(X_i),$$

то  $\hat{\gamma}_{N,M}$  перепишется в виде

$$\hat{\gamma}_{N,M} = \frac{1}{v_{N,M}} \sum_{\{i \leq N : X_i \geq M\}} \ln \frac{X_i}{M}, \quad (9)$$

и в качестве оценки параметра  $\alpha$  естественно взять такое значение  $\hat{\alpha}_{N,M}$ , что

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_{N,M}} = \hat{\gamma}_{N,M}. \quad (10)$$

Можно поступить и по-другому. Упорядочим выборку  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  в выборку  $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_N^*)$  так, что  $X_1^* \geq X_2^* \geq \dots \geq X_N^*$ . Зафиксируем снова некоторое число  $M \ll N$  в качестве «начала»  $b$  и положим

$$\gamma_{N,M}^* = \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i \leq M} \ln \frac{X_i^*}{X_M^*}. \quad (11)$$

Тогда в качестве оценки параметра  $\alpha$  можно взять такое значение  $\alpha_{N,M}^*$ , что

$$\frac{1}{\alpha_{N,M}^*} = \gamma_{N,M}^*. \quad (12)$$

Полученная таким образом оценка  $\alpha_{N,M}^*$  была предложена Б. М. Хиллом в работе [223], и ее принято называть *оценкой Хилла*.

Понятно, что «хорошие» свойства этой оценки определяются *правильным выбором* числа  $M$ , т. е. числа максимальных порядковых статистик, формирующих статистику  $\alpha_{N,M}^*$ . Но понятно также, что трудно рассчитывать на какой-то *универсальный* выбор числа  $M$  для широкого класса медленно меняющихся функций  $L = L(x)$ , определяющих поведение, скажем, правого «хвоста»,

$$P(X_i > x) \sim x^{-\alpha} L(x). \quad (13)$$

Как правило, свойства рассмотренных выше оценок  $\alpha_{N,M}^*$  и  $\hat{\alpha}_{N,M}$  изучают, ограничиваясь тем или иным подклассом функций  $L = L(x)$ . Например, можно предположить, что  $L = L(x)$  принадлежит подклассу

$$L_\gamma = \{L = L(x) : L(x) = 1 + cx^{-\gamma} + o(x^{-\gamma}), \ c > 0\},$$

где  $\gamma > 0$ . В таком предположении в работе [223] показано, что если  $M \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ , но так, что

$$\frac{M}{N^{\frac{2\gamma}{2\gamma+\alpha}}} \rightarrow 0,$$

то

$$\text{Law}(\sqrt{M}(\alpha_{N,M}^* - \alpha)) \rightarrow \mathcal{N}(0, \alpha^2),$$

т. е. имеет место асимптотическая нормальность оценок  $(\alpha_{N,M}^*)$ .

## § 2d. Одномерные распределения логарифмов относительных изменений цен. III. Структура распределений в центральной области

1. Как же все-таки, имея в виду характер распределения  $\text{Law}(\tilde{h}_k)$ , совместить вытянутость плотности в окрестности центральных значений и тяжелые хвосты с «хвостовым индексом»  $\alpha > 2$  (как это имеет место, например, в случае обменных курсов валют)?

Видимо, трудно ожидать, что это можно сделать с помощью какого-то одного стандартного распределения. С учетом наличия на рынках трейдеров, инвесторов и прочих агентов с разными интересами, разными временными горизонтами более правдоподобна та точка зрения, что надо привлекать к рассмотрению несколько стандартных распределений, действующих в «своих» областях значений  $x$ , принимаемых величинами  $\tilde{h}_k$ .

Многие авторы, и, в первую очередь, Б. Мандельброт, настойчиво пропагандируют идею использования именно устойчивых распределений (и некоторых модификаций, построенных на их основе) как тех, которые хорошо действуют в *центральной* области значений  $x$ . См., например, монографию [352] с богатым статистическим материалом, теорией устойчивых распределений и их обобщений, результатами статистического анализа.

Ниже мы подробнее останавливаемся на результатах работы [330] относительно использования устойчивых законов при описании индекса S&P 500 в его центральной зоне. (Для описания «хвостовой» части авторы работы [330] предлагают использовать нормальное распределение, исходя, в частности, из того, что ограниченность статистического сырья не дает возможности сделать надежные заключения относительно поведения «хвостов»; см. также [464].)

По поводу других финансовых показателей сошлемся на работу [127], где проводится детальный статистический анализ финансовых показателей десяти крупнейших немецких компаний и банков и делается вывод, что *гиперболическое* распределение исключительно хорошо действует в центральной области.

В § 1d гл. III мы дали подробное описание этого класса гиперболических распределений, который вместе с классом устойчивых образует достаточно богатый арсенал теоретических распределений. Поскольку и *гиперболи-*

ческие, и устойчивые распределения описываются *четырьмя* параметрами, можно надеяться, что варьированием этих параметров можно добиваться хорошего согласия *теории и эксперимента*.

2. Обратимся к результатам статистического анализа данных по индексу S&P 500, проведенного в статье [330].

Рассматривалась эволюция этого индекса на Нью-Йоркской бирже NYSE (New York Stock Exchange) в течение шести лет (с января 1984 г. по декабрь 1989 г.). Всего было зарегистрировано 1447514 тиков (данные от Chicago Mercantile Exchange). В среднем тики шли примерно с минутным интервалом в 1984–85 гг. и с пятнадцатисекундным интервалом в 1986–87 гг.

Поскольку в течение дня биржа работает лишь от «открытия» до «закрытия», для получения соответствующего процесса, описывающего эволюцию индекса S&P 500, принималось во внимание лишь «торговое время» («trading time»)  $t$  со стыковкой «цен закрытия вчера» с «ценами открытия сегодня».

Пусть  $S = (S_t)$  — процесс, полученный описанным образом. Будем рассматривать изменение этого процесса через некоторые интервалы времени  $\Delta$ :

$$\Delta S_{t_k} = S_{t_k} - S_{t_{k-1}}, \quad (1)$$

где  $t_k = k\Delta$ , интервал  $\Delta$  пробегает ряд значений от 1 мин. до  $10^3$  мин. (В работе [330]  $\Delta$  принимает следующие значения:  $\Delta = 1, 3, 10, 32, 100, 316$  и  $1000$  — в минутах; соответствующее интервалу  $\Delta = 1$  мин. количество тиков равно 493545, а при  $\Delta = 1000$  мин. это число равно 562.)

Если пользоваться обозначениями из § 2а, то можно заметить, что, поскольку  $\tilde{S}_{t_k} \approx S_{t_k}$  и приращения  $\Delta S_{t_k} \equiv S_{t_k} - S_{t_{k-1}}$  малы,

$$S_{t_k} \approx S_{t_{k-1}} e^{\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}} \approx S_{t_{k-1}} (1 + \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}),$$

откуда следует, что  $\Delta S_{t_k} \approx S_{t_{k-1}} \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ .

Это (приближенное) соотношение показывает, что в случае независимости приращений  $(S_{t_k} - S_{t_{k-1}})$  характер распределения  $P(\tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)} \leq x)$  и условного распределения  $P(\Delta S_{t_k} \leq x | S_{t_{k-1}} = y)$  примерно один и тот же.

Опираясь с эмпирическими плотностями  $\hat{p}^{(\Delta)}(x)$  величин  $\Delta S_{t_k}$ ,  $t_k = k\Delta$ , предполагаемых одинаково распределенными, авторы работы [330] приводят графики  $\log_{10} \hat{p}^{(\Delta)}(x)$ , которые схематически ведут себя так, как это изображено на рис. 35.

Даже простой визуальный анализ графиков  $\log_{10} \hat{p}_{t_k}^{(\Delta)}(x)$ , приведенных в работе [330] для многих значений  $\Delta$ , показывает, что плотности распределений достаточно симметричны и начинают расплываться с *ростом*  $\Delta$ , убывая при  $x \rightarrow \pm\infty$ , но все же не так быстро, как это должно было бы быть для гауссовского распределения.

Наблюдаемые здесь одновершинность, симметричность, а также характер убывания эмпирических плотностей говорят о целесообразности обращения к *симметричным устойчивым* распределениям. Напомним, что характери-

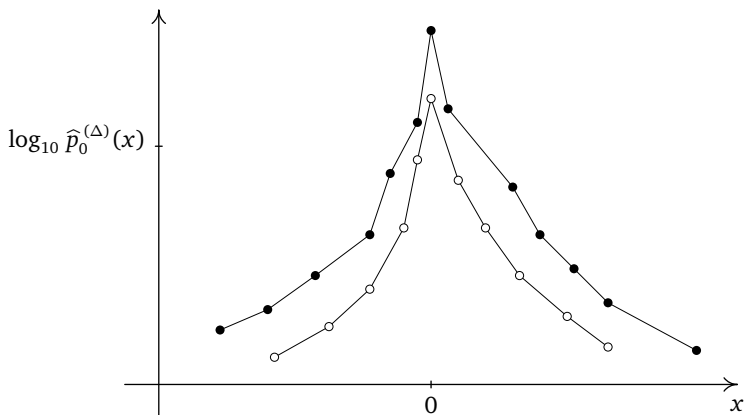


Рис. 35. Схематический график поведения  $\log_{10} \hat{p}^{(\Delta)}(x)$  при двух разных значениях  $\Delta$

стическая функция  $\varphi(\theta) = \mathbf{E} e^{i\theta X}$  устойчивых случайных величин  $X$  с симметричным распределением имеет вид (см. формулу (14) в § 1а гл. III)

$$\varphi(\theta) = e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha}, \quad (2)$$

где  $\sigma \geq 0$  и  $0 < \alpha \leq 2$ . Таким образом, если принять гипотезу «устойчивости», то прежде всего надо было бы оценить значение параметра  $\alpha$ .

Устойчивые распределения относятся к распределениям типа Парето. В симметричном случае (см. формулы (7) и (8) в § 1а гл. III) для  $0 < \alpha < 2$  имеем

$$\mathbf{P}(|X| > x) \sim \tilde{c}_\alpha x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

где  $\tilde{c}_\alpha$  — некоторая константа, и для определения значения  $\alpha$  можно было бы воспользоваться техникой оценивания, изложенной выше в § 2с.

Однако авторы работы [330] справедливо отмечают, что недостаточное число наблюдений делает этот метод оценивания параметра  $\alpha$  не совсем надежным, поскольку он требует большого числа экстремальных значений. Поэтому вместо этого авторы используют подход, который, наоборот, оперирует лишь с центральными значениями наблюдений.

Суть этого подхода в следующем.

Пусть характеристическая функция

$$\varphi^{(\Delta)}(\theta) = \mathbf{E} e^{i\theta \Delta S_{t_k}}$$

имеет вид

$$\varphi^{(\Delta)}(\theta) = e^{-\gamma \Delta |\theta|^\alpha}. \quad (3)$$

Тогда плотность  $p^{(\Delta)}(x)$  распределения  $\mathbf{P}(\Delta S_{t_k} \leq x)$  по формуле обращения

может быть представлена в виде

$$p^{(\Delta)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma \Delta |\theta|^\alpha} \cos \theta x d\theta.$$

При  $x=0$  имеем

$$p^{(\Delta)}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma \Delta |\theta|^\alpha} d\theta = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi \alpha (\gamma \theta \Delta)^{1/\alpha}}. \quad (4)$$

Тем самым,

$$p^{(n\Delta)}(0) = n^{-1/\alpha} p^{(\Delta)}(0). \quad (5)$$

Конечно, этот результат можно было бы получить и без обращения к представлению (3), если воспользоваться самим определением устойчивых законов, согласно которому

$$\text{Law}(\Delta S_{t_1} + \Delta S_{t_2} + \dots + \Delta S_{t_n}) = \text{Law}(C_n(S_{t_1} - S_{t_0})), \quad t_0 = 0, \quad (6)$$

и если знать результат о том, что

$$C_n = n^{1/\alpha}$$

(см. § 1а гл. III).

Действительно,  $\Delta S_{t_1} + \Delta S_{t_2} + \dots + \Delta S_{t_n} = S_{t_n} - S_0$ , следовательно,

$$\text{Law}(S_{t_n} - S_0) = \text{Law}(n^{1/\alpha}(S_{t_1} - S_0)).$$

Поэтому

$$p^{(n\Delta)}(x) = n^{-1/\alpha} p^{(\Delta)}(x n^{-1/\alpha}), \quad (7)$$

что при  $x=0$  приводит к формуле (5).

Соотношение (5) дает возможность по эмпирическим плотностям  $\hat{p}^{(n\Delta)}(0)$  с  $\Delta = 1$  мин. и  $n = 1, 3, 10, 32, 100, 316, 1000$ , переходя к логарифмам и применяя метод наименьших квадратов, получить оценку  $\hat{\alpha}$  «индекса устойчивости»  $\alpha$ . (Выбор указанных значений  $n = 1, 3, 10, \dots$  связан с тем, что для них  $\log_{10} n$  почти равноотстоят друг от друга:  $\log_{10} 3 = 0,477$ ,  $\log_{10} 10 = 1$ ,  $\log_{10} 32 = 1,505$ , ...)

Значение полученной в [330] таким способом оценки  $\alpha$  таково:

$$\hat{\alpha} = 1,40 \pm 0,05. \quad (8)$$

Сразу отметим, что этот результат нельзя ни в коем случае рассматривать как противоречащий оценке  $\hat{\alpha} \approx 3,5$  для «хвостового индекса  $\alpha$ », полученной в п. 5 § 2с. Дело в том, что эти оценки получены при *разных* гипотезах относительно характера распределений. В одном случае этой гипотезой является гипотеза о принадлежности распределения к «устойчивому» типу, в другом же случае — к распределению типа Парето (для «хвостовых» значений). К тому же, и это немаловажно, в одном случае объектом исследования является

обменный курс, а во втором — индекс S&P 500. И, вообще говоря, нет никаких веских оснований считать характер поведения их распределений одинаковым, поскольку они обусловлены разными экономическими причинами (интернациональным состоянием экономики — в случае обменных курсов, и внутренним состоянием экономики США — в случае индекса S&P 500).

Заметим, что высказанная точка зрения относительно разного характера поведения обменных курсов и финансовых индексов типа S&P 500, Dow и т. д. подтверждается результатами  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа, изложенного далее в § 4b.

Отметим также, что оценка (8) вычисляется по «центральному» значениям, а значение  $\hat{\alpha} \approx 3,5$  — по «хвостовым». Поэтому несовпадение оценок лишь подтверждает высказанную ранее мысль о том, что в разных областях значений финансовые индексы описываются разными стандартными распределениями и какое-то одно универсальное распределение, видимо, найти трудно.

3. Тот факт, что в центральной части эмпирические плотности  $\hat{p}^{(n\Delta)}(x)$  хорошо аппроксимируются симметричными устойчивыми плотностями  $p^{(n\Delta)}(x)$ , подтверждается также следующими рассуждениями, основанными на свойствах *автомоделности*.

Рассмотрим выборку объема  $k$

$$(\Delta S_{t_1^{(n)}}, \dots, \Delta S_{t_k^{(n)}}), \quad t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} = n\Delta,$$

с временным шагом  $n\Delta$ , где  $\Delta = 1$  мин. Если от этой выборки перейти к выборке

$$(n^{-1/\alpha} \Delta S_{t_1^{(n)}}, \dots, n^{-1/\alpha} \Delta S_{t_k^{(n)}}),$$

то эта новая выборка должна иметь то же самое распределение, что и

$$(\Delta S_{t_1}, \dots, \Delta S_{t_k}), \quad t_i - t_{i-1} = \Delta.$$

Поэтому оцениваемые по этим выборкам одномерные плотности (одинаково распределенных) величин  $n^{-1/\alpha} \Delta S_{t_i^{(n)}}$  и  $\Delta S_{t_i}$  должны были бы быть, согласно формуле (7), «сильно похожими».

Приведенный в работе [330] график, полученный «наложением» (см. об этом методе п. 6 в § 2с гл. III) трансформированных эмпирических плотностей для значений параметра  $\Delta$ , равных 1, 3, 10, 32, 100, 316, 1000 (в минутах), довольно-таки убедительно свидетельствует в пользу гипотезы устойчивого распределения (с параметром  $\alpha \approx 1,40$ ).

Коэффициент  $\gamma$ , входящий в формулу (3), может быть оценен из формулы (4) по эмпирической плотности  $\hat{p}^{(\Delta)}(0)$  и оценке  $\hat{\alpha} = 1,40$ . Полученная оценка  $\hat{\gamma}$  для  $\gamma$  равна 0,00375.

### 3. Статистика волатильности, корреляционной зависимости и последствия в ценах

#### § 3а. Волатильность. Определение и примеры

1. Пожалуй, ни одно понятие в финансовой математике не носит столь противоречивого характера и не дискутируется столь широко, как понятие *волатильности*. Будучи синонимом *изменчивости*<sup>2</sup>, *волатильность* определяется многими разными способами, а сам термин используется для наименования разнообразных мер изменчивости.

Если  $S_n = S_0 e^{H_n}$ ,  $H_0 = 0$ , причем  $\Delta H_n = \sigma \varepsilon_n$ ,  $n \geq 1$ , где  $(\varepsilon_n)$  — белый гауссовский шум,  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то под волатильностью понимают естественную здесь меру неопределенности и изменчивости — *стандартное отклонение*  $\sigma$ .

Напомним, что если случайная величина  $\xi$  имеет распределение  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , то

$$P(|\xi - \mu| \leq \sigma) \approx 0,68 \quad (1)$$

и

$$P(|\xi - \mu| \leq 1,65\sigma) \approx 0,90. \quad (2)$$

Таким образом, примерно в 90 % случаев можно ожидать, что результат наблюдения над  $\xi$  будет отклоняться от среднего значения  $\mu$  не больше чем на  $1,65\sigma$ .

В схеме « $S_n = S_{n-1} e^{h_n}$ » величины  $h_n$  обычно малы и поэтому

$$S_n \approx S_{n-1}(1 + h_n).$$

Следовательно, если  $h_n = \sigma \varepsilon_n$ , то можно утверждать, что при знании цены  $S_{n-1}$  «сегодня» ее значение  $S_n$  «завтра» в 90 % случаев будет лежать в интервале  $[S_{n-1}(1 - 1,65\sigma), S_{n-1}(1 + 1,65\sigma)]$  и, значит, только примерно в 5 % случаев  $S_n$  будет больше  $S_{n-1}(1 + 1,65\sigma)$  и в 5 % случаев — меньше  $S_{n-1}(1 - 1,65\sigma)$ .

2 Словарь «Random House Webster's concise dictionary» (Random House, New York, 1993) дает такое толкование термина *volatile*: «1. evaporating rapidly. 2. tending or threatening to erupt in violence; explosive. 3. changeable; unstable».

**Замечание 1.** Изложенное объясняет, почему в некоторых руководствах по финансовому делу (см., например, [404]) в качестве меры волатильности вместо стандартного отклонения  $\sigma$  возникает величина  $\nu = 1,65\sigma$ .

2. Рассмотренная гауссовская модель « $h_n = \sigma \varepsilon_n, n \geq 1$ », как мы уже видели раньше, весьма далека от реальности. Более реалистичны условно-гауссовские модели типа « $h_n = \sigma_n \varepsilon_n, n \geq 1$ », где последовательность  $\sigma = (\sigma_n)_{n \geq 1}$  является случайной последовательностью, причем  $\sigma_n$  являются  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми, а  $\varepsilon_n$  —  $\mathcal{F}_n$ -измеримыми, где  $(\mathcal{F}_n)$  — поток «информации» (например, о значениях цен; подробнее см. § 2а в гл. I).

По установившейся традиции последовательность  $\sigma = (\sigma_n)_{n \geq 1}$  принято также называть *последовательностью волатильностей* (в рассматриваемой модели), случайный характер которых выражают словами, что «волатильность сама по себе волатильна».

Заметим, что

$$\mathbb{E}(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n^2 \quad (3)$$

и последовательность  $H = (H_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  со значениями  $H_n = h_1 + \dots + h_n$ ,  $\mathbb{E} |h_n|^2 < \infty, n \geq 1$ , является квадратично интегрируемым мартингалом с квадратической характеристикой

$$\langle H \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(h_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}), \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Согласно формуле (3) имеем

$$\langle H \rangle_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2; \quad (5)$$

поэтому квадратическую характеристику

$$\langle H \rangle = (\langle H \rangle_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$$

естественно называть *волатильностью* последовательности  $H$ .

Ясно, что

$$\mathbb{E} H_n^2 = \mathbb{E} \langle H \rangle_n. \quad (6)$$

3. В случае моделей  $ARCH(p)$  имеем

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2 \quad (7)$$

(см. § 3а в гл. II).

Тем самым, для таких моделей проблема *оценивания* волатильностей  $\sigma_n$  сводится к *параметрической* задаче оценивания коэффициентов  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ .

Существуют и иные, например *непараметрические*, методы оценивания волатильности. Так, если  $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n, n \geq 1$ , где  $\mu = (\mu_n)$  и  $\sigma = (\sigma_n)$  — ста-



ционарные последовательности, то естественной оценкой для  $\sigma_n$  является стандартная оценка

$$\widehat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (h_k - \bar{h}_n)^2}, \quad (8)$$

где  $\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k$ .

Интересно отметить, что эмпирическую волатильность  $\widehat{\sigma} = (\widehat{\sigma}_n)_{n \geq 1}$  можно также рассматривать как некоторый финансово-статистический индекс и применять для его анализа ту же самую методологию и технику, что и при исследовании самих цен  $S = (S_n)_{n \geq 1}$ .

С этой целью введем величины

$$\widehat{r}_n = \ln \frac{\widehat{\sigma}_n}{\widehat{\sigma}_{n-1}}, \quad n \geq 2. \quad (9)$$

Многочисленные наблюдения и публикации (например, [386, гл. 10]) показывают, что величины логарифмического возврата  $\widehat{r} = (\widehat{r}_n)_{n \geq 2}$  весьма быстро меняют свои значения, что указывает на отрицательную коррелированность значений  $\widehat{r}_n$  и  $\widehat{r}_{n+1}$ ,  $n \geq 2$ . Если взять, к примеру, индекс S&P 500 и к соответствующим величинам  $\widehat{r} = (\widehat{r}_n)_{n \geq 2}$  применить  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ (см. § 2а гл. III и раздел 4 настоящей главы), то эффект отрицательной коррелированности будет подтверждаться в полной мере. При этом в первом приближении величины  $\widehat{r} = (\widehat{r}_n)$  можно считать гауссовскими, и поэтому их отрицательная коррелированность (вместе с наблюдаемыми свойствами автомодельности) может рассматриваться как аргумент в пользу того, что эта последовательность есть *фрактальный шум* с параметром Харста  $\mathbb{H} < 1/2$ . (Согласно книге [386], для индекса S&P 500 имеем  $\mathbb{H} \approx 0,31$ .)

4. Осознанию важности понятия волатильности во многом способствовала известная работа Ф. Блэка и М. Шоулса [44] 1973 г., в которой была дана формула для справедливой (рациональной) стоимости  $C_T$  стандартного опциона-колл (см. § 1b в гл. I). Согласно этой формуле величина  $C_T$  *не зависит* от  $\mu$  (факт, на первый взгляд, удивительный!), но *зависит* от значения волатильности  $\sigma$ , входящей в формулу, определяющую эволюцию цен акций  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ :

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \quad H_t = \sigma W_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \quad (10)$$

где  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  — стандартный винеровский процесс.

Конечно, предположение о том, что в модели (10) волатильность  $\sigma$ , во-первых, является *константой*, а во-вторых, *известной* константой, мало реалистично. Поэтому становится понятным, что применение на практике формулы Блэка и Шоулса требует хотя бы некоторого приближенного представления о возможном значении волатильности, и это нужно не только для определения справедливой стоимости опционов, но и для определения степени

риска при принятии решений для моделей, где цены описываются формулами (9) и (10) из § 1b гл. I.

В этой связи следует остановиться на еще одном (эмпирическом) подходе к понятию волатильности, определение которой использует *формулу Блэка и Шоулса* и *реальные* цены опционов на рынке ценных бумаг.

Для соответствующего определения обозначим через  $C_t = C_t(\sigma; T)$  значение (теоретическое) цены покупки в момент  $t < T$  стандартного европейско-го опциона-колл с  $f_T = (S_T - K)^+$  и моментом исполнения  $T$ .

Цена  $C_t$  — теоретическая цена. На практике же есть *реально* объявленная в момент  $t$  цена  $\tilde{C}_t$ , которую можно использовать для отыскания корня уравнения

$$\tilde{C}_t = C_t(\sigma; T). \quad (11)$$

Найденное значение  $\sigma$ , обозначаемое  $\tilde{\sigma}_t$ , называется *предполагаемой* (implied) волатильностью и считается хорошей оценкой истинной волатильности.

Следует отметить, что по характеру своего поведения *предполагаемая волатильность* схожа с *эмпирической волатильностью*, определяемой (в случае непрерывного времени) по формулам типа (8). При этом весьма четко прослеживается ее отрицательная коррелированность и фрактальная структура (см., например, [386, гл. 10]).

5. Остановимся на еще одном подходе к определению волатильности, основанном на рассмотрении *вариационных* характеристик процесса  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ , определяющего цены  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ ,  $S_t = S_0 e^{H_t}$ . Многие статистические наблюдения, а также экономические аргументы говорят в пользу того, что процессы  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  обладают свойствами *автомодельности*, означающими, в частности, что законы распределений величин  $H_{t+\Delta} - H_t$  при *разных*  $\Delta > 0$  обладают некоторыми свойствами подобия (см. раздел 2 в гл. III).

Напомним, что если  $H \equiv B_{\mathbb{H}}$  — фрактальное броуновское движение, то для всякого  $\Delta > 0$  и  $t \geq 0$  выполняется равенство

$$\mathbb{E} |H_{t+\Delta} - H_t| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta^{\mathbb{H}} \quad (12)$$

и

$$\mathbb{E} |H_{t+\Delta} - H_t|^2 = \Delta^{2\mathbb{H}}. \quad (13)$$

Для строго  $\alpha$ -устойчивого движения Леви с параметром  $0 < \alpha \leq 2$  имеем

$$\mathbb{E} |H_{t+\Delta} - H_t| = \mathbb{E} |H_{\Delta}| = \Delta^{1/\alpha} \mathbb{E} |H_1|. \quad (14)$$

Поэтому, обозначая  $\mathbb{H} = 1/\alpha$ , находим

$$\mathbb{E} |H_{t+\Delta} - H_t| = \Delta^{\mathbb{H}} \mathbb{E} |H_1|, \quad (15)$$

что сходно с формулой (12) для фрактального броуновского движения.

Приведенные формулы и соображения, основанные на законе больших чисел, подсказывают естественность введения *вариационных* характеристик и проведения на их основе статистической проверки того, что процесс  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ , участвующий в формировании цен  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ , является автомодельным процессом типа фрактального броуновского движения или  $\alpha$ -устойчивого движения Леви.

Следует при этом подчеркнуть, что с точки зрения статистического анализа разным группам инвесторов могут быть интересны разные *временные интервалы* и *временные горизонты*.

Так, для *краткосрочных* инвесторов ценность представляют данные значений цен  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  в моменты времени  $t_k = k\Delta$ ,  $k \geq 0$ , с *малым* временным интервалом  $\Delta > 0$  (порядка нескольких минут, и даже секунд). Для *долгосрочных* инвесторов подобная информация малоинтересна, и для них ценность имеют данные об изменениях в ценах через *большие* временные интервалы (месяцы, и даже годы), информация о наличии циклов (как периодических, так и непериодических) и их длительности, информация о трендовых явлениях и т. п.

Имея это в виду, будем в дальнейшем явно указывать выбираемый временной интервал  $\Delta$  (в качестве единицы измерения, как *характеристический* временной масштаб инвестора), а также тот интервал  $(a, b]$ , на котором нас интересует эволюция и характер *изменчивости* рассматриваемого финансового индекса.

6. Об изменчивости процесса  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  на временном интервале  $(a, b]$  хорошее представление может дать  $\Delta$ -вариация

$$\text{Var}_{(a,b]}(H; \Delta) = \sum |H_{t_k} - H_{t_{k-1}}|, \quad (16)$$

где суммирование производится по всем тем  $k$ , для которых  $a \leq t_{k-1} < t_k \leq b$ , причем все  $t_k$  имеют вид  $k\Delta$ .

Понятно, что для «достаточно регулярных» функций (реализаций)  $H = (H_t)_{a \leq t \leq b}$  и малых  $\Delta > 0$  величина  $\text{Var}_{(a,b]}(H; \Delta)$  близка к вариации

$$\text{Var}_{(a,b]}(H) \equiv \int_a^b |dH_s|, \quad (17)$$

которая по определению есть

$$\sup \sum |H_{t_k} - H_{t_{k-1}}|, \quad (18)$$

где  $\sup$  берется по всем таким конечным разбиениям  $(t_0, \dots, t_n)$  интервала  $(a, b]$ , что  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$ .

При статистическом анализе процессов  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ , предположительно имеющих однородные приращения, целесообразно оперировать не с  $\Delta$ -вари-

ациями  $\text{Var}_{(a,b]}(H; \Delta)$ , а с нормированными величинами

$$\nu_{(a,b]}(H; \Delta) = \frac{\text{Var}_{(a,b]}(H; \Delta)}{\left[\frac{b-a}{\Delta}\right]}, \quad (19)$$

которые мы будем называть (эмпирическими)  $\Delta$ -волатильностями на  $(a, b]$ .

Полезным часто оказывается также рассмотрение  $\Delta$ -волатильности порядка  $\delta > 0$ :

$$\nu_{(a,b]}^{(\delta)}(H; \Delta) = \frac{\text{Var}_{(a,b]}^{(\delta)}(H; \Delta)}{\left[\frac{b-a}{\Delta}\right]}, \quad (20)$$

где

$$\text{Var}_{(a,b]}^{(\delta)}(H; \Delta) = \sum |H_{t_k} - H_{t_{k-1}}|^\delta \quad (21)$$

и суммирование проводится так же, как и в формуле (16).

Отметим, что для фрактального броуновского движения  $H = B_{\mathbb{H}}$  при  $\Delta \rightarrow 0$

$$\text{Var}_{(a,b]}^{(2)}(H; \Delta) \xrightarrow{P} \begin{cases} \infty, & 0 < \mathbb{H} < \frac{1}{2}, \\ (b-a), & \mathbb{H} = \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < \mathbb{H} \leq 1, \end{cases} \quad (22)$$

где « $\xrightarrow{P}$ » означает сходимость по вероятности.

Если  $H$  — строго  $\alpha$ -устойчивое движение Леви,  $0 < \alpha < 2$ , то при  $\Delta \rightarrow 0$  имеем

$$\text{Var}_{(a,b]}^{(2)}(H; \Delta) \xrightarrow{P} 0. \quad (23)$$

**Замечание 2.** Случайные процессы  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ , обладающие свойством (23), принято называть процессами нулевой энергии (см., например, [166]). Тем самым, из формул (22) и (23) вытекает, что фрактальное броуновское движение с  $1/2 < \mathbb{H} \leq 1$  и строго  $\alpha$ -устойчивые процессы Леви с  $\mathbb{H} = 1/\alpha > 1/2$  являются процессами нулевой энергии.

7. Статистическое исследование волатильности с помощью излагаемого далее  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа (см. раздел 4) позволяет выявить ряд замечательных и неожиданных свойств, которые дают возможность проверки тех или иных гипотез относительно пространственно-временной структуры процессов  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  (в случае моделей с непрерывным временем) и  $H = (H_n)_{n \geq 0}$  (в случае дискретного времени). Например, для многих финансовых индексов довольно ясно, что надо отвергнуть гипотезу о независимости величин  $h_n$ ,  $n \geq 1$ , образующих последовательность  $H = (H_n)_{n \geq 0}$ . (В случае непрерывного времени этому соответствует отклонение гипотезы о том, что  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  является процессом с независимыми приращениями.)

В то же самое время, анализ  $\Delta$ -волатильности и  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -статистики говорят в пользу того, что на самом деле величинам  $h_n$ ,  $n \geq 1$ , свойственно довольно-

таки *сильное последствие*, которое дает основание надеяться на «нетривиальный» прогноз будущего движения цен.

Фрактальная структура волатильности выявляется для многих финансовых индексов (акций, облигаций, индексов типа Dow, S&P 500 и т. д.). При этом, наиболее выпукло она видна в обменных курсах валют, о чем пойдет речь в следующем параграфе.

### § 3b. Периодичность и фрактальная структура волатильности в обменных курсах

1. В § 1b были приведены данные (см. рис. 29 и 30) числа тиков, поступающих в течение суток и в течение недели. Эти данные четко показывают наличие

- *внутрисуточной неоднородности и*
- *суточной цикличности (периодичности).*

Если представить процесс  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ , где  $H_t = \ln \frac{S_t}{S_0}$ , в виде (ср. с формулой (7) в § 1c)

$$H_t = \sum h_{\tau_k} I(\tau_k \leq t), \quad (1)$$

то можно сказать, что рис. 29 и 30 описывают лишь только то, что определяется «временными» компонентами процесса  $H$ , т. е. моментами появления тиков ( $\tau_k$ ), не давая представления о поведении «фазовой» компоненты — последовательности  $(h_{\tau_k})$  или  $(\tilde{h}_k)$ ,  $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  (см. обозначения в § 2b).

Введенное выше понятие  $\Delta$ -волатильности, основанное на обращении к  $\Delta$ -вариации  $\text{Var}_{(a,b]}(H; \Delta)$ , позволяет получить наглядное представление об «активности» изменений процессов  $H$ ,  $\tilde{H}$  и по временной и по фазовой переменным.

С этой целью рассмотрим  $\Delta$ -волатильность  $\nu_{(a,b]}(H; \Delta)$ .

Сразу отметим, что если  $a = (k-1)\Delta$ ,  $b = k\Delta$ , то

$$\nu_{((k-1)\Delta, k\Delta]}(H; \Delta) = |\tilde{H}_{k\Delta} - \tilde{H}_{(k-1)\Delta}| = |\tilde{h}_k| \quad (2)$$

(см. обозначения в § 2b).

В качестве исследуемого объекта выберем обменный курс DEM/USD, так что  $S_t = (\text{DEM/USD})_t$ ,  $H_t = \ln \frac{S_t}{S_0}$ .

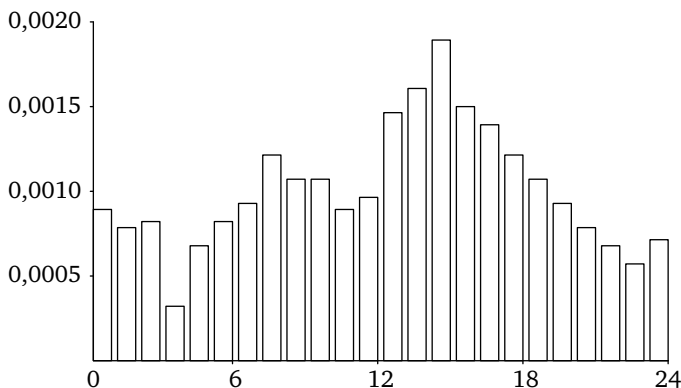
Будем полагать  $\Delta = 1$  час и брать

$$t = 1, 2, \dots, 24 \quad (\text{в часах})$$

тогда, когда производится «суточный» анализ (время отсчитывается начиная с 0:00 по Гринвичу понедельника) и

$$t = 1, 2, \dots, 168 \quad (\text{в часах}),$$

когда производится «недельный» анализ.



**Рис. 36.** График внутрисуточной  $\Delta$ -волатильности обменного курса DEM/USD ( $\Delta = 1$  час) по данным агентства Рейтер (05.10.1992–26.09.1993)

Заметим, что  $168 = 24 \times 7$ ; тем самым, значение  $t = 168$  отвечает концу недели.

Солидная база данных «Olsen & Associates» дает возможность получить для величин  $\nu_{((k-1)\Delta, k\Delta]}(H; \Delta) = |\tilde{h}_k|$  вполне надежные оценки

$$\hat{\nu}_{((k-1)\Delta, k\Delta]}(H; \Delta) \equiv \widehat{|\tilde{h}_k|}$$

по каждому дню недели.

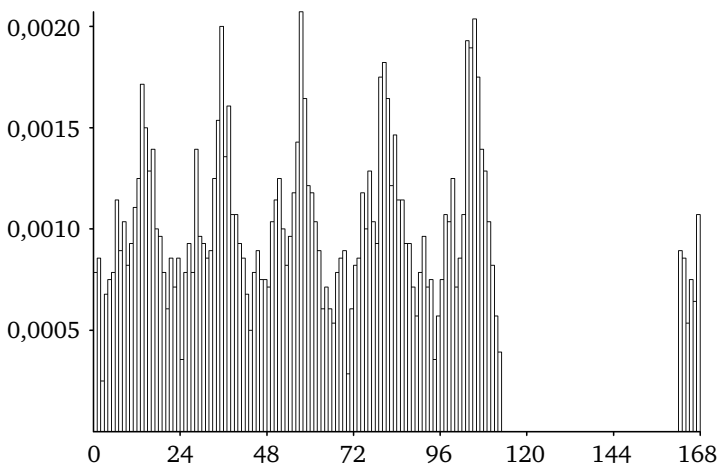
С этой целью будем вести отсчет времени с 0:00 по Гринвичу того первого понедельника, который есть в базе данных. Если  $\Delta = 1$  час, то, полагая  $k = 1, 2, \dots, 24$ , получаем интервалы  $(0, 1], (1, 2], \dots, (23, 24]$ , которые соответствуют временным интервалам (по Гринвичу)

$$(0:00, 1:00], (1:00, 2:00], \dots, (23:00, 24:00].$$

В качестве  $\hat{\nu}_{((k-1)\Delta, k\Delta]}(H; \Delta)$  берется среднее арифметическое значение величин  $|\tilde{H}_{k\Delta}^{(j)} - \tilde{H}_{(k-1)\Delta}^{(j)}|$  по всем понедельникам, занумерованным индексом  $j$ . Аналогичным образом получаем оценки  $\hat{\nu}_{((k-1)\Delta, k\Delta]}(H; \Delta)$  по вторникам ( $k = 25, \dots, 48$ ), ..., по воскресеньям ( $k = 145, \dots, 168$ ).

Следующие графики (рис. 36 и 37) из [427] наглядно иллюстрируют *внутрисуточную неоднородность* и *суточную периодичность* (цикличность) в течение недели в поведении  $\Delta$ -волатильности  $\nu_{((k-1)\Delta, k\Delta]}(H; \Delta) = |\tilde{h}_k|$  на часовых интервалах  $((k-1)\Delta, k\Delta]$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Отмеченные эффекты суточной периодичности (цикличности) в поведении  $\Delta$ -волатильности наблюдаются и при рассмотрении ее корреляционных свойств. Следующий параграф будет посвящен именно этому вопросу, а также обсуждению тех практических рекомендаций, которые следуют из статистического анализа  $\Delta$ -волатильности.



**Рис. 37.** График  $\Delta$ -волатильности обменного курса DEM/USD ( $\Delta = 1$  час) в течение недели. Интервалы  $(0, 1], \dots, (167, 168]$  соответствуют временным интервалам  $(0:00, 1:00], \dots, (23:00, 24:00]$  по Гринвичу. Данные агентства Рейтер (05.10.1992–26.09.1993)

2. Обратимся к свойствам  $\Delta$ -волатильности  $v_t(\Delta) \equiv v_{(0,t]}(H; \Delta)$  как функции от  $\Delta$  при фиксированном  $t$ , обозначая через  $\hat{v}_t(\Delta)$  ее оценку  $\hat{v}_{(0,t]}(H; \Delta)$ .

Возьмем достаточно большое  $t$ , скажем,  $t = T$ , где  $T =$  один год, и найдем  $\hat{v}_T(\Delta)$  для разных значений  $\Delta$ . Сравнительно недавно (см., например, [204], [362], [386], [427]) было обнаружено весьма замечательное свойство, присущее FX-рынку, а также и другим рынкам, состоящее в том, что  $\Delta$ -волатильность ведет себя *весьма регулярно* в том смысле, что

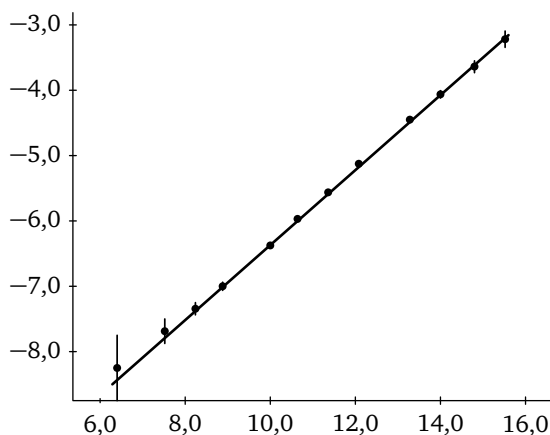
$$\hat{v}_T(\Delta) \approx C_T \Delta^{\mathbb{H}} \quad (3)$$

с константой  $C_T$ , зависящей от рассматриваемого обменного курса, и  $\mathbb{H} \approx 0,585$  для основных валют.

Чтобы придать соотношению (3) более определенный смысл, рассмотрим статистические данные относительно  $\ln \hat{v}_T(\Delta)$  как функции от  $\ln \Delta$  для широкого интервала значений  $\Delta$ , от 10 мин. = 600 сек. до 2 мес. =  $2 \times 30 \times \times 24 \times 60 \times 60$  сек. = 5 184 000 сек.

Прямая на рис. 38, проведенная по методу наименьших квадратов, показывает, что эмпирические данные очень хорошо группируются вдоль прямой с угловым коэффициентом  $\mathbb{H} \cong 0,585$ . Тем самым, из формулы (3) можно заключить, что при больших  $t$  волатильность  $v_t(\Delta)$  как функция  $\Delta$  имеет фрактальную структуру с показателем Харста  $\mathbb{H} \cong 0,585$ .

Как мы видели выше в § 3а, для броуновского движения имеем  $E |H_\Delta| = \sqrt{2/\pi} \Delta^{1/2}$ , для фрактального броуновского движения с показателем  $\mathbb{H}$  имеем  $E |H_\Delta| = \sqrt{2/\pi} \Delta^{\mathbb{H}}$ , а для строго  $\alpha$ -устойчивого процесса Леви с  $\alpha > 1$  имеем  $E |H_\Delta| = E |H_1| \Delta^{\mathbb{H}}$ , где  $\mathbb{H} = 1/\alpha < 1$ .



**Рис. 38.** Иллюстрация фрактальной структуры  $\Delta$ -волатильности  $\hat{v}_T(\Delta)$ . По вертикальной оси отложены значения  $\ln \hat{v}_T(\Delta)$  как функции от  $\ln \Delta$

Таким образом, найденное экспериментальным путем значение  $\mathbb{H} = 0,585 > 1/2$  говорит в пользу гипотезы о том, что процесс  $H = (H_t)$  вполне удовлетворительно может описываться или фрактальным броуновским движением, или же  $\alpha$ -устойчивым процессом Леви с параметром  $\alpha = \frac{1}{\mathbb{H}} \approx \frac{1}{0,585} \approx 1,7$ .

**Замечание.** Оценка параметра  $\mathbb{H}$  для фрактального броуновского движения приведена в гл. III, § 2с, п. 6.

3. Вернемся к рис. 36. На этом рисунке весьма четко видны положения минимума и максимума активности. Время 4:00 по Гринвичу (минимум активности) соответствует времени ленча в Токио, Сиднее, Сингапуре, Гонконге, когда «жизнь» на FX-рынке замирает. (В это время в Европе и Америке ночь.) Выше уже также отмечалось, что максимум активности ( $\approx 15:00$ ) соответствует раннему послеполудню в Европе и началу бизнес-дня в Америке.

В течение пяти рабочих дней недели (понедельник–пятница) активности (по дням) довольно схожи. Эта активность существенно снижается во время уикэнда — в субботу и большую часть воскресенья активность практически можно считать нулевой. К концу воскресного дня, когда Восточно-Азиатский рынок начинает свой бизнес-день, активность начинает возрастать.

### § 3с. Корреляционные свойства

1. Снова рассмотрим обменный курс DEM/USD, отличающийся, как уже отмечалось выше (§ 1а, п. 4), весьма высокой активностью в появлении тиков (в среднем 3–4 тика в минуту в обычные дни и 15–20 тиков в минуту в дни повышенной активности, как это было в июле 1994 года).



Описанные выше эффекты периодичности (цикличности) в появлении тиков и в  $\Delta$ -волатильности четко прослеживаются также и при корреляционном анализе абсолютных изменений  $|\Delta H|$ . Соответствующие результаты приведены ниже в п. 3. Начнем же изложение с корреляционного анализа самих величин  $\Delta H$ .

2. Пусть  $S_t = (\text{DEM/USD})_t$  и  $H_t = \ln \frac{S_t}{S_0}$ . Данные, полученные линейной интерполяцией, мы обозначаем (в соответствии с § 2b) через  $\tilde{S}_t$  и  $\tilde{H}_t = \ln \frac{\tilde{S}_t}{S_0}$ .

Выберем некоторый временной интервал  $\Delta$  и обозначим

$$\tilde{h}_k = \tilde{H}_{t_k} - \tilde{H}_{t_{k-1}},$$

$t_k = k\Delta$ . (В § 2b эта величина обозначалась также  $h_{t_k}^{(\Delta)}$ ; согласно § 3b имеем  $|\tilde{h}_k| = v_{(t_{k-1}, t_k)}(H; \Delta)$ .)

Положим  $\Delta = 1$  мин. и  $k = 1, 2, \dots, 60$ . Тогда последовательность приращений  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_{60}$  соответствует последовательным приращениям величины  $H$  (за минуту) в течение *одного* часа. В этом (часовом) интервале можно считать последовательность  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_{60}$  стационарной (однородной).

Традиционной мерой корреляционной зависимости стационарных последовательностей  $\tilde{h} = (h_1, h_2, \dots)$  является их корреляционная функция

$$\rho(k) = \frac{\mathbf{E} \tilde{h}_n \tilde{h}_{n+k} - \mathbf{E} \tilde{h}_n \cdot \mathbf{E} \tilde{h}_{n+k}}{\sqrt{\mathbf{D} \tilde{h}_n \cdot \mathbf{D} \tilde{h}_{n+k}}}, \quad (1)$$

обычно называемая в теории случайных процессов *автокорреляционной функцией*.

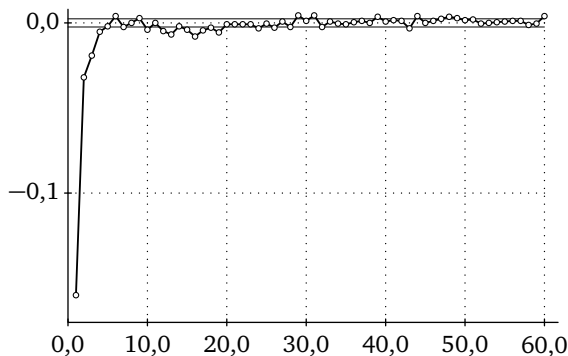
Соответствующий статистический анализ, проведенный «Olsen & Associates» (см. [204]), дает следующий график (эмпирической) автокорреляционной функции  $\hat{\rho}(k)$ , найденной по (весьма репрезентативной) базе данных за период 05.01.1987–05.01.1993.

На рис. 39 четко видна *отрицательная* коррелированность на интервале порядка 4 мин. ( $\hat{\rho}(1) < 0$ ,  $\hat{\rho}(2) < 0$ ,  $\hat{\rho}(3) < 0$ ,  $\hat{\rho}(4) \leq 0$ ). При этом большинство значений  $\hat{\rho}(k)$  при  $4 < k < 60$  мало отличимы от нуля.

В этом смысле можно считать, что значения  $\tilde{h}_n$  и  $\tilde{h}_m$ ,  $|n - m| > 4$  мин., являются практически некоррелированными.

Отметим, что эффект отрицательной коррелированности на малых промежутках ( $|n - m| \leq 4$  мин.) был анонсирован в работах [189], [191] и отмечается по многим финансовым показателям (см., например, [145] и [192]).

В литературе можно найти разные объяснения эффекту отрицательной коррелированности в приращениях  $\Delta \tilde{H}$  на малых временных промежутках. Приводимые, например, в работе [204] объяснения этого эффекта сводятся к тому, что трейдеры на FX-рынке далеко не однородны, их интересы могут «идти в разных направлениях», они могут по-разному интерпретировать поступающую информацию. Трейдеры часто прибегают к изменению спреда



**Рис. 39.** Эмпирическая автокорреляционная функция  $\hat{\rho}(k)$  последовательности приращений  $\tilde{h}_n = \tilde{H}_{t_n} - \tilde{H}_{t_{n-1}}$ ,  $t_n = n\Delta$ ,  $\Delta = 1$  мин., в обменном курсе DEM/USD

в каком-то одном «направлении», когда они имеют указание на то, чтобы произвести «разбалансирование». К тому же многие банки систематически публикуют цены покупки и продажи с завышенным спредом; в этой связи см. работу [192].

Возможное «математическое» объяснение эффекта отрицательности  $\text{Cov}(\tilde{h}_n, \tilde{h}_{n+k}) = E \tilde{h}_n \tilde{h}_{n+k} - E \tilde{h}_n E \tilde{h}_{n+k}$  для небольших значений  $k$  может состоять, например, в следующем (ср. с [481]).

Пусть  $\tilde{H}_n = \tilde{h}_1 + \dots + \tilde{h}_n$ , где  $\tilde{h}_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$ ,  $\sigma_n - \mathcal{F}_{n-1}$ -измеримые величины и  $(\varepsilon_n)$  — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин. Величины  $\mu_n$  также можно считать  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми. По многим статистическим данным средние  $\mu_n$  значительно меньше  $\sigma_n$  (см., например, таблицу в § 2b, п. 2) и практически могут считаться равными нулю.

Величины  $\tilde{H}_n$ , равные  $\ln \frac{\tilde{S}_n}{S_0}$ , на самом деле *точно известны не всегда*; более реалистично предполагать, что становятся известными не  $\tilde{H}_n$ , а  $\tilde{\tilde{H}}_n = \tilde{H}_n + \delta_n$ , где  $(\delta_n)$  — некоторый белый шум, характеризующий шумовую компоненту, определяемую не истинным состоянием цен, а неточностью получения этих значений.

Будем предполагать, что  $(\delta_n)$  — последовательность независимых случайных величин,  $E \delta_n = 0$ ,  $E \delta_n^2 = C > 0$ .

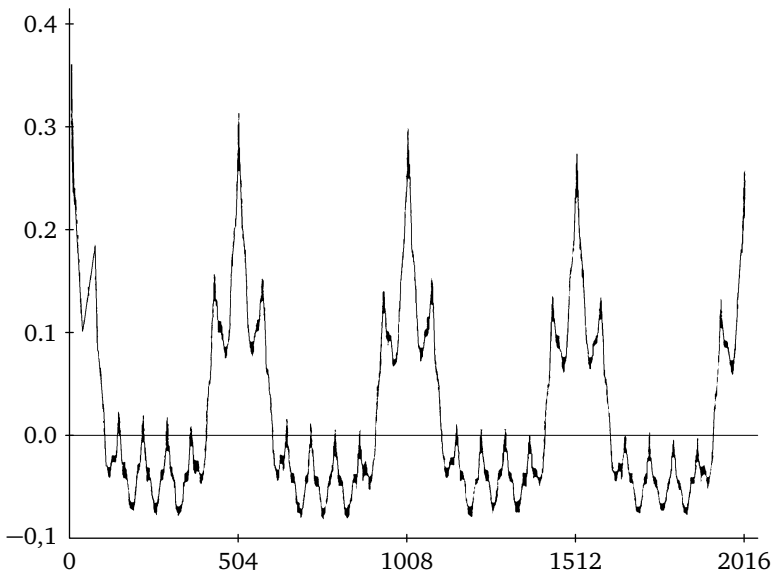
Тогда для последовательности  $\tilde{\tilde{h}} = (\tilde{\tilde{h}}_n)$  со значениями  $\tilde{\tilde{h}}_n = \Delta \tilde{\tilde{H}}_n = \tilde{h}_n + (\delta_n - \delta_{n-1})$  находим, что

$$E \tilde{\tilde{h}}_n = 0, \quad E \tilde{\tilde{h}}_n^2 = E \sigma_n^2 + 2C$$

и

$$E \tilde{\tilde{h}}_n \tilde{\tilde{h}}_{n+1} = E(\delta_n - \delta_{n-1})(\delta_{n+1} - \delta_n) = -C,$$

$$E \tilde{\tilde{h}}_n \tilde{\tilde{h}}_{n+k} = 0, \quad k > 1.$$



**Рис. 40.** Эмпирическая автокорреляционная функция  $\hat{R}(k)$  последовательности  $|\tilde{h}_n| = |\tilde{H}_{t_n} - \tilde{H}_{t_{n-1}}|$  для обменного курса DEM/USD (по данным агентства Рейтер, 5.10.1992–26.9.1993; [90], [204]). Значение  $k = 504$  соответствует одной неделе,  $k = 2016$  — четырем неделям

Таким образом, ковариационная функция

$$\text{Cov}(\tilde{h}_n, \tilde{h}_{n+k}) = \mathbb{E} \tilde{h}_n \tilde{h}_{n+k} - \mathbb{E} \tilde{h}_n \cdot \mathbb{E} \tilde{h}_{n+k}$$

(в предположении, что  $\mathbb{E} \sigma_n^2 = \mathbb{E} \sigma_1^2$ ,  $n \geq 1$ ) задается формулой

$$\text{Cov}(\tilde{h}_n, \tilde{h}_{n+k}) = \begin{cases} \mathbb{E} \sigma_1^2 + 2C, & k = 0, \\ -C, & k = 1, \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

3. Для выявления эффекта периодичности (цикличности) в волатильности с помощью методов корреляционного анализа поступим следующим образом.

Зафиксируем интервал  $\Delta = 20$  минут. Пусть  $t_0 = 0$  соответствует 0:00 по Гринвичу понедельника,  $t_1 = \Delta = 20$  мин.,  $t_2 = 2\Delta = 40$  мин.,  $t_3 = 3\Delta = 1$  час, ...,  $t_{504} = 504 \Delta = 1$  неделя, ...,  $t_{2016} = 2016 \Delta = 4$  недели (= 1 месяц).

Обозначим  $\tilde{h}_n = \tilde{H}_{t_n} - \tilde{H}_{t_{n-1}}$ , и пусть

$$R(k) = \frac{\mathbb{E} |\tilde{h}_n| |\tilde{h}_{n+k}| - \mathbb{E} |\tilde{h}_n| \cdot \mathbb{E} |\tilde{h}_{n+k}|}{\sqrt{\mathbb{D} |\tilde{h}_n| \cdot \mathbb{D} |\tilde{h}_{n+k}|}} \quad (2)$$

— автокорреляционная функция последовательности  $|\tilde{h}| = (|\tilde{h}_1|, |\tilde{h}_2|, \dots)$ .

График соответствующей ей эмпирической автокорреляционной функции  $\hat{R}(k)$  для  $k = 0, 1, \dots, 2016$ , т. е. в течение *четырёх* недель, представлен на рис. 40. Этот рисунок четко показывает наличие *периодической* составляющей в автокорреляционной функции  $\Delta$ -волатильности  $|\tilde{h}| = (|\tilde{h}_n|)_{n \geq 1}$ ,  $|\tilde{h}_n| = |\tilde{H}_{t_n} - \tilde{H}_{t_{n-1}}|$ ,  $\Delta = t_n - t_{n-1}$ .

Известно, что сила корреляционных методов в полной мере проявляется тогда, когда рассматриваемая последовательность является стационарной. Однако, как мы видим,  $\Delta$ -волатильность этим свойством не обладает, и возникает естественная мысль как-то «выровнять» ее, т. е. превратить в стационарную однородную последовательность.

Процедура «выравнивания» волатильности носит название *деволатилизации*. В следующем параграфе мы рассматриваем этот вопрос, основываясь на понятии *замены времени*, хорошо известном в теории случайных процессов, и идее *операционного* « $\theta$ -времени», систематически используемого «Olsen & Associates» (см. [90], [204], [362]) при анализе данных FX-рынка.

### § 3d. «Деволатилизация». Операционное время

1. Начнем со следующего примера, хорошо иллюстрирующего основные моменты процедуры *деволатилизации*, т. е. выравнивания волатильности.

Пусть  $H_t = \int_0^t \sigma(u) dB_u$ , где  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — стандартное броуновское движение и  $\sigma = (\sigma(t))_{t \geq 0}$  — некоторая *детерминированная* функция, характеризующая «интенсивность», «активность» вклада  $dB_u$ ,  $u \leq t$ , в формирование значения  $H_t$ . Заметим, что для каждого  $n \geq 1$  выполняется равенство

$$h_n \equiv H_n - H_{n-1} = \int_{n-1}^n \sigma(u) dB_u \stackrel{d}{=} \sigma_n \varepsilon_n, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\sigma_n^2 = \int_{n-1}^n \sigma^2(u) du$  и  $\stackrel{d}{=}$  означает совпадение величин по распределению.

Таким образом, при возможности регистрации значений процесса  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  только в дискретные моменты времени  $n = 1, 2, \dots$  наблюдаемая последовательность значений  $h_n \equiv H_n - H_{n-1}$  имеет совсем простую структуру *гауссовской* последовательности  $(\sigma_n \varepsilon_n)_{n \geq 1}$  независимых случайных величин с нулевым средним и, вообще говоря, «неоднородными» (волатильностями) дисперсиями  $\sigma_n^2$ .

Следующие рассуждения дают метод преобразования данных, выравнивающий эти «неоднородные» значения  $\sigma_n^2$ ,  $n \geq 1$ .

Обозначим

$$\tau(t) = \int_0^t \sigma^2(u) du, \quad (2)$$

$$\tau^*(\theta) = \inf \left\{ t : \int_0^t \sigma^2(u) du = \theta \right\} \quad (= \inf \{ t : \tau(t) = \theta \}), \quad (3)$$

где  $\theta \geq 0$ .

Будем предполагать, что  $\sigma(t) > 0$  при каждом  $t > 0$ ,  $\int_0^t \sigma^2(u) du < \infty$  (в этом предположении *определен* стохастический интеграл  $\int_0^t \sigma(u) dB_u$  по броуновскому движению  $B = (B_u)_{u \geq 0}$ ; см. § 3с гл. III), и пусть  $\int_0^t \sigma^2(u) du \uparrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

Наряду с *физическим* временем  $t \geq 0$  мы будем рассматривать также новое *операционное* « $\theta$ -время», определяемое (по  $t$ ) формулой

$$\theta = \tau(t). \quad (4)$$

Возвращение же от операционного « $\theta$ -времени» к физическому будет определяться обратным преобразованием

$$t = \tau^*(\theta). \quad (5)$$

Заметим, что из формулы (3) следует равенство

$$\int_0^{\tau^*(\theta)} \sigma^2(u) du = \theta, \quad (6)$$

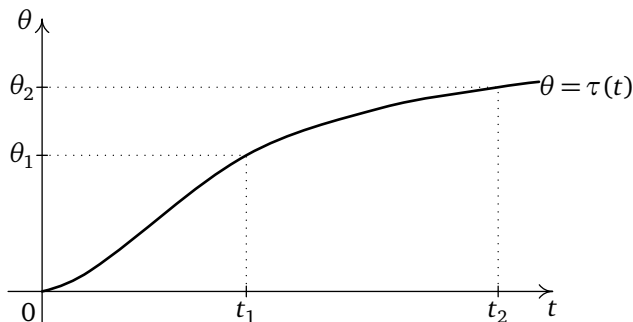
т. е.  $\tau(\tau^*(\theta)) = \theta$  и, значит,  $\tau^*(\theta) = \tau^{-1}(\theta)$ ,  $\tau^*(\tau(t)) = t$ .

Рассмотрим функцию  $\theta = \tau(t)$ , осуществляющую преобразование физического времени в операционное.

Поскольку

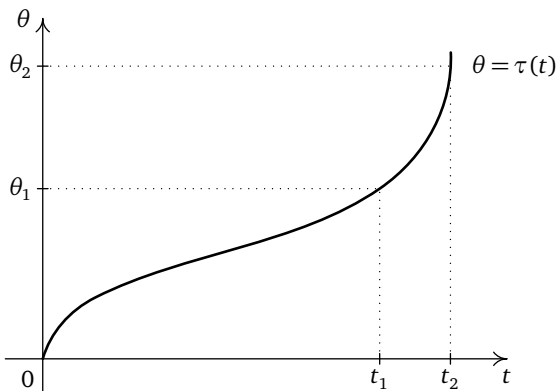
$$\theta_2 - \theta_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u) du, \quad (7)$$

видим, что там, где активность  $\sigma^2(u)$  мала, физическое время при его преобразовании в операционное как бы укорачивается, сжимается (как на рис. 41).



**Рис. 41.** Иллюстрация «сжатия» (длинного) периода  $[t_1, t_2]$  «малой» активности в (короткий) интервал  $[\theta_1, \theta_2]$  в  $\theta$ -времени

Но если активность  $\sigma^2(u)$  велика, то происходит обратное — коротким интервалам  $(t_1, t_2)$  физического времени (см. рис. 42) отвечает больший интервал  $(\theta_1, \theta_2)$  в операционном времени, происходит как бы «увеличение» времени.



**Рис. 42.** Иллюстрация «увеличения» (короткого) периода  $[t_1, t_2]$  «большой» активности в (длинный) интервал  $[\theta_1, \theta_2]$  в  $\theta$ -времени

Образует теперь новый процесс

$$H_{\theta}^* = H_{\tau^*(\theta)}, \quad (8)$$

действующий в новом, операционном времени. Понятно при этом, что возврат от нового процесса  $H^*$  к старому осуществляется по формуле

$$H_t = H_{\tau(t)}^*, \quad (9)$$

поскольку  $\tau^*(\tau(t)) = t$ .

Заметим, что для  $\theta_1 < \theta_2$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} H_{\theta_2}^* - H_{\theta_1}^* &= H_{\tau^*(\theta_2)} - H_{\tau^*(\theta_1)} = \int_{\tau^*(\theta_1)}^{\tau^*(\theta_2)} \sigma(u) dB_u = \\ &= \int_0^{\infty} I(\tau^*(\theta_1) < u \leq \tau^*(\theta_2)) \sigma(u) dB_u. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $H^*$  является процессом с *независимыми приращениями*,  $H_0^* = 0$ ,  $\mathbb{E} H_{\theta}^* = 0$ , и к тому же по свойствам стохастических интегралов (см. § 3с гл. III)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |H_{\theta_2}^* - H_{\theta_1}^*|^2 &= \int_0^{\infty} I(\tau^*(\theta_1) < u \leq \tau^*(\theta_2)) \sigma^2(u) du = \\ &= \int_{\tau^*(\theta_1)}^{\tau^*(\theta_2)} \sigma^2(u) du = \theta_2 - \theta_1 \end{aligned} \quad (10)$$

(последнее равенство следует из формулы (6)).

Процесс  $H^*$  является также и гауссовским и представляет собой процесс с независимыми приращениями, нулевым средним, свойством (10) и непрерывными траекториями, поэтому это есть (см. § 3а гл. III) не что иное, как

стандартное броуновское движение, и, значит,

$$H_{\theta}^* = \int_0^{\theta} \sigma^*(u) dH_u^*, \quad (11)$$

где  $\sigma^*(u) \equiv 1$ .

Сравнение с представлением  $H_t = \int_0^t \sigma(u) dB_u$ , где, вообще говоря,  $\sigma(u) \neq 1$ , показывает, что переход к операционному времени «выравнил» характеристику активности  $\sigma \equiv \sigma(u)$ , сделав ее в новом « $\theta$ -времени» однородной ( $\sigma^*(u) \equiv 1$ ).

Выше мы предполагали, что  $\sigma(u)$  неслучайно. На самом деле процесс  $H_{\theta}^* = H_{\tau^*(\theta)}$  также будет винеровским и при случайной замене времени, определяемой формулой (3) с  $\sigma(u) = \sigma(u; \omega)$ , лишь бы только с вероятностью единица выполнялись условия  $\int_0^t \sigma^2(u; \omega) du < \infty$  и  $\int_0^t \sigma^2(u; \omega) du \uparrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Однако есть принципиальная разница между случаями детерминированной функции  $\sigma = \sigma(u)$  и случайной функции  $\sigma = \sigma(u; \omega)$ : в первом случае производимую замену времени  $t \rightsquigarrow \theta = \tau(t)$  можно рассчитать заранее, в том числе и для «будущих» моментов времени, во втором же случае этого уже сделать нельзя, поскольку «случайная» замена времени разная для различных реализаций  $\sigma = \sigma(u; \omega)$ ,  $u \geq 0$ .

2. Обратимся к некоторой последовательности  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ ,  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ , с неоднородными активностями  $\sigma_n$ ,  $n \geq 1$ . При этом будем рассматривать  $n$  как физическое («старое») время.

Определим последовательность моментов

$$\tau^*(\theta) = \min \left\{ m \geq 1: \sum_{k=1}^m \sigma_k^2 \geq \theta \right\},$$

где  $\theta$  принимает значения  $1, 2, \dots$  и будет рассматриваться как операционное («новое») время.

Пусть также для  $\theta = 1, 2, \dots$  выполняются равенства

$$h_{\theta}^* = \sum_{\tau^*(\theta-1) < k \leq \tau^*(\theta)} h_k,$$

где  $\tau^*(0) = 0$ .

Заметим, что  $E h_0^* = 0$  и

$$D h_{\theta}^* = D \left[ \sum_{\tau^*(\theta-1) < k \leq \tau^*(\theta)} h_k \right] = \sum_{\tau^*(\theta-1) < k \leq \tau^*(\theta)} \sigma_k^2 \approx 1,$$

поскольку обычно величины  $\sigma_k^2$  являются достаточно малыми (см. таблицу в § 2b, п. 2).

Тем самым, можно сказать, что переход к новому « $\theta$ -времени» превратил неоднородную последовательность  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  в (почти) однородную последовательность  $h^* = (h_{\theta}^*)_{\theta \geq 1}$ .

В том случае, когда  $\sigma_n$  являются случайными,  $\sigma_n = \sigma_n(\omega)$ , и преследуется цель априорного расчета замены времени для всех (в том числе и для будущих) моментов времени, то предшествующие идеи «деволатилизации» можно использовать, заменив  $\sigma_n^2(\omega)$  его средним значением  $E \sigma_n^2(\omega)$  или, в конкретной статистической практике, *оценкой* этого среднего значения.

Из представления  $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$  видим, что в предположении  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримости  $\sigma_n$  выполняются равенства  $E h_n^2 = E \sigma_n^2$ , и, значит, в качестве оценочного значения для  $E \sigma_n^2$ , где момент  $n$  соответствует, скажем, интервалу времени  $((n-1)\Delta, n\Delta]$  по Гринвичу понедельника, можно брать среднее арифметическое значений  $h^2$ , подсчитываемых по статистическим данным, отвечающим этому временному интервалу по всем понедельникам, находящимся в базе данных.

В проведенной замене времени (2) были использованы квадраты величин  $\sigma(u)$ , что, конечно, не является единственным способом получения замены времени  $t \rightsquigarrow \theta = \tau(t)$ . Можно, например, вместо  $\sigma^2(u)$  использовать значения  $|\sigma(u)|$ .

3. Именно такая замена времени используется в работах «Olsen & Associates» [90], [360]–[362], где утверждается, что этот способ «деволатилизации» позволяет лучше «ухватывать» свойства *периодичности* и дает более «гладкую» картину поведения автокорреляционной функции «деволатилизованных» значений последовательности  $|\tilde{h}^*|$  для обменного курса DEM/USD.

Отсылая за деталями к статье [90], мы приведем сейчас лишь полученный в ней результат статистического исследования относительно свойств автокорреляционной функции значений последовательности  $|\tilde{h}^*|$ .

Как и в п. 3 § 3с будем предполагать, что  $\Delta = 20$  мин.,  $\tilde{h}_n = \tilde{H}_{t_n} - \tilde{H}_{t_{n-1}}$ ,  $t_n = n\Delta$ .

На рис. 40 в § 3с дан график поведения эмпирической оценки  $\hat{R}(k)$  автокорреляционной функции

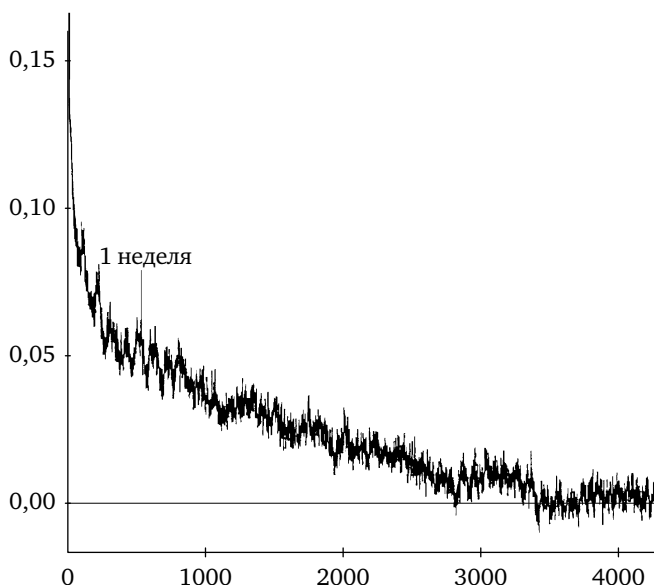
$$R(k) = \frac{E |\tilde{h}_n| |\tilde{h}_{n+k}| - E |\tilde{h}_n| \cdot E |\tilde{h}_{n+k}|}{\sqrt{D |\tilde{h}_n| \cdot D |\tilde{h}_{n+k}|}}, \quad (12)$$

из которого четко видна периодическая структура этой функции.

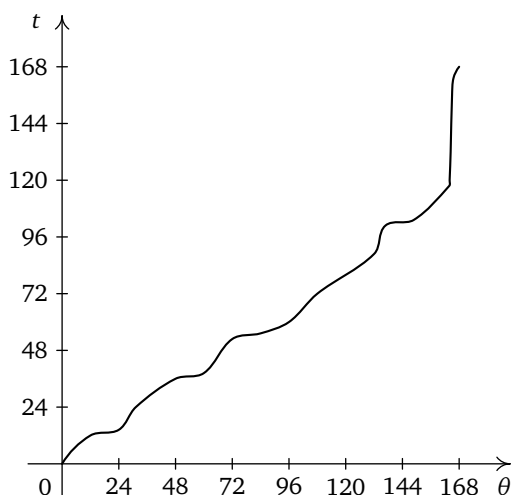
В работе [90], после процедуры деволатилизации и перехода к новому операционному « $\theta$ -времени», был получен весьма интересный для анализа график (см. рис. 43) *эмпирической* корреляционной функции  $\hat{R}^*(\theta)$ ,  $\theta \geq 0$ , последовательности  $|h^*| = (|h_\theta^*|)_{\theta \geq 1}$ . Там же был дан и график функции  $\tau^*(\theta)$ :  $\theta \rightsquigarrow t$ , осуществляющей переход от операционного времени  $\theta$  к фактическому времени  $t$  (в рассматриваемом случае обменного курса DEM/USD; см. рис. 44; новое время при этом пронормированно так, чтобы недельному интервалу физического времени соответствовал недельный интервал операционного времени).

Из рис. 44 видно, что в течение пяти бизнес-дней недели зависимость  $t = \tau^*(\theta)$  является примерно линейной. В конце же недели, когда операцион-





**Рис. 43.** Эмпирическая автокорреляционная функция  $\hat{R}^*(\theta)$  последовательности  $|\tilde{h}^*| = (\tilde{h}_\theta^*)_{\theta \geq 1}$  деволатилизованных значений в *операционном* « $\theta$ -времени» с интервалом  $\Delta\theta = 20$  мин. для обменного курса DEM/USD [90]

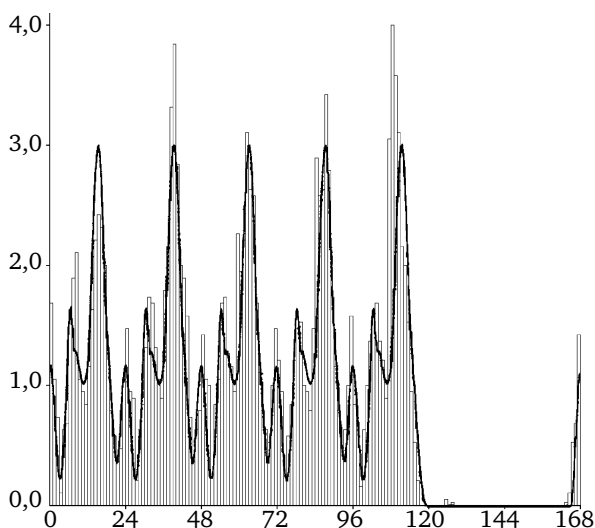


**Рис. 44.** График преобразования  $t = \tau^*(\theta)$  операционного времени в физическое. По горизонтальной оси отложено операционное  $\theta$ -время (в часах; 168 час. соответствует 1 неделе). По вертикальной оси отложено физическое время [90]

ная активность FX-рынка замирает, большим интервалам (уикэндного) физического времени соответствуют малые интервалы операционного времени, которые, собственно говоря, и представляют интерес для бизнес-трейдинга.

4. Следует отметить, что использованный выше метод деволатилизации для «уничтожения» периодической составляющей является далеко не единственным, применяемым в анализе FX-рынка. Укажем, например, на работы [7], [13], [306], в которых применяется самая разнообразная техника — линейный и нелинейный регрессионный анализ, методы, основанные на преобразовании Фурье, используются компьютерные программы (нейросети; neural networking) для отыскания в прошлом сходных участков во временных рядах финансовых данных. К этому же кругу вопросов относится и работа [297] И. Л. Легостаевой и автора, возникшая по инициативе А. Н. Колмогорова, в которой (в связи с изучением чисел Вольфа, описывающих солнечную активность) для анализа «трендовой» составляющей  $f(t)$ , содержащейся в реализации процесса  $\xi_t$  с аддитивным «белым шумом»  $\eta_t$  ( $\xi_t(\omega) = f(t) + \eta_t(\omega)$ ), был применен минимаксный подход, позволяющий значительно расширить класс рассматриваемых трендов  $f(t)$  по сравнению с обычным регрессионным анализом. Дальнейшее развитие этого метода см. в [45], [338], [416], а также в других работах указанных авторов.

5. Приведем в заключение график периодической составляющей «активности» (см. § 3b) в обменном курсе CHF/USD, выделенной методом деволатилизации (см. [90]; ср. также с рис. 37 в § 3b).



**Рис. 45.** Выделенная кривая является периодической составляющей «активности» в обменном курсе CHF/USD (168 час. соответствуют 1 неделе)

Из представленного рис. 45 четко видна «географическая» структура периодической (по суткам, в течение недели) составляющей, характер которой определяется разными бизнес-временами активности трех различных FX-рынков — Восточно-Азиатского, Европейского и Американского. В работе [90] дано интересное разложение этой составляющей в сумму трех периодических компонент, соответствующих этим рынкам, позволяющее более корректно учитывать наличие факторов периодичности при прогнозе будущего движения обменных курсов.

### § 3е. Эффекты «кластерности» и последствия в ценах

1. В нашей исходной схеме предполагалось, что обменные курсы, цены  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  и их логарифмы  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ ,  $H_t = \ln \frac{S_t}{S_0}$ , описывались случайными процессами с дискретным вмешательством случая:

$$S_t = S_0 + \sum_{n \geq 1} s_{\tau_n} I(\tau_n \leq t) \quad (1)$$

и

$$H_t = \sum_{n \geq 1} h_{\tau_n} I(\tau_n \leq t). \quad (2)$$

Затем мы переходили к их непрерывным модификациям  $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ ,  $\tilde{H} = (\tilde{H}_t)_{t \geq 0}$  и наконец к значениям  $\tilde{h}_n = \tilde{H}_{t_n} - \tilde{H}_{t_{n-1}}$ , где  $t_n - t_{n-1} = \Delta$ . Именно для этих величин  $\tilde{h}_n$  с интервалом  $\Delta = 1$  мин. и была обнаружена отрицательность автоковариации  $\tilde{\rho}(k) = E \tilde{h}_n \tilde{h}_{n+k} - E \tilde{h}_n E \tilde{h}_{n+k}$  для небольших значений  $k = 1, 2, 3, 4$  (мин.). Для больших значений  $k$  автоковариация близка к нулю, и, следовательно, для таких  $k$  величины  $\tilde{h}_n$  и  $\tilde{h}_{n+k}$  могут считаться (практически) некоррелированными.

Это, разумеется, далеко не означает их независимости, что подтвердилось в § 3с анализом эмпирической автокорреляционной функции  $\hat{R}(k)$  (все рассмотрения проведены для обменного курса DEM/USD).

Следующий шаг (процедура деволатилизации) позволил выровнять «активности» с помощью перехода к новому операционному времени, образованному с учетом разных периодов «активности» изменений значений процесса  $\tilde{H} = (\tilde{H}_t)_{t \geq 0}$ .

Как видно из статистического анализа последовательности  $(|\tilde{h}_n|)_{n \geq 1}$ , рассматриваемой в новом, операционном « $\theta$ -времени», автокорреляционная функция  $\hat{R}^*(\theta)$

- 1) достаточно велика при малых значениях  $\theta$ ;
- 2) убывает достаточно медленно с ростом  $\theta$ .

В статье [90] утверждается, что на временном интервале порядка месяца поведение  $\hat{R}^*(\theta)$  достаточно хорошо «ухватывается» степенной зависимо-

стью:

$$\hat{R}^*(\theta) \sim k\theta^{-\alpha}, \quad \theta \rightarrow \infty, \quad (3)$$

а не экспоненциальной:

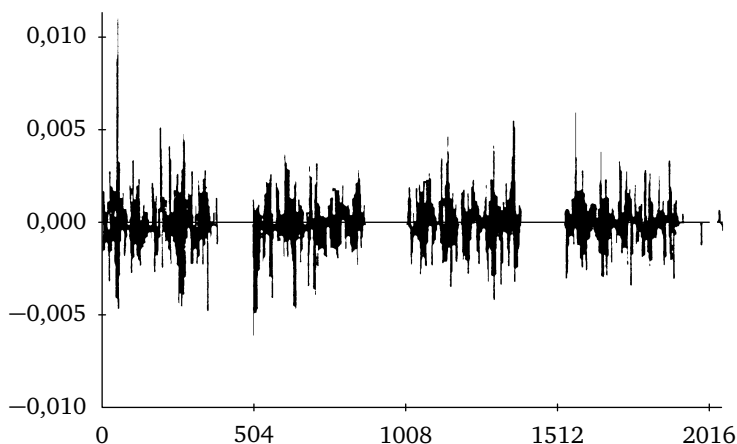
$$\hat{R}^*(\theta) \sim k \exp(-\theta^\beta), \quad \theta \rightarrow \infty, \quad (4)$$

как это можно было бы ожидать и что имеет место для многих популярных в финансовой математике моделей (например, *ARCH*, *GARCH*; подробнее см. [193] и [202]).

Факт достаточно медленного убывания эмпирической автокорреляционной функции  $\hat{R}^*(\theta)$  имеет важные практические выводы. Он означает, что в ценах действительно есть сильное последствие или, как еще образно говорят, «цены помнят прошлое». Тем самым, имеется определенная надежда на возможность предсказания будущего движения цен, для чего, конечно, нужно уметь строить модели последовательностей  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ , для которых, по крайней мере, корреляционные свойства были бы похожи на те, которые наблюдаются на практике. См. в этой связи [89], [360] и § 3б гл. II.

2. То обстоятельство, что автокорреляция достаточно *большая* при малых значениях  $\theta$ , служит убедительным объяснением наблюдаемого эффекта *кластерности* (группирования) в поведении «активности», измеряемой волатильностью  $|\tilde{h}_n|$ .

Суть этого эффекта, известного еще с работы Б. Мандельброта [322] 1963 года, состоит в том, что, как правило, вслед за *большими* значениями



**Рис. 46.** Эффект кластерности в величинах  $\tilde{h}_k = \tilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$  в обменном курсе DEM/USD (по данным агентства Рейтер, 5.10.1992–2.11.1992; [427]). Временной интервал  $\Delta = 20$  мин.; значение 504 соответствует одной неделе; 2016 соответствует четырем неделям. Четко проявляются «сгустки» «малых» и «больших» значений величин  $|\tilde{h}_k|$

волатильности следует снова ожидать *большие значения*, а вслед за *малыми* — снова *малые*.

Иначе говоря, если изменение  $|\tilde{h}_n| = |\tilde{H}_{t_n} - \tilde{H}_{t_{n-1}}|$  было большим, то (с достаточно большой вероятностью) следующее значение  $|\tilde{h}_{n+1}|$  также будет большим. Если же  $|\tilde{h}_n|$  было малым, то (с достаточно большой вероятностью) следующее значение также будет малым. Наглядно эти свойства хорошо видны на рис. 46 и реально наблюдаются для многих финансовых индексов.

Отметим, что эффекты кластерности хорошо «ухватываются» также  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализом, рассматриваемом в следующем разделе.

## 4. Статистический $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ

### § 4а. Истоки и методология $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа

1. В § 2а предшествующей главы был описан обнаруженный Г. Харстом ([236]; 1951 г.) феномен долгой памяти и автомодельности в статистических данных годовых стоков Нила, приведший его к созданию так называемого  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа.

Этот метод исследования недостаточно хорошо известен в статистической практике, хотя он, безусловно, заслуживает большего внимания. Объясняется это тем, что метод Харста, будучи робастным, позволяет выявлять в статистических данных такие свойства, как *кластерность*, *тенденцию следовать по направлению тренда* (persistence), *сильное последствие*, *сильную память*, *быструю перемежаемость* (antipersistence) последовательных значений, *фрактальность*, *наличие периодических и непериодических циклов*, *способность различать* «стохастическую» и «хаотическую» природу шума и т. п.

Помимо основополагающей работы Г. Харста [236] в развитии теории  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа, его методологии и применений значительную роль сыграли работы Б. Мандельброта и его соавторов [314], [316]–[319], [321]–[325], [327]–[329], а также работы и две монографии [385], [386] Е. Питерса, содержащие большой (как правило, описательный) материал, относящийся к применению  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа к финансовым рынкам.

2. Пусть  $S = (S_n)_{n \geq 0}$  — некоторый финансовый индекс,  $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ ,  $n \geq 1$ .

Суть  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа применительно к исследованию свойств последовательности  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  состоит в следующем.

Образуем величины  $H_n = h_1 + \dots + h_n$ ,  $n \geq 1$ , и положим (ср. с § 2а гл. III)

$$\mathcal{R}_n = \max_{k \leq n} \left( H_k - \frac{k}{n} H_n \right) - \min_{k \leq n} \left( H_k - \frac{k}{n} H_n \right). \quad (1)$$

Величина  $\bar{h}_n \equiv \frac{H_n}{n}$  есть *эмпирическое среднее*, построенное по выборке  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ , и, следовательно,  $H_k - \frac{k}{n} H_n = \sum_{i=1}^k (h_i - \bar{h}_n)$  есть *величина откло-*

нения  $H_k$  от эмпирического среднего значения  $\frac{k}{n}H_n$ . Сама же величина  $\mathcal{R}_n$  характеризует степень «размаха» этих отклонений  $H_k - \frac{k}{n}H_n$ ,  $k \leq n$ .

Пусть также

$$\mathcal{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (h_k - \bar{h}_n)^2 \quad (2)$$

— эмпирическая дисперсия и

$$\mathcal{Q}_n \equiv \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \quad (3)$$

— *нормализованный*, или *приведенный*, размах накопленных сумм  $H_k$ ,  $k \leq n$  (по терминологии из работы [157]; в английской версии — «the adjusted range of the cumulative sums  $H_k$ ,  $k \leq n$ »).

Из формул (1)–(3) мы видим, что величина  $\mathcal{Q}_n$  обладает важным свойством *инвариантности* относительно преобразований  $h_k \rightarrow c(h_k + m)$ ,  $k \geq 1$ , что является весьма ценным качеством этой статистики, делающим ее *непараметрической* (по крайней мере, с точки зрения независимости от значений первых двух моментов распределений величин  $h_k$ ,  $k \geq 1$ ).

3. В том случае, когда  $h_1, h_2, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,  $E h_n = 0$ ,  $D h_n = 1$ , В. Феллер [157] установил, что при больших  $n$

$$E \mathcal{R}_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{1/2} \quad (= 1,2533... \times n^{1/2}) \quad (4)$$

и

$$D \mathcal{R}_n \sim \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \right) n \quad (= 0,07414... \times n). \quad (5)$$

Этот результат проще всего понять, если воспользоваться принципом инвариантности Донскера–Прохорова (см., например, [39], [250]), согласно которому асимптотическое распределение  $\mathcal{R}_n/\sqrt{n}$  совпадает с распределением размаха

$$R^* = \sup_{t \leq 1} B_t^0 - \inf_{t \leq 1} B_t^0 \quad (6)$$

броуновского моста  $B^0 = (B_t^0)_{t \leq 1}$ , который можно определить как процесс

$$B_t^0 \equiv B_t - tB_1, \quad (7)$$

где  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — стандартное броуновское движение (см. § 3а гл. III).

В самом деле, рассмотрим величину

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\sqrt{n}} = \max_{k \leq n} \left[ \frac{H_k}{\sqrt{n}} - \frac{k}{n} \frac{H_n}{\sqrt{n}} \right] - \min_{k \leq n} \left[ \frac{H_k}{\sqrt{n}} - \frac{k}{n} \frac{H_n}{\sqrt{n}} \right]. \quad (8)$$

В соответствии с самой идеей *инвариантности* (иначе говоря, независимости от конкретного вида распределения величины  $h_k$ ) при отыскании предельного распределения  $\mathcal{R}_n/\sqrt{n}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , можно предполагать, что  $h_k$  имеют

стандартное нормальное распределение  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Тогда если  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  есть стандартное броуновское движение, то распределения вероятностей наборов  $\{H_k/\sqrt{n}, k = 1, \dots, n\}$  и  $\{B_{k/n}, k = 1, \dots, n\}$  совпадают, и, значит,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{R}_n}{\sqrt{n}} &\stackrel{d}{=} \max_{\{t: t=\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}} [B_t - tB_1] - \min_{\{t: t=\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}} [B_t - tB_1] \stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} \max_{\{t: t=\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}} B_t^0 - \min_{\{t: t=\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}} B_t^0, \end{aligned} \quad (9)$$

где « $\stackrel{d}{=}$ » означает равенство случайных величин по распределению.

Отсюда становится понятным, что при  $n \rightarrow \infty$  распределение вероятностей  $\mathcal{R}_n/\sqrt{n}$  сходится (слабо) к распределению статистики  $R^*$ . (Отметим, что функция  $(\max - \min)(\cdot)$  является непрерывной на пространстве функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева. Об этом и о слабой сходимости мер на пространстве таких функций см., например, [39], [250, гл. VI], [304, гл. 6].)

Для функции распределения  $F^*(x) = P(R^* \leq x)$  известен явный вид ее плотности  $f^*(x)$  (см. формулу (4.3) в работе [157]):

$$\begin{aligned} f^* = xe''(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \{2k(k-1)[e'((k-1)x) - e'(kx)] + \\ + (k-1)^2 xe''((k-1)x) + k^2 xe''(kx)\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $e(x) = e^{-2x^2}$ . (Ср. также с распределением для  $\tilde{R}_1$  в п. 4 § 2с гл. III.)

Используя эту формулу, нетрудно найти, что

$$E R^* = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad D R^* = \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\right). \quad (11)$$

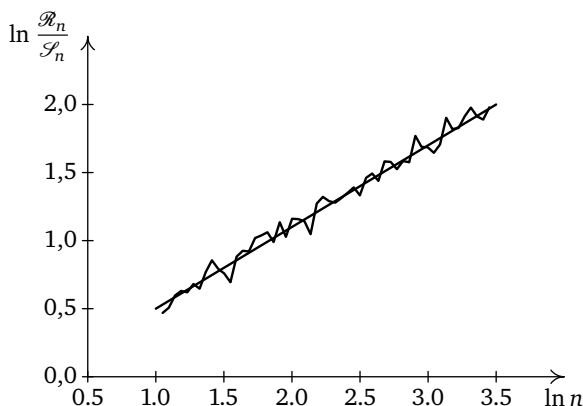
Заметим, между прочим, что  $E \sup_{t \leq 1} |B_t| = \sqrt{\pi/2}$ ; см. § 3b гл. III. Тем самым, средние значения двух статистик  $R^*$  и  $\sup_{t \leq 1} |B_t|$  совпадают.

4. Если предположить независимость и одинаковую распределенность величин  $h_1, h_2, \dots$  с  $E h_i = 0$  и  $D h_i = 1$ , то с вероятностью единица  $\mathcal{S}_n^2 \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow \infty$  (усиленный закон больших чисел). Поэтому предельное распределение  $\mathcal{Q}_n/\sqrt{n}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , будет также совпадать с распределением  $R^*$ .

Распределение  $\mathcal{Q}_n$  не зависит от среднего значения и дисперсии величин  $h_k$ ,  $k \leq n$ . Это «непараметрическое» свойство приводит к следующему критерию, позволяющему (с той или иной степенью надежности) отвергать гипотезу ( $\mathcal{H}_0$ ) о том, что рассматриваемые цены подчиняются схеме случайного блуждания, лежащей в основе классической концепции эффективно функционирующего рынка (см. § 2а, 2е гл. I).

В идейном плане суть этого критерия, основанного на  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -статистике, состоит в следующем (Г. Харст, [236]; [329], [386]).





**Рис. 47.** К иллюстрации  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа  
(случай справедливости гипотезы  $\mathcal{H}_0$ )

Если гипотеза  $\mathcal{H}_0$  верна, то при достаточно больших  $n$  значение  $\mathcal{R}_n/\mathcal{S}_n$  должно быть «близко» к  $E_0 \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} n$ , откуда находим, что

$$\ln \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \approx \ln \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \ln n. \quad (12)$$

(Конечно, этому выражению, как и приводимым ниже соотношениям (13) и (14), нужно и можно придать точный вероятностный смысл, воспользовавшись формулировками предельных теорем. Мы не будем здесь этим заниматься, оставаясь на позициях «разумного» понимания, часто принятого в статистической практике.)

Тем самым, в логарифмической шкале (по обеим осям) значения  $\ln \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$  должны (в случае справедливости гипотезы  $\mathcal{H}_0$ ) «группироваться» вдоль прямой  $a + \frac{1}{2} \ln n$ , где  $a = \ln \sqrt{\pi/2}$  (см. рис. 47).

Это пояснение делает понятной методику  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа: по имеющимся статистическим данным наносим (в логарифмических шкалах) точки  $(\ln n, \ln \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n})$  и по методу наименьших квадратов проводим прямую  $\hat{a}_n + \hat{b}_n \ln n$ . Если окажется, что значение  $\hat{b}_n$  «значимым» образом отличается от  $1/2$ , то гипотезу  $\mathcal{H}_0$  следует отвергнуть. (В соответствии с обыденными приемами статистического анализа нужно, разумеется, уметь рассчитывать, насколько, в случае справедливости гипотезы  $\mathcal{H}_0$ , может быть значимо отклонение  $\hat{b}_n$  от  $1/2$ . Следует отметить, что это не является простой проблемой, поскольку трудно найти распределение статистики  $\mathcal{R}_n/\mathcal{S}_n$  для конечных  $n$ ; кое-что на эту тему будет сказано ниже в п. 6.)

Принципиальное значение исследований Г. Харста состояло в том, что он обнаружил (методами  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа), что вместо естественно ожидаемого

(для Нила и других рек) свойства

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \sim cn^{1/2} \quad (13)$$

оказалось, что на самом деле

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \sim cn^{\mathbb{H}}, \quad (14)$$

где  $\mathbb{H}$  значимым образом больше  $1/2$ .

5. Если экспериментальное исследование приводит к выполнению (несколько неожиданного) свойства (14), то следует задаться вопросом о том, для каких моделей последовательностей  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  такое свойство может иметь место.

Соответствующее объяснение нужно дать и тому факту, что во многих случаях значение параметра  $\mathbb{H} > 1/2$ . (Ниже мы увидим, что одно из объяснений состоит в том, что  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  — это система с *долгой памятью* и положительной корреляцией.)

Приведем по этому поводу ряд наблюдений, основанных, в том числе, и на компьютерных расчетах, а также ряд результатов, относящихся к  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализу, следуя в основном работам [316], [319].

Как правило, для последовательностей  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  со «слабой зависимостью» (марковских, авторегрессионных и т. п.) параметр Харста  $\mathbb{H}$  оказывается близким к  $1/2$ . В этом случае обычно говорят, что система  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  имеет «конечную  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -память».

Если  $h_n = B_{\mathbb{H}}(n) - B_{\mathbb{H}}(n-1)$ ,  $n \geq 1$ , где  $B_{\mathbb{H}} = (B_{\mathbb{H}}(t))_{t \geq 0}$  — фрактальное броуновское движение (§ 2b, гл. III), то оказывается, что асимптотически  $\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n n^{\mathbb{H}}}$  имеет нетривиальное предельное ( $n \rightarrow \infty$ ) распределение, что, в несколько вольной интерпретации, записывают в виде соотношения (14). Тем самым, если статистическое исследование дает  $0 < \mathbb{H} < 1$  и  $\mathbb{H} \neq 1/2$ , то одним из кандидатов для объяснения подобного явления может служить *фрактальный гауссовский шум*.

Напомним (см. § 2с в гл. III), что для такого шума корреляция положительна, если  $\mathbb{H} > 1/2$ , и отрицательна, если  $\mathbb{H} < 1/2$ . Это обстоятельство объясняет, почему в первом случае говорят о наличии *сохранения тенденции движения* («настойчивость», «persistence»; если в системе произошло возрастание, то велики шансы, что это возрастание будет продолжаться), «сильной памяти», «сильного последействия».

В работе [386] подчеркивается, что бытовавшее в литературе мнение, что в финансовых временных рядах наблюдается лишь случай  $\mathbb{H} > 1/2$ , не соответствует действительности. Случай  $\mathbb{H} < 1/2$  также имеет место, и он наблюдается в поведении величин возврата волатильности (см. п. 5 в § 2d гл. III и п. 3 в § 4b), характеризуемом сильной перемежаемостью («антинастойчивостью», «antipersistence») в значениях последовательности  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ .

6. Как уже отмечалось выше, при использовании  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа для определения параметра  $\mathbb{H}$  в гипотетической зависимости (14) нужно, конечно, определить, насколько сделанные выводы о значении  $\mathbb{H}$  согласуются с моделью.

Иначе говоря, возникает обычный вопрос о надежности статистических выводов, в связи с чем и приходится обращаться к «критериям согласия», «критериям значимости» и т. п. из математической статистики. В этой связи следует отметить, что сложность статистики  $\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$  не дает возможности найти удовлетворительные формулы для ее вероятностных распределений при разных значениях  $n$  даже в предположении справедливости «нулевой» гипотезы  $\mathcal{H}_0$ . (Впрочем, в работе [8] рассматривается вопрос о поведении среднего значения  $E_0 \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ , где усреднение  $E_0$  отвечает предположению о справедливости гипотезы  $\mathcal{H}_0$ .)

Отмеченная сложность объясняет широкое использование методов Монте-Карло (см., например, [317], [329], [385], [386]) в  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализе, и, в частности, для определения того, насколько этот анализ дает удовлетворительное оценивание неизвестного значения  $\mathbb{H}$ .

7. При подгонке теоретических моделей к реальным статистическим данным естественно начинать с простых схем, легко поддающихся аналитическому исследованию. В этом отношении при описании вероятностной структуры последовательностей  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  вполне естественно предположение о том, что это есть фрактальный гауссовский шум с параметром  $0 < \mathbb{H} < 1$ . В том случае, когда  $\mathbb{H} = 1/2$ , мы получаем обычный белый гауссовский шум, лежащий в основе построения многих как линейных (AR, MA, ARMA), так и нелинейных (ARCH, GARCH) моделей.

$\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ дает хорошие результаты в моделях, где последовательность  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  является последовательностью типа фрактального гауссовского шума (см. [317], [329], [385], [386]). При применении этого метода к иным моделям целесообразно, помимо рассмотрения статистик  $\mathcal{Q}_n \equiv \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ , введение статистик

$$\mathcal{V}_n = \frac{\mathcal{Q}_n}{\sqrt{n}}, \quad (15)$$

простой визуальный анализ которых часто приводит к весьма содержательным статистическим выводам.

Основан этот анализ на той идее, что в случае белого шума ( $\mathbb{H} = 1/2$ ) при больших  $n$  статистика  $\mathcal{V}_n$  должна стабилизироваться ( $\mathcal{V}_n \rightarrow c$ , где  $c$  — некоторая константа, а сходимость понимается в том или ином подходящем вероятностном смысле).

Если же  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  — фрактальный гауссовский шум с  $\mathbb{H} > 1/2$ , то значения  $\mathcal{V}_n$  должны расти (с ростом  $n$ ), и, наоборот,  $\mathcal{V}_n$  должны убывать, если  $\mathbb{H} < 1/2$ .

Имея это в виду, обратимся к простейшей модели — авторегрессионной модели первого порядка (AR(1))

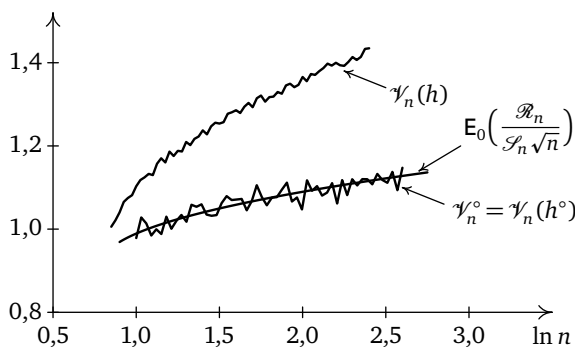
$$h_n = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \quad (16)$$

поведение которой полностью определяется «шумовыми» величинами  $\varepsilon_n$  и начальным значением  $h_0$ .

Если для этой модели образовать (по значениям  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ ) величины  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_n)_{n \geq 1}$ , то можно заметить, что они растут с ростом  $n$ . Но это вовсе не означает, что мы имеем модель типа фрактального гауссовского шума с  $\mathbb{H} > 1/2$ , по той простой причине, что этот рост может быть, в принципе, обусловлен не *фрактальностью* последовательности  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ , а наличием *линейной зависимости* в формуле (16).

Поэтому при выяснении «стохастической» природы последовательности  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  естественно оперировать не с величинами  $h = (h_n)_{n \geq 1}$ , а с линейаризованными величинами  $h^0 = (h_n^0)_{n \geq 1}$ , где  $h_n^0 = h_n - (a_0 + a_1 h_{n-1})$  и  $a_0$  и  $a_1$  — некоторые оценки, вообще говоря, неизвестных параметров  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ .

Если, к примеру, промоделировать величины  $h = (h_n)_{n \geq 1}$  согласно формуле (16), с белым гауссовским шумом  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ , то мы найдем, что новые величины  $\mathcal{V}_n^\circ = \mathcal{V}_n(h^\circ)$ , построенные по  $h^\circ = (h_n^0)_{n \geq 1}$ , ведут себя именно так, как это должно быть для фрактального гауссовского шума с  $\mathbb{H} = 1/2$ . Следующий рисунок качественно иллюстрирует описанные явления:



**Рис. 48.** Статистики  $\mathcal{V}_n(h)$ ,  $\mathcal{V}_n^\circ = \mathcal{V}_n(h^\circ)$  для модели AR(1). Математическое ожидание  $E_0\left(\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n \sqrt{n}}\right)$  подсчитывается при гипотезе  $\mathcal{H}_0$

Если рассматривать *линейные* модели MA(1), ARMA(1, 1), то в качественном отношении сохраняется (см. [386, гл. 5]) картина, представленная на рис. 48.

В случае же нелинейных моделей ARCH, GARCH наблюдается иное поведение реализаций  $\mathcal{V}_n(h)$  и  $\mathcal{V}_n(h^\circ)$  по отношению к  $E_0\left(\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n \sqrt{n}}\right)$ ,  $n \geq 1$  (см. рис. 49). Во-первых,  $\mathcal{V}_n(h)$  и  $\mathcal{V}_n(h^\circ)$  ведут себя довольно-таки сходным образом, что можно интерпретировать как отсутствие линейной зависимости между ве-

личинами  $h_n$ . Во-вторых, при не очень больших  $n$  графики  $\mathcal{V}_n(h)$  и  $\mathcal{V}_n(h^\circ)$  идут несколько выше кривой  $E_0\left(\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n\sqrt{n}}\right)$ ,  $n \geq 1$ , отвечающей белому шуму, что можно трактовать как наличие «несильной настойчивости» в формировании величин  $(h_n)_{n \geq 1}$ . В-третьих, с ростом  $n$  начинает проявляться эффект «антинастойчивости».

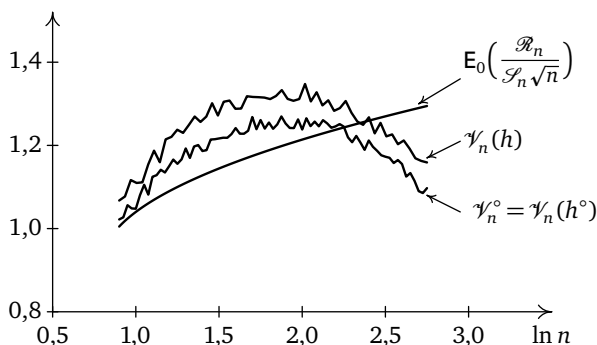


Рис. 49. Статистики  $\mathcal{V}_n(h)$  и  $\mathcal{V}_n^\circ = \mathcal{V}_n(h^\circ)$  для модели ARCH(1)

**Замечание.** Эта терминология («настойчивость», «антинастойчивость» и т. д.) правильно отражает суть дела в моделях типа фрактального гауссовского шума. Однако ARCH, GARCH и родственные им нелинейные модели (§ 3а, 3б гл. II) не являются ни фрактальными, ни автомодельными. Тем самым, требуется более тщательный анализ для объяснения обнаруживаемого эффекта типа «антинастойчивости» в этих моделях. Это тем более важно, так как описанные и линейные, и нелинейные модели весьма популярны при анализе финансовых временных рядов и необходимо понимание того, какие локальные и глобальные временные свойства реальных данных могут «ухватываться» этими моделями.

8. В § 2а гл. I говорилось, что исходной идеей М. Кендалла [269] при анализе цен акций и товаров было желание выявить в их поведении цикличность и наличие трендов.

Аналитики рынка, в особенности, представители «технического анализа» (§ 2е гл. I), исходят прежде всего из того, что на рынке должна быть определенная цикличность, что на нем должны быть тренды, что динамика рынка носит ритмический характер.

Эти обстоятельства объясняют, почему при анализе финансовых рядов столь много внимания уделяется отысканию сходных, похожих участков в реализациях, для того чтобы использовать обнаруживаемую аналогию в их поведении для предсказания будущего движения цен.

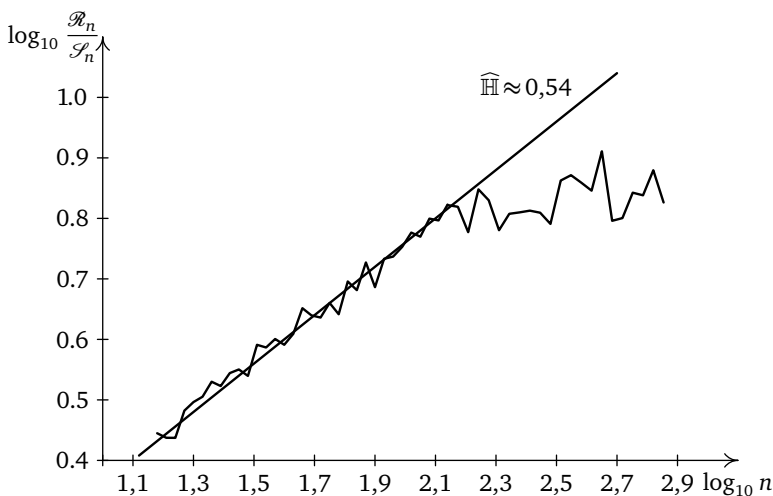
Статистический  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ оказался весьма эффективным методом не только для обнаружения описанных выше эффектов «последствия», «силь-

ной памяти», «настойчивости» и «антинастойчивости», но и для обнаружения *периодических и непериодических циклов*. (См., например, [317], [319], [329], [385], [386].)

Классическим примером системы, где весьма четко видна непериодическая цикличность, является *солнечная активность*.

Как известно, удобным показателем этой активности являются *числа Вольфа*, составленные по числу «черных» пятен на поверхности Солнца. Соответствующие месячные данные имеются примерно за 150 лет, и простой визуальный анализ явным образом выявляет наличие 11-летнего цикла.

Результаты  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа чисел Вольфа [385, с. 78] схематически представлены на рис. 50.



**Рис. 50.**  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ чисел Вольфа ( $n = 1$  месяц,  $2,12 = \log_{10}(12 \cdot 11)$ ,  $h_n = x_n - x_{n-1}$ ,  $x_n$  — месячные числа Вольфа)

Оценка  $\hat{\mathbb{H}}$  параметра  $\mathbb{H}$  приводит к величине 0,54, что свидетельствует о некоторой тенденции в сохранении активности («настойчивости»). Из рис. 50 также четко видно, что в окрестности 11 лет картина поведения  $\ln\left(\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}\right)$  резко меняется — происходит стабилизация значений  $\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ , что можно объяснить наличием (одиннадцатилетнего) цикла солнечной активности. В самом деле, при наличии периодической или непериодической цикличности величина размаха на втором, третьем и т. д. циклах не может сильно возрасти по сравнению с той величиной, которая была получена на первом цикле. Точно так же и эмпирическая дисперсия, как правило, стационаризуется. Все это объясняет, почему  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ пригоден для обнаружения циклических эффектов феноменов типа солнечной активности.

В заключение отметим, что при анализе статистических динамических систем обычно приходится иметь дело с двумя видами шумов: с «внутренним

шумом» систем, собственно и определяющим их статистический характер (такова, например, стохастическая природа солнечной активности), и «внешним шумом», являющимся, как правило, аддитивным шумом, возникающим в связи с ошибками измерений (например, при подсчете «черных пятен» кластеры из небольших пятен считаются за одно «пятно»).

Имея в виду эти обстоятельства, следует подчеркнуть, что  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ является робастным по отношению к «внешнему шуму», что дополнительно делает его весьма эффективным методом исследования «внутренней» стохастической природы изучаемых статистических динамических систем.

#### § 4b. $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ некоторых финансовых временных рядов

1. Получив некоторое представление о том, как «работает»  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ для фрактальных, линейных и нелинейных моделей, а также о том, как он может применяться к вопросам цикличности, естественно попытаться применить его к конкретным временным финансовым рядам (индексы Dow, S&P 500, цены акций, облигаций, обменные курсы).

Мы уже не раз подчеркивали и еще раз отмечаем, что при анализе финансовых данных крайне важно указывать тот временной интервал  $\Delta$ , через который инвесторы, трейдеры или другие агенты считают данные. Поэтому, в соответствии с обозначениями § 2b, мы будем четко указывать временной интервал  $\Delta$  и обозначать через  $\tilde{h}_t$  величины  $h_{t\Delta} = \ln \frac{S_{t\Delta}}{S_{(t-1)\Delta}}$ , где  $S_t$  — значение интересующего нас финансового показателя в момент  $t$ .

**Замечание.** Обширный материал относительно применений  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа к временным рядам, в том числе и финансовым, содержится в работах [317], [323], [325], [327], [329] и в более поздних публикациях [385], [386]. Приводимое далее сжатое изложение результатов соответствующего анализа следует в основном к нигам [385] и [386].

**2. Индекс Dow** (DJA; см. п. 6 в § 1b гл. I; статистические данные публикуются в «The Wall Street Journal» с 1888 г.). Будем предполагать, что  $\Delta = 1$  день, 5 дней, 20 дней. Следующая таблица резюмирует результаты  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализа:

$\Delta$	Число наблюдений $N$	Оценка $\widehat{\mathbb{H}}_N$	Цикличность (дн.)
1 дн.	12 500	0,59	1 250
5 дн.	2 600	0,61	1 040
20 дн.	650	0,72	1 040

Если рассматривать поведение статистики  $\mathcal{V}_n$ , то можно заметить, что ее значения сначала растут с ростом  $n$ , а затем (в случае  $\Delta = 20$  дней) при  $n = 52$  (т. е. через 1040 дней) этот рост прекращается, что указывает на наличие цикличности в данных.

В случае анализа дневных данных ( $\Delta = 1$  день) статистика  $\mathcal{V}_n$  растет примерно до  $n = 1250$  дней, после чего ее поведение стационаризуется, что (ср. с рис. 49 в §4а) указывает на появление цикла (длительностью около четырех лет; это связывается обычно с четырехлетним периодом между президентскими выборами в США).

**3. Индекс S&P 500** (см. п. 6 в § 1b гл. I; п. 2 в § 2d этой главы) имеет «тиковую» структуру и для него имеется довольно-таки большая база данных. Анализ месячных данных ( $\Delta = 1$  мес.) за период с января 1950 г. по июль 1988 г. показывает [385, гл. 8], как и в случае индекса Dow, наличие примерно четырехлетней цикличности.

Более тонкий  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ с  $\Delta = 1$  мин., 5 мин. и 30 мин. (по данным с 1989 г. по 1992 г.; [386, гл. 9]) приводит к таким значениям оценок  $\hat{\mathbb{H}}$  параметра Харста:

$$\hat{\mathbb{H}} = 0,603, 0,590 \text{ и } 0,653, \quad (1)$$

что свидетельствует о тенденции «настойчивости» в движении индекса S&P 500.

Интересно отметить, что переход от величин

$$\tilde{h}_n = \ln \frac{\tilde{S}_n}{\tilde{S}_{n-1}}, \quad \tilde{S}_n = S_{n\Delta},$$

к линейно скомпенсированным значениям

$$h_n^\circ = \tilde{h}_n - (a_0 + a_1 \tilde{h}_{n-1})$$

показывает, что соответствующие значения оценок для  $\mathbb{H}$  уменьшаются (ср. с (1)):

$$\hat{\mathbb{H}} = 0,551, 0,546 \text{ и } 0,594,$$

что практически близко к тем средним значениям  $E_0 \hat{\mathbb{H}}(0,538, 0,540, 0,563)$ , которые находятся по тому же самому числу наблюдений в предположении справедливости гипотезы  $\mathcal{H}_0$ .

Все это говорит о том, что, видимо, на коротких временных интервалах традиционные линейные модели (даже такие простые, как  $AR(1)$ ) могут хорошо описывать в первом приближении поведение индекса S&P 500.

Это обстоятельство может служить объяснением довольно-таки распространенного мнения об авторегрессионном характере высокочастотных внутрисуточных данных и того, что «внутрисуточные» трейдеры больше реагируют на результат последнего тика, нежели учитывают «долгую память» о предшествующих значениях для вынесения своих решений. Эта картина, однако, начинает меняться с увеличением временного интервала  $\Delta$ , определяющего «разрешающую» способность трейдеров. В частности,  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ, скажем, для  $\Delta = 1$  мес., четко показывает наличие фрактальной структуры, проявляющейся в том, что значение  $\hat{\mathbb{H}}$ , подсчитанное по 48 меся-



цам, довольно-таки велико:  $\widehat{\mathbb{H}} \approx 0,78$  (по данным с января 1963 г. по декабрь 1989 г.; [385, гл. 8]).

Как уже объяснялось выше, большие значения параметра Харста свидетельствуют о наличии «настойчивости», которая может приводить к трендам и циклам.

В рассматриваемом случае даже простой визуальный анализ величин  $\mathcal{Y}_n$  четко показывает (ср. с рис. 49 в § 4а) наличие четырехлетнего цикла (48 месяцев), что объясняют, так же как и в случае индекса Dow, сменой экономических циклов, вызванной президентскими выборами в США.

Уместно будет сейчас также напомнить (см. § 3а), что для дневных данных индекса S&P 500 величины  $\widehat{r}_n = \ln \frac{\widehat{\sigma}_n}{\widehat{\sigma}_{n-1}}$ , где эмпирическая дисперсия  $\widehat{\sigma}_n$  определяется по формуле (8) из § 3а, статистический  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ (по данным с 1 января 1928 г. по 31 декабря 1989 г.; [386, гл. 10]) показывает, что оценочное значение параметра Харста равно примерно 0,31, что значительно меньше 1/2 и указывает на наличие эффекта «антинастойчивости». Визуально это сказывается в том, что величины  $\widehat{r}_n$  обладают свойством быстрой перемежаемости. Иначе говоря, в каждый момент времени  $n$  система «помнит», что если значение  $\widehat{\sigma}_n$  оказалось больше  $\widehat{\sigma}_{n-1}$ , то в следующий момент времени значение  $\widehat{\sigma}_{n+1}$  должно быть с большой долей правдоподобия меньше  $\widehat{\sigma}_n$ .

**4.  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ для акций** позволяет не только определять их фрактальную структуру и выявлять наличие цикличности, но и производить для них сравнение с точки зрения их *рискованности*. Согласно данным, приведенным в работе [385, гл. 8], параметр Харста  $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\cdot)$  и длительность цикла  $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\cdot)$  в месяцах для индекса S&P 500 и ряда входящих в этот индекс компаний имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\text{S\&P 500}) &= 0,78, & \mathbb{C}(\text{S\&P 500}) &= 46, \\ \mathbb{H}(\text{IBM}) &= 0,72, & \mathbb{C}(\text{IBM}) &= 18, \\ \mathbb{H}(\text{Apple Computer}) &= 0,75, & \mathbb{C}(\text{Apple Computer}) &= 18, \\ \mathbb{H}(\text{Consolidated Edison}) &= 0,68, & \mathbb{C}(\text{Consolidated Edison}) &= 0,90. \end{aligned}$$

Как мы видим, сам индекс S&P 500 имеет параметр Харста, больший, нежели для составляющих его компаний. Видим также, что у Apple Computer параметр  $\mathbb{H}$  довольно высок (0,75) и заведомо больше, чем, скажем, у Consolidated Edison.

Отметим теперь, что при  $\mathbb{H} = 1$  (стандартное) фрактальное броуновское движение имеет вид  $B_1(t) = t\xi$ , где  $\xi$  — тоже нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. У этого процесса  $B_1 = (B_1(t))_{t \geq 0}$  вся «случайность» определяется величиной  $\xi$ , и ясно, что в классе всех фрактальных броуновских движений с параметром  $\mathbb{H} \in (0, 1]$  этот процесс является наименее «зашумленным». Тем самым, становится понятным, что при  $\mathbb{H} \uparrow 1$  шумовая компонента у процессов  $B_{\mathbb{H}}$  стано-

вится «все меньше», а это находит свою «финансовую» интерпретацию в том, что модели, привлекающие для своего описания такие процессы, становятся (при  $\mathbb{H} \uparrow 1$ ) «менее рискованными». (Сформулированному утверждению об уменьшении шумовой компоненты можно придать строгий смысл в рамках слабой сходимости процессов  $B_{\mathbb{H}}$  к  $B_1$  при  $\mathbb{H} \uparrow 1$ . Также заметим, что корреляционные функции  $\rho_{\mathbb{H}}(n) = E h_k h_{n+k}$  при  $\mathbb{H} > 1/2$  положительны («настойчивость» в сохранении тенденции движения) и  $\rho_{\mathbb{H}}(n) \rightarrow 1$  для всех  $n$  при  $\mathbb{H} \uparrow 1$ .)

В работе [385] отмечается, что такая интерпретация (в терминах слабой сходимости) особенно привлекательна тогда, когда у рассматриваемых процессов большой параметр Харста  $\mathbb{H}$ , но дисперсия, лежащая в основе понятий риска, не определена.

Тот же факт, что у самого индекса S&P 500 параметр  $\mathbb{H}$  большой, и, следовательно, оперирование с ценными бумагами, основанными на этом индексе, менее рискованно, нежели с акциями компаний, естественно объясняется диверсификацией (см. § 2b гл. I), уменьшающей шумовой фактор.

**Замечание 1.** Подчеркнем, что «меньший риск» здесь понимается как «меньший шум», «большая настойчивость», проявляющаяся в стремлении сохранить направление движения. Однако следует подчеркнуть и то, что в системах с большим  $\mathbb{H}$  присутствует возможность *резкой смены направления движения*. Так что вслед за серией длинных подъемов случаются и серии долгих спадов.

**Замечание 2.** Возвращаясь к данным значений  $\mathbb{H}$  и  $\mathbb{C}$  для разных акций, следует отметить следующее наблюдение, сделанное в книге [385]: *высокий уровень инноваций компаний, как правило, приводит к большим значениям  $\mathbb{H}$  и коротким циклам; низкому же уровню инноваций отвечают малые значения  $\mathbb{H}$  и длинные циклы.*

**5. Облигации (bonds).**  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ месячных данных тридцатилетнего T-Bond (Treasury Bond, США) за период с января 1950 г. по декабрь 1989 г. (см. [385, гл. 8]) также дает довольно-таки высокий уровень параметра фрактальности  $\widehat{\mathbb{H}} \approx 0,68$  с цикличностью примерно в пять лет.

**6. Обменные курсы валют.** Есть большие различия между обменными курсами валют и между такими финансовыми показателями, как индексы Dow, S&P 500, цены акций, облигаций и др.

Дело в том, что, скажем, покупка или продажа акций напрямую связаны с *инвестированием* в ту область, к которой относятся эти ценные бумаги. Иное дело валюта — ее покупка или продажа направлена на создание *возможностей* для последующего расширения производства, потребления и т. п. К тому же обмен больших партий валют затрагивает по крайней мере две страны, существенно определяется их экономическим и политическим состоянием, во многом зависит от действий центральных банков (таких как, скажем, интервенции, изменение процентных ставок и др.).

Эти факторы, конечно, накладывают свой отпечаток на статистические свойства обменных курсов, на их динамику.

Одной из важных характеристик, позволяющих судить о степени изменчивости обменных курсов, является  $\Delta$ -волатильность, определяемая посредством приращений  $|H_{k\Delta} - H_{(k-1)\Delta}|$ , где  $H_t = \ln \frac{S_t}{S_0}$  и  $S_t$  — значение обменного курса (см., например, формулу (5) в § 1с).

В этой связи следует подчеркнуть, что рассмотренные выше статистики  $\mathcal{R}_n$  и  $\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$  также по своему смыслу являются характеристиками изменчивости, «размаха» процесса  $H = (H_t)_{t \geq 0}$ , и поэтому не удивительно, что  $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ также обнаруживает многие уже описанные в предшествующих разделах свойства обменных курсов.

В отличие от финансовых показателей типа индексов Dow, S&P 500, в эволюции обменных курсов четко прослеживается фрактальная структура (по крайней мере, для малых  $\Delta > 0$ ) и тенденция ее сохранения со временем.

Обнаруживается это простым анализом поведения статистик  $\ln \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$  как функций от  $\ln n$  с применением метода наименьших квадратов, который показывает, что значения  $\ln \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ ,  $n \geq 1$ , хорошо группируются вдоль прямой  $c + \widehat{\mathbb{H}} \ln n$ , где параметр  $\widehat{\mathbb{H}}$  для большинства валют имеет значение заведомо большее, нежели  $1/2$ . Так, для обменного курса японской иены по отношению к доллару  $\widehat{\mathbb{H}}(\text{JRY/USD}) \approx 0,64$ . Аналогично,  $\widehat{\mathbb{H}}(\text{DEM/USD}) \approx 0,64$ ,  $\widehat{\mathbb{H}}(\text{GBP/USD}) \approx 0,61$ .

Все это говорит о том, что эти обменные курсы обладают фрактальной структурой с довольно-таки большим значением параметра Харста. В этой связи полезно напомнить, что для фрактального броуновского движения  $E H_t^2$  растет как  $|t|^{2\mathbb{H}}$ . Поэтому при  $\mathbb{H} > 1/2$  разброс в значениях  $|H_t|$  больше, нежели для обычного броуновского движения, что, конечно, *значительно увеличивает риск операций* с валютами с ростом времени. Видимо, это объясняет, почему в случае валют предпочтение отдается не долгосрочным операциям, а активному краткосрочному трейдингу.

# Литература

- [1] *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover, 1968.
- [2] Adaptive Computational Methods in Finance and Trading. Report of the Intertek Group. Foreword by R. B. Olsen Zürich: «Olsen and Associates», Research Institute for Applied Economics, December, 1994.
- [3] *Admati A. R., Pfleiderer P.* A theory of intraday trading patterns // Review of Financial Studies. 1988. V. 1. P. 3—40.
- [4] *Akgiray V., Booth G. G.* The stable-law model of stock returns // Journal of Business and Economic Statistics. 1988. V. 6. P. 51—57.
- [5] *Александров П. С., Хинчин А. Я.* Андрей Николаевич Колмогоров (к пятидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1953. Т. 8, № 3. С. 178—200.
- [6] *Andersen L., Andreasen J., Brotherton-Ratcliffe R.* The Passport Option. Preprint Aarhus: Aarhus University, February, 1997.
- [7] *Andersen T., Bollerslev T.* Intraday Seasonality and Volatility Persistence in Foreign Exchange and Equity Markets. Working paper №193. Evanston, IL: Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, 1994.
- [8] *Anis A. A., Lloyd E. H.* The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands // Biometrika. 1976. V. 63, № 1. P. 111—116.
- [9] *Ansel J.-P., Stricker C.* Couverture des actifs contingents et prix maximum // Annales de l'Institut Henri Poincaré. 1994. V. 30, № 2. P. 303—315.
- [10] *Ansel J.-P., Stricker C.* Quelques remarques sur un théorème de Yan // Lecture Notes in Mathematics. 1990. V. 1426. P. 226—274.
- [11] *Аркин В. И., Евстигнеев И. В.* Вероятностные модели управления и экономической динамики. М.: Наука, 1979.
- [12] *Bachelier L.* Théorie de la spéculation // Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 1900. V. 17 P. 21—86. (Англ. перев.: [77].)
- [13] *Baillie R., Bollerslev T.* Intra-day and inter market volatility in foreign exchange rates // Review of Economic Studies. 1990. V. 58. P. 565—585.
- [14] *Baillie R., Bollerslev T.* The daily message in exchange rates: a conditional variance tale // Journal of Business and Economic Statistics. 1989. V. 7. P. 297—305.
- [15] *Baillie R. T., Bollerslev T., Mikkelsen H.-O.* Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Working paper №168. Evanston, IL: Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, 1993 // Journal of Econometrics. 1996. V. 74. № 1.
- [16] *Baker G. L., Golub J. P.* Chaotic Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [17] *Balakrishnan V., Nicolis C., Nicolis G.* Extreme Value Distributions in Chaotic Dynamics. Preprint ULB—Cenoli, № 95-1 Bruxelles: Centre for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, January, 1995.

- [18] *Ball C. A.* A review of stochastic volatility models with application to option pricing // *Financial Markets, Institutions and Instruments*. 1993. V. 2, № 5. P. 55–69.
- [19] *Ball C. A., Torous W. N.* Bond price dynamics and options // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 1983. V. 18. P. 517–531.
- [20] *Barlow M. T.* One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution // *Journal of the London Mathematical Society*. V. 26. P. 335–347. 1982.
- [21] *Barndorff-Nielsen O. E.* Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size // *Proceedings of the Royal Society. London. Ser. A*. 1977. V. 353. P. 401–419.
- [22] *Barndorff-Nielsen O. E.* Gaussian/Inverse Gaussian Processes and the Modeling of Stock Returns. Preprint. Aarhus: Aarhus University, October, 1994.
- [23] *Barndorff-Nielsen O. E.* Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae // *Scandinavian Journal of Statistics*. 1978. V. 5. P. 151–157.
- [24] *Barndorff-Nielsen O. E.* Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling. Preprint. Aarhus: Aarhus University, Dept. of Mathematical Sciences, March 5, 1996.
- [25] *Barndorff-Nielsen O. E., Blæsild P.* Hyperbolic distributions and ramifications: contributions to theory and application // *Statistical Distributions in Scientific Work*, V. 4 / Eds. C. Taillie et al. Dordrecht: Reidel, 1981. P. 19–44.
- [26] *Barndorff-Nielsen O. E., Jensen J. L., Sørensen M.* Wind shear and hyperbolic distributions // *Boundary-Layer Meteorology*. 1989. V. 49. P. 417–431.
- [27] *Barnea A., Downes D.* A reexamination of the empirical distribution of stock price changes // *Journal of American Statistical Association*. 1973. V. 68. P. 348–350.
- [28] *Barone-Adesi G., Elliott R.* Approximations for the values of American options // *Stochastic Analysis and Applications*. 1991. V. 9, № 2. P. 115–131.
- [29] *Barone-Adesi G., Whaley R. E.* Efficient analytic approximation of American option values // *Journal of Finance*. 1987. V. 42, № 2. P. 301–320.
- [30] *Basseville M., Nikiforov I.* Detection of Abrupt Changes. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [31] *Baxter M., Rennie A.* Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1996.
- [32] *Beibel M., Lerche H. R.* A New Look at Warrant Pricing and Related Optimal Stopping Problems. Preprint. Freiburg i. Br.: Universität Freiburg, Institut für Mathematische Stochastik, 1995.
- [33] *Bensoussan A.* On the theory of option pricing // *Acta Applicandae Mathematicae*. 1984. V. 2 P. 139–158.
- [34] *Benveniste A., Métivier M., Priouret P.* Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [35] *Bernstein P. L.* Capital Ideas. New York: The Free Press, 1992.
- [36] *Björk T.* Interest Rate Theory. Working paper № 72 Stockholm School of Economics 1996.

- [37] Björk T., Di Masi G., Kabanov Yu., Runggaldier W. Towards a general theory of bond markets // *Finance and Stochastics*. 1997. V. 2, № 1. P. 141–174.
- [38] Björk T., Kabanov Yu., Runggaldier W. Bond market structure in the presence of marked point processes // *Mathematical Finance*. 1997. V. 7, № 2. P. 211–239.
- [39] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [40] Bishop G. W., Jr. Charles H. Dow and the Dow Theory. New York: Appleton-Century-Crofts, 1960.
- [41] Black F. The holes in Black–Scholes // *RISK-magazin*. March, 1988.
- [42] Black F. T., Derman E., Toy W. A one-factor model of interest rate and its application to Treasury bond options // *Financial Analysts Journal*. 1990. P. 33–39.
- [43] Black F., Karasinski P. Bond and option pricing when short rates are lognormal // *Financial Analysts Journal*. 1991. P. 52–59.
- [44] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // *Journal of Political Economy*. 1973. V. 81, № 3. P. 637–659.
- [45] Благовещенский Ю. Н., Легостаева И. Л. Параметрические границы для непараметрического тренда // *ДАН СССР*. 1982. Т. 264, № 4. С. 791–794.
- [46] Blattberg R. C., Gonedes N. J. A comparison of the stable and the Student distributions as statistical models for stock prices // *Journal of Business*. 1974. V. 47. P. 244–280.
- [47] Bochner S. Subordination of non-Gaussian processes // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. 1962. V. 48. P. 19–22.
- [48] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // *Journal of Econometrics*. 1986. V. 31. P. 307–327.
- [49] Boness A., Chen A., Jatusipitak S. Investigations of nonstationary prices // *Journal of Business*. 1974. V. 47. P. 518–537.
- [50] Буренин А. Н. Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. М.: Тривола, 1995.
- [51] Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
- [52] Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman D. A., Jones D. A., Nesbitt C. J. *Actuarial Mathematics*. Itasca, IL: Society of Actuaries, 1986.
- [53] Box G. E. P., Jenkins G. M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control* San Francisco: Holden Day, 1970.
- [54] Brace A., Musiela M. A multifactor Gauss–Markov implementation of Heath, Jarrow and Morton // *Mathematical Finance*. 1994. V. 4, № 3. P. 259–283.
- [55] Brealey R. A., Myers S. C. *Principles of Corporate Finance*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [56] Brennan M., Schwartz E. S. A continuous time approach to the pricing of bonds // *Journal of Banking and Finance*. 1979. V. 3. P. 133–155.
- [57] Brennan M., Schwartz E. S. The valuation of American put options // *Journal of Finance*. 1977. V. 32. P. 449–462.
- [58] Brock W. A., Dechert W. D., Scheinkman J.-A. A Test for Independence Based on the Correlation Dimension. SSRN Working paper № 8702. University of Wisconsin-Madison, Dept. of Economics, 1987.

- [59] Brock W. A., Hsieh D. A., Le Baron B. Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.
- [60] Brock W. A., Potter S. M. Diagnostic testing for nonlinearity, chaos, and general dependence in time-series data // Nonlinear Modeling and Forecasting (Proceedings of a Workshop on Nonlinear Modeling and Forecasting, September 1990, Santa Fe, New Mexico) / Eds. M. Casdagli and S. Enbank. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1990. P. 137–159.
- [61] Brock W. A., Sayers C. L. Is the business cycle characterized by deterministic chaos? // Journal of Monetary Economics. 1988. V. 22. P. 71–90.
- [62] Brockwell P. J., Davis R. A. Time Series: Theory and Methods. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [63] Brousseau V., Czarnecki M. O. Modelling Exchange Rates: the Stable Model. Preprint. Paris: Ecole Polytechnique, August 16, 1994.
- [64] Burnham J. B. Current Structure and Recent Developments in Foreign Exchange Markets // Recent Developments in International Banking and Finance / Ed. S. J. Khonry Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., North-Holland, 1991. P. 123–163.
- [65] Бизнес: Оксфордский толковый словарь. М.: Прогресс-Академия 1995. (Перевод с англ.: A Concise Dictionary of Business. Market House Books, Ltd., 1991.)
- [66] Carr P., Jarrow R., Myneni R. Alternative characterizations of American put options // Mathematical Finance. 1992. V. 2, № 2. P. 87–106.
- [67] Chernoff H. Sequential tests for the mean of a normal distribution // Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. 1. Univ. of California Press, 1961. P. 79–92.
- [68] Четыркин Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Бизнес Речь, Дело, 1992.
- [69] Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F., Sanders A. B. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rates // Journal of Finance. 1992. V. 47, № 3. P. 1209–1227.
- [70] Chen L. A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates. Preprint. Washington, USA: Federal Reserve Board, July, 1995.
- [71] Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics / Eds. P. Chen and R. H. Day. Oxford: Oxford University Press, 1993.
- [72] Choi J. Y., Salandro D., Shastri K. On the estimation of bid-ask spreads: Theory and evidence // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1988. V. 23, P. 219–230.
- [73] Chou C. S. Caractérisation d'une classe de semimartingales // Lecture Notes in Mathematics. 1979. V. 721. P. 250–252.
- [74] Chou C. S., Meyer P.-A., Stricker C. Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés // Lecture Notes in Mathematics. 1980. V. 784. P. 128–139.
- [75] Chow Y. S., Robbins H., Siegmund D. Great Expectations: The Theory of Opti-

- mal Stopping. Boston: Houghton Mifflin Comp., 1971.
- [76] *Ciesielski Z.* Hölder conditions for realizations of Gaussian processes // Transactions of the American Mathematical Society. 1961. V. 99. P. 403–413.
- [77] *Clark J. M. C.* The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals // Annals of Mathematical Statistics. 1970. V. 41, № 4. P. 1282–1295. Correction *ibid* 1971. V. 42. P. 1778.
- [78] The Random Character of Stock Market Prices. / Ed. Cootner P.H. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.
- [79] *Copeland T., Weston J.* Financial Theory and Corporate Policy. 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1988.
- [80] *Cox J. C., Ingersoll J. E., Jr., Ross S. A.* An analysis of variable rate loan contracts // Journal of Finance. 1980. V. 35. P. 389–403.
- [81] *Cox J. C., Ingersoll J. E., Jr., Ross S. A.* A theory of the term structure of interest rates // Econometrica. 1985. V. 53, № 2. P. 385–407.
- [82] *Cox J. C., Ross R. A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // Journal of Financial Economics. 1979. V. 7, № 3. P. 229–263.
- [83] *Cox J. C., Rubinstein M.* Options Markets. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985.
- [84] *Cowles A.* Can stock market forecasters forecast? // Econometrica. 1933. V. 1. P. 309–324.
- [85] *Cowles A.* Stock Market Forecasting // Econometrica. 1944. V. 12, № 3/4. P. 206–214.
- [86] *Cowles A., Jones H. E.* Some a posteriori probabilities in stock market action // Econometrica. 1937. V. 5. P. 280–294.
- [87] *Cummins S. D., Geman H.* An Asian option approach to the valuation of insurance futures contracts // Review of Futures Markets. 1994. V. 13. P. 517–557.
- [88] *Czarnecki M. O.* Modelisation des cours boursiers: le modèle stable (utilisation pratique et pricing d'option). Preprint. Paris: Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, 24 juin 1994.
- [89] *Dacorogna M. M., Müller U. A., Embrechts P., Samorodnitsky G.* Moment Condition for the *HARCH(k)* Models. Preprint. Zürich: «Olsen & Associates», May 30, 1995.
- [90] *Dacorogna M. M., Müller U. A., Nagler R. J., Olsen R. B., Pictet O. V.* A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market // Journal of International Money and Finance. 1993. V. 12, № 4. P. 413–438.
- [91] *Dacorogna M. M., Müller U. A., Pictet O. V., de Vries C. G.* The Distribution of Extremal Foreign Exchange Rate Returns in Extremely Large Data Sets. Preprint UAM, 1992-10-22. Zürich: «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics, March 17, 1995.
- [92] *Dalang R. C., Morton A., Willinger W.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models // Stochastics and Stochastics Reports. 1990. V. 29, № 2. P. 185–201.



- [93] *Dana R.-A., Jeanblanc-Picqué M.* Marchés financiers en temps continu (Valorisation et équilibre). Paris: Economica, 1994.
- [94] *David H., Hartley H., Pearson E.* The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation // *Biometrika*. 1954. V. 41, P. 482–493.
- [95] *Day R. H.* Complex economic dynamics: obvious in history, generic in theory, elusive in data // [383]. P. 1–15.
- [96] *Trading on the Edge: Neural, Genetic, and Fuzzy Systems for Chaotic Financial Markets.* / Ed. Deboeck G. J. New York: Wiley, 1994.
- [97] *Delbaen F.* Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded // *Mathematical Finance*. 1992. V. 2. P. 107–130.
- [98] *Delbaen F., Schachermayer W.* Arbitrage and free lunch with bounded risk for unbounded continuous processes // *Mathematical Finance*. 1994. V. 4, № 4. P. 343–348.
- [99] *Delbaen F., Schachermayer W.* A Compactness Principle for Bounded Sequences of Martingales with Applications. Preprint. Zürich: ETH, November, 1996.
- [100] *Delbaen F., Schachermayer W.* A general version of the fundamental theorem of asset pricing // *Mathematische Annalen*. 1994. V. 300, № 3. P. 463–520.
- [101] *Delbaen F., Schachermayer W.* The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes. Preprint. Zürich: ETH-Zentrum, 1997.
- [102] *Dellacherie C., Meyer P.-A.* Probabilités et potentiel. Ch. I à IV. Paris: Hermann, 1975.
- [103] *Dellacherie C., Meyer P.-A.* Probabilités et potentiel. Ch. V à VIII. Paris: Hermann, 1980.
- [104] *Devany R. L.* Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Menlo Park, CA: The Benjamin/Cummings Publ. Co., 1986.
- [105] *De Vries C. G.* On the relation between GARCH and stable processes // *Journal of Econometrics*. 1991. V. 48. P. 313–324.
- [106] *Ding Z., Granger C. W. J., Engle R. F.* A long memory property of stock market returns and a new model // *Journal of Empirical Finance*. 1993. V. 1. P. 83–106.
- [107] *Dixit A. K., Pindyck R. S.* Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994.
- [108] *Долан Э. Дж., Кэмпбелл К. Д., Кэмпбелл Р. Дж.* Деньги, банковское дело и денежно-кредитная политика. СПб.: Санкт-Петербург Оркестр, 1994. (Перевод с англ.: Campbell C. D., Campbell R. G., Dolan E. G. Money, Banking and Monetary Policy. London: The Dryden Press, 1988.)
- [109] *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956. (Перевод с англ.: Doob J. L. Stochastic Processes. New York: Wiley, 1953.)
- [110] *Doob J. L.* Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [111] *Dothan L.* On the term structure of interest rates // *Journal of Financial Economics*. 1978. V. 6. P. 59–69.

- [112] *Dothan M. U.* Prices in Financial Markets. Oxford: Oxford University Press, 1990.
- [113] *Douady R.* Cylindrical Brownian Motions and Yield Curve Smoothing. Preprint. New York: New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, February, 1996.
- [114] *Drost F. C., Nijman T. E.* Temporal aggregation of GARCH processes // *Econometrica*. 1993. V. 61. P. 909–927.
- [115] *Drost F. C., Werker B. J. M.* Closing the GARCH Gap: Continuous Time GARCH Modeling. Working paper № 9402. Tilburg, Netherlands: Tilburg University, Center for Economic Research, 1994.
- [116] *Дубинс Л. Е., Шенн Л. А., Ширяев А. Н.* Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя // *Теория вероятностей и ее применения*. 1993. Т. 38, № 4. С. 288–330.
- [117] *Duffie D.* Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992.
- [118] *Duffie J. D., Harrison J. M.* Arbitrage pricing of a Russian option and perpetual lookback options // *The Annals of Applied Probability*. 1993. V. 3, № 3. P. 641–651.
- [119] *Duffie D., Kan R.* A yield-factor model of interest rates // *Mathematical Finance*. 1996. V. 6, № 4. P. 379–406.
- [120] *Du Mouchel W.* Stable distributions in statistical inference: I. Symmetric stable distribution compared to other symmetric long-tailed distributions // *Journal of American Statistical Association*. 1973. V. 68. P. 469–477.
- [121] *Dupire B.* Model Art // *RISK-magazin*. 1993. V. 6. P. 118–124.
- [122] *Dupire B.* Pricing with a smile // *RISK-magazin*. 1994. V. 7, № 1. P. 18–20.
- [123] *Durrett R.* Brownian Motions and Martingales in Analysis. Belmont, CA: Wadsworth, 1984.
- [124] *Durrett R.* Probability: Theory and Examples. 2nd ed. Belmont, CA: Duxbury Press, 1995.
- [125] *Dybvig P., Ross S.* Arbitrage // *The New Palgrave: A Dictionary of Economics* V. 1 / Eds. J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman. London: Macmillan. 1987. P. 100–106.
- [126] *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
- [127] *Eberlein E., Keller U.* Hyperbolic Distributions in Finance // *Bernoulli*. 1995. V. 1, № 3. P. 281–299.
- [128] *Eberlein E., Raible S.* Term Structure Models Driven by General Lévy Processes. Preprint № 33. Freiburg i. Br.: Universität Freiburg, Institut für Mathematische Stochastik, 1996. P. 1–25.
- [129] *Ederington L. H., Lee J. H.* How markets process information: News releases and volatility // *Journal of Finance*. 1993. V. 48. P. 1161–1191.
- [130] *Edwards R. D., Magee J.* Technical Analysis of Stock Trends. 4th ed. Springfield, MA, 1958.
- [131] *Einstein A.* Investigation on the Theory of the Brownian Movement. / Ed. R. Fürth. New York: Dover, 1956.

- [132] *Einstein A.* On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat // *Annalen der Physik.* 1905. V. 17. P. 549–560.
- [133] *El Karoui N., Geman H.* A stochastic approach to the pricing of FRN's // *RISK-magazin.* 1991. V. 4.
- [134] *El Karoui N., Karatzas I.* A new approach to the Skorokhod problem and its applications // *Stochastics and Stochastics Reports.* 1991. V. 34. P. 57–82.
- [135] *El Karoui N., Myneri R., Viswanathan R.* The Probabilistic Theory of the American Option. Preprint. Paris: Université de Paris VI, 1991.
- [136] *El Karoui N., Quenez M. C.* Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // *SIAM Journal on Control and Optimization.* 1995. V. 33, № 1. P. 29–66.
- [137] *Emery M.* Compensation de processus V.F. non localement intégrables // *Lecture Notes in Mathematics.* 1980. V. 784. P. 152–160.
- [138] *Emery M.* Metrisabilité de quelques espaces de processus aléatoires // *Lecture Notes in Mathematics.* V. 784. 1980. P. 140–147.
- [139] *Emery M.* Stochastic Calculus in Manifolds. (With an Appendix: A Short Presentation of Stochastic Calculus by P.-A. Meyer). Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [140] *Engle R. F.* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation // *Econometrica.* 1982. V. 50, № 4. P. 987–1008.
- [141] *Engle R. F., Bollerslev T.* Modelling the persistence of conditional variance // *Econometrics Reviews.* 1986. V. 5. P. 1–50.
- [142] *Engle R. F., Ito T., Lin Wen-Ling.* Meteor showers or heat waves? Heteroskedastic intra-daily volatility in the foreign exchange market // *Econometrica.* 1990. V. 58. P. 525–542.
- [143] *Engle R. F., Russell J. R.* Forecasting transaction rates: The autoregressive conditional duration model // [393]. V. 4.
- [144] *Esscher F.* On the probability function in the collective theory of risk // *Skandinavisk Aktuarietidskrift.* 1932. V. 15. P. 175–195.
- [145] *Evertsz C. J. G.* Self-similarity of high-frequency USD/DEM exchange rates // [393]. V. 3.
- [146] *Evertsz C. J. G., Berkner K.* Large deviation and self-similarity analysis of curves: DAX stock prices // *Chaos, Solutions and Fractals.* 1995. V. 6. P. 121–130.
- [147] *Fama E. F.* Efficient capital markets: A review of theory and empirical work // *Journal of Finance.* 1970. V. 25. P. 383–417.
- [148] *Fama E. F.* Portfolio analysis in a stable Paretian market // *Management Science.* 1965. V. 311, № 2. P. 409–419.
- [149] *Fama E. F.* Risk, return and equilibrium // *Journal of Political Economy.* 1971. V. 79. P. 30–55.
- [150] *Fama E. F.* The behavior of stock market prices // *Journal of Business.* 1965. V. 34. P. 420–429.

- [151] *Fama E. F., Miller M. H.* The Theory of Finance. New York: Holt, Rinehard and Winston, Inc., 1972.
- [152] *Fama E. F., Roll R.* Parameter estimates for symmetric stable distributions // Journal of American Statistical Association. 1971. V. 66. P. 331–338.
- [153] *Fama E. F., Roll R.* Some properties of symmetric stable distributions // Journal of American Statistical Association. 1968. V. 63. P. 817–836.
- [154] Dynamics of Fractal Surfaces / Eds. F. Family and T. Vicsek. Singapore: World Scientific Publ., 1991.
- [155] *Feder J.* Fractals. New York: Plenum Press, 1988.
- [156] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1971.
- [157] *Feller W.* The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables // Annals of Mathematical Statistics. 1951. V. 22, № 3. P. 427–432.
- [158] *Fielitz B. D., Rozelle J. P.* Stable distributions and the mixtures of distributions hypotheses for common stock returns // Journal of American Statistical Association. 1983. V. 78, № 381. P. 28–36.
- [159] *Fisher I.* The Theory of Interests. New York: Macmillan, 1930.
- [160] *Flood M. D.* Market structure and inefficiency in the foreign exchange market // Journal of International Money and Finance. 1994. V. 13, № 2. P. 131–138.
- [161] *Fokker A. D.* Die mittlere Energie rotierender Dipole im Strahlungsfeld // Annalen der Physik. 1914. V. 43. P. 810–820.
- [162] *Föllmer H.* Probabilistic Aspects of Options. Preprint. Helsinki: Helsinki University, January, 1990.
- [163] *Föllmer H., Kabanov Yu. M.* Optional Decomposition Theorem and Lagrange Multipliers. // Finance and Stochastics 1998. V. 2, № 1. P. 69–81.
- [164] *Föllmer H., Kabanov Yu. M.* Optional Decomposition Theorems in Discrete Time. Preprint. Berlin: Humboldt University, 1996.
- [165] *Föllmer H., Kramkov D.* Optional Decompositions under constraints // Probability Theory and Related Fields. 1997. V. 109, № 1. P. 1–25.
- [166] *Föllmer H., Protter Ph., Shiryaev A. N.* Quadratic covariation and an extension of Itô's formula // Bernoulli. 1995. V. 1, № 1/2. P. 149–170.
- [167] *Föllmer H., Schweizer M.* Hedging of contingent claims under incomplete information // Applied Stochastic Analysis (Stochastic Monographs. V. 5) / Eds. M. H. A. Davis, R. J. Elliott. London: Gordon and Breach, 1991. P. 389–414.
- [168] *Föllmer H., Sondermann D.* Hedging of non-redundant contingent claims // Contributions to Mathematical Economics / Eds. A. Mas-Colell and W. Hildenbrand. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 205–223.
- [169] *French K. R., Schwert G. W., Stambaugh R.* Expected stock returns and volatility // Journal of Financial Economics. 1987. V. 19. P. 3–29.
- [170] *Friedman A.* Stochastic Differential Equations and Applications. V. 1, 2. New York: Academic Press, 1975, 1976.
- [171] *Frittelli M., Lakner P.* Arbitrage and free lunch in a general financial market model; the fundamental theorem of asset pricing // [336]. P. 89–92.

- [172] Гальчук Л. И. О структуре некоторых мартингалов // Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974). Ч. I. Вильнюс: Ин-т физики и математики АН ЛитССР, С. 7—32.
- [173] Гамровски Б., Рачев С. Финансовые модели, использующие устойчивые законы // Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва, ТВП. 1995. Т. 2, № 4. С. 556—604. (Перевод с франц.: Gamrowski B., Rachev S. T. Modèles financiers utilisant les lois stables. Preprint.)
- [174] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Изд. 3-е, доп. М.: Наука, 1967.
- [175] Geman H., El Karoui N., Rochet J. C. Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing // Journal of Applied Probability. 1995. V. 32. P. 443—458.
- [176] George T. J., Kaul G., Nimalendran M. Estimation of the bid-ask spread and its components: a new approach // Review of Financial Studies. 1991. V. 4. P. 623—656.
- [177] Gerber H. U., Shiu E. S. W. Martingale approach to pricing American options // ASTIN Bulletin. 1994. V. 24. P. 195—200.
- [178] Gerber H. U., Shiu E. S. W. Option pricing by Esscher transforms // Transactions of the Society of Actuaries. 1994. V. 46. P. 99—191.
- [179] Geske R., Johnson H. E. The American put options valued analytically // Journal of Finance. 1984. V. 39. P. 1511—1524.
- [180] Ghashghaie S., Breymann W., Peinke J., Talkner P., Dodge Y. Turbulent cascades in foreign exchange markets // Nature. 1996. V. 381. 27 June. P. 767—770.
- [181] Ghysels E., Jasiak J. Trading patterns: Time deformation and stochastic volatility in foreign exchange markets // [393]. V. 1.
- [182] Гухман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.
- [183] Гурсанов И. В. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятностей и ее применения. 1960. Т. 5, № 3. С. 314—330.
- [184] Glosten L., Harris L. Estimating the components of the bid-ask spread // Journal of Financial Economics. 1988. V. 21. P. 123—142.
- [185] Glosten L., Milgrom P. Bid, ask, and transaction prices in a special market with heterogeneously informed traders // Journal of Financial Economics. 1985. V. 14 (March). P. 21—42.
- [186] Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 2-е. М.: ГИТТЛ, 1954; Изд. 6-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1988.
- [187] Gnedenko B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire // Annals of Mathematics. 1943. V. 44. P. 423—453.
- [188] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: ГИТТЛ, 1949.
- [189] Goodhart C. A. «News» and the foreign exchange market // Proc. Manchester Statist. Soc. 1989. P. 1—79.

- [190] Goodhart C. A., Demos A. Reuters screen images of the foreign exchange market: the deutschemark/dollar spot rate // Journal of International Securities Markets. 1990. V. 4. P. 333–348.
- [191] Goodhart C. A., Figliuoli L. Every minute counts in financial markets // Journal of International Money and Finance. 1991. V. 10. P. 23–52.
- [192] Goodhart C. A. E., O'Hara M. High frequency data in financial markets: issues and applications // [393]. Introductory Lecture.
- [193] Gouriéroux Ch. Modèles ARCH et applications financières. Paris: Economica, 1992.
- [194] Gouriéroux C., Laurent J.-P. Dynamic Hedging in Discrete Time. Preprint. Paris: CREST, 1995.
- [195] Gouriéroux C., Laurent J.-P., Pham H. Quadratic Hedging and Numéraire. Preprint. Université de Marne—La Vallée, Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, October, 1995.
- [196] Grangel C. W. J., Newbold P. Forecasting Economic Time Series. New York: Academic Press, 1977.
- [197] Granger C. W. J., Morgenstern O. Predictability of Stock Market Prices. Lexington, MA: D. C. Heath & Co., 1970.
- [198] Granger C. W. J., Teräsvirta T. Modelling Nonlinear Economic Relationships. Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.
- [199] Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. 1983. V. 9. P. 189–208.
- [200] Григелионис Б. И., Ширяев А. Н. О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11, № 4. С. 612–631.
- [201] Grimmet G. R., Stirzaker D. R. Probability and Random Processes. Oxford: Clarendon Press, 1982.
- [202] Guégan D. Séries chronologiques non linéaires à temps discret. Paris: Economica, 1994.
- [203] Guillaume D. M., Dacorogna M. M., Davé R. R., Müller U. A., Olsen R. B., Hamon O. V., Jacquillat B. Le marché français des actions. Paris: Presses Universitaires de France, 1992.
- [204] Guillaume D. M., Dacorogna M. M., Davé R. D., Müller U. A., Olsen R. B., Pictet O. V. From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets // Finance and Stochastics. 1997. V. 1, № 2. P. 95–129.
- [205] Guillaume D. M., Pictet O. V., Dacorogna M. M. On the intra-day performance of GARCH processes // [393]. V. 3.
- [206] Gumbel E. J. Statistics of Extremes. New York: Columbia University Press, 1960.
- [207] Hagerman R. More evidence on the distribution of security returns // Journal of Finance. 1978. V. 33. P. 1213–1221.
- [208] Hale J., Kogak H. Dynamics and Bifurcations. New York: Springer-Verlag, 1991.

- [209] *Halgreen C.* Self-decomposability of the generalized inverse Gaussian and hyperbolic distributions // *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*. 1979. V. 47. P. 13–17.
- [210] *Hall P.* On some simple estimates of an exponent of regular variation // *Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B*. 1982. V. 44, № 1. P. 37–42.
- [211] *Hamilton J. D.* *Time Series Analysis*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1994.
- [212] *Hannan H. J.* *Multiple Time Series*. New York: Wiley, 1970.
- [213] *Hansen A. T.* Complete Market Pricing in the Wiener Filtration without Existence of a Martingale Measure. Preprint. Aarhus: Aarhus University, Dept. of Operation Research, 1996.
- [214] *Harrison J. M., Kreps D. M.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // *Journal of Economic Theory*. 1979. V. 20. P. 381–408.
- [215] *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // *Stochastic Processes and their Applications*. 1981. V. 11, № 3. P. 215–260.
- [216] *Harvey C. R., Huang R. D.* Volatility in the foreign currency futures market // *Review of Financial Studies*. 1991. V. 4. P. 543–569.
- [217] *Hasbrouck J.* Trades, Quotes, Inventories and Information // *Journal of Financial Economics*. 1988. V. 22. P. 229–252.
- [218] *Hausman J. A., Lo A. W., McKinlay A. C.* An Oderer Probit Analysis of Transaction Stock Prices. Working paper № 3888. National Bureau of Economic Research, 1991.
- [219] *Heath D., Jarrow R., Morton A.* Bond pricing and the term structure of interest rates // *Econometrica*. 1992. V. 60, № 1. P. 77–106.
- [220] *Heston S. I.* A closed forms solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // *Review of Financial Studies*. 1992. V. 6, № 2. P. 333–343.
- [221] High Frequency Data in Finance. Data set from «Olsen & Associates». E-mail: hfd@olsen.ch, 1993.
- [222] *Hilborn R. C.* *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1994.
- [223] *Hill B. M.* A simple general approach to inference about the tail of a distribution // *The Annals of Statistics*. 1975. № 3, V. 5. P. 1163–1173.
- [224] *Ho T., Lee S.* Term structure movements and pricing interest rates contingent claims // *Journal of Finance*. 1986. V. 41. P. 1011–1029.
- [225] *Хоффман-Иёнсен И. (Hoffman-Jørgensen J.)* Устойчивые плотности // *Теория вероятностей и ее применения*. 1993. V. 38, № 2. P. 470–476.
- [226] *Hofmann N., Platen E., Schweizer M.* Option pricing under incompleteness and stochastic volatility // *Mathematical Finance*. 1992. V. 2. P. 153–187.
- [227] *Hogan K. C., Jr., Melvin M.* Sources of meteor showers and heat waves in the foreign exchange market // *Journal of International Economics*. 1994. V. 37. P. 239–247.

- [228] *Horne J. C. van.* Financial Market Rates and Flows. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1984.
- [229] *Hsu Der-Ann, Miller R. B., Wichern D. W.* On the stable Paretian behavior of stock-market prices // Journal of American Statistical Association. 1974. V. 69, № 345. P. 108—113.
- [230] *Huang R. D., Masulis R. W.* Spreads, dealer competition, and market regimes: a market microstructure analysis or FX trading // [393]. V. 4.
- [231] *Huberman G.* A simple approach to arbitrage pricing theory // Journal of Economic Theory. March, 1982. P. 183—191.
- [232] *Hudson M.* The value in going out // From Black—Scholes to black holes. London/New York, Risk/Finex. 1992. P. 183—186.
- [233] *Hull J. C.* Options, Futures, and Other Derivative Securities. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [234] *Hull J., White A.* Pricing interest rate derivative securities // Review of Financial Studies. 1990. V. 3, № 5. P. 573—592.
- [235] *Hull J., White A.* The pricing of options on assets with stochastic volatilities // Journal of Finance. 1987. V. 42. P. 281—308.
- [236] *Hurst H.* Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of American Society of Civil Engineers. 1951. V. 116. P. 770—808.
- [237] *Ibbotson R. G., Sinquefeld R. A.* Stocks, Bonds, Bills and Inflation: 1986 Year Book. Chicago: Ibbotson & Associates, 1986.
- [238] *Ибрагимов И. А., Чернин К. Е.* Об одновершинности устойчивых законов // Теория вероятностей и ее применения. 1959. V. 4, № 4. P. 453—456.
- [239] *Ikeda N., Watanabe S.* Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1989.
- [240] *Ingersoll J. E.* Theory of Financial Decision Making London-Lanham: Rowman and Littlefield, 1987.
- [241] *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [242] *Itô K.* On a stochastic integral equation // Japan Academy. Proceedings. 1946. V. 22. P. 32—35.
- [243] *Itô K.* On stochastic differential equations // Memoirs of the American Mathematical Society. 1951. V. 4. P. 1—89.
- [244] *Itô K.* Stochastic integral. // Imperial Academy. Tokyo. Proceedings. 1944. V. 20. P. 519—524.
- [245] *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968. (Перевод с англ.: *Itô K., McKean H. P.* Diffusion Processes and Their Sample Paths. New York: Springer-Verlag, 1965.)
- [246] *Ito T., Engle R. F., Lin Wen-Ling.* Where does the meteor shower come from? The role of stochastic policy coordination // Journal of International Economics. 1992. V. 32. P. 221—240.
- [247] *Jacka S. D.* Optimal stopping and the American put // Mathematical Finance. 1991. V. 1, № 2. P. 1—14.



- [248] *Jacod J.* Calcul stochastique et problèmes de martingales // *Lecture Notes in Mathematics*. 1979. V. 714. P. 1–539.
- [249] *Jacod J.* Intégrales stochastiques par rapport à une semimartingale vectorielle et changements de filtration // *Lecture Notes in Mathematics*. 1980. V. 784. P. 161–172.
- [250] *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994. (Перевод с англ.: *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1987.)
- [251] *Jacod J., Shiryaev A. N.* Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case // *Finance and Stochastics*. 1998. V. 2.
- [252] *Jacquier E., Polson N. G., Rossi P. E.* Bayesian analysis of stochastic volatility models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 1994. V. 12, № 4. P. 371–417.
- [253] *Janicki A., Weron A.* Simulation and Chaotic Behavior of  $\alpha$ -Stable Stochastic Processes New York: M. Dekker, 1994.
- [254] *Jakubowski A., Mémín J., Pages G.* Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace  $\mathbb{D}^1$  de Skorokhod // *Probability Theory and Related Fields*. 1989. V. 81, № 1. P. 111–137.
- [255] *Jensen B. A., Nielsen J. A.* The Structure of Binomial Lattice Models for Bonds. Working paper № 91.1. Copenhagen Business School, Aarhus University, 1991.
- [256] *Jamshidian F.* An exact bond option formula // *Journal of Finance*. 1989. V. 44, № 1. P. 205–209.
- [257] *Jørgensen P. L.* American Option Pricing. Preprint. The Faculty of Business Administration, The Aarhus School of Business, 1994.
- [258] *Kabaila P.* On the asymptotic efficiency of estimators of the parameters of ARMA processes // *Journal of Time Series Analysis*. 1983. V. 4. P. 37–49.
- [259] *Кабанов Ю. М., Крамков Д. О.* Отсутствие арбитража и эквивалентные мартингальные меры: новое доказательство теоремы Харрисона—Плиски // *Теория вероятностей и ее применения*. 1994. V. 39, № 3. P. 635–640.
- [260] *Kabanov Yu. M., Kramkov D. O.* Asymptotic arbitrage in large financial markets // *Finance and Stochastics* 1998. V. 2.
- [261] *Кабанов Ю. М., Крамков Д. О.* Большие финансовые рынки: асимптотический арбитраж и контигуальность // *Теория вероятностей и ее применения*. 1994. Т. 39, № 1. С. 222–228.
- [262] *Kallsen J., Taqqu M. S.* Option Pricing in ARCH-type Models. Preprint. July, 1994.
- [263] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИЛ, 1950.
- [264] *Kanter M.* Stable densities under change of scale and total variation inequalities // *The Annals of Probability*. 1975. V. 3, № 4. P. 697–707.
- [265] *Karatzas I.* On the pricing of American options // *Applied Mathematics and Optimization*. 1988. V. 17. P. 37–60.

- [266] Karatzas I., Shreve S. E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [267] Karatzas I., Shreve S. Methods of Mathematical Finance. New York: Columbia Univ. Press, 1995.
- [268] Kariya T. Quantitative Methods for Portfolio Analysis. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.
- [269] Kendall M. G. The analysis of economic time-series. Part 1. Prices // Journal of the Royal Statistical Society. 1953. V. 96. P. 11–25.
- [270] Kendall M. Time-Series. London: Charles Griffin, 1973.
- [271] Kendall M., Stuart A. The Advanced Theory of Statistics. V. 3 London: Charles Griffin, 1966.
- [272] Kim I. J. The analytic valuation of American options // Review of Financial Studies. 1990. V. 3. P. 547–572.
- [273] Klein I., Schachermayer W. Asymptotic arbitrage in non-complete large financial markets // Теория вероятностей и ее применения. 1996. V. 41. № 4. P. 927–934.
- [274] Klimasauskas C. C. Neural Network Techniques // [96].
- [275] Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [276] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299–303.
- [277] Колмогоров А. Н. Математика и механика. Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1985.
- [278] Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1986.
- [279] Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве (Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum) // ДАН СССР. 1940. Т. 26, № 2. С. 115–118.
- [280] Kolmogoroff A. N. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Mathematische Annalen. 1931. V. 104 P. 415–458. (См. также [278].)
- [281] Kramkov D. O. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets // Probability Theory and Related Fields. 1996. V. 105, № 4. P. 459–479.
- [282] Крамков Д. О., Ширяев А. Н. О достаточных условиях равномерной интегрируемости экспоненциальных мартингалов. Препринт. М.: МИРАН, 1996. (См. также: Труды Второго Европейского математического конгресса, Будапешт, 1996.)
- [283] Крамков Д. О., Ширяев А. Н. О расчетах рациональной стоимости «Русского опциона» в симметричной биномиальной модели  $(B, S)$ -рынка // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, № 1. С. 191–200

- [284] *Krouse C. G.* Capital Markets and Prices. Valuing Uncertain Income Streams. Amsterdam: North-Holland, 1986.
- [285] *Kreps D.* Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities // *Journal of Mathematical Economics*. 1981. V. 8. P. 15–35.
- [286] *Krugman P.* Target zones and exchange rate dynamics // *Quarterly Journal of Economics*. 1991. V. 106, № 3. P. 669–682.
- [287] *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.
- [288] *Krylov N. V.* Introduction to the Theory of Diffusion Processes. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.
- [289] *Küchler U., Neumann K., Sørensen M., Streller A.* Stock Returns and Hyperbolic Distributions. Discussion paper № 23. Berlin: Humboldt University, 1994.
- [290] *Lai T. L.* Sequential change-point detection in quality control and dynamic systems // *Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B*. 1995. V. 57, № 4. P. 613–658.
- [291] *Lai T. L., Siegmund D.* Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter // *The Annals of Statistics*. 1983. V. 11, № 2. P. 478–485.
- [292] *Lakner P.* Martingale measure for a class of right-continuous processes // *Mathematical Finance*. 1993. V. 3, № 1. P. 43–53.
- [293] *Lamberton D., Lapeyre B.* Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. London: Chapman & Hall, 1996.
- [294] *Lanford O.* A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures // *American Mathematical Society. Bulletin*. 1982. V. 6, № 3. P. 427–434.
- [295] *Langevin P.* Sur la théorie du mouvement brownien // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris*. 1908. V. 146. P. 530–533.
- [296] *Latin Dictionary* (founded on Andrew's edition of Freund's Latin dictionary revised, enlarged and in great part rewritten by Ch. T. Lewis, Ch. Short). Oxford: Oxford Univ. Press, 1966.
- [297] *Легостаева И. Л., Ширяев А. Н.* Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса // *Теория вероятностей и ее применения*. 1971. Т. 16, № 2. С. 339–345.
- [298] *Lévy P.* Processus stochastiques et mouvement brownien. Paris: Gauthier-Villars, 1948.
- [299] *Lin S. J.* Stochastic analysis of fractional Brownian motion // *Stochastics and Stochastics Reports*. 1995. V. 55. P. 121–140.
- [300] *Lindley D. V.* Dynamic programming and decision theory // *Appl. Statist.* 1961. V. 10, № 1. P. 39–51.
- [301] *Lintner J.* The valuation of risky assets and the selection of risky investments on stock portfolios and capital budgets // *Review of Economics and Statistics*. 1965. V. 47 (February). P. 13–34.
- [302] *Linton O.* Adaptive estimation in ARCH Models // *Econometric Theory*. 1993. V. 9. P. 539–569.
- [303] *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

- [304] *Луицер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартиггалов. М.: Наука, 1986.
- [305] *Liu T., Granger C. W. J., Heller W. P.* Using the correlation exponent to decide whether an economic series is chaotic // [383].
- [306] *Lo A.* Neural networks and other nonparametric techniques in economics and finance // *Blending Quantitative and Traditional Equity Analysis*. Association for Investment Management and Research. 1994. P. 25–36.
- [307] *Locke P. R., Sayers C. L.* Intra-day futures price volatility: information effects and variance persistence // *Journal of Applied Econometrics*. 1993. V. 8. P. 15–30. (См. также [383]. P. 213–228.)
- [308] *Lockwood L. J., Linn S. C.* An examination of stock market return volatility during overnight and intraday periods, 1964–1989 // *Journal of Finance*. 1990. V. 45. P. 591–601.
- [309] *Loosignian A. M.* Foreign Exchange Futures. Homewood, IL: Dow Jones-Irwin, 1981.
- [310] *Loosignian A. M.* Stock Index Futures (Buying and Selling the Market Averages). Reading, MA: Addison-Wesley, 1985.
- [311] *Lorenz H.-W.* Nonlinear Dynamic Economics and Chaotic Motion. New York: Springer-Verlag, 1989. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. V. 334.)
- [312] *Malkiel B.* A Random Walk down Wall Street. London: W. W. Norton & Co., 1991.
- [313] *Malliaris A. G., Brock W. A.* Stochastic Methods in Economics and Finance. Amsterdam: North-Holland, 1982.
- [314] *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Chance, and Dimension. San Francisco: Freeman, 1977.
- [315] *Mandelbrot B. B.* Les objets fractals. Paris: Flammarion, 1975.
- [316] *Mandelbrot B. B.* Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent process // *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*. 1975. V. 31. P. 271–285.
- [317] *Mandelbrot B. B.* Robustness of the rescaled range  $R/S$  in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence // *Water Resources Research*. 1969. V. 5, № 5. P. 967–988.
- [318] *Mandelbrot B. B.* Some noises with  $1/f$  spectrum: a bridge between direct current and white noise // *IEEE Transactions on Information Theory*. April, 1967.
- [319] *Mandelbrot B. B.* Statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to  $R/S$  analysis // *Annals of Economic and Social Measurement*. 1972. V. 1, № 3. P. 259–290.
- [320] *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W. H. Freeman, 1982.
- [321] *Mandelbrot B. B.* The Pareto–Lévy law and the distribution of income // *International Economic Review*. 1960. № 1.
- [322] *Mandelbrot B. B.* The stable Paretian income distribution when the apparent exponent is near two // *International Economic Review*. 1963. № 4.

- [323] *Mandelbrot B. B.* The variation of certain speculative prices // *Journal of Business*. 1963. V. 36. P. 394—419.
- [324] *Mandelbrot B. B.* The variation of some other speculative prices // *Journal of Business*. 1967. V. 40. P. 393—413.
- [325] *Mandelbrot B. B.* Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi: application à la loi climatologique de H. E. Hurst // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Paris. 1965. V. 240. P. 3274—3277.
- [326] *Mandelbrot B. B.* When can price be arbitrated efficiently? A limit of the validity of the random walk and martingale models // *Review of Economics and Statistics*. 1971. V. 53. P. 225—236.
- [327] *Mandelbrot B. B., Taylor H. M.* On the distribution of stock price difference // *Operations Research*. 1967. V. 15, № 6. P. 1057—1062.
- [328] *Mandelbrot B. B., van Ness J. W.* Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // *SIAM Review*. 1968. V. 10, № 4. P. 422—437.
- [329] *Mandelbrot B. B., Wallis J. R.* Computer experiments with fractional Gaussian noises. I, II, III // *Water Resources Research*. 1969. V. 5. P. 228—267.
- [330] *Mantegna R. N., Stanley H. E.* Scaling behaviour in the dynamics of an economic index // *Nature*. 1995. V. 376. P. 46—49.
- [331] *Markowitz H.* Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Cambridge, MA: Blackwell, 1990.
- [332] *Markowitz H.* Portfolio selection // *Journal of Finance*. 1952. V. 7 (March). P. 77—91.
- [333] *Markowitz H.* Portfolio selection. Efficient Diversification of Investments. New York: Wiley, 1959.
- [334] *Martin J. D., Cox S. H., Jr., McMinn R. D.* The Theory of Finance. Evidence and Applications. London The Dryden Press 1988.
- [335] Математическая энциклопедия. В 5-ти томах. М.: Советская энциклопедия, 1977—1985.
- [336] Mathematical Finance. Based on the proceedings of a workshop, held at IMA, University of Minnesota, Minneapolis, MN, USA 1992/93 / Eds. M. H. A. Davis, D. Duffie, W. H. Fleming, S. E. Shreve. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [337] Mathematical Models in Finance / Eds. S. D. Howison, F. P. Kelly, P. Wilmott. London: Chapman & Hall, 1995.
- [338] *Маймин З. Г.* К вопросу о выделении детерминированной составляющей случайного поля // *Теория вероятностей и ее применения*. 1974. Т. 19, № 3. С. 533—546.
- [339] *McCulloch J. H.* Simple consistent estimators of stable distribution parameters // *Communications in Statistics — Simulation and Computation*. 1986. V. 15 (4). P. 1109—1136.
- [340] *McKean H.-P.* A free boundary problem for the heat equation arising from a problem of mathematical economics // *Industrial Management Review*. 1965. V. 6. P. 32—39.

- [341] Мельников А. В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997.
- [342] Melnikov A. V., Shiryaev A. N. Criteria for the absence of arbitrage in the financial market // *Frontiers in Pure and Applied Probability. II (Proceedings of the Fourth Russian-Finish Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, Moscow, October 3–8, 1993)*. Moscow: TVP, 1996. P. 121–134.
- [343] Mémin J. Espaces de semi martingales et changements de probabilité // *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*. 1980. V. 52, № 1. P. 9–39.
- [344] Merrill Lynch, Pierce, Fenner, Smith, Inc. Security Risk Evaluation. October, 1986.
- [345] Merton R. Continuous-Time Finance. Cambridge, MA/Oxford, UK: Blackwell, 1990.
- [346] Merton R. C. Theory of rational option pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science*. 1973. № 4 (Spring). P. 141–183.
- [347] Meyer P.-A. Notes sur les intégrales stochastiques. I. Intégrales hilbertiennes // *Lecture Notes in Mathematics*. 1977. V. 581 P. 446–461.
- [348] Meyers M. G. A Financial History of the United States. New York: Columbia Univ. Press, 1970.
- [349] Михалевич В. С. Байесовский вибір між двома гіпотезами про середнє значення нормального процесу // *Вісник Київського університету*. 1958. Т. I, № 1. С. 101–104.
- [350] Miller M., Modigliani F. Dividend policy, growth, and the valuation of shares // *Journal of Business*. 1961. V. 34 (October). P. 411–433.
- [351] Mills T. C. The Econometric Modelling of Financial Time Series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [352] Mitnik S., Rachev S. T. Financial Modeling and Option Pricing with Alternative Stable Models. New York: Wiley.
- [353] Mitnik S., Rachev S. T. Modeling asset returns with alternative stable distributions // *Econometric Reviews*. 1993. V. 12, № 3. P. 261–330.
- [354] Mitnik S., Rachev S. Stable distributions for asset returns // *Applied Mathematics Letters*. 1989. V. 2, № 3. P. 301–304.
- [355] Modigliani F., Miller M. Corporation income taxes and the cost capital: a correction // *American Economic Review*. 1963. V. 53 (June). P. 433–443.
- [356] Modigliani F., Miller M. The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment // *American Economic Review*. 1958. V. 48 (June). P. 261–297.
- [357] Morris K. M., Siegel A. M. Guide to Understanding Money and Investing. Lightbulb Press, 1993.
- [358] The Nature of Chaos / Ed. Mullin T. Oxford: Clarendon Press, 1994.
- [359] Musiela M., Sondermann D. Different Dynamical Specifications of the Term Structure of Interest Rates and their Implications. Preprint. Bonn: Bonn University, Dept. of Statistics, 1993.

- [360] Müller U. A., Dacorogna M. M., Davé R. D., Olsen R. B., Pictet O. V., von Weizsäcker J. E. Volatilities of Different Time Resolutions — Analyzing the Dynamics of Market Components. Preprint UAM. 1995-01-12. Zürich: «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics, March 20, 1995. (См. также [393]. V. 1.)
- [361] Müller U. A., Dacorogna M. M., Davé R. D., Pictet O. V., Olsen R. B., Ward J. R. Fractals and Intrinsic Time — A Challenge to Econometricians. Working paper Zürich: «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics, 1993; Technical Report UAM 1993-08-16, «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics.
- [362] Müller U. A., Dacorogna M. M., Olsen R. B., Pictet O. V., Schwarz M., Morgengegg C. Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intra-day analysis // *Journal of Banking and Finance*. 1990. V. 14. P. 1189—1208.
- [363] Myneni R. The pricing of the American option // *Annals of Applied Probability*. 1992. V. 2, № 1. P. 1—23.
- [364] Nelson D. B. ARCH models as diffusion approximations // *Journal of Econometrics*. 1990. V. 45. P. 7—38.
- [365] Nelson D. B. Asymptotic filtering theory for multivariate ARCH models // *Journal of Econometrics*. 1996. V. 71, № 1/2. P. 1—47.
- [366] Nelson D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach // *Econometrics*. 1990. V. 59. P. 347—370.
- [367] Nelson D. B. Filtering and forecasting with misspecified ARCH model // *Journal of Econometrics*. 1992. V. 52. P. 61—90.
- [368] Новиков А. А. Об одном тождестве для стохастических интегралов // *Теория вероятностей и ее применения*. 1972. Т. 17, № 4. С. 761—765.
- [369] Настольная книга валютного дилера. СП «Crocus International». М.: Верба, 1992.
- [370] О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. М.: Дело Лтд, 1995. (Перевод с англ.: O'Brein J., Shrivastava S. *Financial Analysis and Security Trading*. Pittsburg, PA: Carnegie Mellon University.)
- [371] Osborne M. F. M. Brownian motion in the stock market // *Operations Research*. 1959. V. 7. P. 145—173. (См. также [78]. P. 100—128.)
- [372] Pagan A. R. Econometric issues in the analysis of regressions with generated regressors // *International Economic Review*. 1984. V. 25. P. 221—247.
- [373] Pagan A. R., Schwert G. W. Alternative models for conditional stock volatility // *Journal of Econometrics*. 1990. V. 45. P. 267—290.
- [374] Paley R. E. A. C., Wiener N. Fourier transforms in the complex domain // *American Mathematical Society Colloquium Publications*. 1934. V. 19.
- [375] Paley R. E. A. C., Wiener N., Zygmund A. Notes on random functions // *Mathematische Zeitschrift*. 1933. № 37. P. 647—668.
- [376] Parkinson M. Option pricing: The American put // *Journal of Business*. 1977. V. 50. P. 21—36.

- [377] *Pareto V.* Cours d'Economie Politique. Lausanne, Switzerland, 1897.
- [378] *Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D.* Chaos and Fractals. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [379] *Пайтген Х.-О., Рухтер П. Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. (Перевод с англ.: Peitgen H.-O., Richter P.H. The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1986.)
- [380] *Peltier R.-F., Véhel J. L.* A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion // Bernoulli.
- [381] *Peltier R.-F., Véhel J. L.* Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results. Preprint № 2645. Rocquencourt: INRIA, August, 1995.
- [382] *Percival D. B.* Three curious properties of the sample variance and autocovariance for stationary processes with unknown mean // American Statistician. 1993. V. 47. P. 274—276.
- [383] Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics / Eds. M. H. Pesaran and S. M. Potter. New York: Wiley, 1993.
- [384] *Pesaran M. H., Samiei H.* Estimating limited-dependent rational expectations models with an application to exchange rate determination in a target zone // Journal of Econometrics. 1992. V. 53. P. 141—163.
- [385] *Peters E. E.* Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility. New York: Wiley, 1991.
- [386] *Peters E. E.* Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. New York: Wiley, 1994.
- [387] *Петраков Н. Я., Ротарь В. И.* Фактор неопределенности и управление экономическими системами. М.: Наука, 1985.
- [388] Англо-русский толковый словарь по бизнесу / Под ред. П. Ф. Петроченко М.: СП «Арт-Бизнес-Центр», 1992.
- [389] *Planck M.* Über einen Satz der statistischen Dynamic und seine Erweiterung in der Quantentheorie // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1917. P. 324—341.
- [390] *Praetz P.* The distribution of share price changes // Journal of Business. 1972. V. 45. P. 49—55.
- [391] *Priestley M.* Non-Linear and Nonstationary Time Series. New York: Academic Press, 1988.
- [392] *Prigent J.-L.* Incomplete markets: Convergence of options values under the minimal martingale measure. Preprint № 9526. THEMA, University of Cergy—Pontoise // Proceedings of the 13th International Conference AFFI (Geneva, 1996).
- [393] Proceedings of the First International Conference on High Frequency Data in Finance (HFDF-I, March 29—31, 1995): Introductory Lecture and 4 volumes. Zürich: «Olsen & Associates», Research Institute for Applied Economics.
- [394] *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, № 2. С. 177—238.



- [395] *Protter Ph.* Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [396] *Protter Ph., Talay D.* The Euler Scheme for Lévy Driven Stochastic Differential Equations. Preprint № 2621. Rocquencourt: INRIA, July, 1995.
- [397] *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1989. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, № 336.)
- [398] *Qiggins J. B.* Option values under stochastic volatility. Theory and empirical estimates // *Journal of Financial Economics*. 1987. V. 19. P. 351–372.
- [399] *Rabemananjara R., Zakoian J. M.* Threshold ARCH models and asymmetries in volatility // [383].
- [400] *Рачев С. Т., Рушендорф Л.* Модели и расчеты контрактов с опционами // *Теория вероятностей и ее применения*. 1994. Т. 39, № 1. С. 150–190.
- [401] *Рэдхэд К., Хьюс С.* Управление финансовыми рынками. М.: Инфра-М, 1996. (Перевод с англ.: Redhead K., Huhhes S. Financial Risk Management.)
- [402] *Revuz D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin Springer-Verlag 1991.
- [403] *Ridley M.* The mathematics of markets // *The Economist*. October, 1993.
- [404] *Risk Metrics*. New York: Morgan Guaranty Trust Company, November, 1994.
- [405] *Roberts H. V.* Stock-market «patterns» and financial analysis: Methodological suggestions // *Journal of Finance*. 1959. V. 14. P. 1–10.
- [406] *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [407] *Rogers L. C. G.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage // *Stochastics and Stochastics Reports*. 1995. V. 51. P. 41–50.
- [408] *Numerical Methods in Finance* / Eds. L. C. G. Rogers and D. Talay. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [409] *Рогозин Б. А.* О некоторых классах процессов с независимыми приращениями // *Теория вероятностей и ее применения*. 1965. Т. 10. С. 479–483.
- [410] *Roll R., Ross S. A.* An empirical investigation of the arbitrage pricing theory // *Journal of Finance*. 1980. V. 35. P. 1073–1103.
- [411] *Ross S. A.* Information and volatility: The no-arbitrage martingale approach to timing and resolution irrelevancy // *Journal of Finance*. 1989. V. 44. P. 1–18.
- [412] *Ross S. A.* The arbitrage theory of capital asset pricing // *Journal of Economic Theory*. 1976. V. 13. P. 341–360.
- [413] *Рубинштейн Л. Н.* Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967.
- [414] *Rubinstein M.* Exotic Options. Working paper № 220. Berkeley: Institute of Business and Economic Research, University of California, December, 1991.
- [415] *Rubinstein M.* Guiding force // *From Black–Scholes to black holes*. London/New York: Risk/Finex, 1992. P. 39–48.
- [416] *Sacks J., Ylvisaker D.* Linear estimation for approximately linear models // *Annals of Statistics*. 1978. V. 6, № 5. P. 1122–1137.

- [417] *Samorodnitsky G.* A class of shot noise models for financial applications // [393]. V. 3.
- [418] *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable Non-Gaussian Random Processes. New York: Chapman & Hall, 1994.
- [419] *Samuelson P. A.* Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly // Industrial Management Review. 1965. V. 6. P. 41–49.
- [420] *Samuelson P. A.* Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. 1965. V. 6. P. 13–31.
- [421] *Sandmann K., Sondermann D.* A Note on the Stability of Log-Normal Interest Rate Models and the Pricing of Eurodollar Futures. Preprint. Bonn: Bonn University, Dept. of Statistics, 1996.
- [422] *Sandmann K., Sondermann D.* A term structure model and the pricing of interest rate derivatives // Review of Futures Markets. 1993. V. 12, № 2. P. 391–423.
- [423] *Sato Ken-iti.* Lévy Processes on the Euclidean Spaces. Preprint. Zürich: Institute of Mathematics, University of Zürich, 1995.
- [424] *Schachermayer W.* A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time // Insurance: Mathematics & Economics. 1992. V. 11.
- [425] *Schachermayer W.* Martingale measure for discrete-time processes with infinite horizon // Mathematical Finance. 1994. V. 4, № 1. P. 25–55
- [426] *Schmidt W. M.* On a general class of one-factor models for the term structure of interest rates // Finance and Stochastics. 1997. V. 1, № 1. P. 3–24
- [427] *Schnidrig R., Würtz D.* Investigation of the volatility and autocorrelation function of the USD/DEM exchange rate on operational time scales // [393]. V. 3.
- [428] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. (Перевод с англ.: Schuster H. G. Deterministic Chaos. An Introduction. Weinheim: Physik Verlag, 1984.)
- [429] *Schweizer M.* On the minimal martingale measure and the Föllmer–Schweizer decomposition // Stochastic Analysis and Applications. 1995. V. 13, № 5. P. 573–599.
- [430] *Schweizer M.* Variance-optimal hedging in discrete time // Mathematics of Operations Research. 1995. V. 20, № 1. P. 1–32
- [431] *Schwert G. W., Segnin P. J.* Heteroskedasticity in stock returns // Journal of Finance. 1990. V. 45, P. 1129–1155.
- [432] *Scott L. O.* Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation and an application // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1987. V. 22 P. 419–438
- [433] *Sharpe W. F.* Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // Journal of Finance. 1964. V. 19 (September). P. 425–442.
- [434] *Шенн Л. А., Ширяев А. Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона» // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, № 1. С. 130–149

- [435] *Shepp L. A., Shiryayev A. N.* The Russian option: Reduced regret // *Annals of Applied Probability*. 1993. V. 3, № 3. P. 631–640.
- [436] *Shiller R. J.* *Stock Market Volatility*. Cambridge, MA: MIT Press.
- [437] *Shimko D.* *Finance in Continuous Time. A Primer*. Miami: Kolb Publ. Co., 1992.
- [438] *Ширяев А. Н.* Актуарное и финансовое дело: современное состояние и перспективы развития // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. Москва, ТВП. 1994. Т. 1, № 5. С. 684–697.
- [439] *Ширяев А. Н.* *Вероятность*. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1989. (Англ. перев.: *Shiryayev A. N. Probability*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1995.)
- [440] *Ширяев А. Н.* Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима // *Доклады Академии наук СССР*. 1961. Т. 138, № 5. С. 1039–1042.
- [441] *Ширяев А. Н.* *Статистический последовательный анализ*. Изд. 2. М.: Наука, 1976.
- [442] *Ширяев А. Н.* Стохастические проблемы финансовой математики // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. Москва, ТВП. 1994. Т. 1, № 5. С. 780–820.
- [443] *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время // *Теория вероятностей и ее применения*. № 1, Т. 39. 1994. С. 21–79.
- [444] *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // *Теория вероятностей и ее применения*. 1994. Т. 39, № 1. С. 80–129.
- [445] *Shiryayev A. N., Spokoinyi V. G.* *Sequential Estimation for Autoregressive Systems*. Preprint. Paris: Université Paris-Sud, 1993.
- [446] *Скорород А. В.* *Случайные процессы с независимыми приращениями*. М.: Наука, 1967.
- [447] *Sin C. A.* *Strictly Local Martingales and Hedge Ratios on Stochastic Volatility Models*. Ithaka, NY: Cornell University, Graduate School, 1966.
- [448] *Smith R. L.* Estimating dimension in noisy chaotic time series // *Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B*. 1992. V. 54, № 2. P. 329–351.
- [449] *Smith R. L.* Optimal estimation of fractal dimension // *Nonlinear Modeling and Forecasting (SFI Studies in the Science of Complexity. Proceedings. V. 12)* / Eds. M. Casdagli and S. Eubank. Reading, MA: Addison-Wesley, 1992.
- [450] *Sobel R.* *Inside Wall Street: Continuity and Change in the Financial District*. New York: W. W. Norton & Co., 1977.
- [451] *Сорос Дж.* *Алхимия финансов*. М.: Инфра-М, 1996. (Перевод с англ.: *Soros G. The Alchemy of Finance. Reading the Mind of the Market*. New York: Wiley, 1994.)

- [452] Спокойный В. Г., Ширяев А. Н. Статистические эксперименты и статистические решения (рукопись монографии). М.: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 1993.
- [453] Stein E. M., Stein C. J. Stock prices distributions with stochastic volatility: an analytic approach // Review of Financial Studies. 1991. V. 4, № 4. P. 727–752.
- [454] Стохастические аспекты финансовой математики. Тематический выпуск // Теория вероятностей и ее применения. 1994. V. 39, № 1.
- [455] Stricker C. Arbitrage et lois de martingale // Annales de l'Institut Henri Poincaré. 1990. № 2, V. 26. P. 451–460.
- [456] Strogatz S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [457] Stroock D. W., Varadhan S. R. S. Diffusion processes with continuous coefficients. I, II // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1969. V. 22, № 3. P. 345–400; № 4. P. 479–530.
- [458] Svensson L. E. O. Target zones and interest rate variability // Journal of International Economics. 1991. V. 31, P. 27–54.
- [459] Taqqu M. S. Self-similar processes // Encyclopaedia of Statistical Sciences. V. 8 / Eds. S. Kotz and N. Johnson. New York: Wiley, P. 352–357.
- [460] Taylor S. Modeling Financial Time Series. New York: Wiley, 1986.
- [461] Tong H. Nonlinear Time Series. Oxford: Oxford Univ. Press, 1990.
- [462] Tong H. Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach. Oxford: Clarendon Press, 1990.
- [463] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука, 1972.
- [464] Timmermann A. Scales and stock markets // Nature. 1995. V. 376. P. 18–19.
- [465] Tversky A. The Psychology of Risk. Quantifying the Market Risk Premium Phenomene for Investment Decision Making. Charlottesville, VA: Institute of Chartered Financial Analysts, 1990.
- [466] Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. On the theory of Brownian motion // Physical Review. 1930. V. 36. P. 823–841.
- [467] van Moerbeke P. L. J. On optimal stopping and free boundary problems // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1976. V. 60, № 2. P. 101–148.
- [468] Economic and Financial Modeling with Mathematica (TELOS – The Electronic Library of Science). / Ed. Varian H. R. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [469] Stocks, Bonds, Options, Futures. / Ed. Vegle S. R. New York: Institute of Finance, Prentice Hall, 1987.
- [470] Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.
- [471] Веретенников А. Ю. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 2. С. 348–360.
- [472] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.

- [473] Voss R. F.  $1/f$  noise and fractals in economic time series // *Fractal Geometry and Computer Graphics* / Eds. J. L. Encarnação, H.-O. Peitgen, and G. Englert. Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 45—52.
- [474] Walter C. Levy-stability under addition and fractal structure of markets // 5th AFIR International Colloquium (Bruxelles, September, 1995).
- [475] Weyl H. Bemerkungen zum Begriff der Differential-Quotienten gebrochener Ordnung // *Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich*. 1967. V. 62. P. 296—302.
- [476] Wiener N. Differential space // *Journal of Mathematical Physics*. Math. Inst. Tech. 1923. V. 2. P. 131—174.
- [477] Wiggins J. B. Option values under stochastic volatility. Theory and empirical evidence // *Journal of Financial Economics*. 1987. V. 19. P. 351—372.
- [478] Wilmott P., Dewynne J., Howison S. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford: Oxford Financial Press, 1993.
- [479] Wilmott P., Howison S., Dewynne J. *The Mathematics of Financial Derivatives*. (A Student Introduction.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [480] Working H. A random-difference series for use in the analysis of time series // *Journal of American Statistical Association*. 1934. V. 29. P. 11—24.
- [481] Zhou B. Forecasting Foreign Exchange Rates Subject to De-Volatilization. Working paper № 3510. Cambridge, MA: Sloan School of Management, MIT. 1992. (См. также: [393]. V. 4.)
- [482] Зиновьев С. З. Инфраструктурный фактор рынка ценных бумаг // *Деловой экспресс* (газета). 25 июня 1996. № 23.
- [483] Золотарев В. М. Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов // *Теория вероятностей и ее применения*. 1958. Т. 3, № 2. С. 197—200.
- [484] Золотарев В. М. *Одномерные устойчивые распределения*. М.: Наука, 1983.
- [485] Звонкин А. К. Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, «уничтожающее» снос // *Математический сборник*. 1974. Т. 93, № 1. С. 129—149.

# Предметный указатель

## А

- Автомодельность 242, 248
- Авторегрессионная модель условной неоднородности (ARCH) 75, 126, 174, 181
- Аксиоматика Колмогорова 101
- Актuariй 86
- Акция 24, 451
- $\alpha$ -устойчивость 210
- $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ 390, 399
- $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ -анализ статистический 336
- Арбитражная возможность 479
- Арбитражная теория расчетов (APT) 68, 619
- Арбитражные самофинансируемые стратегии 479
- Аттрактор 246

## Б

- Банковский счет 18, 451
- Белый шум 141, 254
- Бесплатный ленч 464
- Бета 710
- Бета актива 65
- Биномиальная модель
  - Кокса—Росса—Рубинштейна (CRR) 129
- Блуждание арифметическое 131
- Блуждание геометрическое 131
- Бон 19
- Брокерская контора 25
- Броуновский мост 260
- Броуновское движение 51
- Броуновское движение геометрическое (экономическое) 51, 259, 307, 805
- Броуновское движение линейное со сномом 801
- Броуновское движение
  - мультифрактальное 252
- Броуновское движение фрактальное 242, 249, 250
- Бык 39
- Быстрая перемежаемость 254

## В

- Валюта 16

- Валютный курс 351

- Векторный стохастический интеграл 701

- Векторы аффинно независимые 563

- Векторы линейно независимые 563

- Вероятностное пространство
  - фильтрованное 102, 317, 346

- Верхняя цена хеджирования 463, 605

- Винеровский процесс 51, 221

- Внутридневной анализ 337

- Возврат 103

- Волатильность 75, 260, 344, 367, 368

- Волатильность предполагаемая 309, 370

- $\theta$ -время 381

- Время локальное 334

- Время локальное (Леви) 289

- Время операционное 233, 336, 380

- Время физическое 233

- Вторая фундаментальная теорема 547

- Вытянутость 351

## Г

- Гауссовский шум фрактальный 242, 254, 394

- Географические зоны активности 341

- Гипотеза мартингалности 52

- Гипотеза случайного блуждания 51

- Годовая процентная ставка 18

- Годовая учетная ставка 18

- Граница мгновенно отражающая 836

## Д

- Движение Леви строго  $\alpha$ -устойчивое 249

- Деволатилизация 336

- Дерево цен 566

- Диверсификация 59, 569

- Дивиденды 24

- Динамические системы нелинейные 242

- Дискретный вариант теоремы Гирсанова 519

- Дисперсия дифференциальная 260

- Диффузия 260

- Диффузия со скачками 301

- Долгая (сильная) память 653

$\alpha$ -допустимость 713  
 Допустимые стратегии 699  
 Доу-Джонса индекс 26  
 Доу-Джонса среднее 26  
 Доход до момента погашения 313  
 Доходность 22, 312—314

### З

Задание опосредованное 23  
 Задача Дирихле 297  
 Задача Коши 296  
 Задача параболического типа 841  
 Задача со свободной границей 820  
 Задача Стéфана 820, 829, 837  
 Задача Стефана двухфазная 847  
 Задача эллиптического типа 841  
 Закон больших чисел усиленный 155  
 Закон двух третей 256  
 Закон повторного логарифма 269

### И

Измеримый выбор 497  
 Индекс Dow 399  
 Индекс S&P 500 400  
 Индекс Standard & Poor's 500 27  
 Индекс устойчивости 211, 358  
 Индекс хвостовой 358  
 Индивидуум 14  
 Интеграл стохастический 732  
 Интеграл Хеллингера 621, 627  
 Интеграл Хеллингера порядка  $\alpha$  627  
 Интервал приемлемых,  
     взаимоприемлемых цен 466  
 Интервенция центрального банка 32  
 Информация Фишера 155  
 Информация Фишера стохастическая 157

### К

Каноническое представление  
     семимартингала 734  
 Канторово множество 247  
 Капитал портфеля ценных бумаг 453  
 Капитал стратегии 784  
 Квадратическая вариация 112, 269, 327  
 Квадратическая вариация  
     предсказуемая 112  
 Квадратическая ковариация 327, 334  
 Квантильный метод 353  
 Класс Дирихле 325

Кластерность 388, 653  
 Комбинации опционов 830  
 Комбинация 669  
 Компенсатор 120, 329, 528  
 Контигуальность вероятностных мер 625  
 Контракт форвардный 34  
 Контракт фьючерсный 34, 35  
 Концепция эффективного рынка 73, 78, 482  
 Короткая продажа 40, 462  
 Корреляционная размерность 204  
 Коэффициент вытянутости 107  
 Кривая доходности 23, 314  
 Критерий Колмогорова 221, 250  
 Кумулянта 222, 735  
 Купонная процентная ставка облигации 20

### Л

Лемма о пересчете 507  
 Ликвидность 80  
 Линейно независимая система 614  
 Логистическое отображение 197  
 Локальная абсолютная непрерывность 502  
 Локальный закон повторного  
     логарифма 268  
 Локальный снос 260

### М

Мажоранта наименьшая эксцессивная 600, 681, 819, 845  
 Макроэкономические индексы 173  
 Максимальные неравенства 272  
 Маржа 36  
 Марковский момент 134, 346  
 Марковское свойство 264  
 Мартингал 109, 115  
 $\sigma$ -мартингал 723  
 Мартингал квадратично  
     интегрируемый 111, 320  
 Мартингал локальный 116  
 Мартингал локальный чисто  
     разрывный 330  
 Мартингал обобщенный 117  
 Мартингал равномерно интегрируемый 116  
 Мартингал-разность 55, 116, 177  
 Мартингал-разность обобщенная 117

- Мартингалное преобразование 118  
 Медведь 40  
 Мера  $\mathcal{P}$ - $\sigma$ -конечная 730  
 Мера абсолютно непрерывная 502  
 Мера винеровская 258  
 Мера дуальная 810  
 Мера Леви 215, 222—225, 736  
 Мера локально мартингалная 747, 784  
 Мера мартингалная (риск-нейтральная) 481, 526, 732  
 Мера минимальная мартингалная 526, 650  
 Мера однородная пуассоновская 730  
 Мера опциональная 730  
 Мера пуассоновская 730  
 Мера случайная 729  
 Мера случайная мартингалная 528  
 Меры локально эквивалентные 502  
 Меры эквивалентные 502  
 Метод максимального правдоподобия 154  
 Микроэкономические индексы 173  
 Множители Лагранжа 613  
 Модели Кокса, Ингерсолла и Росса 301  
 Модели линейные 138  
 Модели негауссовские 209  
 Модели нелинейные стохастические 173  
 Модели с дискретным вмешательством случая 132  
 Модели Халла и Уайта 302  
 Модель ACD 348  
 Модель AR 146, 171, 310  
 Модель ARCH 75, 126, 174, 181, 310  
 Модель ARIMA 140, 158, 161  
 Модель ARMA 125, 158, 172, 310  
 Модель CRR 468, 476, 544  
 Модель EGARCH 184  
 Модель GARCH 76, 127, 174, 310  
 Модель HARCH 187  
 Модель HJM 315  
 Модель MA 125, 140, 169, 310  
 Модель  $MA(\infty)$  146  
 Модель SV стохастической волатильности 189  
 Модель TGARCH 184  
 Модель аффинная 315  
 Модель Блэка, Дермана и Тоя 302  
 Модель Блэка и Карасинского 302  
 Модель Блэка—Мертон—Шоулса 307, 777, 805  
 (B, S)-модель стандартная диффузионная 307  
 Модель Васичека 301  
 Модель гауссовская однофакторная 857, 858  
 Модель динамического хаоса 196  
 Модель Дотхана 301  
 Модель Зандмана и Зондермана 302  
 Модель Кокса—Росса—Рубинштейна (CRR) 130, 476, 656  
 Модель Л. Башелье линейная 306  
 Модель Мертона 301  
 Модель однофакторная 314  
 Модель Самуэльсона 770  
 Модель с дивидендами 813  
 Модель семимартингалная полная 725  
 Модель стохастической волатильности (SV) 128, 189  
 Модель Тейлора 129  
 Модель условно-гауссовская 174  
 Модель хаотическая 196  
 Модель Хо и Ли 301  
 Модель Чена 302  
 Модель Шмидта 305  
 Модуль непрерывности 268  
 Момент остановки 134  
 Момент остановки оптимальный 592, 594  
 Момент погашения 20  
**Н**  
 Наилучшая линейная оценка 164  
 Начальная цена 312  
 Начальная цена облигации 20  
 Неопределенность спекулятивная 87  
 Неопределенность чистая 87  
 Неравенства Дуба 225, 272  
 Неравенства Колмогорова и Дуба 272  
 Номинальная стоимость 20, 312  
**О**  
 Область остановки наблюдений 598  
 Область продолжения наблюдений 598  
 Облигация 19  
 Обязательство воспроизводимое (достижимое) 466  
 Ограничение балансовое (бюджетное) 457  
 Одностороннее скользящее среднее 163  
 Оператор перехода 596, 674



Операционное время 136, 380  
 Опцион 33, 37  
 Опцион азиатского типа 690  
 Опцион американского типа 38, 570, 673, 841, 851, 855  
 Опцион европейского типа 38, 570, 653, 801, 851, 855  
 Опцион-колл 38, 42  
 Опцион-колл арифметический азиатский 42  
 Опцион-колл с последствием 42  
 Опцион-пут 38, 43  
 Опцион-пут арифметический азиатский 43  
 Опцион-пут с последствием 43  
 Опцион русский 690, 832  
 Опцион с выигрышем 40  
 Опцион с последствием 690  
 Опцион с проигрышем 40  
 Опцион экзотический 669  
 Основная формула для цены хеджирования 572  
 Отдача 103  
 Отображение 291  
 Отрицательная коррелированность 62  
 Оценка Хилла 361  
 Оценки максимального правдоподобия 154, 158

## П

Параметр масштаба ( $\sigma$ ) 211  
 Параметр положения ( $\mu$ ) 211  
 Параметр (показатель) скошенности ( $\beta$ ) 211  
 Параметр Харста 228  
 Перестрахование 91  
 Платежное поручение воспроизводимое (достижимое) 579, 726, 774  
 Подход опосредованный 23, 314  
 Подход прямой 23, 314  
 Позиция длинная 34  
 Позиция короткая 34  
 Показатель Харста 243  
 Полная асимптотическая делимость 633  
 Полные рынки 467, 572, 726  
 Портфель самофинансируемый 700  
 Портфель ценных бумаг 44, 59, 452, 699  
 Портфель ценных бумаг самофинансируемый 454

Последовательность вполне недетерминированная 166  
 Последовательность логистическая 204  
 Последовательность недетерминированная 166  
 Последовательность обновляющая 166  
 Последовательность предсказуемая 109  
 Последовательность регулярная 165  
 Последовательность сингулярная 165  
 Последовательность чисто недетерминированная 166  
 Предсказание 139  
 Предсказуемость 300  
 $(H^c, \mu - \nu)$ -представимость 762  
 $S$ -представимость 548  
 $X$ -представимость 726  
 $\mu$ -представимость,  $\mu$ -представление 551–553  
 Представление каноническое 728, 734  
 Премия 43  
 Преобразование Бернулли 201  
 Преобразование Гирсанова 491  
 Преобразование локально мартингалное порядка  $d$  709  
 Преобразование мартингалное порядка  $d$  709  
 Преобразование «палаточное» 201  
 Преобразование Эшера 488, 737, 747, 748  
 Преобразование Эшера условное 491, 748  
 Прибыль логарифмическая 103  
 Принцип отражения 270, 824  
 Прогнозирование 139  
 Производная Радона—Никодима 503, 627  
 Пространство каноническое 763  
 Процентная ставка 300, 314  
 Процентная ставка форвардные 314  
 Проценты простые 18, 103, 452  
 Проценты сложные 18, 102  
 Процесс càdlàg 317  
 Процесс адаптированный 317  
 Процесс Бесселя 262  
 Процесс Бесселя порядка 3 122  
 Процесс броуновского движения со сносом и пуассоновскими скачками 736  
 Процесс винеровский 51, 221  
 Процесс дисконтирующий 709, 710, 809  
 Процесс диффузионного типа 743

Процесс квазинепрерывный слева 768  
 Процесс Леви 220  
 Процесс Леви  $\alpha$ -устойчивый 227  
 Процесс Леви чисто скачкообразный 223  
 Процесс мультивариантный точечный 135  
 Процесс нулевой энергии 372  
 Процесс обновляющий 745  
 Процесс Орнштейна—Уленбека 261  
 Процесс плотности 503  
 Процесс предсказуемый 321  
 Процесс процентной ставки 782  
 Процесс Пуассона составной 224  
 Процесс риска 96  
 Процесс с дискретным вмешательством случая 345  
 Процесс согласованный 317  
 Процесс считающий 135, 346  
 Процесс точечный 135  
 Процесс устойчивый 226  
 Процесс Хеллингера 621, 742  
 Процессы Ито 279  
 Процессы стохастически неразличимые 287  
 Прямая *SAR* 66

## Р

Равномерная интегрируемость 325, 505  
 Разложение Вольда 167  
 Разложение Дуба 109, 325  
 Разложение Дуба—Мейера 325  
 Разложение Дуба обобщенное 113, 524  
 Разложение Кунита—Ватанабе 585  
 Разложение Лебега 627  
 Разложение мультипликативное 756  
 Разложение опциональное 580, 582, 612  
 Размах 243  
 Размерность 246  
 Размерность статистическая  
     фрактальная 248  
 Ранговые критерии 353  
 $F$ -распределение 217  
 $\Gamma$ -распределение 217  
 $t$ -распределение (Стьюдента) 217  
 Распределение безгранично делимое 214  
 Распределение биномиальное 218  
 Распределение гауссовское/обратно-гауссовское 217, 235  
 Распределение геометрическое 217

Распределение гиперболическое 217, 235  
 Распределение инвариантное 201  
 Распределение Коши 213, 217  
 Распределение Леви—Смирнова 217  
 Распределение логарифмически нормальное 217  
 Распределение логистическое 217  
 Распределение нормальное 213, 217  
 Распределение одностороннее устойчивое 213  
 Распределение отрицательно-биномиальное 217  
 Распределение Парето 212, 217, 347, 360  
 Распределение пуассоновское 217  
 Распределение равномерное 218  
 Распределение Стьюдента 217  
 Распределение типа Парето 347  
 Распределение Фишера 217  
 Распределения безгранично делимые 209  
 Распределения обобщенные гиперболические 234  
 Распределения устойчивые 209  
 Расстояние Хеллингера 627, 742  
 Расширенный вариант первой фундаментальной теоремы 493  
 Рациональная стоимость (цена) 43, 467, 611, 657, 660, 802, 806, 811, 815  
 Рациональный момент 611  
 Решение вероятностное 297  
 Решение сильное 286, 288  
 Риск несистематический 64, 67  
 Риск рыночный 83  
 Риск систематический (рыночный) 64, 67  
 ( $B, S$ )-рынки акций 307, 451, 841  
 FX-рынок 341  
 Рынок  $N$ -полный, полный 467  
 Рынок  $N$ -совершенный, совершенный 467  
 Рынок безарбитражный 479  
 Рынок безарбитражный в сильном (слабом) смысле 480  
 ( $B, S$ )-рынок стандартный диффузионный 307  
 Рынок кассовый (спотовый) 654  
 Рынок неполный 467  
 Рынок обмена валют ( $FX$ -рынок) 341  
 Рынок полный 467  
 Рынок полустрого эффективный 54

- Рынок слабо эффективный 53
- Рынок совершенный 467
- Рынок строго эффективный 54
- Рынок фрактальный 81
- Рынок эффективный 53
- Рыночная цена 21
- С**
- Самоподобие 242
- Самофинансируемость 454, 699, 707
- Свойство  $ELMM$  716
- Свойство  $EMM$  716
- Свойство  $E\sigma MM$  724
- Свойство  $NA$  717
- Свойство  $NA_+$ ,  $\overline{NA}_+$  717, 718
- Свойство  $NA_a$  717
- Свойство  $NA_g$ ,  $\overline{NA}_g$  718, 719
- Свойство  $NA$  отсутствия арбитража 716
- Свойство  $NFFLVR$  ( $NA_g$ ) 719
- Свойство  $NFLVR$  ( $\overline{NA}_+$ ) отсутствия  
бесплатного ленча с исчезающим  
риском 718
- Свойство автомодельности 228
- Сделка кассовая, спотовая, срочная 654
- Селектор 497
- Семимартингал 317
- Семимартингал локально квадратично  
интегрируемый 735
- Семимартингал специальный 325, 735,  
751
- $\sigma$ -алгебра предсказуемых множеств 321
- Сильная память 256
- Сильное последствие 254, 256, 373
- Скобка квадратная 330
- Скобка угловая 330
- Скобка угловая взаимная 329
- Сложные проценты 515
- Случай бесконечного временного  
горизонта 816
- Случай конечного временного  
горизонта 841
- Случайная величина 209
- Случайная величина безгранично  
делимая 214
- Случайная величина строго устойчивая  
210
- Случайная величина устойчивая 209
- Случайная замена времени 136, 231
- Случайное блуждание геометрическое  
674
- Случайное число случайных величин  
233
- Случайный вектор строго устойчивый  
218
- Случайный вектор устойчивый 218
- Случайный процесс автомодельный 248
- Случайный процесс предсказуемый 321
- Случай «с дивидендами» 456, 813
- Случай «с операционными  
издержками» 457
- Случай «с потреблением и  
инвестированием» 457
- Смайл-эффект 308
- Смесь гауссовских распределений 237
- Смесь экспоненциальных  
распределений 217
- Сносная компонента 217
- Событие катастрофическое 95
- Событие нормальное 97
- Солнечная активность 398
- Сочетания 669
- Спектральная плотность 168
- Спектральная функция 168
- Спектральное представление 167
- Спираль Винера 251
- Спрэд 344, 669
- Спрэд «быка» 671
- Спрэд «медведя» 671
- Средне-дисперсионный анализ 64
- Средне-дисперсионный анализ  
Марковитца 61
- Среднее по ансамблю 144
- Среднеквадратичный критерий 586
- Стандартное броуновское движение 221
- Статистика «тиков» 337
- Статистический последовательный  
анализ 846
- Стационарность в узком смысле 143,  
149
- Стационарность в широком смысле 149
- Стоимость опциона 43
- Стохастическая экспонента (Долеан)  
103, 266, 283, 332
- Стохастический базис 102
- Стохастический дифференциал 509
- Стохастический интеграл 277, 318, 322
- Стохастический интеграл Ито 259
- Стохастический процесс-интеграл 322
- Стохастическое дифференциальное  
уравнение 285

Стохастическое дифференциальное  
уравнение с частными  
производными 777

Стратегия допустимая 707

Стратегия на  $(B, \mathcal{P})$ -рынке 784

Стратегия самофинансируемая 707

Стратегия совершенная 605

Стрип 670

Стрэддл 669

Стрэнгл 669

Стрэп 670

Субмартингал 115

Субмартингал локальный 116

Субординация 231

Супермартингал 115

Супермартингал локальный 116

Супермартингал наименьший 595

Схема серий  $n$ -рынков 619

## Т

Текущая процентная ставка 22, 312

Теорема Гирсанова 508, 519, 737

Теорема Гирсанова для  
семимартингалов 765

Теорема Дуба 266

Теорема Дуба об остановке 266, 505

Теорема Дуба о сходимости 266, 504

Теорема Леви 265, 332

Теорема Лундберга—Крамера 96

Теорема о нормальной корреляции 105

Теория АРТ 68, 619

Теория САРМ 64

Тик 338

Тождества Вальда 266

Точечный процесс маркированный 345

Точечный процесс мультивариантный  
345

Треугольник Серпинского 246

Триплет  $(B, C, \nu)$  215, 734

Триплет предсказуемых характеристик  
семимартингала 734

Тяжелые хвосты 355

## У

Уравнение Долеан 332

Уравнение Камерона—Мартина 296

Уравнение Колмогорова прямое и  
обратное 293, 778

Уравнение Колмогорова—Чэпмена 293

Уравнение Ланжевена 261

Уравнение теплопроводности 296

Уравнение теплопроводности  
неоднородное 296

Уравнение Фейнмана—Каца 296

Уравнения Юла—Волкера 154

Условие «гладкого склеивания» 685, 821,  
849, 850, 863

Условие Дирихле 849

Условие Казамаки 739

Условие линейного роста 287

Условие Липшица локальное 287

Условие Неймана 849

Условие Новикова 291, 510, 739

Условия обычные 265, 317

Условная двуточечность 548, 558

Условно-гауссовский случай 519

Условное математическое ожидание  
обобщенное 113

Устойчивость 210

## Ф

Фильтр Калмана—Бьюси 193

Финансовая инженерия 83

Финансовая теория 83

Финансовая турбулентность 257

Финансовый рынок 13

Форвард 34, 586

Формула Байеса 507, 561

Формула Башелье 31, 801

Формула Блэка и Шоулса 31, 804, 806,  
811

Формула (замены переменных) Ито 279,  
280, 331

Формула Ито—Мейера 822

Формула Йора 539, 756

Формула Леви—Хинчина 215, 736

Формула Танака 289, 334

Фрактал 245

Фрактальная геометрия 242, 245

Фрактальный шум 242, 254, 369

Фундаментальное решение 58

Фундаментальное уравнение 777

Фундаментальное уравнение в частных  
производных 778

Функции адаптированные 274

Функции согласованные 274

Функции Хаара 267

Функции Шаудера 267

Функционал броуновский 278

Функционал измеримый 291

Функционал прогрессивно измеримый 291  
 Функция пограничная 841  
 Функция предсказуемая 320  
 Функция простая 274, 318  
 Функция урезания 216, 531  
 Функция эксцессивная 599  
 Функция элементарная 274, 318  
 Фьючерс 586

## Х

Хаос 242  
 Хаотический белый шум 200  
 Хедж 463  
 Хедж верхний, нижний 462  
 Хеджирование американского типа 604  
 Хеджирование европейского типа 580  
 Хедж совершенный 463  
 $\chi^2$ -тест 353  
 Холдинговая компания 91

## Ц

Цена верхняя, нижняя 463  
 Цена исполнения 43  
 Цена рациональная (справедливая, взаимоприемлемая) 43, 467  
 Цена совершенного хеджирования европейского типа 572

Цена форвардная 589  
 Цена фьючерсная 590  
 Цена хеджирования европейского типа 774  
 Ценные бумаги основные 15  
 Ценные бумаги производные 15, 653  
 Ценные металлы 17  
 Центр 217

## Ч

Черный шум 256  
 Число Фейгенбаума 200

## Э

Экспонента стохастическая (Долеан) 103, 266, 283, 332  
 Экссесс 107  
 Эксцессивная мажоранта 599  
 Эффект асимметрии 183  
 Эффективный портфель 61  
 Эффект кластерности 75, 387, 388  
 Эффект Марковитца 62  
 Эффект некоррелированности 63  
 Эффект отрицательной коррелированности 62, 377  
 Эффект подъемной силы 183  
 Эффект рычага 183  
 Эффекты «кластерности» 336

# Указатель обозначений

$\mathcal{A}_{\text{loc}}$	327	$\mathcal{MT}$	118	$V^*(T, x)$	842
$\mathbb{C}^*(T^0, T)$	862	$\mathcal{MT}^d$	709	$V^*(t, x)$	842
$\mathbb{C}^0(T^0, T)$	858	$\mathcal{MT}_{\text{loc}}^d$	709	$V^*(x)$	817
$\mathbb{C}_T$	31, 806, 807, 844	$\mathcal{M}_{\text{UI}}$	116	$\mathcal{V}^+$	328
$\mathbb{C}_T(\delta; r)$	815	$\mathcal{M}_{\text{loc}}$	117	$V_T^*(x)$	818
$\mathbb{C}(f_T; \mathbf{P})$	774	NA	716	$V(T, x)$	842
$\text{Corr}(h_n, h_m)$	144	$\mathcal{O}$	730	$\text{Var}_{(a,b]}(H)$	371
$\text{Cov}(h_n, h_m)$	144	$\Omega$	101	$\text{Var}_{(a,b]}(H; \Delta)$	371
$\mathbb{C}_{[t,T]}$	811, 844	$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbf{P})$	102	$V$	809
$\mathbb{D}$	248	$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$	346	$V(t, x)$	842
DEM/USD	351	$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$	52, 101	$\widetilde{W}$	732
$D^T$	844	$\Omega = \{\omega\}$	52	$W * \mu$	730
$\Delta$	809	$\mathbf{P}$	52, 101, 321, 730	$\text{hAX}, XB$	329
$D_t^T$	844	$\mathbb{P}^*(T^0, T)$	862, 864	$[X, Y]$	327, 329
$(E, \mathcal{E})$	729	$\mathbb{P}^0(T^0, T)$	858	$X \stackrel{d}{=} Y$	219
$\mathcal{E}(\bar{H})$	103, 104	$\mathbb{P}_N$	40	$(X_n, \mathcal{F}_n)$	115
ELMM	716	$\mathbb{P}_T$	807, 852	$X^n \xrightarrow{d} X$	219
EMM	716	$\mathbb{P}_T^*$	852	$Y^*(t, x)$	843
$\mathcal{F}$	52, 101	$\mathbf{P}(T, T)$	20	$Y(t, x)$	843
$(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$	52	$\mathbb{P}_T(\delta; r)$	815	$\alpha$	211
$\mathcal{F}_t$	264	$\Pi_+(X)$	714	$\beta$	211
$\mathcal{F}_t^+$	263	$\Pi_a(X)$	713	$\beta(A)$	65, 710
$\mathcal{F}_t^0$	263	$\Pi_g(X)$	714	$\chi^2$	355
$\mathcal{F}_\tau$	134	$\Psi_+(X)$	714, 715	$(f \cdot B)_t$	278
$\mathcal{F}_{\tau-}$	134	$\Psi_a(X)$	714, 715	$(f \cdot X)$	321
$G\mathcal{M}$	118	$\Psi_g(X)$	714, 715	$f(t, s)$	313
$G(W)$	732	$\mathbf{P}(t, T)$	21	$f(t, t)$	314
$\mathbb{H}$	228, 248, 376	$\mathcal{R}/\mathcal{S}$	390	$\int_{[0,t]} f(s, \omega) dB_s$	278
$\mathcal{H}^2$	321	$\mathcal{R}_n$	390	$\widehat{k}_n$	107
$H(g)$	729	$SF(X)$	713	$\mu$	211
$\dot{H}(g)_t$	729	$\widehat{S}_N$	353	$\nu_{(a,b]}(H; \Delta)$	372
$\mathcal{H}_{\text{loc}}^2$	321	$S\alpha S$	213	$\nu_{(a,b]}^{(\delta)}(H; \Delta)$	372
$I_t(f)$	278, 321	$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$	213	$\rho(T - t, T)$	22
$I_\infty(f)$	321	$\mathcal{S}_n^2$	391	$\rho$	809
$\widehat{K}_N$	353	$(\widetilde{S}_t)$	350	$r(t)$	314
$\mathcal{K}_{\text{loc}}$	321	$S_t^a$	338, 339	$r(t, T)$	313
$\text{Law}(h_n)$	124	$S_t^a - S_t^b$	344	$\sigma$	211
$\text{Law}(h_n   \mathcal{F}_{n-1})$	124	$S_t^b$	339	$\theta$	809
hAMB	111, 112, 116	$U_*(x)$	828	$x * (\mu - \nu)$	729
$\mathfrak{M}_0^\infty$	817	$\mathcal{V}$	328	$x * \nu$	729

## **Магазин «Математическая книга»**

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)  
Книги в электронном виде: <http://www.litres.ru/mcnmo/>  
<http://globalf5.com/search/founded/type/book/area/publisher/stype/extended/q/мцнмо>

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; [www.umlit.ru](http://www.umlit.ru), [www.textbook.ru](http://www.textbook.ru), [абрис.рф](http://абрис.рф)
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; [www.kniga.ru](http://www.kniga.ru)

## **Наши партнеры в Москве и Подмоскowie**

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; [www.mdk-arbat.ru](http://www.mdk-arbat.ru)
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; [www.bookmg.ru](http://www.bookmg.ru)
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; [www.arg.ru](http://www.arg.ru)
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; [www.uchebnik.com](http://www.uchebnik.com)
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; [www.shkolkniga.ru](http://www.shkolkniga.ru)
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, [www.urss.ru](http://www.urss.ru)
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

## **Наши партнеры в Санкт-Петербурге**

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; [k\\_i@bk.ru](mailto:k_i@bk.ru), [k\\_i@petroglyph.ru](mailto:k_i@petroglyph.ru)
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

## **Наши партнеры в Челябинске**

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)

## **Наши партнеры в Украине**

- Александр Елисаветский. Рассылка книг налоговым платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; [df-al-el@bk.ru](mailto:df-al-el@bk.ru)