С.М.Кларк
М.Р.Харди
А.С.Макдоналд
Г.Р.Вотерс

Теория риска

Учебные материалы

Москва 2008

Оглавление

Часть I

Глава 1

Распределения ущерба

Цели главы

К концу данной главы вы будете уметь:

- описывать и использовать простые функции ущерба
- описывать и применять свойства стандартных функций потерь

§1 Введение

Компаниям, занимающимся общими видами страхования, необходимо исследовать опыт страховых возмещений и применять математические средства для различных целей, включающих в себя:

- определение ставки страхового взноса (т.е. решение какой именно размер премии необходимо взимать с владельцев страхового полиса)
- резервирование (т.е определение величины средств, которые должны быть сохранены для покрытия страховых исков)
- пересмотр договоров перестрахования
- проверку платежеспособности (т.е. определение финансового положение компании)

В данной главе мы рассмотрим распределения ущерба, которые являются математическим методом моделирования индивидуальных исков.

Будут введены несколько новых статистических распределений, и мы увидим каким образом они могут быть применены для понимания имеющихся данных об исках. Затем соответствующие распределения будут

будут использованы для оценки вероятностей и для вычисления премий за общие виды страхования.

Теорию, разработанную здесь, мы используем в следующей главе при рассмотрении эффектов от применения перестрахования и полисов превышения ущерба, а также в главе 3 (коллективные иски).

Практические аспекты установки размеров премии за общие виды страхования рассмотрены в разделе G

Краткий конспект главы начинается с введения терминологии, используемой при рассмотрении распределений для долгосрочного страхования. Затем сами распределения рассматриваются более подробно. Далее следует раздел, посвященный композициям распределений. Заметим, что обозначения, используемые в кратком конспекте слегка отличаются от используемых в остальной части курса. Экзаменационные вопросы могут быть представлены в различном виде. Тем не менее, экзаменаторы точно объясняют свои обозначения.

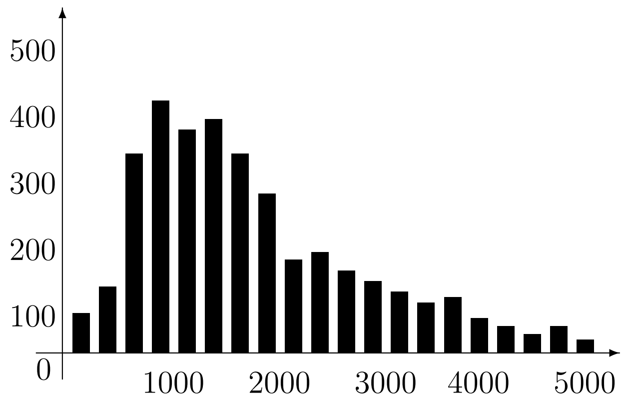
§2 Распределения ущерба

2.1 Типичные распределения ущерба

Индивидуальные потери

При общем страховании иски обычно удовлетворяются по принципу возмещения ущерба, т.е. размер выплаты равен сумме, необходимой для замены утраченного или восстановления поврежденного имущества. Таким образом величина страхового возмещения будет изменяться от иска к иску в зависимости от природы и серьезности причиненного ущерба.

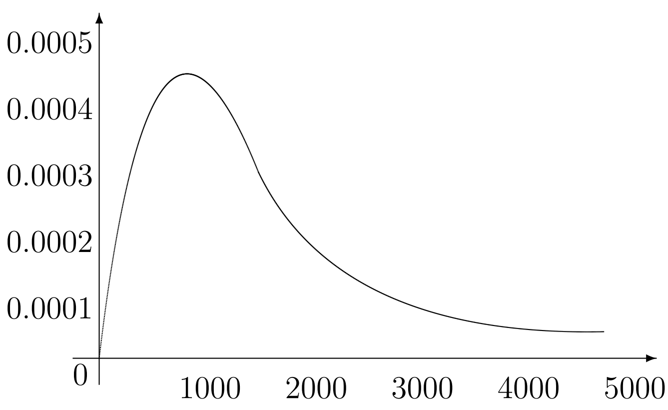
Иски по общим видам страхования изучаются путем построения гистограммы. Например, ниже представлена гистограмма, показывающая количество исков определённой величины в типичном портфеле, включающем в себя страхование автотранспорта.



Основная часть выплат приходится на относительно небольшие суммы, например помятые крылья или украденные автомагнитолы. В то же время иногда присутствуют и значительно большие выплаты, например компенсации людям, которые были травмированы.

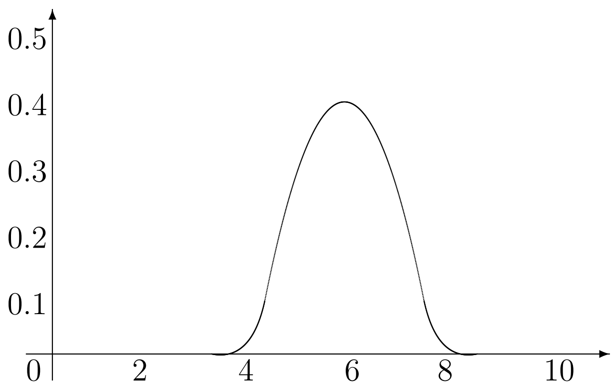
Величины индивидуальных исков могут быть описаны математически путем рассмотрения *частот* выплат того или иного размера. Это определяет распределение ущерба, которое является функцией плотности распределения величины индивидуального иска. Распределение ущерба имеет обычные свойства функции плотности распределения, т.е. интеграл по области определения равен 1 и вероятности могут быть найдены путем интегрирования.

Например, распределение ущерба, определенное функцией, представленной на графике ниже, может являться хорошей моделью для распределения исков по автострахованию, которое показано на графике выше.



Обычно, распределения ущерба имеют положительную асимметрию. Наибольшее число исков приходится на центральную часть, но в то же время присутствует небольшое число гораздо более значительных исков вытягивающих 'хвост' распределения.

Агрегированные потери
Мы также заинтересуемся агрегированными распределениями ущерба (т.е. суммарной величиной исков). Например, на графике ниже показана модель распределения вероятностей для агрегированных исков в каждом месяце для страхового портфеля, рассмотренного выше.



2.2 Моменты и производящая функция моментов

Если мы рассматриваем конкретное распределение ущерба, то можно вычислить моменты величины индивидуального иска, а также значение дисперсии. Одним из способов сделать это является использование производящей функции моментов.

Пример 1.1 Величина индивидуального иска моделируется усеченным экспоненциальным распределением с плотностью равной:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-M)},\ X > M$$

Найти производящую функцию моментов и вывести из неё формулы для математического ожидания и дисперсии величины индивидуального иска.

Решение Производящая функция моментов случайной величины X по определению есть:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int\limits_M^\infty e^{tX}\lambda e^{-\lambda(x-M)}dx = \lambda e^{\lambda M}\int\limits_M^\infty e^{-(\lambda-t)x}dx$$

Вычисляя интеграл (при $t < \lambda$), имеем:

$$M_X(t) = \lambda e^{\lambda M}\left[\frac{e^{-(\lambda-t)x}}{-(\lambda-t)}\right]_M^\infty = \lambda e^{\lambda M}\left[0+\frac{e^{-(\lambda-t)M}}{\lambda-t}\right] = \frac{\lambda}{\lambda-t}e^{tM}$$

В данном случае наиболее простым способом вычисления моментов является представление производящей функции в виде ряда, а затем использование её свойств:

$$M_X(t) = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1} e^{tM} = \left(1+\frac{t}{\lambda}+\frac{t^2}{\lambda^2}+\cdots\right)\left(1+tM+\frac{t^2M^2}{2}+\cdots\right)$$

Т.е.

$$1+tE(X)+\frac{t^2}{2}E(X^2)+\ldots = 1+t\left(\frac{1}{\lambda}+M\right)+t^2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{M}{\lambda}+\frac{M^2}{2}\right)+\cdots$$

Сравнивая коэффициенты при t и t^2, находим, что:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}+M$$

и

$$\frac{1}{2}E(X^2) = \frac{1}{\lambda^2}+\frac{M}{\lambda}+\frac{M^2}{2} \Rightarrow E(X^2) = 2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{M}{\lambda}+\frac{M^2}{2}\right)$$

Таким образом, дисперсия равна:

$$Var(X) = E(X^2)-[E(X)]^2 = \left(\frac{2}{\lambda^2}+\frac{2M}{\lambda}+M^2\right)-\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2M}{\lambda}+M^2\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

(Также эти формулы можно было получать иначе, дифференцируя производящую функцию моментов и полагая $t = 0$)

В случае распределений, не имеющих простого выражения для производящей функции, моменты нужно находить путем интегрирования или при помощи таблиц.

Пример 1.2 Размер индивидуального иска имеет логнормальное распределение с плотностью

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}\right)^2\right],\ x>0$$

Найти среднюю величину иска.

Решение Средняя величина иска является математическим ожиданием случайной величины X и определяется как:

$$E(X) = \int\limits_0^\infty x\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

Использование подстановки $z = \frac{\log x - \mu}{\sigma}$ (откуда $dz = \frac{dx}{x\sigma}$ и $x = e^{\mu + \sigma z}$) приводит к следующему выражению:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mu + \sigma z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Мы можем вычислить этот интеграл, выделяя полный квадрат:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2\sigma z + \sigma^2) + \frac{1}{2}\sigma^2} dz = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma)^2} dz$$

Подынтегральная функция в последнем выражении является плотностью случайной величины имеющей нормальное распределение $N(\sigma, 1)$. Таким образом, последний интеграл равен 1, и мы получаем, что:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

Вопрос для самоподготовки 1.1. Вывести формулу для производящей функции моментов стандартного нормального распределения

Вопрос для самоподготовки 1.2. Случайная величина X имеет распределение *логгамма* с параметрами α и λ, если $\log X$ имеет распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Вывести формулу для средней величины иска, если случайная величина индивидуального иска имеет распределение $LogGamma(\alpha, \lambda)$

2.3 Стандартные распределения ущерба

Мы уже встречались с некоторыми стандартными статистическими распределениями, которые могут быть использованы для моделирования исков. Например, гамма и логнормальное распределения весьма часто оказываются подходящими. Иногда и более простые распределения, такие как экспоненциальное (которое является частным случаем гамма распределения) или нормальное могут оказаться вполне подходящими.

Статистиками были предложены несколько видов распределений, являющихся наиболее подходящими для моделирования отдельных типов ущерба при общем страховании. Три из этих типов распределений кратко описаны ниже. Они включены в справочные таблицы в Приложении. Простое выражение для производящей функции моментов этих распределений отсутствует.

1. **Распределение Парето**[1]

   Распределение Парето представлено в двух формах:

[1] Вилфредо Парето (1848-1923) был итальянским экономистом и социологом

- **Распределение Парето (двухпараметрическая форма)**
  Функция плотности распределения имеет следующий вид:

$$f_X(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}$$

- **Обобщенное распределение Парето (трехпараметрическая форма)**
  Функция плотности распределения имеет следующий вид:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + k)\lambda^\alpha x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)(\lambda + x)^{\alpha+k}}, \ x > 0$$

Двухпараметрическое распределение является частным случаем обобщенного распределения Парето при $k = 1$.

Вопрос для самоподготовки 1.3. Проверить формулу для математического ожидания двухпараметрическое распределения Парето, представленную в "Таблицах". Для каких значений параметров верна данная формула?

2. **Распределение Бурра**[2]

Распределение Бурра является обобщением двухпараметрического распределения Парето, в котором переменная x заменена на x^γ. Функция плотности распределения имеет следующий вид:

$$f_X(x) = \frac{\alpha\gamma\lambda^\alpha x^{\gamma-1}}{(\lambda + x^\gamma)^{\alpha+1}}, \ x > 0$$

Вопрос для самоподготовки 1.4. Проверить, что формула для математического ожидания распределения Бурра, приведенная в "Таблицах сводится к формуле для математического ожидания распределения Парето при $\gamma = 1$

3. **Распределение Вейбулла**

Распределение Вейбулла является обобщением экспоненциального распределения, в котором переменная x заменена x^γ. Функция плотности распределения имеет следующий вид:

$$f_X(x) = c\gamma x^{\gamma-1}e^{-cx^\gamma}, \ x > 0$$

[2]Бурр предложил это распределение в 1942г.

Вопрос для самоподготовки 1.5. Вывести формулу для математического ожидания распределения Вейбулла.

Вопрос для самоподготовки 1.6. Проверить, что формула для дисперсии распределения Вейбулла, приведенная в "Таблицах сводится к формуле для дисперсии экспоненциального распределения при $\gamma = 1$.

Функции плотности двухпараметрического распределения Парето, распределения Бурра и распределения Вейбулла могут быть проинтегрированы. Таким образом функции распределения имеют простой вид и вероятности могут быть легко найдены.

Пример 1.3 Найти формулу для медианы двухпараметрического распределения Парето. Начертите график медианы и математического ожидания как функций параметра α и прокомментируйте его.

Решение По определению, медианой m является точка, в которой $P(X \leqslant m) = \frac{1}{2}$. Полагая $\alpha > 1$, будем иметь:

$$\frac{1}{2} = \int_0^m \alpha\lambda^\alpha(\lambda + x)^{-\alpha-1}dx = -\lambda^\alpha \frac{1}{(\lambda + x)^\alpha}\bigg|_0^m = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + m}\right)^\alpha$$

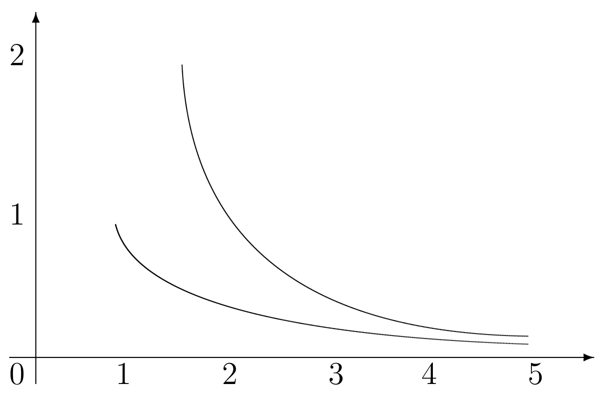
Данная формула может быть переписана в следующем виде:

$$m = \lambda(\sqrt[\alpha]{2} - 1)$$

Математическое ожидание равно:

$$\mu = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

Графики для m/λ (нижний график) и μ/λ (верхний график) для значений $\alpha > 1$ показывают, что математическое ожидание всегда больше медианы, т.е. распределение Парето всегда имеет положительную асимметрию.



Вопрос для самоподготовки 1.7. Вычислить долю исков в размере от 2500 до 5000, если величина индивидуального иска подчиняется распределению Вейбулла с параметрами $c = 0.00001, \gamma = 1.5$

Вопрос для самоподготовки 1.8. Вычислить долю исков превышающих 300000, если величина индивидуального иска (измеренная в тысячах) подчиняется обобщенному распределению Парето с параметрами $\alpha = 5, \lambda = 200, k = 2$

2.4 Влияние инфляции на величину страховых выплат

Пусть для моделирования возможных исков, входящих в состав страхового портфеля, используется гамма распределение. Какое влияние оказывает инфляция на на распределение величины индивидуального риска?

Пусть случайная величина X индивидуального иска в году 0 подчиняется гамма распределению $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Пусть инфляция составляет 10% в год, тогда случайная величина иска в году 1 будет равна $Y = 1.1X$. Мы можем вычислить функцию плотности распределения этой случайной величины путем преобразования интеграла. Используя замену переменных $y = 1.1x$, будем иметь:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{\lambda x}dx = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha \left(\frac{y}{1.1}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda y/1.1}\frac{dy}{1.1} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda/1.1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{1.1}y}dy$$

Сгруппировав члены в подынтегральном выражении, можно заметить, что оно является функцией плотности распределения, соответствующей гамма распределению $\Gamma(\alpha, \lambda/1.1)$, следовательно, случайная величина Y имеет это распределение. Заметим, что математическое ожидание гамма распределения $\Gamma(\alpha, \lambda/1.1)$ равно $\frac{1.1\alpha}{\lambda}$, следовательно, средняя величина иска увеличится на 10%, как и ожидалось.

Вопрос для самоподготовки 1.9. Насколько возрастет дисперсия величины индивидуального иска?

Вопрос для самоподготовки 1.10. Пусть величина индивидуального иска подчиняется распределению Парето $Pareto(\alpha, \lambda)$. Какому распределению будет подчиняться величина индивидуального иска, если инфляция составила $100k\%$?

2.5 Краткое изложение полученных результатов

Вы должны уметь вычислять вероятности и находить формулы для математического ожидания и дисперсии для всех стандартных функций распределения ущерба. Также вам необходимо уметь находить формулы для производящих функций некоторых распределений. Если нахождение некоторых из них вызывает у вас проблемы, то ниже приведен список результатов, которые вы должны уметь доказывать, с рекомендациями о том, каким способом можно это сделать.

Вы не должны заучивать содержимое этой таблицы наизусть. Гораздо важнее понимание используемых математических методов, так что вы сможете использовать их при решении конкретных задач, предложенных на экзамене.

Распределение	Величина	Способ вычисления
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	Вероятности	Использовать распределение χ^2
	Производящая функция моментов	Привести интеграл к виду гамма распределения $\Gamma(\alpha, \lambda - t)$
	Математическое ожидание и дисперсия	Использовать производящую функцию моментов или... Привести интеграл к виду гамма распределения
$Exp(\lambda)$	Вероятности	Прямое интегрирование
	Функция распределения	Так же как и вероятности

Распределение	Величина	Способ вычисления
	Производящая функция моментов	Привести интеграл к виду экспоненциального распределения $Exp(\lambda - t)$
	Математическое ожидание и дисперсия	Проинтегрировать по частям или представить производящую функцию моментов в виде ряда
$Pareto(\alpha, \lambda)$	Вероятности	Выполнить замену $u = \lambda + x$
	Функция распределения	Так же как и вероятности
	Математическое ожидание и дисперсия	Выполнить замену $u = \lambda + x$, или интегрировать по частям, или представить x в числителе как $(\lambda + x) - \lambda$ и вычислить два получившихся интеграла
Обобщенное $Pareto(\alpha, \lambda, k)$	Вероятности	Выполнить замену $u = \lambda + x$ (подходит только в случае "хороших"значений k)
	Функция распределения	Так же как и вероятности
	Математическое ожидание и дисперсия	Привести интеграл к виду обобщенного распределения Парето с параметрами $\alpha - 1, \lambda, k + 1$ (для вычисления математического ожидания) либо $\alpha - 2, \lambda, k + 2$ (для вычисления дисперсии)
$N(\mu, \sigma^2)$	Вероятности	Использовать таблицы
	Производящая функция моментов	Выполнить замену $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, а затем выделить полный квадрат под знаком интеграла
$LogN(\mu, \sigma^2)$	Вероятности	Использовать соответствующее нормальное распределение. Например, $P(X > k) = P(N(\mu, \sigma^2) > \log k)$
	Математическое ожидание и дисперсия	Использовать производящую функцию моментов соответствующего нормального распределения или выполнить замену $z = \frac{\log x - \mu}{\sigma}$ и проинтегрировать по частям

Распределение	Величина	Способ вычисления
$Weibull(c, \gamma)$	Вероятности	Выполнить замену $u = cx^\gamma$
	Функция распределения	Так же как и вероятности
	Математическое ожидание и дисперсия	Выполнить замену $u = cx^\gamma$ и привести конечный интеграл к виду гамма распределения
$Burr(\alpha, \lambda, \gamma)$	Вероятности	Выполнить замену $u = \lambda + x^\gamma$
	Функция распределения	Так же как и вероятности
	Математическое ожидание и дисперсия	Выполнить замену $u = \lambda + x^\gamma$ и привести конечный интеграл к виду гамма распределения

2.6 Смешанные распределения

До настоящего момента мы подразумевали, что все возможные иски из страхового портфеля будут иметь одно и то же распределение, которое характеризуется одним (возможно неизвестным) набором параметров. Это предположение нереалистично в том смысле, что различные виды страховых полисов могут вести к искам, величины которых подчиняются различным распределениям.

Будем рассматривать портфель, включающий в себя полисы страхования автотранспорта. Предполагаем, что размер возможного иска по каждому полису имеет экспоненциальное распределение. Более реалистичным предположением является то, что параметр этого экспоненциального распределения не фиксирован и будет изменяться от полиса к полису. В этом случае суммарное распределение ущерба будет являться смесью ущерба из большого диапазона различных экспоненциальных распределений, каждое из которых со своим собственным значением параметра. Возникает вопрос: каково суммарное распределение ущерба от страхового портфеля? Ответ на него будет зависеть от того, каким образом различные значения параметра распределены среди владельцев полисов. Вместо рассмотрения λ в качестве фиксированного параметра, нам теперь необходима модель распределения значений λ по всему страховому портфелю.

Пусть λ_i является параметром экспоненциального распределения для i-го владельца полиса, и суммарное распределение λ_i является гамма распределением $\Gamma(\alpha, \sigma)$. Можем ли мы найти распределение суммарных потерь?

Мы знаем, что условное распределение $X|\lambda$ является экспоненциальным $Exp(\lambda)$ и что λ имеет гамма распределение $\Gamma(\alpha, \sigma)$. Взвешивая индивидуальные распределения с помощью функции плотности значений параметра, получим следующее безусловное распределение:

$$P(X = x) = \int_0^\infty f_{X|\lambda}(x) f_\lambda(\lambda) d\lambda$$

Найдем безусловное распределение, 'исключая интегрированием' параметр λ. Имеем:

$$P(X = x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \delta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\delta\lambda} d\lambda$$

Приводя интеграл к виду функции распределения для гамма распределения $\Gamma(\alpha + 1, \delta + x)$, будем иметь:

$$P(X = x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\delta+x)^{\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (\delta+x)^{\alpha+1} \lambda^\alpha e^{-(\delta+x)\lambda} d\lambda$$

Но интеграл просто равен 1, таким образом получаем, что:

$$P(X = x) = \frac{\alpha\delta^\alpha}{(\delta+x)^{\alpha+1}}, \ x > 0$$

Мы получили функцию плотности распределения $Pareto(\alpha, \delta)$. Таким образом можно сказать, что когда экспоненциальные распределения ущерба смешиваются при помощи гамма распределения, то итоговым распределением будет распределения Парето $Pareto(\alpha, \delta)$.

Вопрос для самоподготовки 1.11. Ежегодное количество исков по индивидуальным полисам, входящим в страховой портфель, имеет распределение Пуассона с параметром θ. Изменение θ в зависимости от полиса моделируется в предположении, что индивидуальные значения θ имеют гамма распределение $\Gamma(\alpha, \delta)$ на страховом портфеле. Вычислить смешанное распределение ежегодного числа исков по каждому из полисов в страховом портфеле.

Вопрос для самоподготовки 1.12. Число исков по индивидуальным полисам страхового портфеля имеет распределение $B(n, p)$. Изменение параметра p подчиняется бета распределению $Beta(\alpha, \beta)$. Найти смешанное распределение.

§3 Подбор подходящего распределения ущерба

3.1 Выбор распределения

Выбор распределения, подходящего для моделирования определенного страхового портфеля, включает в себя следующие шаги:

1. Определение общего вида распределения размеров иска (например, подсчет числа исков, величина которых попадает на тот или иной интервал, и построение гистограммы).

2. Выбор семейства распределений, имеющих схожую форму.

3. Оценка параметров распределения (например методом моментов или методом максимального правдоподобия)

4. Проверка гипотезы для определения того, является ли выбранное распределение и его параметры хорошей моделью для рассматриваемых возможных исков (например, используя критерий χ^2)

При выборе подходящего семейства распределений для описания распределения ущерба необходимо учесть следующие факторы:

- Цель
  Пригодность каждого конкретного распределения будет зависеть от цели анализа. Например, если распределение используется для вычисления базовой премии, то наиболее важной задачей будет являться выбор распределения, наиболее точно описывающего диапазон значений, на который приходится основная часть исков. В то же время, если распределение используется для обзора планов перестрахования или обдумывания эффектов от очень больших исков, то приоритетной задачей будет являться выбор распределения, наиболее точно описывающего верхнюю границу исков.

- Общий вид
  Распределение ущерба должно соответствовать рассматриваемому распределению исков с учетом интервалов допустимых значений случайных величин, дисперсии, асимметрии и общего вида. Например, нормальное распределение обычно не является подходящим для моделирования величины индивидуального иска, т.к. оно всегда является симметричным, в то время как большинство рассматриваемых исков имеют положительную асимметрию. Так же и экспоненциальное распределение не является предпочтительным при

описании небольших исков вследствие того, что функция плотности распределения убывает монотонно, вместо того, чтобы иметь "горб в центре"как у многих других распределений.

- "Хвосты"
  Вследствие того что очень большие риски относительно редки, достаточно сложно быть уверенным в точности вида распределения ущерба на верхней границе. В то же время крайне важно не занизить оценку числа исков, попадающих на эту часть распределения, т.к. именно они по определению включают в себя наибольшую часть средств. Функции плотности большинства стандартных статистических распределении включают в себя экспоненту (например, гамма распределение содержит $e^{-\lambda x}$). Вследствие того что эти распределение имеют экспоненциальный "хвост они убывают очень быстро. Другие распределения, такие как Парето или Бурра, содержат x в некоторой степени. Вследствие того что эти распределения имеют полиномиальные хвосты, они убывают с меньшей скоростью. Распределения ущерба с полиномиальными "хвостами"могут быть более пригодными для моделирования больших исков, потому что их "тяжелые хвосты"уменьшают риск недооценки частоты больших исков.

3.2 Выбор значений параметров

Как только вид моделирующего распределения выбран, необходимо решить каким образом оценивать значение каждого параметра. Мы рассмотрим три метода определения величин параметров:

1. Метод моментов

2. Оценка методом максимального правдоподобия

3. Метод процентилей

Далее приводится краткое описание этих методов.

Метод моментов

Для получения оценки параметра по методу моментов, необходимо приравнять выборочные и теоретические начальные моменты. Например, если бы мы пытались оценить значение одного параметра, то решали бы уравнение:

$$E(X) = \frac{\sum x_i}{n}$$

Т.е. приравнивали бы первые начальные моменты.

Если бы мы пытались найти оценки для двух параметров (например, если бы мы подбирали гамма распределение и нам нужно было бы найти оценки для α и λ), то решали бы систему уравнений:

$$\begin{cases} E(X) = \dfrac{\sum x_i}{n} \\ E(X^2) = \dfrac{\sum x_i^2}{n} \end{cases}$$

В действительности в двухпараметрическом случае оценки обычно получаются приравниванием выборочных и теоретических математических ожиданий и дисперсий. В том случае, если в знаменателе выборочной дисперсии стоит n, мы будем иметь те же самые оценки, которые были бы получены приравниванием первых двух начальных моментов. В более общем случае, мы можем использовать столько уравнений вида $E(X^k) = \frac{\sum x_i^k}{n}, k = 1, 2, \ldots$, сколько нам необходимо для вычисления оценок значимых параметров.

Пример 1.4 Основываясь на анализе прошедших исков, страховая компания считает, что средняя величина индивидуального иска в выделенной категории в следующем году составит 5000, а стандартное отклонение 7500. Необходимо оценить долю исков, размер которых превысит 25000, если величина индивидуального иска имеет логнормальное распределение.

Решение Вычисление формул для математического ожидания и стандартного отклонения логнормального распределения приводит к следующим выражениям:

$$e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = 5000, \ e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\sqrt{e^{\sigma^2}-1} = 7500$$

Разделим второе выражение на первое. Будем иметь:

$$\sqrt{e^{\sigma^2}-1} = \frac{7500}{5000} = 1.5 \Rightarrow \sigma^2 = 1.179$$

Теперь мы можем вычислить значение μ:

$$\mu = \ln 5000 - \frac{1}{2}1.179 = 7.928$$

Доля исков, превышающих 25000, является всего лишь вероятностью того, что размер индивидуального иска превысит значение 25000:

$$P(X > 25000) = P(\ln X > \ln 25000) = P\big(N(7.928, 1.179) > \ln 25000\big) =$$
$$= P\left(N(0,1) > \frac{\ln 25000 - 7.928}{\sqrt{1.179}}\right) = 1 - \Phi(2.025) = 0.021$$

Т.е. размер 2.1% исков превысит 25000.

Вопрос для самоподготовки 1.13. Повторите вычисления, считая, что величина иска подчиняется распределению Парето. Прокомментируйте свой ответ.

Оценка максимального правдоподобия

Нахождение оценки максимального правдоподобия включает в себя следующие шаги:

1. Выпишите функцию правдоподобия. Если правдоподобие основано на наборе известных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то функция правдоподобия примет вид $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$, где $f(x)$ является функцией плотности распределения (или функцией вероятности в дискретном случае), параметры которого оцениваются.

2. Прологарифмируйте. Это упростит вычисления.

3. Продифференцируйте функцию правдоподобия по каждому неизвестному параметру и приравняйте полученное(-ые) выражение(-я) к нулю.

4. Решите итоговое(-ые) уравнение(-я) для нахождения оценки максимального правдоподобия

5. Путем нахождения второй производной проверьте, что значения, которые вы нашли, *максимизируют* функцию правдоподобия.

Пример 1.5 Страховая компания моделирует стоимость ремонта застрахованных автомобилей, попавших в аварию, используя экспоненциальное распределение. Найти оценку максимального правдоподобия средней стоимости, если средняя стоимость ремонта составила 2200 и было отремонтировано 1000 автомобилей.

Решение Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ означает индивидуальную стоимость ремонта (где $n = 1000$).

$$L = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \overline{x}}$$

Где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ означает среднюю величину иска.

Для нахождения оценки максимального правдоподобия, нам необходимо вычислить значение λ, максимизирующее величину L или, иначе, значение, максимизирующее $\ln L$:

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda n \overline{x}$$

Продифференцируем это выражения для нахождения стационарных точек:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln L = \frac{n}{\lambda} - n\overline{x}$$

Приравнивая левую часть к нулю, будем иметь:

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}} \Rightarrow \widehat{\lambda} = 1/2200$$

Вторая производная $\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln L = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$, а это означает, что найденная нами стационарная точка является точкой максимума.
Математическое ожидание экспоненциального распределения $Exp(\lambda)$ равно $1/\lambda$. Используя тот факт, что оценка максимального правдоподобия функции равна функции оценки, получаем, что оценка максимального правдоподобия для средней величины иска равна:

$$1/\widehat{\lambda} = \overline{x} = 2200$$

Вопрос для самоподготовки 1.14. Случайная величина X имеет распределение Бурра с параметрами $\gamma = 2, \lambda = 500$.Показать, что оценка максимального правдоподобия параметра α, основанная на случайной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равна $\widehat{\alpha} = \frac{n}{\sum\ln(500+x_i^2)-n\ln 500}$ и вычислить её значение, если была получена следующая выборка: $52, 109, 114, 163, 181$

Метод процентилей

Этот метод включает в себя установление равенства между выборочным и теоретическим процентилями. Выбор процентилей будет зависеть от числа оцениваемых параметров. В однопараметрическом случае обычно используются выборочная и теоретическая медианы. В двухпараметрическом случае могут быть использованы верхняя и нижняя квартили.

Пример 1.6 Используйте метод процентилей для вычисления параметров распределения Вейбулла, основываясь на следующей случайной выборке (значения были отсортированы по возрастанию). Величины исков выражены в тысячах.

0.1	0.5	2.2	4.1	28.1
0.2	0.7	2.6	5.9	30.0
0.2	0.9	2.9	6.2	49.2
0.3	1.3	3.2	12.1	63.8
0.4	1.8	3.3	15.2	118.0

Решение Так как мы оцениваем два параметра, то будем использовать верхнюю и нижнюю квартили для нахождения оценок c и γ в распределении Вейбулла.
Функция распределения имеет следующий вид:

$$\int\limits_0^x c\gamma t^{\gamma-1}e^{-ct^\gamma}dt = -e^{-ct^\gamma}\Big|_0^x = 1 - e^{-cx^\gamma}$$

Таким образом верхняя квартиль распределения Вейбулла — значение x, являющееся решением уравнения:

$$0.75 = 1 - e^{-cx^{\gamma}} \Rightarrow x = \left(\frac{\ln 4}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Решение уравнения $0.25 = 1 - e^{-cx^{\gamma}}$ для нахождения нижней квартили даст нам значение:

$$x = \left(\frac{\ln 4/3}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Исходя из имеющихся 25 выборочных значений, выборочные квартили будут соответствовать значению $\frac{1}{4} * 25 + \frac{1}{2} = 6.75$, которое равно 0.65, и значению $\frac{3}{4} * 25 + \frac{1}{2} = 19.25$, которое равно 12.875. Таким образом, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\ln 4}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 12.875 \\ \left(\dfrac{\ln 4/3}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0.65 \end{cases}$$

мы получим искомые оценки:

$$\widehat{\gamma} = 0.526, \widehat{c} = 0.361$$

3.3 Проверка качества выбранного распределения

Одним из способов проверки того, может ли выбранное распределение ущерба служить хорошей моделью для рассматриваемых величин исков, является критерий χ^2.

Пример 1.7 Анализ стоимости ремонта в примере 1.5 дает нам следующие значения в различных интервалах:

0-1000: 200	1000-2000: 3000	2000-3000: 250
3000-4000: 150	4000-5000: 100	5000+: 0

Используем эту информацию для проверки, является ли экспоненциальное распределение хорошей моделью для стоимости индивидуального ремонта.

Решение Мы проверяем:

H_0: Стоимость имеет экспоненциальное распределение.

H_1: Стоимость имеет не экспоненциальное распределение.

Для применения критерия χ^2 нам необходимо вычислить ожидаемые значения, т.е. наиболее вероятные значения в каждом интервале, при условии, что цена подчиняется экспоненциальному распределению. Используя нашу оценку параметра $\lambda = 1/2200$, вероятность того, что цена индивидуального ремонта попадет на интервал 2000-3000, может быть вычислена следующим образом:

$$\int_{2000}^{3000} \lambda e^{\lambda x} dx = -e^{\lambda x}\Big|_{2000}^{3000} = 0.1472$$

Тогда ожидаемое число исков на этом интервале равно $1000 * 0.1472 = 147.2$ Ожидаемые значения для всех интервалов могут быть вычислены аналогично:

$$365.3, 231.8, 147.2, 93.4, 59.3, 103.0$$

Теперь можно вычислить значение статистики χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(200-365.3)^2}{365.3} + \frac{(300-231.8)^2}{231.8} + \cdots + \frac{(0-103)^2}{103} = 331.89$$

У нас 6 интервалов, но мы установили равенство для итоговых значений и оценили один параметр. Таким образом у нас $6-1-1=4$ степени свободы. Вычисленное значение χ^2 намного превышает 14.86 — наибольшее значение для распределения χ^2 с 4 степенями свободы при доверительной вероятности 99.5%. Таким образом мы можем отвергнуть гипотезу H0 с абсолютной уверенностью и сделать вывод, что стоимость ремонтных работ не подчиняется экспоненциальному распределению.

Этот вывод также подтверждается следующим наблюдением: если бы значения имели экспоненциальное распределение, то мы ожидали бы увидеть монотонное убывание от интервала к интервалу. В то же время, мы видим, что значение в первом интервале на 100 меньше, чем во втором.

§4 Вычисление премий

4.1 Частоты исков

Фактическая частота исков для группы полисов страхования — это среднее количество исков на полис:

$$\text{Фактическая частота исков} = \frac{\text{Число исков}}{\text{Среднее число полисов}}$$

Ожидаемая частота исков для группы страховых полисов — это ожидаемое число исков на полис.

Пример 1.8 За прошедшие 5 лет страховая компания удовлетворила 7000 исков, касающихся молодых водителей со старыми автомобилями. Среднее число застрахованных водителей в данной группе за этот период составило 5000. Вычислите ежегодную частоту исков для данной категории водителей.

Решение Фактическая частота исков за 5 лет составила $7000/5000 = 1.4$, что соответствует ежегодной частоте исков $1.4/5 = 0.28$, т.е. 28% в год.

§5 Рисковые премии и офисные премии

Рисковая премия за полис общих видов страхования равна ожидаемой величине исков:

Рисковая премия = Ожидаемая частота исков $*$ Средняя величина иска

Пример 1.9 Вычислите рисковую премию на следующий год, если в предыдущем примере страховщик ожидает, что средняя величина выплат для данной категории водителей составит 1500.

Решение Рисковая премия на следующий год равна:

Ожидаемая частота исков $*$ Средняя величина иска $= 0.28 * 1500 = 420$
Т.е. 420 в год.

Офисная премия—реальная премия, взимаемая страховщиком. Теоретическая офисная премия может быть вычислена путем изменения рисковой премии (её увеличения) с учетом издержек, комиссии, желаемой прибыли и различных непредвиденных расходов и (её уменьшения) с учетом инвестиционной прибыли.

Пример 1.10 Вычислите теоретическую офисную премию, которую должна взимать компания в следующем году с упомянутой в предыдущем примере категории водителей, если:

- издержки на урегулирование каждого иска равны 100
- комиссия составляет 20% от офисной премии
- компания хочет иметь прибыль в размере 5% от величины офисных премий

Инвестиционный доход не учитывается.

Решение Теоретическая офисная премия на следующий год должна быть:

$$P = 420 + 100 * 0.28 + 0.2P + 0.05P \Rightarrow P = 448/0.75 = 597$$

Т.е 597 в год.

Вопрос для самоподготовки 1.15. Используя информацию, приведенную ниже, вычислите офисную премию для полисов в этот страховом портфеле:

Среднее число действительных страховых полисов в год	6200
Общее число исков, полученных за последние 10 лет	3150
Предполагаемое (текущее) распределение величины иска	$\Gamma(50, 0.02)$
Предполагаемые расходы по урегулированию иска (каждого)	50
Надбавка на прибыль и комиссия	35%

Вопрос для самоподготовки 1.16. Назовите три причины, по которым вычисления в предыдущем вопросе для самоподготовки могут не дать на практике адекватного результата.

Вопрос для самоподготовки 1.17. При исследовании величин страховых возмещений, уплаченных компанией по страховым полисам, входящим в портфель, были получены следующие результаты:

$0-500$:	120
$500-1000$:	386
$1000-1500$:	490
$1500-2000$:	322
$2000-2500$:	62

Для того чтобы проверить, является ли нормальное распределение адекватной моделью для представленных величин исков, из имеющихся данных были вычислены оценки μ и σ^2, а также соответствующие ожидаемые частоты для каждой категории: $104, 327, 564, 309, 76$. Проверьте, является ли нормальное распределение хорошей моделью для данных исков.

Глава 2

Основы теории–Распределения ущерба

§1 Введение

1.1 Страховое множество

Суммарное количество исков в отдельный период времени представляет фундаментальную важность для правильного управления страховой компанией. Ключевым допущением во всех моделях, изучаемых здесь, является то, что вероятность предъявления иска и величину(сумму) иска можно изучать отдельно. Таким образом, вероятность предъявления иска вычисляется в соответствии с некоторой простой моделью событий, попавших в определенный промежуток времени, и затем величина иска выбирается из распределения, описывающего эту величину.

1.2 Статистический фон

Для описания распределения случайных величин может быть использован ряд статистических методов. Конечная цель состоит в том, чтобы описать колебания величин исков с помощью нахождения распределения ущерба, которое в достаточной мере описывает иски, имеющиеся в действительности. Как правило, это осуществляется в два этапа.

На первом этапе, можно предположить, что иски происходят, как реализации известного распределения. Например, можно допустить, что логарифм величины иска следует, в умеренном приближении, нормальному распределению с известным значением и известным стандартным отклонением. Завершив процесс нахождения величины иска, мы могли бы переключить свое внимание на его результаты, нужные в страховании. Например, иски выше определенного уровня могут инициировать некоторые меры для перестрахования, в то время как иски ниже определенного уровня могут быть никогда не предъявлены, если франшиза будет в силе.

На практике же, точное распределение, описывающее иски, вряд ли когда-нибудь станет известно. На втором этапе, типичным методом действия является предположение, что исковое распределение - это член некоторого семейства. Параметры этого семейства должны быть оценены с использованием величины иска, записанной с помощью соответствующего метода, такого как метод максимального правдоподобия. Правда, если крупные иски будут ограничены (перестрахование) или некоторые незначительные иски не будут предъявлены (франшиза), при вычислениях могут возникнуть трудности. Можно провести множество исследований характера распределения, которое используется, чтобы описать переменную величины иска. И основным заключением является то, что у исковых распределений имеется тенденция быть совершенно асимметричными и с "тяжелыми хвостами".

1.3 Приблизительная оценка и критерий согласия

Методы максимального правдоподобия, моментов и процентилей могут использоваться в соответствующих распределениях для множества разных видов информации. Приемлемость распределения можно проверить формально, используя критерий χ^2. Метод процентилей описывается в секции 2.3; другие методы и критерий χ^2 содержатся в теме С1. Формуляр для плотностей, моментов производящих функций (если они существуют) для распределений, обсуждаемых в этой части, приводится в *Формуляре и таблицах для актуарных исследований.*

Экспоненциальное распределение

Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ, если

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

и, можно записать, $X \sim exp(\lambda)$.

Для оценки параметра экспоненциального распределения можно использовать метод максимального правдоподобия (ММП) или метод моментов.

Распределение Парето

Случайная величина X имеет Парето-распределение с параметрами α и λ, если

$$F(x) = 1 - \left[\frac{\lambda}{\lambda + x}\right]^{\alpha}$$

и, можно записать, $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$.

Легко проверить, что распределение Парето имеет функцию плотности

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0.$$

Метод моментов очень легко применить в случае Парето-распределений, но оценки, полученные таким способом, будут содержать довольно много стандартных ошибок, главным образом из-за S^2, выборочной дисперсии, имеющей очень большое отклонение. Однако, этот метод обеспечивает начальные оценки для дальнейшего использования более эффективных методов, которые не так просты в применении. Например, ММП, где для решения могут понадобиться численные методы.

Распределение Вейбулла

Парето-распределение — это распределение с верхней хвостовой частью, которая стремится к 0, как степень x. Это дает распределение с более тяжелой хвостовой частью, чем экспоненциальное. Выражения для верхних хвостов экспоненциального и Парето-распределений таковы

экспоненциальное $\quad P(X > x) = \exp(-\lambda x)$

Парето $\quad P(X > x) = (\lambda/(\lambda + x))^{\alpha}$.

Воспользуемся дополнительной возможностью. Положим

$$P(X > x) = \exp(-\lambda x^{\gamma}), \gamma > 0.$$

Здесь у нас есть два случая. Если $\gamma < 1$, то получаем распределение с хвостовой частью, имеющей промежуточный вес между экспоненциальным и Парето-распределениями, если $\gamma > 1$, верхняя хвостовая часть будет легче, чем у экспоненциального (для экспоненциального распределения $\gamma = 1$). Распределение хвостовой части определяет распределение Вейбулла, очень гибкое распределение, которое может быть использовано как модель для ущерба в страховании, обычно с $\gamma < 1$. Случайная величина X имеет распределение Вейбулла с параметрами c и γ, если

$$F(x) = 1 - \exp(-cx^{\gamma})$$

и можно записать, что $X \sim W(c, \gamma)$. (Заметим, что изменения от γ к с описаны в *Таблицах для актуарных исследований*). Функция плотности для $W(c, \gamma)$

$$f(x) = c\gamma x^{\gamma-1} \exp(-cx^{\gamma}), x > 0, c > 0, \gamma > 0.$$

Ни метод моментов, ни метод максимального правдоподобия не могут применяться, если c и γ не известны (хотя на практике, если есть компьютер, эти уравнения довольно легко решаемы). В случае, когда γ — это известная величина γ^*, то достаточно простым окажется метод максимального правдоподобия.

Функция распределения $W(c, \gamma)$ — это элементарная функция, и на этом факте может базироваться простой метод оценки для c и γ. Метод основан на приравнивании подобранных выборочных процентилей к функции распределения. Например, приравнивание квартилей, 25-ого и 75-ого процентилей, к популяционным квартилям. Это соответствует способу, в котором выборочные моменты приравниваются к популяционным моментам в методе процентилей.

Первые два момента (в методе моментов) используются, если есть два неизвестных параметра, это интуитивно кажется очевидным (хотя теоретический базис для этого не так прост). Аналогично могла бы быть использована медиана, если бы был только один параметр для оценки. С двумя параметрами, оптимальная процедура менее проста, но пониженные и повышенные квартили кажутся вполне разумным выбором.

Пример 2.1 Оценить с и γ в распределении Вейбулла, используя метод процентилей, где первый выборочный квартиль равен 401 и третий квартиль равен 2836.75.

Решение Уравнения для с и γ

$$F(401) = 1 - \exp(-c * 401^{\gamma}) = 0.25$$

$$F(2836.75) = 1 - \exp(-c * 2836.75^{\gamma}) = 0.75,$$

которые могут быть переписаны в виде

$$-c * 401^{\gamma} = \log(3/4)$$

и

$$-c * 2836.75^{\gamma} = \log(1/4)$$

Делим одно уравнение на другое и получаем, что $\widetilde{\gamma} = 0.8038$, следовательно $\widetilde{c} = 0.002326$, где $\sim$ означает процентильную оценку. Заметим, что $\widetilde{\gamma} < 1$ дает более тяжелую хвостовую часть, чем у экспоненциального распределения.

Гамма-распределение

Случайная переменная X имеет гамма-распределение с параметрами α и λ, если

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{x}^{\alpha-1} \exp(-\lambda x), x > 0$$

и можно записать, что $X \sim G(\alpha, \lambda)$. Среднее значение и вариация X

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}; Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Моменты имеют простую форму, поэтому метод моментов легко применим. Оценки ММП для гамма-распределения не могут быть получены в конечной форме (в терминах элементарных функций), но эти оценки могут использоваться, как исходные в поиске ММП-оценок.

Более удобно для получения ММП-оценок гамма-распределения использовать различную параметризацию. Положим $\mu = \alpha/\lambda$ и оценим параметры α и μ. Затем восстановим ММП-оценку λ, положив $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\alpha}/\widetilde{\mu}$. Здесь мы используем свойство постоянства ММП-оценок.

Логнормальное распределение

Определение логнормального распределения очень простое: X имеет логноромальное распределение, если $\log X$ имеет нормальное распределение. Когда $\log X \sim N(\mu, \sigma^2), X \sim LogN(\mu, \sigma^2)$.

Оценка логнормального распределения является прямой до тех пор, пока μ и σ^2 могут быть оценены с помощью логорифма преобразованной информации. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут наблюдаемыми переменными и пусть $y_i = \log x_i$. Оценки μ и σ^2 в ММП — это $\overline{y}$ и s_y^2, где нижний индекс y обозначает выборочную дисперсию, вычисленную на значениях y.

Смешанные распределения

Экспоненциальное распределение — это одна из простейших моделей для страховых потерь. Предположим, что каждый индивидуальный иск в большом страховом портфеле терпит убытки в соответствии с экспоненциальным распределением. Практическое изучение фактически любого страхового портфеля показывает, что значения этих различных распределений будут отличаться среди держателей полисов. Таким образом, описание ущербов для всего портфеля состоит в том, что каждый отдельный ущерб следует собственному экспоненциальному распределению, так как значения этих распределений различны.

Сейчас будем искать описание отклонения отдельных средних значений. Один из способов это сделать — предположение, что экспоненциалы этих значений следуют распределению. В экспоненциальном случае, удобно сделать следующее предположение. Пусть $\lambda_i = 1/\theta_i$ описывает взаимодействие со средним значением ущерба для i-ого держателя полиса. Предположим, что вариация для λ_i может быть описана известным гамма-распределением $G(\alpha, \delta)$, то есть предположим, что $\lambda \sim G(\alpha, \delta)$, где

$$f(\lambda) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\delta\lambda), \lambda > 0.$$

Особо заметим, что это — функция плотности λ с известными значениями α и δ.

Такая формулировка имеет много общего с тем, что используется в оценке Байеса. Действительно, фундаментальная идея этой оценки состоит в том, что интересующий параметр (здесь, λ)может быть представлен как случайная величина с известным распределением. Заметим, однако, что целью здесь является не оценить отдельное λ_i, а описать совокупность ущерба для всего портфеля. Отдельное λ_i может быть представлено с помощью байесовской оценки, когда к $G(\alpha, \delta)$ распределению можно было бы относиться, как к основному распределению. В задаче описания ущерба для всего портфеля, $G(\alpha, \delta)$ распределение используется, чтобы усреднить экспоненциальные распределения; к нему относятся, как к смешивающему распределению, и , следовательно, в таких случаях распределение ущерба называют смешанным.

Предельное распределение X

$$f_X(x) = \int f_{X,\lambda}(x, \lambda) d\lambda$$

$$= \int f_\lambda(\lambda) f_{X|\lambda}(x \mid \lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\delta\lambda) \times \lambda \exp(-\lambda x)) d\lambda$$

$$= \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^\alpha \exp\{-(x+\delta)\lambda\} d\lambda$$

$$= \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(x+\delta)^{\alpha+1}} (G(\alpha+1, x+\delta) - \text{интеграл})$$

$$= \frac{\alpha\delta^\alpha}{(x+\delta)^{\alpha+1}}, \qquad x > 0$$

что является Парето-распределением $Pa(\alpha, \delta)$. Такой результат дает очень хорошую интерпретацию распределения Парето: $Pa(\alpha, \delta)$ возникает, когда экспоненциально распределенные ущербы усредняются $G(\alpha, \delta)$-смешивающим распределением.

Обобщения распределения Парето

Производящая функция распределения Парето $Pa(\alpha, \lambda)$

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^\alpha}$$

Дополнительный параметр γ может быть представлен таким образом:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda + x^\gamma)^\alpha}$$

Такая производящая функция преобразует распределения Бурра и Парето. Дополнительный параметр дает особую гибкость, когда требуется подстроится к имеющейся информации. С того момента, как мы получим производящую функцию в конечном виде, станет возможным приблизить распределение Бурра к имеющейся информации, используя методы процентилей. ММП обычно требует использования компьютерных программ, которые позволяют нелинейную оптимизацию.

Второе обобщение распределения Парето задействуют идею смешанного распределения, обсужденного ранее. Если ущербы — это экспоненциалы со средним значением $1/\lambda$, и $\lambda \sim G(\alpha, \delta)$, тогда предельное распределение ущербов — это $Pa(\alpha, \delta)$. Можно сделать обобщение, если предположить, что потери — это $G(k, \lambda)$ и $\lambda \sim G(\alpha, \delta)$. В частном случае, если $k = 1$, то $Pa(\alpha, \delta)$ распределение получено также, как и ранее

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int f_\lambda(\lambda) f_{X|\lambda}(x \mid \lambda) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\delta\lambda) \times \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} \exp(-\lambda x)) d\lambda \\
&= \frac{\delta^\alpha x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha+k-1} \exp\{-(x+\delta)\lambda\} d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+k)\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \frac{x^{k-1}}{(x+\delta)^{\alpha+k}}, \qquad x > 0,
\end{aligned}$$

где конечный интеграл вычисляется от $G(\alpha + k, \delta + x)$ — интегрируемой функции. А, значит, мы нашли функцию плотности обобщенного Парето-распределения.

Моменты обобщенного Парето-распределения могут быть получены либо непосредственным вычислением $\int x f(x) dx$, либо использованием условного аргумента математического ожидания. Что касается оценки, так как производящая функция моментов не определена, то метод процентилей использовать нельзя. ММП может быть применен, но, опять же, необходимо подходящее программное обеспечение; метод моментов может обеспечить начальные оценки для любой итерационной схемы.

§2 Формулы

Гамма-распределение

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

Логнормальное распределение

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2}(\frac{\log x - \mu}{\sigma})^2], \qquad x > 0$$

Парето-распределение

$$f_X(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, \qquad x > 0 \qquad \text{для двух параметров}$$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + k)\lambda^\alpha x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)(\lambda + x)^{\alpha+k}}, \qquad x > 0 \qquad \text{общий вид}$$

Распределение Бурра

$$f_X(x) = \frac{\alpha\gamma\lambda^\alpha x^{\gamma-1}}{(\lambda + x^\gamma)^{\alpha+1}}, \qquad x > 0$$

Исковая частота

$$\text{Исковая частота} = \frac{\text{количество исков}}{\text{среднее количество полисов}}$$

Рисковая премия

$$\text{Рисковая премия}=\text{Ожидаемая частота иска}\times\text{Средняя величина иска}$$

§3 Вопросы студентам

В1 Почему рассматриваемые распределения называются распределениями "ущербов а не "исков"?

О1 Ущерб — это полная стоимость восстановления ущерба, тогда как исковая величина — это только действительная величина оплачиваемой суммы. В следующей части мы увидим, что страховщик не всегда обязан возмещать все потери, например, если применяется франшиза, если ущерб превышает сумму, указанную в полисе или если использовалось еще какое-либо страхование и стоимость разделена. Поэтому величина ущерба и величина иска не всегда одинаковы.

В2 Все ли основные страховые иски оплачиваются на основе компенсации ущерба?

О2 Подавляющее большинство — да. Однако, есть несколько ситуаций, когда дело обстоит иначе. Например:

- В страховании имущества, покрытие может обеспечиваться на основе системы *новое-за-старое*, которая означает, что все предметы будут заменены новыми эквивалентами(превышающими стоимость старых предметов, которые были утеряны, украдены или повреждены).
- В страховании от несчастных случаев выплачиваются заранее заданные суммы, если застрахованный человек получил определенные травмы, например, потерю конечности или глаза.
- Травмированные люди могут получить компенсационные выплаты, превышающие их действительную материальную стоимость.

В3 Верно ли, что, если дисперсия распределения равна бесконечности, то асимметрия также будет бесконечной?

О3 Да. Для типов распределения ущербов, которые мы будем использовать, обнаружится, что, когда мы меняем параметры, высшие моменты будут "идти" впереди, то есть сначала асимметрия станет бесконечной, затем дисперсия, затем среднее значение.

В4 Есть ли смысл в том, чтобы стандартное отклонение было больше, чем среднее значение?

О4 Да. Распределения, которые мы рассматриваем здесь, очень несимметричные, и нет причин, по которым стандартное отклонение не могло бы быть больше среднего значения.

В5 Должны ли мы принимать во внимание реальные периоды воздействия на примере частоты иска?

О5 Да. Чтобы не усложнять ситуацию, можно предположить, что профиль держателя полиса останется постоянным на протяжении всего периода.

В6 Как сильно отличаются премии, реально присутствующие в общем страховании, с теоретической значением премии?

О6 На практике, общие страховые премии находятся под сильным влиянием конкурентного давления других компаний. И действительные премии могут значительно отличаться от теоретических премий. Тем не менее, важно, что страхователи осознают, как реальные премии сопоставляются с теоретическими, поэтому они могут разделять ущербы по областям.

3.1 Подсказки для ответов на вопросы

1. Вопросы к этой теме обычно очень простые. Однако, вам нужно с легкостью уметь интегрировать стандартные функции, интегрировать по частям или с помощью замены переменных.

2. Параметры, используемые в Парето, Бурра и Вейбулла распределениях, не являются стандартными. Поэтому возьмите на заметку конкретные функции плотности, которые заданы в задачах, использующих эти распределения.

§4 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 1.1

Функция плотности для $N(0,1)$-распределения $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2}$. Тогда производящая функция моментов:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tX} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x^2-2tx)} dx$$

$$= e^{1/2t^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-t)^2} dx$$

Но последний интеграл – это интеграл по всей числовой прямой функции распределения $N(t,1)$, и потому он равен 1. Тогда производящая функция моментов стандартного нормального распределения равна $e^{1/2t^2}$.

Решение 1.2

Если X имеет $LogGamma(\alpha,\lambda)$ распределение, то $Y = \log X$ имеет $Gamma(\alpha,\lambda)$ распределение. Тогда, используя функцию плотности $Gamma(\alpha,\lambda)$ распределения, найдем математическое ожидание величины иска:

$$E(X) = E(e^Y) = \int\limits_{0}^{\infty} e^y \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy$$

Простейший способ вычислить этот интеграл — это подобрать константы таким образом, чтобы сделать его похожим на другое гамма-распределение (в данном случае, $Gamma(\alpha,\lambda-1)$-распределение). Что дает (обеспечивая $\lambda > 1$):

$$E(X) = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-1)^\alpha} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-(\lambda-1)y} dy$$

$$= \left[\frac{\lambda}{\lambda-1}\right]^\alpha P[0 < Gamma(\alpha,\lambda-1) < \infty] = \left[\frac{\lambda}{\lambda-1}\right]^\alpha$$

(Заметим, что вы можете применять эту формулу для нахождения среднего значения логнормального и логгамма-распределений, используя следующий метод:

Если X имеет $LogN(\mu, \sigma^2)$ распределение, то, по определению, $Y = \log X$ имеет $N(\mu, \sigma^2)$ распределение. Тогда можно использовать формулу для производящей функции моментов нормального распределения:

$$E(X) = E(e^Y) = M_Y(1) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

Аналогично, если X имеет $LogGamma(\alpha, \lambda)$ распределение, то, по определению, $Y = \log X$ имеет $Gamma(\alpha, \lambda)$ распределение:

$$E(X) = E(e^Y) = M_Y(1) = (1 - 1/\lambda)^{-\alpha}$$

Хотя этот метод кажется довольно кратким, он не может рассматриваться в качестве доказательства основных принципов, так как предполагает известной формулу для производящей функции моментов.)

Решение 1.3

Среднее значение Парето-распределения: $\int\limits_0^\infty x\alpha\lambda^\alpha(\lambda + x)^{-\alpha-1}dx$

Существуют два возможных способа вычисления этого интеграла:

(a) Воспользуемся заменой $t = \lambda + x$:

$$\int\limits_0^\infty x\alpha\lambda^\alpha(\lambda + x)^{-\alpha-1}dx = \int\limits_\lambda^\infty (t-\lambda)\alpha\lambda^\alpha t^{-\alpha-1}dx$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\lambda^\alpha \int\limits_\lambda^\infty t^{-\alpha}dt - \alpha\lambda^{\alpha+1}\int\limits_\lambda^\infty t^{-\alpha-1}dt \\ &= \alpha\lambda^\alpha \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\lambda^\infty - \alpha\lambda^{\alpha+1}\left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_\lambda^\infty \\ &= \frac{\alpha\lambda}{\alpha-1} - \lambda \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1} \end{aligned}$$

Эти вычисления возможны только в том случае, когда интеграл сходится на бесконечности. Такое условие требует, чтобы выражения, находящиеся в квадратных скобках были отрицательны, что будет выполнятся при $\alpha > 1$.

(б) Запишем начальное x в интеграле, как $(\lambda+x)-\lambda$ и разобьем его на два интеграла, соответствующих распределению Парето:

$$\int_0^\infty x\alpha\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha-1}dx = \int_0^\infty [(\lambda+x)-\lambda]\alpha\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha-1}dx$$

$$\frac{\alpha\lambda}{\alpha-1}\int_0^\infty (\alpha-1)\lambda^{\alpha-1}(\lambda+x)^{-\alpha}dx - \lambda\int_0^\infty \alpha\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha-1}dx$$

$$\frac{\alpha\lambda}{\alpha-1}P[0<Pareto(\alpha-1,\lambda)<\infty] - \lambda P[0<Pareto(\alpha,\lambda)<\infty]$$

$$= \frac{\alpha\lambda}{\alpha-1} - \lambda$$

$$= \frac{\lambda}{\alpha-1}$$

Как альтернативный вариант вы можете использовать интегрирование по частям, или записать этот интеграл, как функцию плотности обобщенного распределения Парето.

Решение 1.4

Формула, данная в *Таблицах* для среднего значения распределения Бурра:

$$\frac{\lambda^{1/\gamma}\Gamma(\alpha-1/\gamma)\Gamma(1+1/\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$$

Когда $\gamma=1$, получаем:

$$\frac{\lambda\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\lambda\Gamma(\alpha-1)\times 1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} = \frac{\lambda}{\alpha-1},$$

что является формулой для среднего значения распределения Парето.

Решение 1.5

Среднее значение распределения Вейбулла:

$$E(X) = \int_0^\infty xc\gamma x^{\gamma-1}e^{-cx^\gamma}dx$$

Подставляя $u = cx^\gamma$, получаем, что $\frac{du}{dx} = c\gamma x^{\gamma-1}$, и, в итоге:

$$E(X) = \int_0^\infty x e^{-u} du = \int_0^\infty \left[\frac{u}{c}\right]^{1/\gamma} e^{-u} du$$

Попробуем представить этот интеграл в виде функции плотности для $Gamma(1 + 1/\gamma, 1)$ распределения:

$$E(X) = c^{-1/\gamma}\Gamma(1 + 1/\gamma) \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1 + 1/\gamma)} u^{1/\gamma} e^{-u} du$$

$$= \frac{\Gamma(1 + 1/\gamma)}{c^{1/\gamma}} P[0 < Gamma(1 + 1/\gamma, 1) < \infty] = \frac{\Gamma(1 + 1/\gamma)}{c^{1/\gamma}}$$

Это соответствует формуле, приведенной в *Таблицах*, для среднего значения распределения Вейбулла.

Решение 1.6

Формула для дисперсии распределения Вейбулла, данная в *Таблицах*:

$$\frac{\Gamma(1 + 2/\gamma)}{c^{2/\gamma}} - \left[\frac{\Gamma(1 + 1/\gamma)}{c^{1/\gamma}}\right]^2$$

При $\gamma = 1$:

$$\frac{\Gamma(3)}{c^2} - \left[\frac{\Gamma(2)}{c}\right]^2 = \frac{2}{c^2} - \left[\frac{1}{c}\right]^2 = \frac{1}{c^2},$$

что является формулой дисперсии экспоненциального распределения с $\lambda = c$.

Решение 1.7

Производящая функция для распределения Вейбулла:

$$F_X(x) = \int_0^x c\gamma x^{\gamma-1} e^{-cx\gamma} dx = \left[-e^{-cx\gamma}\right]_{0^x} = 1 - e^{-cx^\gamma}$$

Тогда:

$$F_X(5000) = 1 - e^{-0.00001 \times 5000^{1.5}} = 1 - 0.0291 = 0.9709$$

$$F_X(2500) = 1 - e^{-0.00001 \times 2500^{1.5}} = 1 - 0.2865 = 0.7135$$

Получаем требуемую вероятность: $F_X(5000) - F_X(2500) = 0.9709 - 0.7135 = 0.2574$

Решение 1.8

При $k = 2$ функция плотности обобщенного распределения Парето:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2)}\lambda^\alpha x(\lambda+x)^{-\alpha-2} = (\alpha+1)\alpha\lambda^\alpha x(\lambda+x)^{-\alpha-2}$$

Воспользуемся подстановкой $t = \lambda + x$ и запишем вероятность иска, превышающего M:

$$P(X > M) = \int\limits_M^\infty (\alpha+1)\alpha\lambda^\alpha x(\lambda+x)^{-\alpha-2}dx$$

$$= \int\limits_{\lambda+M}^\infty (\alpha+1)\alpha\lambda^\alpha(t-\lambda)t^{-\alpha-2}dt$$

$$= (\alpha+1)\alpha\lambda^\alpha \int\limits_{\lambda+M}^\infty t^{-\alpha-1}dt - (\alpha+1)\alpha\lambda^{\alpha+1}\int\limits_{\lambda+M}^\infty t^{-\alpha-2}dt$$

$$= (\alpha+1)\alpha\lambda^\alpha\left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{\lambda+M}^\infty - (\alpha+1)\alpha\lambda^{\alpha+1}\left[\frac{t^{-\alpha-1}}{-\alpha-1}\right]_{\lambda+M}^\infty$$

$$= (\alpha+1)\left[\frac{\lambda}{\lambda+M}\right]^\alpha - \alpha\left[\frac{\lambda}{\lambda+M}\right]^{\alpha+1}$$

Подставляя $\alpha = 5, \lambda = 200$ и $M = 300$ получаем искомую вероятность:

$$(\alpha+1)\left[\frac{\lambda}{\lambda+M}\right]^\alpha - \alpha\left[\frac{\lambda}{\lambda+M}\right]^{\alpha+1} = 6\left[\frac{200}{200+300}\right]^5 - 5\left[\frac{200}{200+300}\right]^6$$

$$= 6\times 0.4^5 - 5\times 0.4^6 = 0.041,$$

то есть 4.1% исков будут превышать £300000.

Решение 1.9

Дисперсия $Gamma(\alpha, \lambda/1.1)$ распределения $\frac{1.1^2\alpha}{\lambda^2}1.21\times\frac{\alpha}{\lambda^2}$. То есть дисперсия распределения размера иска возрастет на 21%. Если сравнить это со стандартными отклонениями, то мы увидим, что стандартное отклонение в данном случае возрастет на 10%, в отличие от того, как мы могли бы ожидать.

Решение 1.10

Пусть $Y = (1+k)X$. Сделаем подстановку $y = (1+k)x$ в интеграле функции плотности:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx = \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+\frac{y}{1+k})^{\alpha+1}}\frac{dy}{1+k} = \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha(1+k)^\alpha}{(\lambda(1+k)+y)^{\alpha+1}}dy$$

Это функция плотности $Pareto(\alpha, \lambda(1+k))$ распределения. Значит, это распределение инфляционных размеров иска.

Решение 1.11

Если N — это общее число исков, то мы имеем:

$$P(N=n) = \int_0^\infty p_{N|\theta}(n) f_\theta(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\theta}\theta^n}{n!} \times \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\delta^\alpha \theta^{\alpha-1}e^{-\delta\theta}d\theta$$

Преобразуем это выражение к интегралу $Gamma(n+\alpha, \delta+1)$ распределения:

$$P(N=n) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!(\delta+1)^{n+\alpha}}\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}(\delta+1)^{n+\alpha}\theta^{n+\alpha-1}e^{-(\delta+1)\theta}d\theta$$

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}\frac{\delta^\alpha}{(\delta+1)^{n+\alpha}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Представим его в виде:

$$P(N=n) = \binom{n+\alpha-1}{n}\left[\frac{\delta}{\delta+1}\right]^\alpha \left[\frac{1}{\delta+1}\right]^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

и получим отрицательное биномиальное распределение с параметрами $p = \frac{\delta}{\delta+1}$ и $k = \alpha$.

Решение 1.12

Воспользуемся тем же способом:

$$P(X=x)=\int\limits_0^\infty f_{X|p}(x)f_p(p)dp$$

$$=\int\limits_0^\infty \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}dp$$

Приведем это выражение к виду $Beta(x+\alpha, n-x+\beta)$ распределения:

$$P(X=x)=\frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)n!}{\Gamma(n+\alpha+)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(n-x)!x!}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}p^{x+\alpha-1}(1-p)^{n-x+\beta-1}dp$$

Тогда общее распределение исков:

$$P(X=x)=\frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)n!}{\Gamma(n+\alpha+)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(n-x)!x!},\qquad x=0,1,2,\ldots,n.$$

Решение 1.13

Приравниваем формулы среднего значения и стандартного отклонения Парето-распределения к заданным величинам:

$$\frac{\lambda}{\alpha-1}=5000\text{и}\frac{\lambda}{\alpha-1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}=7500$$

Делим второе равенство на первое:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}=\frac{7500}{5000}=1.5$$

Тогда $\frac{\alpha}{\alpha-2}=1.5^2=2.25$

$$\alpha=2.25(\alpha-2)\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=4.5/1.25=3.6$$

Можно найти λ:

$$\lambda=5000(3.6-1)=13000$$

Далее, процент исков, превышающих £25000:

$$P(X > 25000) = \int\limits_{25000}^{\infty} \alpha\lambda^{\alpha}(\lambda + x)^{-\alpha-1}dx$$

$$= [-\lambda^{\alpha}(\lambda + x)^{-\alpha}]_{25000}^{\infty}$$

$$= \left[\frac{\lambda}{\lambda + 25000}\right]^{\alpha}$$

$$= \left[\frac{13000}{13000 + 25000}\right]^{3.6} = 0.021,$$

то есть 2,1% исков будут превышать £25000.

Оба ответа одинаковые. Значит, £25000 — это критическая точка, в которой вероятности любых распределений ущерба равны.

Решение 1.14

Подобная функция:

$$L(\alpha, \lambda, \gamma) = \alpha^n \gamma^n \lambda^{n\alpha} \Pi x_i^{\gamma-1} \Pi(\lambda + x_i^{\gamma})^{-\alpha-1}$$

Возьмем логарифм:

$$\log L = n\log\alpha + n\log\gamma + n\alpha\log\lambda + (\gamma - 1)\sum\log x_i - (\alpha + 1)\sum\log(\lambda + x_i^{\gamma})$$

Дифференцируем по α:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log L = \frac{n}{\alpha} + n\log\lambda - \sum\log(\lambda + x_i^{\gamma})$$

Устремляем равенство к 0 и преобразуем:

$$\widetilde{\alpha} = \frac{n}{\sum\log(\lambda + x_i^{\gamma}) - n\log\lambda}$$

Подстановка известных значений $\lambda = 500$ и $\gamma = 2$ дает искомый результат.

После упрощений получим $\sum\log(500 + x_i^2) = 47.6245$. Подставляя данное значение, находим $\widetilde{\alpha} = 0.3021$

Решение 1.15

Ожидаемая частота иска:

$$\frac{315}{6200} = 0.050806$$

Средняя величина иска — это среднее значение $Gamma(50, 0.02)$ распределения, которая равна:

$$\frac{50}{0.02} = 2500$$

Тогда рисковая премия:

$$0.050806 \times 2500 = \pounds 127.02$$

Тогда значение премии P удовлетворяет равенству:

$$P = 127.02 + 50 \times 0.050806 + 0.35P$$

То есть значение премии равно £199.32.

Решение 1.16

Вот список возможных причин:

1. Текущее распределение размера иска может не подходить для исков, которые будут иметь место в будущем.

2. Необходимость конкуренции на рынке может означать, что теоретическая премия не соответствует действительной.

3. Частота иска может изменятся сверх ожидания. Если за последние несколько лет имело место 3150 исков, то можно предположить, что частота иска возрастет сверх ожидаемой нормы, в этом случае 0.050806

4. Законодательство может вводить ограничения (верхние или нижние) на премии.

5. Эти вычисления игнорируют временные денежные характеристики (таких как доля (капитала) в деле и инфляция)

Решение 1.17

Проверим, что:
H_0 : $N(\mu, \sigma^2)$ представляет собой удачную модель для этих исков.
H_1 : $N(\mu, \sigma^2)$ представляет собой неудачную модель.

Значение тестовой статистики:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = \frac{(120-104)^2}{104} + \ldots + \frac{(62-76)^2}{76} = 25.94$$

Сравнивая это значение с соответствующей точкой χ_2^2 распределения (5 элементов минус 2 оценочных параметра минус 1), мы получим вероятностное значение, гораздо меньшее, чем 0.005. Тогда для нас становится очевидной неоптимальность H_0, и можно сделать заключение, что нормальное распределение в данном случае не является подходящим.

Заключение части I

Размеры индивидуальных исков могут быть описаны с помощью распределений ущерба. Например, стандартных распределений, таких как логнормальное, Гамма, Парето, распределения Бура, Вейбулла.
Рисковая премия и теоретическая офисная премия могут быть вычислены, зная распределение ущерба и частоту исков.

Часть II

Глава 3

Перестрахование

Цели главы

К концу данной главы вы будете уметь:

- описывать основные виды перестрахования, используемые при общем страховании
- описывать принцип действия эксцедентного полиса
- выполнять простые вычисления, относящиеся к перестрахованию и эксцедентным полисам

§1 Введение

Перестрахование (reinsurance). Страховщики часто пользуются страховыми услугами других страховых компаний для того, чтобы предостеречь себя от различных случайностей, например, возможности возникновения слишком крупных исков. *Прямой страховщик (direct insurer)* – это страховщик, деятельность которого напрямую связана со страхователем. *Перестраховщик (reunsurer)*– это страховщик, который согласен принять часть риска, переданного прямому страховщику.

Прямой страховщик обязуется платить премии перестраховщику и принимать возмещения исков в случае, когда иски превышают допустимое значение в рамках договора перестрахования.

Перестрахование может действовать в соответствии с договором, согласно которому все риски из особой категории (например, небольшие административные здания в Лондоне) автоматически покрываются в соответствии с соглашением перестрахования (факультативно), таким образом, перестрахование каждого риска носит индивидуальных характер.

Премии и иски характеризуются как *нетто*, если они были установлены с учетом перестрахования, и *брутто* – если нет.

На практике, страховщик может иметь несколько договоров перестрахования, действующих одновременно.

Полисы общего страхования часто включают в себя франшизы, что означает, что страхователь сам должен оплатить определённую часть страхового возмещения до покрытия полного убытка.

В случае перестрахования или эксцедентных полисов должны быть установлены рисковые премии страховщика, т.к. страховщик не будет обязан выплачивать полную стоимость каждого убытка. Вот то, что мы будем обсуждать в этой главе.

Практические аспекты перестрахования изложены в Разделе G.

Основы теории этой главы охватывают расчеты, касающиеся индивидуального перестрахования эксцедента убытка, а также короткие параграфы о пропорциональном страховании и эксцедентных полисах.

§2 Типы перестрахования

Перестрахование может быть двух видов: пропорциональное и непропорциональное.

2.1 Пропорциональное перестрахование

Согласно договору пропорционального перестрахования, прямой страховщик и перестраховщик разделяют премии и величину каждого иска в определённых пропорциях. Например, в случае страхования конкретного здания от пожара прямой, страховщик может удержать 75% от премии и будет обязан оплатить 75% от каждого иска, как крупного, так и нет.

Пропорциональное страхование бывает двух видов:

- Квотный договор перестрахования, где пропорции (доли) одинаковы для всех рисков.

- Перестрахование на базе эксцедента суммы, где доли удержания варьируются от риска к риску.

2.2 Непропорцинальное перестрахование

Согласно договору непропорционального перестрахования, прямой страховщик выплачивает фиксированную премию перестраховщику.

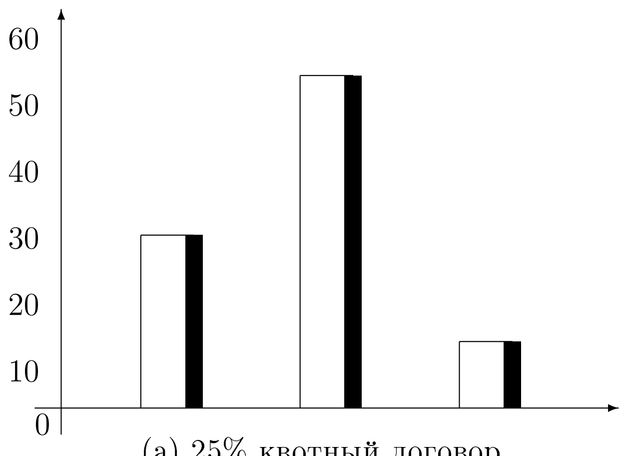
Единственное обязательство перестраховщика – производить платежи, когда часть величины иска попадает в отдельный уровень перестрахования (например, от £1m до £5m). Уровень определяется нижним пределом - *уровень собственного удержания (retention limit)* (например, £1m) и верхним пределом (например, £5m или "∞ если возмещение неограничено). Обычно, большинство исков удовлетворяются в полном размере прямым страховщиком.

Мы разберём два вида договоров непропорционального страхование:

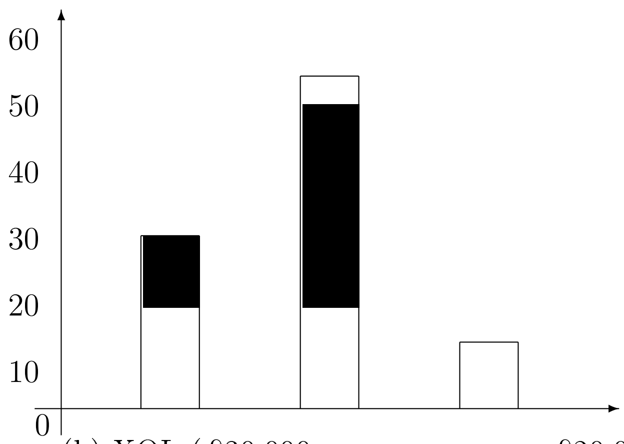
- Договор перестрахования *эксцедента убытка (excess of loss - XOL)*. Перестраховщик обязан производить выплаты, когда величина иска превзойдет определённую *точку эксцедента (excess point* или *retention)*. Например, перестраховщик может согласиться выплачивать долю превышения от каждого полиса автомобильного страхования, превышающего £50,000, но не больше определённого предела - £2,000,000.

- Договор перестрахования *эксцедента убыточности (stop loss)*. Перестраховщик обязан производить выплаты, если величина суммы всех исков определённой группы полисов превзойдёт конкретную величину (обычно выраженную в процентах от брутто-премии). Например, перестраховщик может согласиться оплачивать 90% от величины превышения, когда величина суммы исков для всех договоров автомобильного страхования превзойдёт 105% от общей брутто-премии, без верхнего предела.

Диаграммы ниже показывают величины выплат прямого страховщика и перестраховщика в случае (a) квотного договора и (b) XOL-договора с уровнем перестрахования £30,000 и уровнем превышения £20,000. Величины исков составляют £30,000, £55,000, £15,000. Тёмным цветом выделены выплаты, производимые перестраховщиком.



(a) 25% квотный договор



(b) XOL (£30,000 с превышением £20,000)

Вопрос для самоподготовки 3.1. Страховая компания A имеет квотный договор перестрахования, согласно которому перестраховщик R принимает 25% от каждого риска. Страховая компания B имеет договор перестрахования эксцедента убытка (XOL), по которому перестраховщик R оплачивает долю превышения каждого иска, превосходящего величину £200,000, но не более £100,000.
В течение одного месяца:

— Компании A были предъявлены иски на £400,000 и £10,000

— Компании B были предъявлены иски на £250,000 и £75,000

Какую сумму от каждого из этих исков выплатят A, B и R?

§3 Франшизы

Так как большинство страхователей обеспокоено главным образом возможностью больших потерь, многие страховые полисы включают *франшизы (policy excess)* (которые могут быть условными или безусловными со стороны страхователя), что означает, что страхователь сам должен оплатить определённую часть страхового возмещения до покрытия полного убытка. Страховщик оплачивает только часть убытка, превосходящую франшизу. Например, большинство полисов индивидуального автомобильного страхования включают обязательную франшизу в £50 или £100.

Когда величина суммы предъявленного иска оказывается меньше установленной франшизы, фактическая величина выплат страховщика равна нулю, что приводит к *нулевому иску (zero claim)*.

§4 Распределение нетто-исков

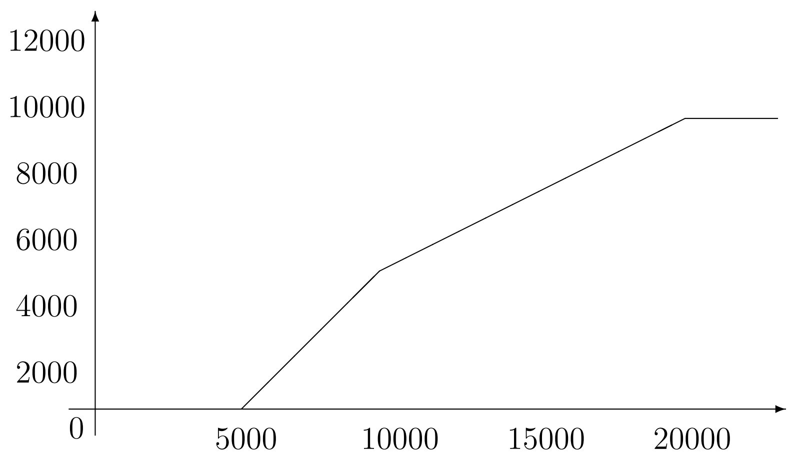
Мы можем находить моменты для величины нетто-суммы выплат для прямого страховщика или перестраховщика, рассматривая нетто-суммы, выплачиваемые по брутто-искам различных размеров.

Пример 3.1 Перестраховщик согласен производить следующие выплаты относительно индивидуальных исков, предъявленных прямому страховщику:
— ноль, если размер иска меньше £5,000
— величину превышения £5,000, если иск от £5,000 до £10,000
— половину величины иска, если его размер от £10,000 до £20,000
— £10,000, если величина иска превышает £20,000
Построить график, показывающий величину выплат перестраховщика для исков, предъявленных прямому страховщику.

Решение Выплаты перестраховщика могут быть описаны с помощью функции $g(x)$, где x - размер основного ика

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad x \leq 5,000 \\ x - 5,000 & \text{если} \quad 5,000 < x \leq 10,000 \\ x/2 & \text{если} \quad 10,000 < x \leq 20,000 \\ 10,000 & \text{если} \quad 20,000 < x \end{cases}$$

График этой функции имеет следующий вид:



Пример 3.2 Записать в интегральной форме выражение для среднего значения величины выплат перестраховщика из предыдущего примера, используя $f(x)$ для обозначения плотности распределения вероятностей величины основных исков.

Решение Среднее значение величины выплат перестраховщика – $E[g(X)]$,

где x обозначает величину брутто-иска и $g(x)$ - функция из предыдущего примера.
Значит:

$$E[g(X)] = \int_{0}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Для получения необходимого выражения, разобьём этот интеграл, рассматривая функцию $g(x)$ при различных значениях x. Получим:

$$E[g(X)] = \int_{0}^{5{,}000} 0f(x)dx + \int_{5{,}000}^{10{,}000} (x-5,000)f(x)dx +$$
$$+ \int_{10{,}000}^{20{,}000} \frac{x}{2}f(x)dx + \int_{2{,}000}^{\infty} 10,000dx$$

Упростим выражение, учитывая, что первый интеграл равен нулю:

$$E[g(X)] = \int_{5{,}000}^{10{,}000} (x-5,000)f(x)dx + \int_{10{,}000}^{20{,}000} \frac{x}{2}f(x)dx + \int_{2{,}000}^{\infty} 10,000dx$$

Вопрос для самоподготовки 3.2. Запишите в интегральной форме выражения для:

a) среднего значения величины возмещения основных исков для прямого страховщика

b) среднего значения квадрата величины выплат прямого страховщика относительно индивидуальных исков

c) доли основных исков, которую покрывает перестраховщик

d) части исков, когда нетто-сумма выплат прямого страховщика превосходит £7,500

Пример 3.3

(a) Показать, что если $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, то:

$$\int_{L}^{U} f(x)dx = e^{-\lambda L} - e^{-\lambda U}$$

и

$$\int_{L}^{U} xf(x)dx = \left(L + \frac{1}{\lambda}\right)\, e^{-\lambda L} - \left(U + \frac{1}{\lambda}\right)\, e^{-\lambda U}$$

(b) Исходя из этого, вычислить среднее ожидаемое нетто-суммы выплат прямого страховщика из Примера 3.1, если размеры основных исков описываются экспоненциальным распределением со средним £4,000.

Решение

(a) Первый результат следует из непосредственного интегрирования:

$$\int\limits_L^U \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_L^U = e^{-\lambda L} - e^{-\lambda U}$$

Второй результат может быть получен с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_L^U x f(x) dx = x(-e^{-\lambda x})\Big|_L^U - \int\limits_L^U -e^{-\lambda x} dx =$$
$$= (L\ e^{-\lambda L} - U\ e^{-\lambda U}) + \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda L} - e^{-\lambda U}) =$$
$$= \left(L + \frac{1}{\lambda}\right)\ e^{-\lambda L} - \left(U + \frac{1}{\lambda}\right)\ e^{-\lambda U}$$

(b) Теперь можно применить эти формулы (со значением $\lambda = 1/4,000$) для вычисление среднего значения величины нетто-иска, интегральная форма которого дана в Решении 3.2(a):

$$E[h(X)] = \int\limits_0^{5{,}000} x f(x) dx + \int\limits_{5{,}000}^{10{,}000} 5,000 f(x) dx +$$
$$+ \int\limits_{10{,}000}^{20{,}000} \frac{x}{2} f(x) dx + \int\limits_{20{,}000}^{\infty} (x - 10,000) f(x) dx =$$
$$= (4,000 - 9,000\ e^{-1.25}) + 5,000(e^{-1.25} - e^{-2.5}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(14,000\ e^{-2.5} - 24,000\ e^{-5}) + (24,000\ e^{-5} - 10,000\ e^{-5}) =$$
$$= 1,421.5 + 1,022.1 + 493.7 + 94.3 = 3,032$$

Существует множество удобных интегральных формул, которые упрощают вычисления, связанные с конкретными распределениями.

4.1 Логнормальное распределение

Следующее утверждение касается моментов логнормального распределения:

Свойство логнормального распределения
Если $f_X(x)$ – функция плотности распределения вероятностей для $LogNormal(\mu, \sigma^2)$ - распределения, то:

$$\int_L^U x^k f_X(x)dx = e^{k\mu+\frac{1}{2}k^2\sigma^2}[\Phi(U_k) - \Phi(L_k)]$$

$$\text{где} \quad L_k = \frac{log(L)-\mu}{\sigma} - k\sigma \quad \text{и} \quad U_k = \frac{log(U)-\mu}{\sigma} - k\sigma$$

и $\Phi(z)$ - функция распределения для стандартного нормального распределения.

Доказательство:
Используя выражение для $f_X(x)$ и производя замену $t = \frac{log(x)-\mu}{\sigma}$, получим:

$$\int_L^U x^k f_X(x)dx = \int_L^U x^k \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}dx =$$

$$\int_{L_k}^{U_k} e^{k(\mu+\sigma t+k\sigma^2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(t+k\sigma^2)^2}dt = \int_{L_k}^{U_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{k\mu+k\sigma t+k^2\sigma^2}\ e^{-\frac{1}{2}t^2-k\sigma t-\frac{1}{2}k^2\sigma^2}dt =$$

$$e^{k\mu+\frac{1}{2}k^2\sigma^2}\int_{L_k}^{U_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = e^{k\mu+\frac{1}{2}k^2\sigma^2}\ [\Phi(U_k) - \Phi(L_k)]$$

Если $L = 0$ или $U = 0$, эту формулу можно упростить, используя тот

факт, что $\Phi(-\infty) = 0, \quad \Phi(0) = 1/2, \quad \Phi(\infty) = 1$

Вопрос для самоподготовки 3.3. Найдите среднее и дисперсию, используя формулу, данную выше.

Вопрос для самоподготовки 3.4. Если $f(x)$ – функция плотности распределения $LogNormal(7.5, 0.85^2)$, вычислите:

$(a)\ \int\limits_{1,000}^{5,000} f(x)dx \qquad (b)\ \int\limits_{0}^{1,000} xf(x)dx \qquad (c)\ \int\limits_{5,000}^{\infty} x^2 f(x)dx$

Если в данной выше формуле положить $k = 1$, мы сможем найти среднее ожидаемое величины нетто-суммы исков, когда основные иски имеют логнормальное распределение.

Пример 3.4 Страховщик рассматривает два вида договоров перестрахования:

Договор 1: 25% квотный договор

Договор 2: договор перестрахования эксцедента убытка с бесконечным верхним пределом и уровнем собственного удержания 25,000.

Найти математическое ожидание величины нетто-выплат, производимых страховщиком:
(a) без перестрахования
(b) с перестрахованием по Договору 1
(c) с перестрахованием по Договору 2
при условии, что индивидуальные потери имеют логнормальное распределение с параметрами $\mu = 8.5$ и $\sigma^2 = 0.64$.

Решение

(a) Без перестрахования страховщик оплачивает каждый иск в полном объёме. Таким образом, математическое ожидание равно:

$$E[X] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{8.5+\frac{1}{2}(0.64)} = 6,768$$

(b) По Договору 1 страховщик оплачивает 75% от каждого иска. Величина нетто-иска $X_1 = 0.75X$ и среднее:

$$E[X_1] = 0.75E[X] = 0.75 * 6,768 = 5,076$$

(c) По Договору 2 страховщик оплачивает 25,000 (обозначим уровень собственного удержания через M) от каждого иска X. Следовательно, величина нетто-иска $X_2 = \min(X, M)$. Используя формулу, приведённую выше (где $M_0 = (\log 25,000 - 8.5)/0.8 = 2.033$ и $M_1 = M_0 - 0.8 = 1.233$ задают скорректированные пределы), найдём среднее:

$$E[X_2] = \int\limits_0^M xf_X(x)dx + M \int\limits_M^\infty f_X(x)dx =$$

$$e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\ [\Phi(M_1) - \Phi(-\infty)] + M\ [\Phi(\infty) - \Phi(M_0)] =$$

$$6,768\ [\Phi(1.233)] + 25,000\ [1 - \Phi(2.033)] = 6,557$$

Если в этой формуле положить $k = 2$, можно найти второй нецентральный момент величины нетто-иска (следовательно, и дисперсию), если основные иски имеют логнормальное распределение.

Пример 3.5 Найти дисперсию величины нетто-суммы исков, выплачиваемых страховщиком
(a) без перестрахования
(b) с перестрахованием по Договору 1
(c) с перестрахованием по Договору 2,
используя условия предыдущего примера.

Решение

(a) Без перестрахования страховщик оплачивает каждый иск в полном размере. Дисперсия в этом случае равна:

$$Var[X] = e^{2\mu+\sigma^2}\ (e^{\sigma^2} - 1) = e^{2(8.5)+0.64}\ (e^{0.64} - 1) = (6,408)^2$$

(b) По Договору 1 страховщик оплачивает 75% от каждого иска. Величина нетто-иска $X_1 = 0.75X$ и дисперсия:

$$Var[X_1] = 0.75^2\ Var[X] = 0.75^2 * 6,408^2 = (4,806)^2$$

(c) По Договору 2 страховщик оплачивает 25,000 (обозначим уровень собственного удержания через M) от каждого иска X. Следовательно, величина нетто-иска $X_2 = \min(X, M)$. Используя формулу, приведённую выше ($M_0 = (\log 25,000 - 8.5)/0.8 = 2.033$ и $M_2 = M_0 - 2(0.8) = 0.433$), найдём второй нецентральный момент величины нетто-иска:

$$E[X_2^2] = \int\limits_0^M x^2 f_X(x)dx + \int\limits_M^\infty M^2 f_X(x)dx =$$
$$e^{2\mu+2\sigma^2}\ [\Phi(M_2 - \Phi(-\infty)] + M^2\ [\Phi(\infty) - \Phi(M_0)] =$$
$$86,876,663\ [\Phi(0.433)] + (25,000)^2\ [1 - \Phi(2.033)] = 71,135,800$$

Таким образом, дисперсия равна:

$$Var[X_2] = E[X_2^2] - (E[X_2])^2 = 71,135,800 - (6,557)^2 = (5,304)^2$$

Вопрос для самоподготовки 3.5. Найдите математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение величины исков, выплачиваемых перестраховщиков в каждом из этих трёх случаев.

4.2 Нормальное распределение

Похожая формула может быть получена для первого момента и в случае нормального распределения:

Свойство нормального распределения
Если $f_X(x)$ – функция плотности распределения вероятностей для $N(\mu, \sigma^2)$ - распределения, то:

$$\int\limits_L^U x f_X(x) dx = \mu \left[\Phi(U') - \Phi(L')\right] - \sigma \left[\phi(U') - \phi(L')\right]$$

$$\text{где} \quad L' = \frac{L-\mu}{\sigma} \quad \text{и} \quad U' = \frac{U-\mu}{\sigma}$$

и $\phi(z)$ и $\Phi(z)$ - соответственно плотность распределения и функция распределения для стандартного нормального распределения.

Доказательство:
Используя выражение для $f_X(x)$ и производя замену $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, получим:

$$\int\limits_L^U x f_X(x) dx = \int\limits_L^U x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$\int\limits_{L'}^{U'} (\mu + \sigma z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$

$$\mu \int\limits_{L'}^{U'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \sigma \int\limits_{L'}^{U'} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$

$$\mu\ P(L' < N(0{,}1) < U') + \sigma \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\right)\Bigg|_{L'}^{U'} =$$

$$\mu \left[\Phi(U') - \Phi(L')\right] - \sigma \left[\phi(U') - \phi(L')\right] =$$

$$\mu \left[\Phi\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right] - \sigma \left[\phi\left(\frac{U-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

Если $L = -\infty$ или $U = \infty$, то эту формулу можно упростить, используя тот факт, что $\phi(-\infty) = \phi(\infty) = 0$

Вопрос для самоподготовки 3.6. Найдите выражение для $\int\limits_L^U x^2 f_X(x)dx$, где $f_X(x)$ – функция плотности распределения вероятностей $N(\mu,\sigma^2)$ - распределения.

Если договор эксцедента убытка имеет верхний предел – полученные выражения усложняются, но основной подход остаётся прежним.

Пример 3.6 Найти математическое ожидания и дисперсию величины выплат страховщика в Примере 3.5 в случае перестрахования по Договору 2 с некоторыми поправками: покрытие по этому договору имеет нижний предел 25,000 и верхний предел 50,000, и доля превышения иска верхнего предела переходит в обязательство страховщика.

Решение Величина выплат страховщика определяется теперь так:

$$X_2 = \begin{cases} X & \text{если} \quad X < M \\ M & \text{если} \quad M \le x < R \\ X - (R - M) & \text{если} \quad x \ge R \end{cases} \quad \text{где } M = 25,000 \text{ и } R = 50,000.$$

Таким образом, математическое ожидание X_2:

$$E[X_2] = \int\limits_0^M x f_X(x)dx + M\int\limits_M^R f_X(x)dx + \int\limits_R^\infty (x - R + M) f_X(x)dx =$$

$$\int\limits_0^M x f_X(x)dx + M\int\limits_M^R f_X(x)dx + \int\limits_R^\infty x f_X(x)dx - (R - M)\int\limits_R^\infty f_X(x)dx$$

Используя результаты, полученные выше (с $M_0 = 2.033$ и $M_1 = 1.233$), и положив $R_0 = \frac{\log 50{,}000 - 8.5}{0.8} = 2.900$ и $R_1 = R_0 - 0.8 = 2.100$, получим:

$$\begin{gathered} E[X_2] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}\ [\Phi(M_1) - \Phi(-\infty)] + M\ [\Phi(R_0) - \Phi(M_0)] + \\ e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}\ [\Phi(\infty) - \Phi(R_1)] - (R - M)\ [\Phi(\infty) - \Phi(R_0)] = \\ 6,768\ [\Phi(1.233)] + 25,000\ [\Phi(2.900) - \Phi(2.033)] + \\ 6,768\ [1 - \Phi(2.100)] - 25,000\ [1 - \Phi(2.900)] = 6,585 \end{gathered}$$

4.3 Условное распределение исков

Пока нас интересовали только выплаты страховщика и перестраховщика, выраженные как среднее по общему количеству исков. Считая ожидаемые выплаты перестраховщика, мы объединяли все иски, включая те, по которым перестраховщик выплат не совершал, т.е. те, что оказывались ниже предела удержания эксцедента убытка.

Однако, перестраховщика больше интересуют ненулевые иски, т.е. иски, по которым фактически осуществляются выплаты. В самом деле, перестраховщик может вовсе не знать об остальных исках, т.к. страховщик мог просто не предоставить ему соответствующей информации.

Положим, что основные иски рассматриваются как наблюдения случайной величины X, и что договор эксцедента убытка включает предел удержания M. Тогда, считая, что мы рассматриваем все иски, выплаты страховщика (I) и перестраховщика (R) равны:

$$\mathrm{I} = \begin{cases} X & \text{если} \quad X \leq M \\ M & \text{если} \quad X > M \end{cases} \qquad \mathrm{R} = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad X \leq M \\ X - M & \text{если} \quad X > M \end{cases}$$

Мы можем найти распределения случайных величин (вместе с их математическими ожиданиями и дисперсиями), при условии, что нам известно распределение X.

Теперь предположим, с точки зрения перестраховщика, что нас интересует распределение только тех исков, по которым совершаются выплаты. Тогда мы знаем, что эти иски превышают величину M. Итак, случайная величина, которая нас интересует, – есть условная случайная величина:

$$R = X - M | X > M$$

Вообще говоря, эта случайная величина будет иметь не такое распределение, как случайная величина R выше. Мы можем найти её плотность распределения, рассматривая $P(R < r)$:

$$P(R < r) = P(X < r + M | X > M) = \frac{P(M < X < r + M)}{P(X > M)} =$$

$$\int\limits_{M}^{r+M} \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} dx = \frac{F_X(r + M) - F_X(M)}{1 - F_X(M)}$$

Дифференцируя по r, получим функцию плотности распределения случайной величины R:

$$f_R(r) = \frac{f_X(r + M)}{1 - F_X(M)}$$

В следующем примере рассматривается условная случайная величина, т.к. нас интересуют иски выше уровня превышения. Будьте внимательны, отвечая на экзаменационные вопросы, уточняя, распределение условных или неусловных случайных величин требуется найти. Ключевым вопросом является: "Включаем ли мы нулевые иски?".

Пример 3.7 Найти плотность распределения величины выплат страховщика, если задана франшиза E, и если основные иски имеют Парето-распределение с функцией плотности распределения
$f_X(x) = \alpha\lambda^\alpha(\lambda + x)^{-\alpha-1}, x > 0$.
После этого найти среднее значение выплат страховщика (для исков, по которым страховщик осуществляет выплаты).

Решение Страховщик выплачивает $X - E$ от каждого иска X, превышающего E, и ноль - в противном случае. Итак, если Y определяет величину выплат страховщика, мы должны найти плотность величины $Y = X - E$, учитывая, что $X > E$. Так как нетто-сумма исков y страховщика соответствует величине брутто-иска $E + y$, то:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(E+y)}{P(X>E)} = \frac{\alpha\lambda^\alpha(\lambda+E+y)^{-\alpha-1}}{\int\limits_E^\infty \alpha\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha-1}dx} =$$

$$\frac{\alpha\lambda^\alpha(\lambda+E+y)^{-\alpha-1}}{\lambda^\alpha(\lambda+E)^{-\alpha}}$$

Следовательно, плотность распределения нетто-выплат страховщика равна:

$$f_Y(y) = \alpha(\lambda+E)^\alpha(\lambda+E+y)^{-\alpha-1}, y > 0$$

Мы получили Парето-распределение с параметром $\lambda + E$.
Используя формулу для среднего значения в случае Парето-распределения, найдём среднее нетто-выплат стаховщика (для ненулевых исков):

$$E[Y] = \frac{\lambda+E}{\alpha-1}$$

Аналогичные рассуждения проводятся в случае убытков (имеющих Парето-распределение), превышающих предел удержания при перестраховании.

4.4 Инфляция

Мы детально рассмотрим влияние инфляции на действие каждого договора перестрахования.

Вопрос для самоподготовки 3.7. Предположим, что иски из страхового портфеля имеют $Exp(\lambda)$–распределение. Действует договор пропорционального перестрахования с долей удержания (квотой), равной α. Определите ожидаемы выплаты страховщика:

(a) на данный момент

(b) если размеры исков в следующем году увеличатся под действием инфляции с коэффициентом k.

Влияние инфляции на результат действия договора перестрахования эксцедента убытка может быть не столь очевидна.

Пример 3.8 Пусть иски из страхового портфеля имеют $Pareto(\alpha, \lambda)$–распределение. В году 0 параметры $\alpha = 6, \lambda = 1,000$. Действует договор перестрахования эксцедента убытка с пределом удержания 500. Уровень инфляции не изменяется и равен 10%.

(i) Найти распределение выплат страховщика в году 1 и 2 без перестрахования.

(ii) Найти, во сколько раз увеличится среднее значение нетто-выплат страховщика (для каждого года).

Решение

(i) Пусть X_0 – размер иска в году 0 без учёта перестрахования. X_0 имеет $Pareto$(6,1000)–распределение, и $X_1 = kX_0$ – размер иска в году 1 без перестрахования (где $k = 1.1$). Для того, чтобы найти распределение X_1, положим $y = kx$ в интеграле для плотности распределения:

$$1 = \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} dx = \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + y/k)^{\alpha+1}} \frac{dy}{k} = \int_0^\infty \frac{\alpha(k\lambda)^\alpha}{(k\lambda + y)^{\alpha+1}} dy$$

Получили распределение $X_1 \sim Pareto(\alpha, k\lambda)$, следовательно, распределение исков в году 1 – $Pareto$(6,1100), а в году 2 – $Pareto$(6,1210)

(ii) Средняя величина выплат страховщика в году 0 после договора перестрахования, $E[Y_0]$, равна:

$$E[Y_0] = \int_0^{500} x \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} dx + 500 \int_{500}^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} dx$$

Первый интеграл можно найти, зная значение полного интеграла (математическое ожидание в случае $Pareto$–распределения):

$$\int_0^{500} x \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} dx = \frac{\lambda}{\alpha - 1} - \int_{500}^\infty x \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} dx$$

Выполним замену $u = x - 500$:

$$\int_{500}^{\infty} x \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} dx = \int_{0}^{\infty} (u + 500) \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}} du =$$

$$\int_{0}^{\infty} u \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}} du + 500 \int_{0}^{\infty} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}} du =$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + 500}\right)^\alpha \int_{0}^{\infty} u \frac{\alpha(\lambda + 500)^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}} du + 500 \left(\frac{\lambda}{\lambda + 500}\right)^\alpha \int_{0}^{\infty} \frac{\alpha(\lambda + 500)^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}} du$$

Теперь первый интеграл – есть математическое ожидание $Pareto(\alpha, (\lambda+500))$-распределения, а второй – это область под функцией плотности такого же распределения. Следовательно:

$$\int_{0}^{500} x \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} dx = \frac{\lambda}{\alpha - 1} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 500}\right)^\alpha \frac{\lambda + 500}{\alpha - 1} - 500 \left(\frac{\lambda}{\lambda + 500}\right)^\alpha$$

Выполняя аналогичную замену для второго интеграла, получим:

$$\int_{500}^{\infty} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} dx = 500 \int_{0}^{\infty} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + 500 + u)^{\alpha+1}} du = 500 \left(\frac{\lambda}{\lambda + 500}\right)^\alpha$$

Отсюда получаем:

$$E[Y_0] = \frac{\lambda}{\alpha - 1} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 500}\right)^\alpha \frac{\lambda + 500}{\alpha - 1}$$

Подставляя значения $\lambda = 1,000, \alpha = 6$, находим $E[Y_0] = 173.66$.
Среднее значение выплат в последующие годы может быть получено с помощью замены λ на $k\lambda$ в полученной выше формуле. Таким образом, в году 1:

$$E[Y_1] = \frac{1100}{5} - \left(\frac{1100}{1600}\right)^6 \frac{1600}{5} = 186.21$$

в году 2:

$$E[Y_2] = \frac{1210}{5} - \left(\frac{1210}{1710}\right)^6 \frac{1710}{5} = 199.07$$

Среднее значение выплат страховщика от года 0 к году 1 увеличилось на 7.2%, от года 1 к году 2 – на 6.9%.

Вопрос для самоподготовки 3.8. Найдите предел значения $E[Y_n]$, если n устремить к бесконечности.

4.5 Вычисление неполных интегралов

Одной из основных проблем вычисления средних и дисперсий в случае договора перестрахования эксцедента убытка является возникновение неполных интегралов, т.е. интегралов, пределы которых не определяют полный диапазон подходящего распределения. Иногда эту проблему можно решить, используя следующий метод.

Предположим, что имеется договор эксцедента убытка с уровнем удеражния M. Тогда величина иска Y, которую страховщик удерживает, равна:

$$Y = \begin{cases} X & \text{если} \quad X \le M \\ M & \text{если} \quad X > M \end{cases}$$

Математическое ожидание Y равно:

$$E[Y] = \int_0^M x f_X(x)dx + M \int_M^\infty f_X(x)dx$$

Представим первый интеграл в виде разности двух интегралов:

$$E[Y] = E[X] - \int_M^\infty x f_X(x)dx + M \int_M^\infty f_X(x)dx = E[X] - \int_M^\infty (x-M) f_X(x)dx$$

Выполним замену $u = x - M$:

$$E[Y] = E[X] - \int_0^\infty u f_X(u+M)du$$

Мы получили выражение математического ожидания $E[Y]$, в которое входят только полные интегралы. Теперь мы без труда можем оценить это выражение.

Пример 3.9 Риски из страхового портфеля имеют $Pareto(\alpha, \lambda)$-распределение, где $\alpha = 3$, $\lambda = 10$. Найти среднее значение величины выплат страховщика в двух случаях: когда предел удержания равен 8, когда удержание не имеет предела.

Решение С бесконечным пределом удержания среднее значение выплат страховщика – есть математическое ожидание $Pareto(3, 10)$-распределения:

$$E[Y] = \frac{10}{3-1} = 5$$

Если предел удержания равен 8, используя формулу, приведённую выше, а также формулу для функции плотности *Pareto*-распределения, найдём среднее значение:

$$E[Y] = E[X] - \int\limits_0^\infty u f_X(u+M)du = 5 - \int\limits_0^\infty u \frac{3*10^3}{(u+18)^4} du$$

Вынося коэффициент за знак интеграла, мы можем привести этот интеграл к виду математического ожидания $Pareto(3,18)$-распределения:

$$E[Y] = 5 - \left(\frac{10}{18}\right)^3 \int\limits_0^\infty u \frac{3*18^3}{(u+18)^4} du = 5 - \left(\frac{10}{18}\right)^3 \frac{18}{2} = 3.4568$$

Итак, установление предела удержания, равного 8, уменьшило среднее значение выплат с 5 до 3.46.

Вопрос для самоподготовки 3.9. Найдите дисперсию величины выплат страховщика с установленным и бесконечным пределом удержания.

4.6 Оценивание

Мы можем применять оба способа оценивания параметров в тех случаях, когда речь идёт о распределениях, применяющихся в перестраховании:

- метод моментов

- метод максимального правдоподобия.

Вопрос для самоподготовки 3.10. Следующие величины представляют собой случайную выборку выплат перестраховщика согласно договору пропорционального перестрахования:

$$4.6,\ 6.8,\ 22.9,\ 1.4,\ 3.8,\ 10.2,\ 19.4,\ 32.1$$

Если величина основных исков имеет $Gamma(\alpha, \lambda)$-распределение и доля удержания равна 80%, найдите оценку для параметров α и λ, используя метод моментов.

Вопрос для самоподготовки 3.11. Иски страхового портфеля описываются следующей функцией распределения $f(x) = 2cxe^{-cx^2},\ x \geq 0$. Имеется договор эксцедента убытка индивидуального перестрахования с уровнем удержания $M = 3$. О случайной выборке величин выплат перестраховщика известно:

$$n = 10 \qquad \sum y_i = 8.7 \qquad \sum y_i^2 = 92.3$$

Найдите оценку параметра c методом максимального правдоподобия.

Вопрос для самоподготовки 3.12. Проверьте, что формула, приведённая в Примере 3.7, остаётся верной, когда $E = 0$.

Вопрос для самоподготовки 3.13. Найдите отношение рисковых премий с эксцедентом £100 и без него, если основные иски имеют *Pareto*-распределение, где $\alpha = 2.5,\ \lambda = 5,000$.

Вопрос для самоподготовки 3.14. Если основные убытки из рискового портфеля имеют $Exp(\lambda)$-распределение, эксцедент равен E, какое распределение имеет величина нетто-суммы выплат страховщика и какого его среднее значение?

Глава 4

Основы теории–Перестрахование

§1 Перестрахование

Иски, предъявленные страховым компаниям, должны удовлетворяться полностью, и для того, чтобы защитить себя от больших исков, сама компания может страховаться, это называется перестрахование. В данной части предполагается, что договор перестрахования бывает двух основных типов: индивидуальный договор эксцедента убытка или пропорционального перестрахование.

1.1 Эксцедент убытка

В случае договора эксцедента убытка, от каждого страхового возмещения, превышающего M - уровень удержания, перестраховщиком оплачивается величина превышения.

Соглашение по эксцеденту убытка перестрахования может быть составлено следующим образом: если предъявлен иск на сумму X, то компания выплачивает величину Y, где

$$Y = X, \qquad \text{если } X \leqslant M$$

$$Y = M, \qquad \text{если } X > M$$

Перестраховщик платит сумму $Z = X - Y$.
Ответственность страховщика изменяется по двум основным направлениям:

1. уменьшается среднее значение величины выплат

2. уменьшается дисперсия величины выплат

Оба эти вывода - простые следствия того факта, что эксцедент убытка задает верхнюю границу крупных исков. Обе величины, среднее значение X и среднее значение величины Y, выплачиваемой страховой компанией по договору эксцеденту убытка, теперь можно определить. Как видно, среднее значение, выплачиваемое страховщиком без перестрахования равно:

$$E(X) = \int\limits_0^\infty xf(x)dx \tag{4.1}$$

где $f(x)$ – функция плотности распределения вероятности суммы иска X. С уровнем удержания M среднее значение Y становится:

$$E(Y) = \int\limits_0^M xf(x)dx + MP(X > M) \tag{4.2}$$

В более широком смысле, производящая функция моментов величины Y, суммы, выплачиваемой страховщиком, равна:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int\limits_0^M e^{tx}f(x)dx + e^{tM}P(X > M) \tag{4.3}$$

Формулы (4.1) и (4.2) иллюстрируют основную трудность при перестраховании эксцедента убытка. В (4.2) интеграл неполный (т.е. пределы интегрирования от 0 до M, а не до ∞). Та же трудность возникнет и при страховании с эксцедентом. При перестраховании эксцедента убытка есть метод, позволяющий перейти от неполного интеграла к полному. Используем (4.2):

$$E(Y) = \int\limits_0^\infty xf(x)dx - \int\limits_M^\infty xf(x)dx + M\int\limits_M^\infty f(x)dx =$$

$$= E(X) - \int\limits_M^\infty (x - M)f(x)dx$$

Полный интеграл получится, если ввести $z = x - M$. Таким образом,

$$E(Y) = E(X) - \int\limits_0^\infty zf(z + M)dz \tag{4.4}$$

простая, но важная формула. Уменьшение ожидаемой суммы иска:

$$\int_0^\infty zf(z+M)dz \tag{4.5}$$

Но есть проблема инфляции. Предположим, что иск X подвержен инфляции с темпом k, а удержание M остается фиксированным. Как это повлияет на соглашение? Сумма иска теперь kX, а сумма, выплачиваемая страховщиком, Y:

$$Y = kX, \qquad \text{если } kX \leqslant M$$

$$Y = M, \qquad \text{если } kX > M$$

Средняя сумма, выплачиваемая страховщиком, равна:

$$E(Y) = \int_0^{M/k} kxf(x)dx + MP(X > M/k) \tag{4.6}$$

Тем же образом, каким было получено (4.4), можно преобразовать (4.6) в полный интеграл. (4.6) можно записать как:

$$E(Y) = \int_0^\infty kxf(x)dx - \int_{M/k}^\infty kxf(x)dx + M\int_{M/k}^\infty f(x)dx.$$

$$= kE(X) - k\int_{M/k}^\infty (x - M/k)f(x)dx$$

Новая средняя сумма, выплачиваемая страховщиком, равна:

$$E(Y) = k(E(X) - \int_0^\infty yf(y + M/k)dy) \tag{4.7}$$

Отметим, что интеграл в (4.7) имеет тот же вид, что в (4.4). Еще важно отметить, что новая средняя величина иска (4.7) не в k раз больше средней величины иска без учета инфляции. Аналогичный подход можно использовать в ситуациях, когда уровень удержания привязан к некоторому темпу инфляции. Рассмотрим задачу оценивания при перестраховании эксцедента убытка. Пусть в данных исках показаны только иски, уплаченные страховщиком. Обычно данные записываются в виде

$$x_1, x_2, M, x_3, M, x_4, x_5, ... \tag{4.8}$$

и требуется оценка распределения основного брутто-иска. Метод моментов не применим, т.к. даже среднюю сумму иска нельзя вычислить. С другой стороны, можно использовать метод процентилей без изменения, например, если уровень удержания М высокий и только более высокие выборочные процентили были подвергнуты (нескольким) искам перестрахования.

Статистическая терминология для выборки формы (4.8) – цензурирование. В общем случае, цензурированная выборка встречается, когда некоторые величины записаны точно, а про остальные известно только, что они превосходят некое частное значение, в данном случае уровень удержания М. К цензурированным выборкам можно применить максимальное правдоподобие. Оно состоит из двух слагаемых. Величины, записанные точно, входят в первое слагаемое:

$$L_1(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

где n величин, x_i, известно точно. А цензурированные величины входят во второе слагаемое:

$$L_2(\theta) = \prod_{i=1}^{m} P(X > M)$$

т.е. $[P(X > M)]^m$, где m исков перестрахования. Полное правдоподобие:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \times [(1 - F(M;\theta))]^m \tag{4.9}$$

где $F(x;\theta)$ - функция распределения исков.

Теперь рассмотрим перестрахование с точки зрения перестраховщика. Перестраховщик может иметь учет только тех исков, которые больше М. Если иск меньше М, перестраховщик может даже не знать, что иск имеет место. Перестраховщик таким образом имеет задачу оценки распределения брутто-исков, только когда рассматриваются иски больше М. Пользуясь статистической терминологией, перестраховщик наблюдает иски из усеченного распределения.

Допустим, что сумма брутто - исков имеет плотность распределения вероятностей $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$. Допустим, что перестраховщик информирован об исках, больших уровня удержания M, и имеет учет $z = x - M$. Какова функция распределения $g(z)$ для суммы z, выплачиваемой перестраховщиком?

Решение:

$$P(Z < z) = P(X < z + M | X > M) = \int\limits_M^{z+M} \frac{f(x)}{1 - F(M)} dx =$$
$$= \frac{F(z + M) - F(M)}{1 - F(M)}$$

Дифференцируя функцию распределения исков перестраховщика

$$g(z) = \frac{f(z + M)}{1 - F(M)}, \qquad z > 0 \tag{4.10}$$

1.2 Пропорциональное перестрахование

В пропорциональном перестраховании страховщик платит фиксированную часть иска, независимо от размера платежа. Используя те же обозначения, что и выше, пропорциональное перестрахование может быть описано следующим образом: если предъявлен иск на сумму X, то компания платит Y где

$$Y = \alpha X, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Параметр α известен как уровень удержания, следует иметь ввиду, что термин уровень удержания используется как при страховании с эксцедентом, так и в пропорциональном перестраховании

Т.к. сумма, выплачиваемая страховщиком по иску X равна αX и сумма, выплачиваемая перестраховщиком, равна $(1-\alpha)X$, то распределение обеих сумм можно найти простой заменой переменой.

1.3 Полисы с эксцедентом убытка

Страховые полисы с эксцедентом убытка присущи страхованию автотранспорта и многим другим типам страхования имущества и несчастных случаев. По этому типу полисов страхователь соглашается понести полностью ущерб до предельной суммы L. Если ущерб на сумму X превосходит L, то держатель полиса предъявляет иск только на сумму $X-L$. Если Y – сумма, выплачиваемая страховщиком, то в этом случае:

$$Y = 0, \qquad X \leqslant L$$
$$Y = X - L, \qquad X > L$$

Ясно, что страховая премия по любому полису с экцедентом будет меньше, чем по полису без экцедента. Положение страховщика по полису с экцедентом точно такое же, как у перестраховщика в случае перестрахования по договору эксцедента убытка. Положение держателя полиса – как для страховщика с договором перестрахования эксцедента убытка, поскольку убытки описываются точно так же.

§2 Вопросы студентам

В1 Не странно ли, что нетто-ставка (страхового взноса) может означать "игнорировать перестрахование или "игнорировать расходы (издержки)"

О1 Да, когда встречаешь слова нетто, брутто, всегда спрашивай себя, нетто или брутто чего? В контексте становится ясно, относится это к издержкам, перестрахованию, или налогам. Например, нетто-процентная ставка будет означать "за вычетом налогов в то время как иск брутто будет означать "до вычета возмещения перестрахования"

В2 Есть ли другие формы перестрахования?

О2 Все формы перестрахования в основном или пропорционального, или непропорционального типов. Однако есть много вариаций и много отдельных видов перестрахования, такие как перестрахование катастроф, которое защищает против огромных убытков, случающихся за короткий период (например, ущерб после урагана)

В3 Могут ли квотный договор и договор эксцендентного перестрахования в примере 2.4 действовать одновременно?

О3 На практике обычно для рисков, покрываемых несколькими взаимодействующими договорами важно, чтобы порядок, в котором договоры применяются, был ясно определен, т.к. платежи от перестрахователей зависят от того, кто платит первым. Обычная ситуация, когда есть несколько отдельных договоров эксцендентного перестрахования "один над другим обеспечивающие покрытие различных уровней, например

Договор 1:	£25,000 - £50,000
Договор 2:	£50,000 - £250,000
Договор 3:	£250,000 - £1,000,000
Договор 4:	£1,000,000+

Обычно покрытие эксцендента убытка применяют перед пропорциональным перестрахованием.

(Для любознательных студентов - повторить вычисления в Примере 2.4 с договорами 1 и 2, действующими вместе, и сравнить результаты)

2.1 Подсказки для ответов на вопросы

1. Обычно экзаменационный вопрос по этой теме включает алгебраическую часть, где нужно вывести интегральную формулу (примерно треть общей оценки), затем численная задача, с использованием формул. Нужно уметь доказывать интегральные формулы, используемые в эксцедентах и удержаниях для логарифмически нормальных и нормальных распределений.

2. Нужно уметь уверенно интегрировать, используя подстановки и интегрирование по частям. Если не можете придумать, какую подстановку применить для упрощения интеграла, обычно подсказку можно найти в пределах.

3. Нужно уметь уверенно работать с условными вероятностями при нахождении средней суммы платежа, которую платит перестраховщик, подумайте, это средняя сумма по начальному иску или среднее по ненулевому иску.

4. Много экзаменационных вопросов комбинируют методы этой главы с моделями для совокупных исков, которые рассмотрим в части 3. Поэтому можно будет вернуться к тому, что сделано здесь, перед тем как идти дальше.

§3 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 3.1

Сумма иска	Кем застраховано	A	B	R
£400.000	Company A	£300,000	-	£J100,000
£10,000	Company A	£7,500	-	£2,500
£250,000	Company B	-	£100,000	£150,000
£75,000	Company B	-	£75,000	£0
Total		£307,500	£175,000	£252,500

Решение 3.2

a) Нетто - сума, которую платит прямой страховщик, определяется функцией

$$h(x) = \begin{cases} \text{x} & \text{если} & & \text{x} & \leqslant & £5{,}000 \\ 5{,}000 & \text{если} & £5{,}000 & < \text{x} & \leqslant & £10{,}00 \\ \text{x}/2 & \text{если} & £10{,}000 & < \text{x} & \leqslant & £20{,}000 \\ \text{x-}10{,}000 & \text{если} & £20{,}000 & < \text{x} & & \end{cases}$$

средняя сумма нетто-иска:

$$E[h(X)] = \int\limits_0^{5000} xf(x)dx + \int\limits_{5000}^{10000} 5000f(x)dx$$

$$+ \int\limits_{10000}^{20000} \frac{x}{2}f(x)dx + \int\limits_{20000}^{\infty} (x-10000)f(x)dx$$

b) математическое ожидание $E([h(X)]^2)$ находится возведением в квадрат сумм в каждом интеграле

$$E([h(X)]^2) = \int\limits_0^{5000} x^2f(x)dx + \int\limits_{5000}^{10000} 5000^2f(x)dx$$

$$+ \int\limits_{10000}^{20000} \left(\frac{x}{2}\right)^2 f(x)dx + \int\limits_{20000}^{\infty} (x-10000)^2f(x)dx$$

(Мы будем пользоваться таким видом вычислений для краткости - вычислять дисперсию суммы нетто-иска)

c) Перестраховщик должен делать платеж, как только сумма брутто-иска превысит $£5000$. Часть иска, превышающая $£5000$ - просто вероятность, что иск превзойдет $£5000$, которую можно найти, интегрируя функцию распределения вероятностей.

$$P(X > 5000) = \int\limits_{5000}^{\infty} f(x)dx$$

d) На графике видно, что сумма нетто-иска превышает £7500 всякий раз, когда сумма брутто-иска превышает £15000. Вероятность этого:

$$P(X > 15000) = \int\limits_{15000}^{\infty} f(x)dx$$

Решение 3.3

Для среднего используем формулу с $L = 0, U = \infty$ и $k = 1$:

$$E(X) = e^{\mu+1/2\sigma^2}[\phi(\infty) - \phi(-\infty)] = e^{\mu+1/2\sigma^2}$$

Для второго нецентрального момента используем те же значения L и U при $k = 2$:

$$E(X^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}[\phi(\infty) - \phi(-\infty)] = e^{2\mu+2\sigma^2}$$

Тогда дисперсия:

$$Var(X) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Это формулы согласуются с обычными результатами

Решение 3.4

(a) Используя формулу при $k = 0$:

$$\int\limits_{1000}^{5000} f(x)dx$$

$$= \phi\left(\frac{\log 5000 - 7.5}{0.85}\right) - \phi\left(\frac{\log 1000 - 7.5}{0.85}\right)$$

$$= \phi(1.197) - \phi(-0.697) = 0.88435 - 0.24290 = 0.641$$

(b) Используя формулу при $k - 1$:

$$\int\limits_{0}^{1000} xf(x)dx$$

$$= e^{7.5+1/2\times 0.85^2}[\phi(\frac{\log 1000 - 7.5}{0.85} - 0.85) - \phi(-\infty)]$$

$$= e^{7.86125}[\phi(-1.547) - 0]$$

$$= 2,594.76 \times 0.06093 = 158.1$$

(c) Используя формулу при $k = 2$:

$$\int_{5000}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$= e^{2(7.5)+2\times 0.85^2}[\phi(\infty) - \phi(\frac{\log 5000 - 7.5}{0.85} - 2(0.85))]$$

$$= e^{16/445}(1 - \phi((-0.503))$$

$$= 2,594.76 \times 0.06093 = 158.1$$

$$= 13,866,688(1 - 0.30749) = 9.603$$

Решение 3.5

Поскольку страховщик и перестраховщик вместе платят полный иск, средние суммы, выплачиваемые перестраховщиком, находятся вычитанием:

Договор 1: $6,768 - 5,07 \ = 1,692$

Договор 2: $5,758 - 6,557 = 211$

По Договору 1 среднеквадратичное отклонение для сумм, которые платит перестраховщик

$0.25 \times 408 = 1,602$

По Договору 2, перестраховщик платит часть Y с превышением $25,000$ для каждого ущерба X, поэтому:

$$E(Y^2) = \int_{M}^{\infty} (x - M)^2 f_X(x)dx$$

$$= \int_{M}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - 2M \int_{M}^{\infty} x f_X(x)dx + M^2 \int_{M}^{\infty} f_X(x)dx$$

$$= e^{2\mu+2\sigma^2}[1 - \Phi(M_2) - 2Me^{\mu+1/2\sigma^2}[1 - \Phi(M_1)] + M^2[1 - \Phi(M_0)]$$

$$= 86,876,663[1 - \Phi(0.433)1 - 2(25,000)(6,768)[1 - \Phi(1.333)]$$

$$+(25,000)^2[1 - \Phi(2.033)]$$

$$= 5,217,100$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 5,217,100 - (211)^2 = (2,274)^2$$

Отметим, что по XOL, перестраховщику достается большая часть изменчивости в суммах иска. Среднеквадратичное отклонение $(2,274)$ иска перестраховщика, со средним 211, соразмерны значительно лучше, чем среднеквадратичное отклонение $(6,408)$ прямого иска со средним $6,768$.

Решение 3.6

Попробуем вычислить интеграл

$$I = \int_L^U x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Делаем замену $z = X - P$ (точно так же, как в предыдущем доказательстве), получаем :

$$I = \int_L^U (\mu + \sigma z)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

раскрываем:

$$I = \mu^2 \int_L^U \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2} dz + 2\mu\sigma \int_L^U z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2} dz +$$

$$\sigma^2 \int_L^U z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2} dz$$

Первые два интеграла можно вычислить, используя результаты, полученные выше. Последний интеграл можно вычислить, используя интегрирование по частям:

$$\int_L^U z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-1/2z^2} dz = z \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-1/2z^2} \right) \Big|_L^U - \int_L^U \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2z^2} dz =$$

$$= -[U\Phi(U) - L(\Phi(L)] + \Phi(U) - \Phi(L)$$

Объединяя эти три интеграла, получаем:

$$\int\limits_L^U x^2 f_X(x)dx = \mu^2[\Phi(\frac{U-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{L-\mu}{\sigma})] - 2\mu\sigma[\Phi(\frac{U-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{L-\mu}{\sigma})] +$$

$$+\sigma^2\{[\Phi(\frac{U-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{L-\mu}{\sigma})] -$$

$$-[(\frac{U-\mu}{\sigma})\Phi(\frac{U-\mu}{\sigma}) - (\frac{L-\mu}{\sigma})\Phi(\frac{L-\mu}{\sigma})]\}$$

Решение 3.7

(a) если случайная величина иска равна X, то доля удержания равна $Y = \alpha X$. Тогда:

$$E(Y) = E(\alpha X) = \alpha E(X) = \alpha/\lambda$$

(b) Распределение исков будущего года kX, где $X \sim Exp(\lambda)$. Тогда доля удержания $Y = \alpha k X$, и:

$$E(Y) = E(\alpha k X) = \alpha k E(X) = \alpha k/\lambda$$

Решение 3.8

В конечном счете, дисперсия исков, сумма которых меньше 500, будет стремиться к нулю. Тогда страховщик будет платить 500 по каждому иску. Тогда предел $E(Y_n)$ при n стремящемся к бесконечности будет равен 500.

Решение 3.9

Если величина удержания не имеет предела, дисперсия оплаты иска – это просто дисперсия распределения Парето (3,19):

$$Var(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \frac{3\times 10^2}{4\times 1} = 75$$

С конечным удержания, математическое ожидание квадрата оплаты иска:

$$E(Y^2) = \int\limits_0^8 x^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{a+1}}dx + \int\limits_8^\infty 8^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha + 1}dx$$

Мы можем прямо посчитать второй интеграл:

$$\int\limits_{8}^{\infty} 8^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha+1}dx = 64\left[-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha\right]_8^\infty = 64\times\left(\frac{10}{1}8\right)^3 = 10.9739$$

Мы можем посчитать первый интеграл, сделав его полным и используя факт, что второй нецентральный момент в распределении Парето – $[E(X)]^2 + Var(X) = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$:

$$\int\limits_{0}^{8} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx = E(X^2) - 1\int\limits_{8}^{\infty} 8^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha+1}dx$$

Заменяя $u = x - 8$:

$$\int_0^8 x^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx =$$

$$= E(X^2) - \int_0^\infty (u+8)^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx =$$

$$= E(X^2) - \left[\int_0^\infty u^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx + 16\int_0^\infty u\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx\right.$$

$$\left.+64\int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx\right] =$$

$$= \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)\alpha-2)} - \left[\left(\frac{10}{18}\right)^\alpha \int_0^\infty u^2\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx + 16\times\left(\frac{10}{18}\right)^\alpha\int_0^\infty u\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx +\right.$$

$$\left.64\times\left(\frac{10}{18}\right)^\alpha\int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(u+18)^{\alpha+1}}dx\right] =$$

$$= \frac{2\times 10^2}{2\times 1} - \left(\frac{10}{18}\right)^3\left[\frac{2\times 18^2}{2\times 1} + 16\times\frac{18}{2} + 64\times 1\right] = 8.78$$

Тогда: $E(Y^2) = 8.78 + 10.9739 = 19.753$

Тогда дисперсия Y:

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 19.75 - 3.4568^2 - 7.804$$

Решение 3.10

Если возмещение основного иска $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, то возмещения перестраховщика имеют распределение $Y = 0.2X$. Делая замену $y = 0.2x$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha (5y)^{\alpha-1} e^{-5\lambda y} 5dy =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (5\lambda)^\alpha y^{\alpha-1} e^{-5\lambda y} dy$$

Это функция распределения вероятностей для распределения $Gamma(\alpha, 5\lambda)$, у которого среднее $\frac{\alpha}{5\lambda}$ и дисперсия $\frac{\alpha}{25\lambda^2}$. Но среднее и дисперсия выборки (знаменатель n) :

$\bar{\text{x}} = \frac{\Sigma x_i}{8} = \frac{101.2}{8} = 12.65$

и $s^2 = \frac{\Sigma x_i}{8} - \bar{\text{x}} = \frac{2119.02}{8} - 12.65^2 = 104.855$

Тогда уравнение для α и λ :

$\frac{\alpha}{5\lambda} = 12.65$ и $\frac{\alpha}{25\lambda^2} = 104.855$

Решив его, находим $\alpha = 1.526$ и $\lambda = -0.024$.

Решение 3.11

Необходимо найти распределение выплат по искам перестраховщика, у которого функция распределения вероятностей:

$$g(y) = \frac{f(y+M)}{1 - F(M)}$$

Функция распределения для распределения Вейбулла $F(x) = 1 - e^{-cx^2}$ Тогда:

$$g(y) = \frac{2c(y+M)e^{-c(y+M)^2}}{e^{cM^2}} = c(2y+6)e^{-c(y^2+6y)}$$

Тогда функция правдоподобия основывается на случайной выборке размера n :

$$L(c) = c^n \Pi(2y_i + 6) \times e{-}c\Sigma(y_i^2 + 6y_i)$$

логарифмируем:

$$\log L(c) = n \log c + \Sigma \log(2y_i + 6) - c\Sigma(y_i^2 + 6y_i)$$

дифференцируем по c:

$$\frac{\delta}{\delta c}\log L = \frac{n}{c} - \Sigma(y_i^2 + 6y_i)$$

приравниваем к нулю и решаем, получаем:

$\hat{c} = \frac{n}{\Sigma(y_i^2+6y_i)}$

Подставим числовые значения:

$\hat{c} = \frac{10}{92.3+6\times 8.7} = 0.692$

Проверим, что это максимальное значение:

$$\frac{\delta^2}{\delta c^2}\log L = -\frac{n}{c^2}$$

Полученное выражение отрицательно при любом значении c. Поэтому это максимальное значение для функции правдоподобия

Решение 3.12

Если $E = 0$, по формуле получаем : $f_Y(y) = \alpha\lambda^\alpha(\lambda+y)^{-\alpha-1}, y > 0$, что то же самое, что исходное распределение убытков. Это верно, поскольку страховщик должен оплатить полный ущерб.

Аналогично, средняя сумма, выплачиваемая перестраховщиком, равна $\frac{\lambda}{\alpha-1}$, что соответствует среднему значению в распределении Pareto.

Решение 3.13

Без эксцедента, средняя сумма платежа страховщика по отношению к каждому предъявленному иску:

$$\int_0^\infty x\alpha\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha-1}dx = \frac{\lambda}{\alpha-1}$$

(используем формулу для среднего значения распределения Pareto).

С эксцедентом E , средняя сумма платежа страховщика по отношению к каждому предъявленному иску :

$$\int_E^\infty (x-E)\alpha\lambda^\alpha(\lambda+x)^{-\alpha-1}dx$$

Делаем замену $y - x - E$, то есть:

$$\int_0^\infty yx\alpha\lambda^\alpha(\lambda+x+y)^{-\alpha-1}dy = (\frac{\lambda}{\lambda+E})^\alpha\int_0^\infty yx\alpha\lambda^\alpha(\lambda+x+y)^{-\alpha-1}dy$$

$$= (\frac{\lambda}{\lambda+E})^{\alpha}\frac{\lambda+E}{\alpha-1}$$

(используем формулу для среднего значения распределения $Pareto$ с параметром $\lambda+E$).

Итак, отношение рисковых премий будет:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+E}\right)^{\alpha}\frac{\lambda+E}{\alpha-1}/\frac{\lambda}{\alpha-1} = \frac{\lambda}{\lambda+E}^{\alpha-1} = \left(\frac{5000}{5000+100}\right)^{2.5-1} = 0.971$$

т.е. уменьшится на 2.9%.

Решение 3.14

Распределение сумм, выплачиваемых страховщиком, как и раньше, равно $Y = X - E \mid X > E$

Таким образом:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(E+y)}{P(X>E)} = \frac{\lambda e^{-\lambda(E+y)}}{\int\limits_E^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx} = \frac{\lambda e^{-\lambda(E+y)}}{e^{-\lambda E}} = \lambda e^{-\lambda y}$$

Таким образом, нетто-сумма, выплачиваемая страховщиком, — тоже $Exp(\lambda)$ – распределение, так что среднее нетто-распределения также равно $\frac{1}{\lambda}$.

Часть III

Глава 5

Суммарные страховые выплаты

Цели главы

К концу данной главы вы будете уметь:

- описывать свойства обобщенного распределения
- описывать и использовать модели индивидуального и коллективного риска
- подбирать и применять нормальное распределение и смещенное гамма–распределение

§1 Введение

В этой главе мы рассмотрим понятие *обобщенного распределения (compound distribution)*. Мы определим и в дальнейшем будем использовать обобщенное пуассоновское, обобщенное биномиальное и отрицательное биномиальное распределения.

Также мы рассмотрим две модели риска: модель индивидуального риска и модель коллективного риска, которые используются для описания *суммарных выплат (aggregate claims)*, то есть общего числа всех выплат за конкретный период от отдельной группы страховых полисов.

В простейшем случае выплаты пенсий, каждый полис может приводить не более чем к одному платежу, и величины выплат указываются заранее (страховая сумма). Величина пенсии может быть одинаковой для всех полисов, а может различаться от полиса к полису.

В общем страховании полисы могут приводить к более чем одному платежу и страховая сумма обычна не известна заранее.

В этой главе будем рассматривать короткий период времени, в течении которого поступают иски. В следующей главе будут представлены модели, в которых период поступления исков считается бесконечным.

В этой обширной части вводится много новых понятий, имеющих большое значение во всем курсе.

Вторая часть этой главы (Основы теории) также содержит много важной информации. Начинается она с короткого параграфа о производящей функции семиинвариантов, далее в нем подробно описывается модель индивидуального риска. Последний параграф содержит несколько примеров с решениями, в которых применяется погрешность параметров.

§2 Обобщенное распределение

2.1 Определение

Обобщенное распределение.
Пусть $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$, где X_i – независимые одинаково распределённые случайные величины, N–случайная величина, независящая от X_i для любого i, тогда S имеет обобщенное распределение.
(Если N принимает значение 0, то S – нулевая сумма и её значение считается равным нулю.)

"Обобщенное распределение — это сумма случайных величин, количество которых N–есть тоже случайная величина."

Пример 5.1 Привести пример обобщенного распределения.

Решение Если группа однотипных полисов общего страхования приводит к N выплатам в течение данного года и X_i–величина i-ой выплаты, тогда $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$ – есть величина общего числа страховых выплат (величина суммарного иска) и имеет обобщенное распределение .

Т.к. обобщенное распределение встречается обычно в общем страховании, в дальнейшем под случайной величиной N будем иметь ввиду "количество исков"и под распределением случайных величин $X_1, X_2, ...$ – "распределение величины размера иска". Даже если речь об обобщенном распределении будет идти в другом контексте.
Для того, что найти обобщенное распределение, вам необходимо знать:

- распределение N (которое должно быть дискретным)
- распределение X_i (которое может быть любым)

Заметим, что если распределение X_i непрерывное, то S имеет смешанное распределение.

Вопрос для самоподготовки 5.1. Случайная величина N принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями $1/2$, $1/4$ и $1/4$ соответственно и X_i имеет $U(0, 10,)$–распределение. Постройте график функции распределения величины S.

Когда в частности распределение N известно — обобщенное распределение носит название этого распределения, например обобщенное распределение Пуассона. Сначала мы разберём свойства произвольного обобщенного распределения, а потом рассмотрим обобщённые распределения, построенные на конкретных распределениях N.

2.2 Производящие функции обобщенного распределения

Следующее обобщенное свойство можно использовать для нахождения производящей функции вероятностей и производящей функции моментов обобщенного распределения:

Производящая функция вероятностей случайной величины суммарного иска

Если $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины и N не зависит от X_i (для всех i), тогда производящая функция вероятностей $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$:

$$G_S(t) = G_N[G_X(t)]$$

"Производящая функция вероятностей суммарного иска — есть производящая функция вероятностей числа случайных величин от производящей функции вероятностей случайных величин."

Доказательство (1 способ):

При всевозможных значениях N:

$$\begin{gathered} G_S(t) = E[t^S] = E[t^{X_1+X_2+...+X_N}] = \\ = P(N=0)E[t^0] + P(N=1)E[t^{X_1}] + P(N=2)E[t^{X_1+X_2}] + ... \\ = P(N=0)1 + P(N=1)E[t^{X_1}] + P(N=2)E[t^{X_1}]E[t^{X_2}] + ... \\ = P(N=0)1 + P(N=1)G_X(t) + P(N=2)(G_X(t))^2 + ... \\ = E[(G_X(t))^N] = G_N[G_X(t)] \end{gathered}$$

Доказательство также можно провести, используя условное математическое ожидание. Отметим, что последовательность действий "альтернативного"доказательства точно такая же. Разница лишь в системе обозначений.

Доказательство (2 способ):
При всевозможных значениях N:

$$G_S(t) = E[t^S] = E[E[t^S|N]] = E[E[t^{X_1+X_2+...+X_N}|N]] = \\ = E[E[t^X]^N] = E[(G_X(t))^N] = G_N[G_X(t)]$$

Вопрос для самоподготовки 5.2. Опишите подробно получение каждой строчки Доказательства 1 способом. Выскажите все возможные предположения.

Производящая функция моментов случайной величины суммарного иска
Если $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины и N не зависит от X_i (для всех i), тогда производящая функция моментов $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$:

$$M_S(t) = M_N[\log M_X(t)]$$

"Производящая функция моментов суммарного иска — есть производящая функция вероятностей числа случайных величин от производящей функции вероятностей случайных величин."

Из этого сразу же следует формула для производящей функции моментом обобщенного распределения:

Производящая функция моментов обобщенного распределения
Производящая функция моментов обобщенного распределения $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$:

$$M_S(t) = M_N[\log M_X(t)] \quad \text{или} \quad M_S = G_N[M_X(t)]$$

где $M_X(t)$ – производящая функция моментов для X_i и $G_N(t)$ – производящая функция вероятностей для N.
Доказательство:
Первая формула следует непосредственно из предыдущего утверждения и определения обобщенного распределения. Вторая формула следует из первой с использованием равенства: $M(\log s) = G(s)$

Вопрос для самоподготовки 5.3. Запишите производящую функцию моментов обобщенного распределения Пуассона, в котором величина индивидуального иска имеет распределение $Gamma(\alpha, \beta)$ и параметр Пуассона равен λ.

Вопрос для самоподготовки 5.4. Запишите производящую функцию вероятностей обобщенного отрицательного биномиального распределения с параметрами k и p, в котором величина индивидуального иска имеет биномиальное распределение с параметрами m и q. (Обратите внимание, что здесь параметры p и q никак не связаны).

2.3 Моменты обобщенного распределения

Формула для производящей функции моментов обобщенного распределения даёт возможность вывести формулы для моментов этого распределения через моменты составляющих его распределений:

Математическое ожидание и дисперсия обобщенного распределения
Среднее и дисперсия обобщенного распределения $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$ равны:

$$E[S] = E[N]E[X]$$
$$Var[S] = E[N]Var[X] + Var[N](E[X])^2$$

Доказательство (1 способ):
Производящая функция моментов суммарного иска S: $M_S = G_N[M_X(t)]$
Дифференцируем M_S как сложную функцию:

$$M'_S(t) = G'_N[M_X(t)]M'_X(t)$$

Положим $t = 0$:

$$M'_S(0) = G'_N(1)M'_X(0)$$

то есть

$$E[S] = E[N]E[X]$$

Дифференцируем производящую функцию ещё раз:

$$M''_S(t) = G''_N[M_X(t)][M'_X(t)]^2 + G'_N[M_X(t)]M''_X(t)$$

Положим $t = 0$:

$$M''_S(0) = G''_N(1)[M'_X(0)]^2 + G'_N(1)M''_X(0)$$

то есть

$$E[S^2] = (E[N^2] - E[N])(E[X])^2 + E[N]E[X^2]$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} Var[S] = E[S^2] - (E[S])^2 = (E[N^2] - E[N])(E[X])^2 + E[N]E[X^2] - (E[N]E[X])^2 = \\ = E[N]E[X^2] - E[N](E[X])^2 + E[N^2](E[X])^2 - (E[N])^2(E[X])^2 = \\ = E[N](E[X^2] - (E[X])^2) + (E[N^2] - (E[N])^2)(E[X])^2 = \\ = E[N]Var[X] + Var[N](E[X])^2 \end{aligned}$$

Второй способ доказательства основан на использовании условного математического ожидания:
Доказательство (2 способ):

$$E[S] = E[E[S|N]] = E[E[X_1 + X_2 + ... + X_N|N]] = E[NE[X]] = E[X]E[N]$$

Последнее равенство получили, исходя из того, что $E[X]$ – константа в $E[NE[X]]$.

Вопрос для самоподготовки 5.5. Получите выражение для дисперсии S, используя условное математическое ожидание.

2.4 Примеры обобщенных распределений

В этом разделе мы рассмотрим обобщенные распределения с конкретными распределениями величины N. В следующей таблице приведены примеры распределений N, которые используются чаще всего, вместе с соответствующими производящими функциями моментов:

Распределение	Функция распределения случайной величины N	$M_S(t)$ обобщенного распределения
Пуассона	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$	$e^{\lambda[M_X(t)-1]}$
Отрицательное биномиальное	$\binom{k+n-1}{n} p^k q^n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$	$\left[\frac{p}{1-qM_X(t)}\right]^k$
Геометрическое	$pq^n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$	$\left[\frac{p}{1-qM_X(t)}\right]$
Биномиальное	$\binom{m}{n} p^n q^{m-n} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$	$[q + pM_X(t)]^m$

Вопрос для самоподготовки 5.6. Запишите производящую функцию моментов обобщенного геометрического распределения, если величина индивидуальных исков имеет *Exp(β)*–распределение.

Также мы можем получить формулы для моментов конкретных обобщенных распределений, используя моменты величины индивидуальных исков:

Пример 5.2 Найти выражения для среднего значения и дисперсии обобщенного пуассоновского распределения с параметром λ через моменты распределения величины индивидуальных исков.

Решение Используя общие формулы для среднего и дисперсии обобщенного распределения, получим:

$$E[S] = E[N]E[X] = \lambda E[X]$$

$$Var[S] = E[N]Var[X] + Var[N](E[X])^2 = \lambda(Var[X] + (E[X])^2) = \lambda E[X^2]$$

В таблице, данной ниже, представлены основные формулы для трех обобщенных распределений (Пуассона, отрицательное биномиальное и биномиальное), которые обычно используются. k-ый нецентральный момент случайной величины X будем сокращенно обозначать m_k. Таким образом, $m_2 = E[X^2]$.

Обобщенное распределение	Пуассона	Отрицательное биномиальное	Биномиальное
Функция распределения N	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$	$\binom{k+n-1}{n} p^k q^n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$	$\binom{m}{n} p^n q^{m-n}$ $(n = 0, 1, ...m)$
Производящая функция моментов	$e^{\lambda[M_X(t)-1]}$	$\left[\frac{p}{1-qM_X(t)}\right]^k$	$[q + pM_X(t)]^m$
Среднее	λm_1	$\frac{kq}{p} m_1$	mpm_1

Дисперсия	λm_2	$\frac{kq}{p}m_2 + \frac{kq^2}{p^2}m_1^2$	$mpm_2 - mp^2m_1^2$
Третий центральный момент (*асимметрия*) ($skew[X]$)	λm_3	$\frac{kq}{p}m_3 + \frac{3kq^2}{p^2}m_2m_1 + \frac{2kq^3}{p^3}m_1^3$	$mpm_3 + 2mp^3m_1^3 - 3mp^2m_2m_1$

В каждом случае формула для *коэффициента асимметрии* равна:

$$\frac{\text{Асимметрия}}{(\text{Дисперсия})^{1.5}}$$

Пример 5.3 Найти выражения для среднего значения и дисперсии обобщенного биномиального распределения (с параметрами k и p) через моменты распределения величины индивидуальных исков.

Решение Используя общие формулы для среднего и дисперсии обобщенного распределения, данные выше, получим:

$$E[S] = E[N]E[X] = \frac{kq}{p}m_1$$

$$Var[S] = E[N]Var[X] + Var[N](E[X])^2 = \frac{kq}{p}(m_2 - m_1^2) + \frac{kq}{p^2}m_1^2 =$$

$$= \frac{kq}{p}m_2 + \frac{kq}{p^2}(1-p)m_1^2 = \frac{kq}{p}m_2 + \frac{kq^2}{p^2}m_1^2$$

Вопрос для самоподготовки 5.7. Получите формулы для среднего и дисперсии обобщенного биномиального распределения с параметрами m и p, если величина индивидуальных исков имеет распределение с первым и вторым моментами, равными m_1 и m_2 соответственно.

Формула для значения асимметрии распределения ($skew[X]$) может быть получена гораздо проще, используя *производящую функцию семиинвариантов*:

Производящая функция семиинвариантов
Производящая функция семиинвариантов определяется следующим образом:

$$K_X(t) = \log M_X(t)$$

Среднее, дисперсия и асимметрия, выраженные через $K_X(t)$
Если производящая функция семиинвариантов случайной величины X равна $K_X(t)$, то:

$$E[X] = K'_X(0) \quad Var[X] = K''_X(0) \quad skew[X] = K'''_X(0)$$

Доказательство:
Производящая функция семиинвариантов случайной величины X: $K_X(t) = \log M_X(t)$.
Дифференцируем её как сложную функцию:

$$K'_X(t) = M'_X(t)\frac{1}{M_X(t)} = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$$

Положим $t = 0$:

$$K'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{E[X]}{1} = E[X]$$

Дифференцируем ещё раз:

$$K''_X(t) = M''_X(t)\frac{1}{M_X(t)} + M'_X(t)\frac{-M'_X(t)}{(M_X(t))^2} = \frac{M''_X(t)}{M_X(t)} - \frac{(M'_X(t))^2}{(M_X(t))^2}$$

Положим $t = 0$:

$$K''_X(0) = \frac{M''_X(0)}{M_X(0)} - \frac{(M'_X(0))^2}{(M_X(0))^2} = E[X^2] - (E[X])^2 = Var[X]$$

Дифференцируя ещё раз и упрощая, получим:

$$K'''_X(t) = \frac{M'''_X(t)}{M_X(t)} - 3\frac{M''_X(t)M'_X(t)}{(M_X(t))^2} + 2\frac{(M'_X(t))^3}{(M_X(t))^3}$$

Положим $t = 0$:

$$K'''_X(0) = \frac{M'''_X(0)}{M_X(0)} - 3\frac{M''_X(0)M'_X(0)}{(M_X(0))^2} + 2\frac{(M'_X(0))^3}{(M_X(0))^3} =$$

$$= E[X^3] - 3E[X^2]E[X] + 2(E[X])^3 = skew[X]$$

Пример 5.4 Найти выражение для асимметрии (третьего центрального момента) обобщенного отрицательного биномиального распределения с параметрами k и p через моменты распределения величины индивидуальных исков.

Решение Производящая функция моментов обобщенного отрицательного распределения равна:

$$M_S(t) = \left[\frac{p}{1 - qM_X(t)}\right]^k$$

Таким образом:

$$K_S(t) = \log M_S(t) = k \log p - k \log[1 - qM_X(t)]$$

Дифференцируем по t:

$$K'_S(t) = \frac{kqM'_S(t)}{1 - qM_X(t)}$$

Дифференцируем ещё раз:

$$K''_S(t) = \frac{kqM''_S(t)}{1 - qM_X(t)} - \frac{kq^2[M'_S(t)]^2}{[1 - qM_X(t)]^2}$$

Дифференцируем третий раз:

$$K'''_S(t) = \frac{kqM'''_S(t)}{1 - qM_X(t)} + 3\frac{kq^2M''_S(t)M'_X(t)}{[1 - qM_X(t)]^2} + 2\frac{kq^3[M'_S(t)]^3}{[1 - qM_X(t)]^3}$$

Положим $t = 0$:

$$skew[X] = K'''_S(0) = \frac{kq}{p}m_3 + \frac{3kq^2}{p^2}m_2m_1 + \frac{2kq^3}{p^3}m_1^3$$

Вопрос для самоподготовки 5.8. Покажите, что асимметрия обобщенного пуассоновского процесса с параметром λ равна λm_3, где $m_3 = E[X^3]$

Вопрос для самоподготовки 5.9. Получите формулу для производящей функции семиинвариантов обобщенного биномиального распределения и из неё выведите формулу для коэффициента асимметрии обобщенного биномиального распределения. (Коэффициент асимметрии равен отношению асимметрии к кубу среднеквадратичного отклонения.)

Обобщенное распределение Пуассона обладает следующим свойством аддитивности:

Сумма обобщенных распределений Пуассона

Если независимые случайные величины $S_1, S_2, ..., S_k$ имеют обобщенное

распределение Пуассона каждая с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ соответственно и распределения размеров иска имеют производящие функции моментов $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), ..., M_{X_k}(t)$, тогда сумма $Y = S_1 + S_2 + ... + S_k$ также имеет обобщенное распределение Пуассона.
Параметр Пуассона и производящая функция величины W индивидуального иска для Y соответственно равны:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$$

$$\lambda M_W(t) = \lambda_1 M_{X_1}(t) + \lambda_2 M_{X_2}(t) + ... + \lambda_k M_{X_k}(t)$$

Доказательство:
Мы можем найти производящую функцию величины Y:

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(S_1+S_2+...+S_k)}] =$$
$$= E[e^{tS_1}]E[e^{tS_2}]\cdots E[e^{tS_k}] = e^{\lambda_1[M_{X_1}(t)-1]}e^{\lambda_2[M_{X_2}(t)-1]}\cdots e^{\lambda_k[M_{X_k}(t)-1]} =$$
$$= e^{[\lambda_1 M_{X_1}(t)+\lambda_2 M_{X_2}(t)+...+\lambda_k M_{X_k}(t)]-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k)} = e^{\lambda[M_W(t)-1]}$$

Где λ и $M_W(t)$ – величины, определенные выше.

Вопрос для самоподготовки 5.10. Обладает ли свойством аддитивности обобщенное биномиальное распределение? Если да — сформулируйте точно все условия, необходимые для выполнения этого свойства.

Этот результат может быть получен также с помощью функции распределения величины индивидуальных исков.

Сумма обобщенных распределений Пуассона (второе представление)
Если независимые случайные величины $S_1, S_2, ..., S_k$ имеют обобщенное распределение Пуассона каждая с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ соответственно и распределения размеров иска имеют функции распределения $F_{X_1}(t), F_{X_2}(t), ..., F_{X_k}(t)$, тогда сумма $Y = S_1 + S_2 + ... + S_k$ также имеет обобщенное распределение Пуассона.
Параметр Пуассона и функция распределения величины W индивидуального иска для Y соответственно равны:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$$

$$\lambda F_W(t) = \lambda_1 F_{X_1}(t) + \lambda_2 F_{X_2}(t) + ... + \lambda_k F_{X_k}(t)$$

Вопрос для самоподготовки 5.11. Две величины суммарных исков, обозначенные за S_1 и S_2, имеют следующие распределения: S_1 имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром 100 и функцией распределения $F_1(x) = 1 - \exp(-x/\alpha),\ x > 0$, S_2 имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром 200 и функцией распределения $F_2(x) = 1 - \exp(-x/\beta),\ x > 0$. Если S_1 и S_2 – независимые случайные величины, найдите распределение величины $S_1 + S_2$.

§3 Модель индивидуального риска

3.1 Предположения

Модель индивидуального риска — наиболее пригодная для описания исков по полисам страхования жизни, где каждый полис влечет за собой не более одного иска (также она может применяться и в других случаях).

Предположения в модели индивидуального риска

Согласно этой модели, величина S суммарных выплат за определенный период относительно группы полисов страхования равна:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

где X_i – величина выплат за определённый период относительно i-го полиса и n – количество полисов в группе.

Модель предполагает, что:

1. Иски от каждого полиса независимы.
2. Количество полисов в группе фиксировано в течение всего периода.
3. Временная стоимость денег игнорируется (то есть проценты не накапливаются).

"Модель индивидуального риска рассматривает каждый полис из группы."

Если период страхования не очень длительный и частота исков не слишком велика — большинство X_i будет нулевое, так как большинство полисов не будет иметь страховых случаев.

Вопрос для самоподготовки 5.12. Страховщик обеспечивает страховой защитой 5 компаний A, B, C, D, E. За прошлый год произошло три страховых случая:

- Компания B предъявила требование на $\pounds 2,500$ в сентябре
- Компания E предъявила требование на $\pounds 8,000$ в марте
- Компания E предъявила требование на $\pounds 12,000$ в ноябре

Покажите, как такая ситуация была бы представлена в модели индивидуального риска.

3.2 Распределение суммарного числа исков

Если нам известна вероятность возникновения иска по каждому полису, мы можем установить распределение количества полисов, относительно которых рассматриваются иски (то есть количество ненулевых X_i).

Распределение суммарного числа исков
Если вероятность q возникновения страхового случая одна и та же для всех n полисов, то величина N общего числа исков имеет биномиальное распределение: $N \sim Binomial(n, q)$.

Доказательство:
Это утверждение следует из определения биномиального распределения.

Если вероятность возникновения иска очень мала для всех полисов, а количество полисов велико, то можно использовать пуассоновское приближение.

Пример 5.5 Пенсионный фонд обеспечивает единовременно выплачиваемыми пособиями по смерти всех служащих. Размеры пособий отличаются для рабочих и штатных сотрудников.

	Количество	Страховое пособие	Вероятность смерти
Штатные сотрудники	500	$\pounds 50,000$	0.005
Рабочие	2,500	$\pounds 25,000$	0.010

Найти приближённую вероятность того, что произойдёт 25 страховых случаев в пенсионном фонде за данный год.

Решение Ожидаемое количество смертей в год:

$$E[N] = \sum_i q_i = 500 * 0.005 + 2,500 * 0.010 = 27.5$$

Таким образом, используя пуассоновскую аппроксимацию, получим:

$$P(N = 25) \approx \frac{27.5^{25} e^{-27.5}}{25!} = 0.0707$$

Вопрос для самоподготовки 5.13. Каково точное значение вероятности того, что в течение одного года произойдёт ровно 5 смертей из числа штатных сотрудников и 20 из числа рабочих?

3.3 Распределение величины индивидуального иска

В случае простого пособия по смерти каждая величина X_i или соответствует размеру пособия (т.е. страховая сумма), или равна нулю. В этом случае мы можем получить формулу для среднего и дисперсии величины выплачиваемого возмещения по каждому полису:

Моменты величины исков (для полисов индивидуального страхования):
Если X_i имеет функцию вероятностей распределения:

$$X_i = \begin{cases} b & \text{с вероятностью} \quad q \\ 0 & \text{с вероятностью} \quad p \end{cases}$$

где q –вероятность смерти в течение данного промежутка времени, $p = 1 - q$ – вероятность выжить к концу периода, b – величина возмещения, выплачиваемого по смерти (страховая сумма).
Тогда:

$$E[X_i] = bq \qquad Var[X_i] = b^2q(1-q)$$

Доказательство:
Это утверждение проще доказать, определив вспомогательную случайную величину I, которая принимает значение 1 только в том случае, если произошел страховой случай, и 0 — если нет.
Величина X_i в таком случае определяется следующим образом: $X_i = bI$.
Распределение I:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью} \quad q \\ 0 & \text{с вероятностью} \quad p \end{cases}$$

то есть I имеет $B(1, q)$ –распределение.
Из свойств биномиального распределения мы знаем, что:

$$E[I] = q \qquad Var[I] = q(1-q)$$

Значит, среднее и дисперсия X_i равны:

$$E[X_i] = E[bI] = bE[I] = bq$$

$$Var[X_i] = Var[bI] = b^2 Var[I] = b^2 q(1-q)$$

Случайные величины, такие как I, которые "указывают произошел страховой случай или нет, очень часто используются в статистике. Они называются *индикаторные случайные величины.*

Вопрос для самоподготовки 5.14. Докажите формулу для среднего и дисперсии случайной величины X_i без использования индикаторной случайной величины.

Вопрос для самоподготовки 5.15. Покажите, что третий центральный момент величины X_i равен: $skew[X] = b^3 q(1-q)(1-2q)$

3.4 Моменты величины суммарного иска

Так как модель индивидуального риска предполагает, что полисы действуют независимо, мы можем использовать свойство аддитивности математического ожидания, дисперсии и третьего центрального момента суммарного иска S, когда величина страховых выплат фиксирована.

Моменты величины суммарного иска
Если по каждому полису может произойти не более одного иска, то:

$$E[S] = \sum_i b_i q_i \qquad Var[S] = \sum_i b_i^2 q_i (1-q_i)$$

$$skew[S] = \sum_i b_i^3 q_i (1-q_i)(1-2q_i)$$

где q_i – вероятность возникновения иска по i-му полису в течение всего периода, b_i–величина страховой выплаты по i-му полису.

Доказательство:
Так как все X_i предполагаются независимыми,то:

$$E[S] = E[X_1 + X_2 + ... + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + ... + E[X_n]$$

$$Var[S] = Var[X_1 + X_2 + ... + X_n] = Var[X_1] + Var[X_2] + ... + Var[X_n]$$

$$skew[S] = skew[(X_1 + X_2 + ... + X_n] =$$

$$= skew[X_1] + skew[X_2] + ... + skew[X_n]$$

Отсюда непосредственно следуют вышенаписанные формулы.

Пример 5.6 Вычислить среднее, дисперсию и асимметрию величины суммарных выплат за год, используя данные для пенсионного фонда из Примера 5.5.

Решение По формулам, доказанным выше, моменты величины S суммарных выплат равны:

$$E[S] = \sum_i b_i q_i = 500 * 50,000 * 0.005 + 2,500 * 25,000 * 0.010 = \pounds 750,000$$

$$Var[S] = \sum_i b_i^2 q_i(1-q_i) = 500 * 50,000^2 * 0.005(1-0.005)+$$

$$+2,500 * 25,000^2 * 0.010(1-0.010) = (\pounds 147,267)^2$$

$$skew[S] = \sum_i b_i^3 q_i(1-q_i)(1-2q_i) =$$

$$= 500 * 50,000^3 * 0.005(1-0.005)(1-2*0.005)+$$

$$+2,500 * 25,000^3 * 0.010(1-0.010)(1-2*0.010) = (\pounds 88,229)^3$$

Если страховые выплаты являются случайной величиной, мы можем найти моменты используя индикаторную функцию, а также формулы для условного математического ожидания и дисперсии.

Условное математического ожидание и условная дисперсия

$$E[X] = E[E[X|Y]] \qquad Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$$

Пример 5.7 Страховая компания оперирует портфелем полисов общего страхования, согласно которому страховые случаи происходят относительно редко. Страховщик допускает, что для каждого из 5,000 полисов из портфеля вероятность возникновения одного страхового случая в год равна 0.5%, а вероятность возникновения более одного страхового случая пренебрежимо мала. Величина индивидуального иска по предположению имеет $Gamma(1.5, 0.0002)$–распределение. Вычислить среднее и дисперсию ежегодных суммарных выплат по этому портфелю.

Решение Величина суммарных выплат: $S = X_1 + X_2 + ... + X_{5000}$
X_i – страхового возмещения по i-му полису, которая может быть выражена как BI, где I – индикатор предъявления иска, B представляет величину выплаты. Мы знаем, что I имеет $B(1, q)$–распределение и $B|I = 1$ имеет $Gamma(1.5, 0.0002)$– распределение.
Найдём сначала среднее и дисперсию условной случайной величины $BI|I$.
Если мы знаем, что $I = 0$ (то есть по i-му полису не было предъявлено ни одного иска), тогда $BI = 0$.
Итак: $E[BI|I = 0] = 0$

Если мы знаем, что $I = 1$ (был предъявлен иск), тогда $BI = B$ (так как мы предполагаем возможность предъявления лишь одного иска), которая имеет $Gamma(1.5, 0.0002)$– распределение.
Итак: $E[BI|I = 1] = 1.5/0,0002 = 7,500$
Объединив эти результаты, получим: $E[BI|I] = 7,500I$
Аналогично: $Var[BI|I] = 37,500,000I$
Таким образом, среднее и дисперсия величины выплат по i-му полису равна:

$$E[X_i] = E[E[X_i|I]] = E[E[BI|I]] = E[7,500I] = 7,500 * 0.005 = 37.5$$

$$Var[X_i] = E[Var[X_i|I]] + Var[E[X_i|I]] = E[Var[BI|I]] + Var[E[BI|I]] =$$
$$= E[37,500,000I] + Var[7,500I] =$$
$$= 37,500,000 * 0.005 + 7,500^2 * 0.005(1 - 0.005) = 467,344$$

Предполагая, что полисы независимы, среднее и дисперсия ежегодных суммарных выплат равны:

$$E[S] = E[X_1 + X_2 + ... + X_{5000}] = 5,000E[X_i] = 5,000 * 37.5 = £187,500$$

$$Var[S] = 5,000Var[X_i] = 5,000 * 467,344 = (£48,340)^2$$

Этот результат можно обобщить для нахождения среднего и дисперсии величины суммарных выплат в случае условного распределения размера иска.

Среднее и дисперсия величины суммарного иска (размер иска - случайная величина)
Если портфель содержит n независимых полисов, вероятность предъявления иска по i-му полису равна q_i, а среднее и дисперсия величины B_i индивидуального иска равны $E[B_i] = \mu_i$ и $Var[B_i] = \sigma_i^2$, тогда среднее и дисперсия величины S суммарных выплат равны:

$$E[S] = \sum_i \mu_i q_i \quad \text{и} \quad Var[S] = \sum_i [\sigma_i^2 q_i + \mu_i^2 q_i(1 - q_i)]$$

Доказательство:
Рассмотрим i-ый полис (опустим нижний индекс).
Если I – количество исков по рассматриваемому полису, то I имеет $B(1, q)$ – распределение.
Следовательно:

$$E[X] = E[E[X|I] = E[\mu I] = \mu E[I] = \mu q$$

$$Var[X] = E[Var[X|I]] + Var[E[X|I]] = E[\sigma^2 I] + Var[\mu I] =$$
$$= \sigma^2 E[I] + \mu^2 Var[I] = \sigma^2 q + \mu^2 q(1-q)$$

Величина суммарного иска $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
Таким образом, возвращаясь вновь к нижним индексам и суммируя по всем полисам, получим:

$$E[S] = \sum_i \mu_i q_i \quad \text{и} \quad Var[S] = \sum_i [\sigma_i^2 q_i + \mu_i^2 q_i (1 - q_i)]$$

Эти формулы используются, когда величина страховых выплат по каждому полису не фиксирована, но имеет конкретное распределения.

Вопрос для самоподготовки 5.16. Вероятность возникновения иска по каждому полису из портфеля равна 0.004. Портфель состоит из 1,000 полисов одногодичного страхования. Величина исков имеет $Gamma(5, 0.002)$–распределение. Найдите среднее значение и дисперсию величины суммарного иска.

§4 Модель коллективного риска

4.1 Предположения

Модель коллективного риска наиболее часто используется при описании исков по полисам общего страхования, когда по каждому из полисов может быть предъявлено больше одного иска.

Предположения в модели коллективного риска
Согласно модели коллективного риска, величина S суммарных выплат за определенный период относительно группы полисов страхования равна:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

где X_i – величина выплат за определенный период относительно i-го иска и N – случайная величина количества исков за весь период.
Модель предполагает, что:

1. X_i одинаково распределены.
2. X_i и N – независимые случайные величины .

3. Временная стоимость денег игнорируется (то есть проценты не накапливаются).

"Модель индивидуального риска рассматривает каждый иск в отдельности."

Вопрос для самоподготовки 5.17. Покажите, как ситуация, описанная в Вопросе для самоподготовки 5.12, будет выглядеть, если рассматривается модель коллективного риска.

4.2 Распределение общего числа исков

Распределение общего числа исков N является одним из предположений в модели коллективного риска. N обычно имеет распределение Пуассона или отрицательное биномиальное распределение.

4.3 Распределение величины индивидуального иска

Распределение величины X_i индивидуального иска также является одним из предположений в данной модели. Будем предполагать, что X_i имеет одно из стандартных распределений ущерба, которые были описаны в I части (например, распределение Парето).

4.4 Моменты величины суммарного иска

Так как величина суммарного иска – это сумма случайного числа случайных величин, то она имеет обобщенное распределение. Мы можем получить формулу для производящей функции моментов величины суммарного иска, используя свойства обобщенного распределения.

Пример 5.8 Найти выражение для производящей функции моментов величины суммарного иска, если случайная величина числа исков имеет B(100,0.01)–распределение, а величина индивидуального иска имеет $Gamma$(10,0.2)–распределение. Найти среднее и дисперсию величины суммарного иска.

Решение Воспользуемся уже полученными ранее формулами для производящих функций моментов:

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{0.2}\right)^{-10}$$

$$M_N(t) = (0.99 + 0.01e^t)^{100}$$

Вспомним, что $M_S(t) = M_N[\log M_X(t)]$. Следовательно:

$$M_S(t) = [0.99 + 0.01(1 - 5t)^{-10}]^{100}$$

Среднее значение и дисперсия обобщенного биномиального распределения равны mpm_1 и $mpm_2 - mp^2m_1^2$ соответственно. Таким образом:

$$E[S] = 100 * 0.01 * \frac{10}{0.2} = 50$$

$$Var[S] = 100 * 0.01 * \frac{10 * 11}{0.2^2} - 100 * 0.01^2 * \left(\frac{10}{0.2}\right)^2 = 2725$$

Также мы можем получить формулы для моментов суммарного иска в случае перестрахования, используя формулы, полученные ранее.

Пример 5.9 Найти выражение для дисперсии величины суммарных выплат, осуществляемых перестраховщиком по договору перестрахования эксцедента убытка с пределом удержания L, предполагая что величина числа исков (основных) имеет распределение Пуассона с параметром λ и величина индивидуальных исков имеет $Exp(\alpha)$–распределение убытков.

Решение Формула для дисперсии обобщенного распределения Пуассона равна:

$$Var[S] = \lambda m_2$$

где m_2 – второй момент величины индивидуальных исков.
Для перестраховщика второй момент величины нетто-исков равен:

$$m_2 = \int\limits_L^\infty (x - L)^2 \alpha e^{-\alpha x} dx$$

Воспользуемся заменой $t = x - L$:

$$m_2 = \int\limits_0^\infty t^2 \alpha e^{-\alpha(t+L)} dt = \frac{2e^{-\alpha L}}{\alpha^2} \int\limits_0^\infty \frac{\alpha^3}{\Gamma(3)} t^2 e^{-\alpha t} dt = \frac{2e^{-\alpha L}}{\alpha^2}$$

(так как последний интеграл представляет собой полную вероятность для $Gamma(3, \alpha)$–распределения).
Итак, дисперсия величины суммарных выплат для перестраховщика равна:

$$Var[S] = \frac{2\lambda e^{-\alpha L}}{\alpha^2}$$

Вопрос для самоподготовки 5.18. Покажите, что по договору пропорционального страхования, согласно которому часть удержания прямого страховщика равна k, производящая функция моментов $M_D(t)$ величины D индивидуальных нетто-исков, оплачиваемых прямым страховщиком, равна $M_X(kt)$. Затем найдите выражение для производящей функции моментов величины суммарного иска, если величина числа исков имеет $Poisson(\lambda)$–распределение.

Следующий Вопрос для самоподготовки весьма содержательный. Такого плана вопросы вам могут попасться на экзамене. Попробуйте написать решение самостоятельно, не подсматривая в ответы. (Обратите внимание — это может занять у вас много времени. На экзамене вы должны быть готовы, что вам понадобится по меньшей мере полчаса для подготовки ответа на такого рода вопрос.)

Вопрос для самоподготовки 5.19. Суммарный иск имеет обобщенное распределение Пуассона. Величина индивидуального иска имеет распределение Парето с параметрами $\alpha = 3, \quad \lambda = 1,000$. Страховщик вычисляет премии, используя нагрузку на премии, равную 0.2. Страховщик рассматривает действующий договор перестрахования с уровнем удержания $\pounds 1,000$. Премии перестраховщика рассчитываются с нагрузкой, равной 0.3.

(i) Определите (в процентном соотношении) уменьшение ожидаемой прибыли страховщика в результате применения перестрахования.

(ii) Определите (в процентном соотношении) уменьшение среднеквадратичного отклонения прибыли страховщика в результате применения перестрахования.

§5 Распределение величины суммарного иска

До сих пор мы рассматривали, как находить моменты величины суммарного иска. Однако, мы не рассмотрели самого распределения, которое нам понадобится для нахождения вероятностей, относящихся к величине суммарного иска. Все методы и приемы, описанные в этой главе могут использоваться как в модели индивидуального риска, так и в модели коллективного риска.

5.1 Рекурсивная формула

Обобщенное распределение Пуассона

В случае обобщенного распределения Пуассона, в котором величина индивидуального иска имеет дискретное распределение, мы можем найти точные вероятности для распределения суммарного иска (которое также является дискретным), используя следующую итерационную формулу:

Рекурсивная формула (Обобщенное распределение Пуассона)
Если $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$ имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром λ, X_i – дискретные независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие неотрицательные значения, то функция распределения величины S может быть получена, используя следующие рекурсивные формулы:

$$p_S(0) = e^{-\lambda}$$

$$p_S(s) = \lambda \sum_{0<x\leq s} \frac{x}{s} p_X(x) p_S(s-x), \quad s = 1, 2, ...$$

где сумма берётся по всем значениям x, при которых $p_S(s-x)$ не равно нулю.

Для упрощения доказательства этого утверждения предполагается, что X_i принимают только положительные целочисленные значения. Однако, эти формулы можно также применять, когда X_i могут принимают нецелые (но дискретные) значения.
Если X_i имеют непрерывное распределение, формулы также можно применять, если найти такое дискретное распределение, которое близко аппроксимирует непрерывное распределение X_i. В таких случаях обычно обращаются к компьютерным вычислениям.

Доказательство:
При доказательстве используется производящая функция вероятностей:

$$G_S(t) = E[t^S] = P(S=0) + tP(S=1) + t^2 P(S=2) + ... =$$

$$= p_S(0) + tp_s(1) + t^2 p_S(2) + ...$$

Воспользуемся формулой для производящей функции вероятностей суммы S:

$$G_S(t) = G_N[G_x(t)] = e^{\lambda[G_X(t)-1]}$$

Прологарифмируем:

$$\log G_S(t) = \lambda[G_X(t) - 1]$$

Дифференцируем по t:
$$\frac{G'_S(t)}{G_S(t)} = \lambda G'_X(t)$$
Выписывая полностью производящую функцию, получим:

$$p_S(1) + 2tp_S(2) + 3t^2 p_S(3) + ... =$$

$$= \lambda[p_X(1) + 2tp_X(2) + 3t^2 p_X(3) + ...] * [p_S(0) + tp_S(1) + t^2 p_S(2) + ...]$$

Так как это равенство верно для всех t из области значений, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t:

$t^0 : \quad p_S(1) = \lambda p_X(1)p_S(0)$

$t^1 : \quad 2p_S(2) = \lambda[p_X(1)p_S(1) + 2p_X(2)p_S(0)]$

$t^2 : \quad 3p_S(3) = \lambda[p_X(1)p_S(2) + 2p_X(2)p_S(1) + 3p_X(3)p_S(0)]$

В общем случае, приравнивая коэффициенты при t^{s-1}, получим:

$$sp_S(s) = \lambda[p_X(1)p_S(s-1)+2p_X(2)p_S(s-2)+3p_X(3)p_S(s-3)+...+sp_X(s)p_S(0)] =$$

$$= \lambda \sum_{x=1}^{s} xp_X(x)p_S(s-x)$$

Разделив обе части равенства на s, получим окончательную формулу.

Пример 5.10 Согласно текущему выпуску Выигрышных облигаций в Великобритании, распределение небольших премий может быть аппроксимировано при условии, что (по данным каждого месяца) каждая облигация имеет:

– вероятность выигрыша £ 50, равную 1/16,000

– вероятность выигрыша £ 100, равную 1/240,000

Найти вероятность того, что за определенный месяц выигрыш владельца 1,000 облигаций составит:
(a) £0 (b) ровно £50 (c) ровно £100 (d) ровно £150 (e) по крайней мере £200.

Решение Величина суммарного выигрыша держателя облигаций за месяц может быть представлена следующим образом: $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$, где X_i – величина i-го выигрыша. Функция распределения X_i определяется набором условных вероятностей (указывающих на факт выигрыша). Так как вероятность того, что данная облигация принесет выигрыш, равна $1/16{,}000 + 1/240{,}000 = 1/15{,}000$, то

$$P_X(50) = (1/16,000)/(1/15,000) = 15/16$$

$$P_X(100) = (1/240,000)/(1/15,000) = 1/16$$

Параметр Пуассона равен общей "интенсивности выигрыша"(для всех облигаций) за месяц:

$$\lambda = 1,000 * 1/15,000 = 1,000/15,000$$

Используя рекурсивную формулу для $S = 0$, получим:

$$p_S(0) = e^{-\lambda} = e^{-1/15} = 0.93551$$

Используя рекурсивную формулу для других значений S, получим:

$$p_S(50) = \lambda p_X(50) p_S(0) = (1,000/15,000) * (15/16) * 0.93551$$

$$p_S(100) = \frac{\lambda}{2}[p_X(50)p_S(50) + 2p_X(100)p_S(0)] = 0.00573$$

$$p_S(150) = \frac{\lambda}{3}[p_X(50)p_S(100) + 2p_X(100)p_S(50) + 0] = 0.00028$$

(Отметим, что последнее слагаемое, соответствующее $X = 150$, равно нулю, так как по условию нет выигрыша, равного £150).
Итак: $P(S \geq 200) = 1 - 0.93551 - 0.05847 - 0.00573 - 0.00028 = 0.00001$
Следовательно, вероятности равны:

(a) 93.6% (b) 5.8% (c) 0.6% (d) 0.03% (e) 0.001%.

Вопрос для самоподготовки 5.20. Найдите вероятность того, что за один год держатель 1,000 облигаций получит выигрыш в размере:
(a) £0 (b) ровно £50 (c) ровно £100 (d) ровно £150 (e) по крайней мере £200.

Другие обобщенные распределения

В действительности результат, приведенный выше, может быть обобщен. Подобная рекурсивная формула существует для любого дискретного обобщенного распределения, когда функция распределения для числа исков может быть найдена, используя простую итерационную формулу. Этот класс распределений включает в себя отрицательное биномиальное, геометрическое и биномиальное распределение.

Функции вероятностей, удовлетворяющие итерационной формуле

Функция вероятностей распределения $p_N(n)$ для распределения Пуассона, отрицательного биномиального, геометрического и биномиального распределения подчиняется итерационной формуле:

$$p_N(n) = p_N(n-1) * \left(a + \frac{b}{n}\right), \quad n = 1, 2, ...$$

где a и b – некоторые константы.

Значения констант a и b для конкретных распределений приведены в следующей таблице:

Распределение	Функция вероятностей N	Константа a	Константа b
Пуассона	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$	$a = 0$	$b = \lambda$
Отрицательное биномиальное	$\binom{k+n-1}{n} p^k \ q^n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$	$a = q$	$b = (k-1)q$
Геометрическое	$p \ q^n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$	$a = q$	$b = 0$
Биномиальное	$\binom{m}{n} p^n \ q^{m-n} \ (n = 0, 1, ...m)$	$a = -\frac{p}{q}$	$b = \frac{(m+1)p}{q}$

Пример 5.11 Показать, что функция вероятностей распределения отрицательного биномиального распределения удовлетворяет итерационной формуле, и определить значения констант.

Решение Функция вероятностей распределения для отрицательного биномиального распределения:

$$p_N(n) = \binom{k+n-1}{n} p^k \ q^n, \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Тогда (для $n \geq 1$ и $k = 1, 2, ...$):

$$\frac{p_N(n)}{p_N(n-1)} = \binom{k+n-1}{n} p^k\ q^n \Bigg/ \binom{k+n-2}{n-1} p^k\ q^{n-1} =$$

$$\frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} p^k\ q^n \Bigg/ \frac{(k+n-2)!}{(n-1)!(k-1)!} p^k\ q^{n-1} =$$

$$\frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} * \frac{(n-1)!(k-1)!}{(k+n-2)!} q = \left(\frac{k+n-1}{n}\right) q$$

Перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\frac{p_N(n)}{p_N(n-1)} = q + \frac{(k-1)q}{n}$$

Эта итерационная формула с константами:

$$a = q \quad \text{и} \quad b = (k-1)q$$

Вопрос для самоподготовки 5.21. Проверьте итерационную формулу для других распределений.

Вопрос для самоподготовки 5.22. Функция вероятностей распределения случайной величины:

$$p_N(n) = \frac{1}{2^{3n+1/2}} \binom{2n}{n}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Рассматривая отношение функции вероятностей для двух соседних целых значений, получите целое семейство распределений, которому принадлежит данная случайная величина, и выразите значение параметров для этого распределения.

Производящие функции вероятностей распределений, которые удовлетворяют рекурсивному соотношению, обладают следующим свойством:

Производящие функции вероятностей распределений, удовлетворяющих итерационной формуле

Если случайная величина N имеет дискретное распределение, принимает значения $n = 0, 1, 2, ...$, и функция вероятностей распределения удовлетворяет рекурсивному соотношению:

$$p_N(n) = p_N(n-1) * \left(a + \frac{b}{n}\right), \quad n = 1, 2, ...$$

с некоторыми константами a и b, то производящая функция вероятностей $G_N(t)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$G'_N(t) = \left(\frac{a+b}{1-at}\right) G_N(t)$$

Доказательство:
Функция вероятностей распределения удовлетворяет рекурсивному соотношению:

$$p_N(n) = p_N(n-1) * \left(a + \frac{b}{n}\right), \quad n = 1, 2, ...$$

Домножим это равенство на t^n и просуммируем по всем $n = 1, 2, ...$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n p_N(n) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n p_N(n-1) * \left(a + \frac{b}{n}\right)$$

Это может записано как:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n p_N(n) = at \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} p_N(n-1) + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} p_N(n-1)$$

Так как сумма в левой части равенства – есть $G_N(t)$ без первого слагаемого и первая сумма в правой части равенства – есть $G_N(t)$, то:

$$G_N(t) - p_N(0) = atG_N(t) + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} p_N(n-1)$$

Это может быть записано так:

$$(1-at)G_N(t) = p_N(0) + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} p_N(n-1)$$

Дифференцируем по t:

$$-aG_N(t) + (1-at)G'_N(t) = b \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} p_N(n-1)$$

так как последняя сумма равна $G_N(t)$, то:

$$-aG_N(t) + (1-at)G'_N(t) = bG_N(t)$$

Группируя, получим:

$$G'_N(t) = \left(\frac{a+b}{1-at}\right) G_N(t)$$

Пример 5.12 Показать, что среднее значение случайной величины N, функция вероятностей которой удовлетворяет итерационной формуле, равно:

$$\frac{a+b}{1-a}$$

Решение Из предыдущего результат получаем:

$$G'_N(t) = \left(\frac{a+b}{1-at}\right) G_N(t)$$

Положим $t = 1$:

$$G'_N(1) = \left(\frac{a+b}{1-a}\right) G_N(1)$$

Из свойств производящей функции вероятностей, $G'_N(1) = E[N]$ и $G_N(1) = 1$, получим:

$$E[N] = \frac{a+b}{1-a}$$

Вопрос для самоподготовки 5.23. Покажите, что эта формула для среднего значения верна для остальных вышеуказанных четырех распределений.

Вопрос для самоподготовки 5.24. Покажите, что дисперсия случайной величины N, функция вероятностей которой удовлетворяет итерационной формуле, равна:

$$\frac{a+b}{(1-a)^2}$$

Используя это свойство, мы можем найти рекурсивную формулу для распределения величины суммарного иска.

Рекурсивная формула

Если $S = X_1 + X_2 + ... X_N$ имеет обобщенное распределение и X_i – дискретные независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие только положительные значения[1], то функция вероятностей величины S может быть представлена с помощью рекурсивных формул:

$$p_S(0) = p_N(0)$$

[1]Это говорит о том, что мы рассматриваем только ненулевые иски, т.е. строго положительные. Если присутствуют нулевые иски, то мы можем их исключить и записать функцию вероятностей уже для скорректированного числа исков и их величин.

$$p_S(s) = \sum_{x=1}^{s} \left(a + b\frac{x}{s}\right) p_X(x) p_S(s-x), \quad s = 1, 2, ...$$

Доказательство: Производящая функция вероятностей величины S:

$$G_S(t) = E[t^S] = p_S(0) + tp_S(1) + t^2 p_S(2) + ...$$

Используя формулу для производящей функции вероятностей суммы S, получим:

$$G_S(t) = G_N[G_X(t)]$$

Дифференцируем по t сложную функцию:

$$G'_S(t) = G'_N[G_X(t)]G'_X(t) \qquad ...(1)$$

Так как распределение подчиняется итерационному отношению, то:

$$G'_N(s) = \left(\frac{a+b}{1-as}\right) G_N(s)$$

Положим $s = G_X(t)$, тогда:

$$G'_N[G_X(t)] = \left(\frac{a+b}{1-aG_X(t)}\right) G_N[G_X(t)] = \left(\frac{a+b}{1-aG_X(t)}\right) G_S(t)$$

Теперь (1) перепишем в виде:

$$G'_S(t) = \left(\frac{a+b}{1-aG_X(t)}\right) G_S(t) G'_X(t)$$

Это равенство может быть записано в следующем виде:

$$G'_S(t)[1 - aG_X(t)] = (a+b) G_S(t) G'_X(t)$$

Распишем полностью производящие функции (помним, что мы рассматриваем только ненулевые иски, то есть $p_X(0) = 0$):

$$[p_S(1) + 2tp_S(2) + 3t^2 p_S(3) + ...] * [1 - atp_X(1) - at^2 p_X(2) - ...] =$$

$$= (a+b)[p_S(0) + tp_S(1) + t^2 p_S(2) + ...] * [p_X(1) + 2tp_X(2) + 3t^2 p_X(3) + ...]$$

Приравнивая коэффициенты при t^{s-1}, мы получим:

$$-a \sum_{x=1}^{s-1} (s-x) p_X(x) p_S(s-x) + sp_S(s) = (a+b) \sum_{x=1}^{s} x p_X(x) p_S(s-x)$$

Группируя слагаемые и упрощая, получим:

$$sp_S(s) = (a+b)\sum_{x-1}^{s} xp_X(x)p_S(s-x) + a\sum_{x=1}^{s-1}(s-x)p_X(x)p_S(s-x) =$$

$$= \sum_{x-1}^{s}(ax+bx)p_X(x)p_S(s-x) + \sum_{x=1}^{s-1}(as-ax)p_X(x)p_S(s-x) =$$

$$= \sum_{x-1}^{s-1}(ax+bx)p_X(x)p_S(s-x) + (as+bs)p_X(s)p_S(0)$$

Последнее слагаемое – это слагаемое из первой суммы, соответствующее $x = s$. Так как оно имеет такой же вид, что все слагаемые в последней сумме, мы можем записать:

$$sp_S(s) = \sum_{x-1}^{s}(ax+bx)p_X(x)p_S(s-x)$$

Окончательный результат получим, разделив все на s.

Это формула носит название *рекурсивная формула Пейнджера (Panjer's recursion formula)*.

Пример 5.13 Вывести рекурсивную формулу для вероятностей распределения суммарного иска, если распределение величины индивидуального иска принимает только положительные целые значения и величина числа исков имеет отрицательное биномиальное распределение.

Решение В случае отрицательного биномиального распределения $a = q$ и $b = (k-1)q$. Значит, рекурсивные формулы имеют вид:

$$p_S(0) = p^k$$

$$p_S(s) = \sum_{x=1}^{s} q\left(1 + (k-1)\frac{x}{s}\right)p_X(x)p_S(s-x), \quad s = 1, 2, ...$$

Вопрос для самоподготовки 5.25. Индивидуальные иски из портфеля принимают значение 1 и 2 с вероятностями 0.4 и 0.6 соответственно. Число исков имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $k = 2$ и $p = 0.4$. Найдите распределение суммарного иска до $p_S(2)$ включительно.

5.2 Аппроксимация нормальным распределением

Так как величина суммарного иска представляет собой сумму большого числа случайных величин, то часто нормальное распределение может хорошо аппроксимировать распределение суммарного иска (как следствие Центральной предельной теоремы). Параметры нормального распределения могут быть оценены, используя метод моментов (основанный на первых двух моментах).

Пример 5.14 Страховая компания продала 10,000 полисов страхования жизни клиентам в возрасте от 25 до 30 лет. Полис обеспечивает единовременную выплату по смерти в размере $25,000$ в течение последующего года. Вероятность смерти в течение года для каждого страхователя равна 0.0015 и смертности для каждого полисодержателя будем предполагать независимыми. Используя нормальную аппроксимацию, найдите вероятность того, что общие выплаты страховой компании составят от $\pounds 300,001$ и до $\pounds 399,999$. Сравните ваш ответ с нижеизложенным решением.

Решение Используя формулы, применимые в модели индивидуального риска, среднее и дисперсия величины T суммарного иска равны:

$$E[T] = 10,000 * 25,000 * 0.0015 = \pounds 375,000$$

$$Var[T] = 10,000 * 25,000^2 * 0.0015(1 - 0.0015) = (\pounds 96,752)^2$$

Таким образом, мы можем аппроксимировать распределение суммарного иска, используя нормальное распределение с такими же по значению средним и дисперсией, т.е. $T \sim N(375,000,\ 96,752^2)$.
Из непрерывности распределения и из того факта, что величина суммарных выплат принимает значения, кратные $\pounds 25,000$, получим:

$$P(300,000 < T < 400,000) \doteqdot P(312,500 < N(375,000,\ 96,752^2) < 387,500) =$$

$$= P\left[\frac{312,500 - 375,000}{96,752} < N(0,1) < \frac{378,500 - 375,000}{96,752}\right] =$$

$$= \Phi(0.1292) - \Phi(-0.6460) = 0.551 - 0.259 = 0.292$$

Точная вероятность того, что общие выплаты страховой компании составят от $\pounds 300,000$ и до $\pounds 400,000$, можно найти, если число страховых случае будет равно 13, 14 или 15. Так как величина числа исков имеет биномиальное распределение $B(10,000,\ 0.0015)$, точная вероятность равна:

$$\sum_{k=13}^{15} \binom{10,000}{k} * 0.0015^k * (1 - 0.0015)^{10,000-k} = 0.301$$

Как видно, в этом случае нормальное распределение дает хорошее приближение.

Вопрос для самоподготовки 5.26. S имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром λ и $F(x)$ имеет распределение Парето с параметрами $\alpha = 4$ и $\lambda = 3$. При условии, что S аппроксимирована нормальным распределением, найдите величину x такую, что:

$$(a) \quad P(S \leq x) = 0.95 \qquad \text{и} \qquad (b) \quad P(S \leq x) = 0.99$$

в двух случаях: (i) $\lambda = 10$ и (ii) $\lambda = 50$.

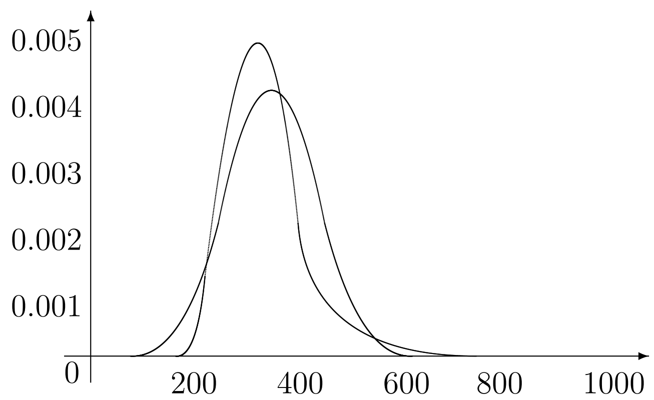
5.3 Аппроксимация смещенным гамма–распределением

Так как нормальное распределение — симметричное, то аппроксимация нормальным распределением может давать плохие результаты, когда рассматриваются сильно несимметричные распределения или когда вычисляют вероятности для "хвостов"распределения. В этом случае можно использовать смещенное гамма–распределение.

Смещенное гамма–распределение
Случайная величина X имеет смещенное гамма–распределение $Gamma(\alpha, \lambda, k)$, если $X - k$ имеет гамма–распределение $Gamma(\alpha, \lambda)$, где k — константа (которая может принимать положительные или отрицательные значения). Смещенное гамма-распределение принимает значения из диапазона $k < X < \infty$.

"Смещенное гамма–распределение — это обычное гамма–распределение, сдвинутое вправо на величину k[1]."

Ниже представлены графики двух смещенных гамма-распределений:



[1]или влево, если величина k отрицательная

Одно из этих распределений симметричное, а другое имеет заметную асимметрию. Значения параметров распределения с более высоким графиком: $k = 200, \alpha = 4, \lambda = 0.02$.

Кроме того, мы можем использовать метод моментов (основанный на первых трёх моментах) для того, чтобы нужным образом подобрать смещенное гамма-распределение для распределения суммарного иска.

Моменты смещенного гамма-распределения
Если S имеет смещенное гамма-распределение $Gamma(\alpha, \lambda, k)$, то

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda} + k, \quad Var[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad skew[X] = \frac{2\alpha}{\lambda^3}$$

Доказательство:
Мы можем найти моменты смещенного гамма-распределения, зная моменты обычного гамма-распределения, следующим образом:
Если $X \sim Gamma(\alpha, \lambda, k)$ и $Y = X - k$, то $Y \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Итак:

$$E[X] = E[Y + k] = E[Y] + k = \frac{\alpha}{\lambda} + k$$

Дисперсия и асимметрия — центральные моменты, поэтому их значения не изменятся при смещении:

$$Var[X] = Var[Y + k] = Var[Y] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

$$skew[X] = skew[Y + k] = skew[Y] = \frac{2\alpha}{\lambda^3}$$

Вопрос для самоподготовки 5.27. Покажите, что если $Y \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, то: $skew[Y] = \frac{2\alpha}{\lambda^3}$.

Обратим внимание на слегка другой подход к решению, который использует среднее, дисперсию и коэффициент асимметрии для нахождения значений α, λ, k. Коэффициент асимметрии смещенного гамма-распределения равен $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$. Оба метода дают одинаковые результаты.
Вероятности для смещенного гамма-распределения могут быть найдены, используя следующее утверждение:

Вычисление вероятностей смещенного гамма-распределения
Если X имеет смещенное гамма-распределение $Gamma(\alpha, \lambda, k)$, тогда:

$$2\lambda(X-k) \sim \chi^2_{2\alpha}$$

Доказательство:
Если $X \sim Gamma(\alpha, \lambda, k)$ и $Y = X - k$, тогда $Y \sim Gamma(\alpha, \lambda,)$.
Мы можем найти распределение случайной величины $T = 2\lambda(X-k) = 2\lambda Y$, используя замену $t = 2\lambda y$ в интеграле, представляющем распределение Y:

$$1 = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t}{2\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}t} \frac{dt}{2\lambda} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{(1/2)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

Таким образом $T \sim Gamma(\alpha, 1/2)$.
Так как $\chi^2_n = Gamma(n/2, 1/2)$, то полученное распределение — есть $\chi^2_{2\alpha}$.
(Аналогично, этот результат может быть получен, если показать, что производящая функция моментов $2\lambda(X-k)$ подобна производящей функции моментов $\chi^2_{2\alpha}$ – распределения.)

Пример 5.15 Найти аппроксимацию для вероятности того, что общие иски из предыдущего примера превысят £600, 000, используя смещенное гамма-распределение. Сравните ваше решение с решением, представленным ниже.

Решение Мы уже находили среднее и дисперсию T. Используя формулу, данную в параграфе 3.4, получим:

$$skew[T] = 10,000 * 25,000^3 * 0.0015 * (1 - 0.0015)(1 - 2 * 0.0015) = (£61,563)^3$$

Таким образом, мы можем аппроксимировать распределение суммарного иска, используя смещенное гамма-распределение с такими же по значению средним, дисперсией и асимметрией. Следовательно:

$$\frac{\alpha}{\lambda} + k = 375,000, \qquad \frac{\alpha}{\lambda^2} = (96,752)^2, \qquad \frac{2\alpha}{\lambda^3} = (61,563)^3$$

Разделив второе равенство на третье, получим:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{96,752^2}{61,563^3} = 0.0000401 \Rightarrow \lambda = 0.0000802$$

Второе равенство дает:

$$\alpha = 96,752^2\lambda^2 = 60.27$$

Из первого равенства получаем:

$$k = 375,000 - \frac{\alpha}{\lambda} = -376,100$$

Итак: $T \sim Gamma(60.27,\ 0.0000802,\ -376,100)$
Используя утверждение о распределение хи-квадрат, получим:

$$P(T > 600,000) = P[2\lambda(T-k) > 2 * 0.0000802(600,000 + 376,100)] \doteqdot$$

$$(\chi^2_{120.54} > 156.7)$$

Значение для 120 степеней свободы дано в Таблице. Итак, мы получили аппроксимированную вероятность, равную 1%.
Точная вероятность может быть найдена, если заметить, что величина суммарного иска превысит £600,000 тогда, когда число смертей превысит 24. Таким образом, точная вероятность равна:

$$1 - \sum_{k=0}^{24} \binom{10,000}{k} * 0.0015^k * (1-0.0015)^{10,000-k} = 0.0111$$

Как видно, в этом случае смещенное гамма-распределение дает весьма корректную аппроксимацию.

Вопрос для самоподготовки 5.28. S имеет обобщенное распределение Пуассона, данное в Вопросе для самоподготовки 5.26. Для $\lambda = 10$ и $\lambda = 50$ найдите параметры смещенного гамма-распределения величины S и, используя таблицу значений для χ^2, оцените значения x, таких что:

$$(a)\ \ P(S \le x) = 0.95 \qquad\qquad (b)\ \ P(S \le x) = 0.99$$

§6 Формулы

Производящие функции обобщенного распределения

$$G_S(t) = G_N[G_X(t)] \qquad M_S(t) = M_N[\log M_X(t)] = G_N[M_X(t)]$$

Среднее и дисперсия обобщенного распределения

$$E[S] = E[N]E[X] \qquad Var[S] = E[N]Var[X] + Var[N](E[X])^2$$

Обобщенное распределение Пуассона

$$E[S] = \lambda m_1 \qquad Var[S] = \lambda m_2 \qquad skew[S] = \lambda m_3$$

Обобщенное отрицательное биномиальное распределение

$$E[S] = \frac{kq}{p} m_1 \qquad Var[S] = \frac{kq}{p} m_2 + \frac{kq^2}{p^2} m_1^2$$

Производящая функция семиинвариантов

$$K_X(t) = \log M_X(t) \qquad E[X] = K_X'(0)$$

$$Var[X] = K_X''(0) \qquad skew[X] = K_X'''(0)$$

Сумма обобщенных распределений

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k \quad \text{(независимые)}$$

$$\lambda M_W(t) = \lambda_1 M_{X_1}(t) + \lambda_2 M_{X_2}(t) + ... + \lambda_k M_{X_k}(t)$$

Модель индивидуального риска

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

$$N \sim Binomial(n, q) \qquad\qquad N \doteqdot Poisson\left(\sum q_i\right) \ (n \ \text{ велико})$$

$$E[S] = \sum_i b_i q_i \quad Var[S] = \sum_i b_i^2 q_i (1-q_i) \quad skew[S] = \sum_i b_i^3 q_i (1-q_i)(1-2q_i)$$

$$E[S] = \sum_i \mu_i q_i \qquad Var[S] = \sum_i [\sigma_i^2 q_i + \mu_i^2 q_i (1 - q_i)]$$

Модель коллективного риска

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

Рекурсивная формула (обобщенное распределение Пуассона)

$$p_S(0) = e^{-\lambda} \qquad p_S(s) = \lambda \sum_{0<x\le s} \frac{x}{s} p_X(x) p_S(s - x), \quad s = 1, 2, ...$$

Итерационная формула для вероятностной функции

$$p_N(n) = p_N(n-1) * \left(a + \frac{b}{n}\right), \quad n = 1, 2, ...$$

Производящая функция вероятностей

$$G_N'(t) = \left(\frac{a+b}{1-at}\right) G_N(t)$$

Рекурсивная формула (общий случай обобщенного распределения)

$$p_S(0) = p_N(0)$$

$$p_S(s) = \sum_{x=1}^{s} \left(a + b\frac{x}{s}\right) p_X(x) p_S(s-x), \quad s = 1, 2, ...$$

Смещенное гамма-распределение

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda} + k \qquad Var[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2} \qquad skew[X] = \frac{2\alpha}{\lambda^3}$$

$$2\lambda(X-k) \sim \chi^2_{2\alpha}$$

Глава 6

Основы теории–Суммарные страховые выплаты

Модели риска

§1 Введение

Определение и свойства производящей функции моментов нам должны быть известны. Свойство о том, что два различных распределения не могут иметь одну и ту же производящую функцию моментов, будет использоваться позже в этой главе. Пусть X – случайная величина, $M(t)$ – её производящая функция моментов. Известное нам свойство, что для любого натурального n:

$$\frac{d^n}{dt^n} M(t)\,|_{t=0} = E[X^n] \tag{6.1}$$

Менее известное свойство, но не менее широко применимое, то, что для $n = 2$ и $n = 3$:

$$\frac{d^n}{dt^n} \log M(t)\,|_{t=0} = E[(X - E[X])^n] \tag{6.2}$$

$\log M(t)$ — есть производящая функция семиинвариантов случайной величины X. Преимущество формулы (6.2) перед (6.1) в том, что центральные моменты представляют для нас больший интерес, чем нецентральные моменты. А для $n = 2$ и $n = 3$ эти центральные моменты дает нам как раз формула (6.2).

В этой главе будут использоваться свертки функций распределения. Предположим, что $\{X_i\}_{i=1}^n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$. Тогда функция распределения суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, обозначенная как $F^{n^*}(x)$:

$$F^{n^*}(x) = P(X_1 + X_2 + ... + X_n \leq x)$$

§2 Модели для краткосрочного страхования

2.1 Основная модель

Многие формы страхования, не связанные с жизнью (*non-life insurance*), например автострахование, могут рассматриваться как краткосрочное страхование, также как и некоторые формы страхования жизни (*life insurance*), например групповое страхование жизни или одногодичный страховой полис.

Краткосрочное страхование можно определить следующими его свойствами:

- Полис действует в течение фиксированного, относительно короткого, периода времени, обычно в течение года.
- Страховая компания получает премии от страховщиков – полисодержателей (*policyholder*).
- В свою очередь, страховщик оплачивает все иски согласно купленным полисам.

В конце периода действия полиса страхователь может продлить или не продолжать срок действия; в случае продления срока, премии, выплачиваемые страхователем, могут быть такой же величины или другой.

Страховщик может передать часть премий перестраховщику; в свою очередь, перестраховщик покрывает часть исков в течение времени действия полиса согласно некоторому установленному соглашению.

Важная особенность договора краткосрочного страхования состоит в том, что величина премий устанавливается таким образом, чтобы только покрыть иски, возникающие в течение действия полиса. Такой вид договора вместе с полисами страхования жизни, где коэффициент смертности растет с увеличением возраста, означает, что годичный страховой взнос в ранние годы более чем достаточен, чтобы покрыть ожидаемые иски в этом возрасте. Величина превышения затем откладывается в качестве резервов, используемых в более позднем возрасте, когда величины премий уже не будет достаточно для того, чтобы покрыть ожидаемые иски.

Теперь более подробно, рассмотрим страхование риска по договору краткосрочного страхования. Риск включает в себя отдельно каждый полис или определенную группу полисов. Для простоты будем считать, что срок действия договора равен одному году, но любой другой короткий период, например шесть месяцев, также может подойти. Случайная величина S показывает суммарные выплаты страховщика за год относительно данного риска. Все модели будут построены для этой случайной величины. В следующих двух параграфах будет изучена модель коллективного риска. Позже, в 4 параграфа, идея модели коллективного риска распространится и на модель индивидуального риска. Первым пунктом в построении модели коллективного риска является запись величины S для числа исков за указанный год, эту случайную величину обозначим за N, и для величины индивидуального иска. Пусть X_i обозначает величину i-го иска. Тогда:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Поставленная задача состоит в следующем — определить моменты и установить распределение величины S через моменты и распределения N и X_i. Поставленную задачу будем рассматривать в условиях перестрахования и без. Для перестраховщика также определим моменты и распределение величины суммарных выплат за год относительно данного риска.

2.2 Рассмотрение упрощений в основной модели

Модель краткосрочного страхования, описанная в предыдущем параграфе, содержит несколько упрощений относительно реального процесса страхования. Во-первых, обычно предполагается, что моменты, и иногда распределения, величин N и X_i точно известны. На практике их обычно оценивают по существующим данным, используя методы, уже изученные в I Части.

Во-вторых, предполагается, по крайней мере неявно, что размер иска не изменеется, по крайней мере после того, как страховой случай, вызвавший иск, произошел. То есть, например, прибыль страховщика к концу года точно известна. На практике требуется, как минимум, кокроткий промежуток времени на урегулирование размера требования, а в некотороых случаях на урегулирование уходят годы. Это может произойти, если размер ущерба сложно определить, например, если возникают судебные разбирательства.

Эта модель вообще не включает в себя рассмотрение расходов. Предполагается, что премии идут на покрытие ущербов и содержат нагрузку для прибыли страховой компании. На самом деле, премии, выплачиваемые страховщиком, также содержат нагрузку на издержки. Учет издержек можно включить в модель простым способом.

Важным моментом в моделях долгосрочного страхования является понятие процентной ставки (*interest rate*), т.к. (как было сказано выше) доход от нагруженной премии может быть инвестирован на создание резервов. Сам процент (*interest*) менее важен, но все же остается значимым в краткосрочном страховании. В моделях для краткосрочного страхования возможно включение процента, но обычно его не учитывают, по крайней мере в самых простых моделях.

2.3 Замечания и предположения

В продолжение всей главы будут сделаны следующие два важных предположения:

- случайные величины $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ – независимые и одинаково распределеные
- случайная величина N не зависит от $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$

Иначе говоря, эти предположения означают:

1. число исков не влияет на размер индивидуального иска
2. величина одного индивидуального иска не влияет на величину любого другого индивидуального иска
3. распределение индивидуальных исков не изменяется в течение всего (короткого) промежутка времени действия полиса

В течение всей главы будем предполагать, что все иски принимают неотрицательные значения, так что $P(X_i \leq x) = 0$, для $x < 0$. Многие формулы в этой главе будут получены, используя производящие функции моментов S, N и X_i. Эти функции будем обозначать $M_S(t), M_N(t)$ и $M_X(t)$ соответственно, а также будем предполагать их существование для некоторого положительного значения фиктивной переменной t. Существование производящей функции моментов неотрицательной случайной величины для положительного значения t, вообще говоря, не может считаться доказанным фактом. Например, производящие функции моментов Парето и логнормального распределений не существуют для какого-либо положительного значения t. Однако, все формулы, полученные в этой главе с помощью производящих функций моментов, могут быть получены (хотя и менее просто) без предположения о существовании производящей функции моментов для $t > 0$.

$G(x)$ и $F(x)$ будут обозначать функции распределения S и X_i соответственно, так что:

$$G(x) = P(S \leq x) \quad \text{и} \quad F(x) = P(X_i \leq x)$$

Для удобства будем считать, что плотность распределения $F(x)$ существует, и будем обозначать её $f(x)$. В случае, когда плотность не будет существовать, т.е. когда X_i имеет дискретное распределение или смешанное непрерывное/дискретное распределение, выражение вида

$$\int_0^\infty x f(x) dx$$

будем интерпретировать надлежащим образом. Значение будет определяться в контексте.

k-ый центральный момент X_i, $k = 1, 2, 3, ...$ будем обозначать m_k.

§3 Модель коллективного риска

3.1 Модель коллективного риска

Вернемся к параграфу 2.1, где S представляется как сумма N случайных величин X_i, где X_i обозначает размер i-го иска. Таким образом:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

и $S = 0$ если $N = 0$.
Отметим, что число N исков из рискового портфеля – общее для всей группы (в отличии от числа исков в случае индивидуального полиса), что дает такое название модели — "Модель коллективного риска". В рамках этой модели могут быть выведены выражения для функции распределения, математического ожидания, дисперсии и производящей функции моментов S.

Выражение для $G(x)$, функции распределения S, может быть получено, если рассмотреть событие $\{S \le x\}$. Заметим, что если это событие произошло, то возможен один, и только один, из следующих вариантов:

$$\begin{array}{lll} & \{S \le x \text{ и } N = 0\} & \text{(т.е. нет ни одного иска)} \\ \text{или} & \{S \le x \text{ и } N = 1\} & \text{(т.е. один иск размера } \le x) \\ \text{или} & \{S \le x \text{ и } N = 2\} & \text{(т.е. два иска общего размера } \le x) \\ & \vdots & \\ \text{или} & \{S \le x \text{ и } N = r\} & \text{(т.е. } r \text{ исков общего размера } \le x) \\ & \vdots & \end{array}$$

и так далее. Эти события взаимоисключающие и исчерпывающие. Таким образом

$$\{S \le x\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \le x \text{ и } N = n\}$$

и следовательно

$$P(S \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S \le x \text{ и } N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) P(S \le x | N = n)$$

Теперь заметим, что если $N = n$, то S – сумма фиксированного числа n случайных величин, $\{X_i\}_{i=1}^n$, и значит:

$$P(S \le x | N = n) = F^{n^*}(x)$$

где $F^{n^*}(x)$ – n-кратная свертка распределения $F(x)$. (Отметим, что $F^{1^*}(x)$—есть $F(x)$ и, для простоты, пусть $F^{0^*}(x)$ равняется 1 для всех неотрицательных x. В остальных случаях $F^{0^*}(x) = 0$.) Таким образом:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) F^{n^*}(x) \tag{6.3}$$

Формула (3.1) является в общем виде выражением для функции распределения S. Ни распределение N ни X_i не были определены.

Заметим, что когда X_i принимает целочисленные положительные значения, $P(S = x)$ можно легко найти для $x = 1, 2, 3, ...$, так как

$$P(S = x) = G(x) - G(x - 1) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)\{F^{n^*}(x) - F^{n^*}(x - 1)\}$$

то есть

$$P(S = x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) f_x^{n^*} \tag{6.3}$$

где $f_x^{n^*} = F^{n^*}(x) - F^{n^*}(x - 1)$ – плотность распределения $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Как и в случае непрерывного распределения X_i, $P(S = 0) = P(N = 0)$.

Ранее уже обсуждались существование и методы аппроксимации для оценивания $G(x)$. Метод аппроксимации требует знание моментов S. Обсудим это более детально.

Для вычисления моментов S используется условное математическое ожидание при условии N. Для того, чтобы найти $E[S]$, воспользуемся равенством:

$$E[S] = E[E[S|N]]$$

Тогда $E[S|N = n] = \sum\limits_{i=1}^{n} E[X_i] = nm_1$. Следовательно $E[S|N] = Nm_1$.
И тогда

$$E[S] = E[Nm_1] = E[N]m_1 \tag{6.3}$$

Формула (3.1) имеет весьма понятную интерпретацию. Она означает, что ожидаемая величина суммарных исков — есть результат ожидаемого числа исков и ожидаемой величины индивидуального иска.

Для выражения $Var[S]$ воспользуемся равенством:

$$Var[S] = E[Var[S|N]] + Var[E[S|N]]$$

$Var[S|N]$ можно найти, используя предположение о независимости величин индивидуальных исков:

$$Var[S|N=n] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = n(m_2 - m_1^2)$$

таким образом $Var[S|N] = N(m_2 - m_1^2)$. Следовательно:

$$Var[S|N] = E[N(m_2 - m_1^2)] + Var[Nm_1]$$

то есть

$$Var[S|N] = E[N](m_2 - m_1^2) + Var[N]m_1 \tag{6.3}$$

В отличии от выражения для $E[S]$, формула (3.1) не имеет очевидной интерпретации. Дисперсия S выражается через среднее и дисперсию и случайной величины N, и случайной величины X_i.

Производящая функция моментов S может быть также найдена, используя условное математическое ожидание. По определению, $M_S(t) = E[\exp\{tS\}]$. Таким образом:

$$M_S(t) = E[E[\exp\{tS\}|N]] \tag{6.3}$$

$E[\exp\{tS\}|N = n] = E[\exp\{tX_1 + tX_2 + ... + tX_n\}]$, и так как $\{X_i\}_{i=1}^n$ независимые случайные величины, то:

$$E[\exp\{tX_1 + tX_2 + ... + tX_n\}] = \prod_{i=1}^{n} E[\exp\{tX_i\}]$$

Так как $\{X_i\}_{i=1}^n$ одинаково распределены — они имеют одинаковые производящие функции моментов, $M_X(t)$, поэтому:

$$\prod_{i=1}^{n} E[\exp\{tX_i\}] = \prod_{i=1}^{n} M_X(t) = [M_X(t)]^n$$

Следовательно:

$$E[\exp\{tS\}|N] = [M_X(t)]^N \tag{6.3}$$

Подставляя (3.1) в (3.1), получим:

$$M_S(t) = E[(M_X(t))^n] = E[\exp\{N \log M_X(t)\}] = M_N(\log M_X(t)) \tag{6.3}$$

Таким образом, производящая функция моментов S выражается через производящие функции моментов N и X_i. Как в предыдущем результате, распределения N и X_i не указаны точно.

Существует один специальный случай, который представляет особый интерес. Случай, когда все иски имеют одинаковый фиксированный размер.

Например, рассмотрим портфель одногодичного страхования с одинаковой величиной требования. Предполагая, что вероятность возникновения иска размера B равна 1 (т.е. $P(X_i = B) = 1$), получим $m_1 = B$ и $m_2 = B^2$. Тогда S может принимать следующие значения: $0, B, 2B, ...$ Фактически $S = BN$, значит:

$$P(S \leq Bx) = P(N \leq x)$$

и распределение S следует из распределения N. Формулы (3.1) и (3.1) дают среднее и дисперсию S, но так как $S = BN$ гораздо проще обратить внимание на то, что $E[S] = E[N]B$ и $Var[S] = Var[N]B^2$.

В следующих трех параграфах рассматривается обобщенное распределение, используя различные распределения для числа исков, N.

3.2 Обобщенное распределение Пуассона

Рассмотрим сначала величину суммарных исков, когда N имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием λ. Обозначим
$N \sim P(\lambda)$. S тогда будет иметь обобщенное распределение Пуассона с параметрами λ и $F(x)$. Для распределения Пуассона для N известно:

$$E[N] = Var[N] = \lambda$$

$$M_N(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

Эти результаты представлены в таблице.

Эти равенства можно объединить с результатами, полученными в параграфе 3.1,

используя (3.1): $$\text{E[S]}=\lambda m_1 \tag{6.3}$$

используя (3.1): $$\text{Var[S]}=\lambda m_2 \tag{6.3}$$

используя (3.1): $$\mathrm{M}_S(t) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\} \tag{6.3}$$

Эти формулы для среднего значения и дисперсии имеют очень простой вид. Заметим, что дисперсия S выражается через второй центральный момент X_i, а не через дисперсию X_i.

Для того, чтобы показать, что центральный момент S равен λm_3, воспользуемся производящей функцией семиинвариантов (формула (6.2) для $n = 3$), то есть:

$$E[(S - \lambda m_1)^3] = \frac{d^3}{dt^3} \log M_S(t)|_{t=0}$$

Так как $\log M_S(t) = \lambda(M_X(t) - 1)$, то:

$$\frac{d^3}{dt^3} \log M_S(t)|_{t=0} = \lambda \frac{d^3}{dt^3} M_X(t)|_{t=0} = \lambda m_3$$

то есть $E[(S - \lambda m_1)^3] = \lambda m_3$
и коэффициент асимметрии равен $\lambda m_3/(\lambda m_2)^{3/2}$.

Этот результат показывает, что распределение S имеет положительную асимметрию, т.к. m_3 – третий центральный момент X_i и, следовательно, больше нуля, т.к. X_i принимает неотрицательные значения. Заметим, что распределение S имеет положительную асимметрию даже тогда, когда распределение X_i имеет отрицательную асимметрию. Коэффициент асимметрии S равен $\lambda m_3/(\lambda m_2)^{3/2}$, а следовательно, стремится к нулю при $\lambda \longrightarrow \infty$. Таким образом, для больших значений λ распределение S почти симметрично.

Рассмотрим следующее свойство обобщенного распределения Пуассона. Сумма независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона, является случайной величиной с обобщенным распределением Пуассона. Формальное определение этого свойства следующее:

Пусть $S_1, S_2, ..., S_n$ — независимые случайные величины. S_i имеет обобщенное распределение Пуассона с параметрами λ_i и $F_i(x)$. Определим следующую случайную величину $A = S_1 + S_2 + ... + S_n$. Тогда A будет иметь обобщенное распределение Пуассона с параметрами Λ и $F(x)$, где

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{и} \quad F(x) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x)$$

Полученный результат представляет собой очень важное свойство. В дальнейшем оно нам пригодиться. Обозначим его как Результат 1.

Для доказательства этого свойства, прежде всего, заметим, что $F(x)$ — среднее взвешенное функций распределения и эти веса принимают положительные значения, а в сумме дают единицу. Это означает, что $F(x)$ — является функцией распределения и это распределение имеет производящую функцию моментов.

$$M(t) = \int\limits_{0}^{\infty} exp\{tx\} \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) dx$$

где $f_i(x)$ – плотность $F_i(x)$. Следовательно:

$$M(t) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_{0}^{\infty} exp\{tx\} f_i(x) dx = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i(t) \tag{6.3}$$

где $M_i(t)$ – производящая функция моментов распределения $F_i(t)$.

Пусть $M_A(t)$ – производящая функция моментов A.

Тогда $M_A(t) = E[\exp\{tA\}] = E[\exp\{tS_1 + tS_2 + ... + tS_n\}]$.

Из независимости $\{S_i\}_{i=1}^{n}$:

$$M_A(t) = \prod_{i=1}^{n} E[\exp\{tS_i\}] = \exp\{\lambda_i(M_i(t) - 1)\}$$

Таким образом:

$$M_A(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\{\lambda_i(M_i(t) - 1)\} = \exp\{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(M_i(t) - 1)\}$$

То есть:

$$M_A(t) = \exp\{\Lambda(M(t) - 1)\} \tag{6.3}$$

где $\Lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ и $M(t) = \frac{1}{\Lambda} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i M_i(t)$.

Согласно взаимно-однозначному соответствию между производящими функциями моментов, формула (3.2) показывает, что A имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром Λ. Из (3.2) распределение величины индивидуального иска равно $F(t)$.

3.3 Обобщенное биномиальное распределение

В некоторых случаях в качестве распределения N целесообразно выбрать биномиальное распределение. Например, согласно группе полисов страхования n жизней, число смертей в год имеет биномиальное распределение, если предположить, что каждая застрахованная жизнь подчиняется одному закону смертности и все они независимы относительно смертности.

Для биномиального распределения N будем пользоваться обозначением $N \sim b(n, q)$. Основными результатами для этого распределения являются следующие формулы:

$$E[N] = nq$$

$$Var[N] = nq(1-q)$$

$$M_N(t) = (qe^t + 1 - q)^n$$

Эти формулы представлены в таблице.

Если N имеет биномиальное распределение, то S имеет обобщенное биномиальное распределение. Важным моментом относительно выбора биномиального распределения для N является то, что количество исков имеет верхний предел, n.
Запишем выражения для среднего, дисперсии и производящей функции через n, q, m_1, m_2 и $M_X(t)$, если $N \sim b(n, q)$.

С помощью формул (3.1) и (3.1) получим:

$$E[S] = nqm_1 \tag{6.3}$$

$$Var[S] = nq(m_2 - m_1^2) + nq(1-q)m_1^2 = nqm_2 - nq^2m_1^2 \tag{6.3}$$

Из формулы (3.1):

$$M_S(t) = (qM_X(t) + 1 - q)^n$$

Третий центральный момент найдём с помощью производящей функции семиинвариантов (используя формулу (6.2)).

$$\frac{d^3}{dt^3}\log M_S(t) = \frac{d^3}{dt^3} n \log(qM_X(t)+p) = \{\text{ где } p = 1-q\} =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\left\{nq\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)(qM_X(t)+p)^{-1}\right\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{nq\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)(qM_X(t)+p)^{-1} - n\left(q\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^2(qM_X(t)+p)^{-2}\right\} =$$

$$= nq\left(\frac{d^3}{dt^3}M_X(t)\right)(qM_X(t)+p)^{-1} -$$

$$-3nq^2\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)(qM_X(t)+p)^{-2}\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right) +$$

$$+2n\left(q\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^3(qM_X(t)+p)^{-3}$$

Положим $t = 0$:

$$E[(S - nqm_1)^3] = nqm_3 - 3nq^2m_2m_1 + 2nq^3m_1^3 \tag{6.3}$$

Коэффициент асимметрии, следовательно, равен:

$$\frac{nqm_3 - 3nq^2m_2m_1 + 2nq^3m_1^3}{(nqm_2 - nq^2m_1^2)^{3/2}}$$

Из формулы (3.3) следует, что обобщенное биномиальное распределение может иметь отрицательную асимметрию. Простой пример, иллюстрирующий этот факт, когда все иски имеют размер B. Тогда $S = BN$ и

$$E[(S - E[S])^3] = B^3 E[(N - E[N])^3]$$

таким образом, коэффициент асимметрии S кратен соответствующему коэффициенту асимметрии N. Если $q > 0.5$, то биномиальное распределение N имеет отрицательную асимметрию.

3.4 Обобщенное отрицательное биномиальное распределение

Последнее распределение для N, которое мы рассмотрим, — отрицательное биномиальное распределение, которое имеет вероятностную функцию:

$$P(N = n) = \binom{k+n-1}{n} p^k q^n \quad \text{для } n = 0, 1, 2, ...$$

Параметры распределения $k > 0$ и p, причем $p + q = 1$ и $0 < p < 1$. Для этого распределения введем обозначение $NB(k, p)$. Если $N \sim NB(k, p)$:

$$E[N] = kq/p$$
$$Var[N] = kq/p^2$$
$$M_N(t) = p^k(1 - qe^t)^{-k}$$

Частный случай при $k = 1$ дает геометрическое распределение. Еще раз отметим, что эти результаты представлены в Таблице.

Отрицательное биномиальное распределение является альтернативным для распределения Пуассона для величины N. Но отрицательное биномиальное распределение имеет преимущество перед распределением Пуассона, т.к. дисперсия этого распределения больше математического ожидания. Эти две величины равны друг другу для распределения Пуассона. Таким образом, отрицательное биномиальное распределение дает лучшее соответствие набору данных, которые имеют выборочную дисперсию, превышающую выборочное среднее. На практике, такая ситуация встречается часто. В параграфе 6.2 приведена ситуация, когда применяется отрицательное биномиальное распределение N. Если N имеет отрицательное биномиальное распределение, то S имеет обобщенное отрицательное биномиальное распределение.

Выражения для среднего значения, дисперсии и производящей функции моментов S, если $N \sim NB(k, p)$, вытекают непосредственно из формул (3.1),(3.1) и (3.1):

$$E[S] = \frac{kq}{p} m_1$$
$$Var[S] = \frac{kq}{p}(m_2 - m_1^2) + \frac{kq}{p^2} m_1^2 = \frac{kq}{p} m_2 + \frac{kq^2}{p^2} m_1^2$$
$$M_S(t) = \frac{p^k}{(1 - qM_X(t))^k}$$

Как и раньше, третий центральный момент S может быть найден, используя производящую функцию семиинвариантов S, следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \log M_S(t) = \frac{d}{dt}(k \log p - k \log(1 - qM_X(t))) =$$
$$= \frac{kq}{1 - qM_X(t)} \left(\frac{d}{dt} M_X(t) \right)$$

Тогда

$$\frac{d^2}{dt^2}\log M_S(t) = kq^2\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^2 \frac{1}{(1-qM_X(t))^2} + \frac{kq}{1-qM_X(t)}\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)$$

и

$$\frac{d^3}{dt^3}\log M_S(t) = 3kq^2\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)\frac{1}{(1-qM_X(t))^2} +$$

$$+\frac{2kq^3}{(1-qM_X(t))^3}\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^3 + \frac{kq}{1-qM_X(t)}\left(\frac{d^3}{dt^3}M_X(t)\right)$$

Положим $t = 0$ для третьей производной и получим:

$$E[(S-E[S])^3] = \frac{3kq^2 m_1 m_2}{p^2} + \frac{2kq^3 m_1^3}{p^3} + \frac{kqm_3}{p} \tag{6.3}$$

Параметры k и p положительны, как и моменты $F(x)$. Тогда из формулы (3.4) следует, что обобщенное отрицательное биномиальное распределение имеет положительную асимметрию. Коэффициент асимметрии может быть найден по формуле $E[(S-E[S])^3]/(Var[S])^{3/2}$.

3.5 Распределение суммарного иска согласно договору перестрахования эксцедента убытка и пропорциональному договору перестрахования

Пропорциональное перестрахование

Распределение числа исков в отношении перестраховщика такое же, какое и распределение числа исков страховщика, так как каждый платит определенную пропорцию каждого иска. Для уровня удержания, равного α $(0 \preceq \alpha \preceq 1)$, величина индивидуального иска для страховщика распределена как αX_i и для перестраховщика — как $(1-\alpha)X_i$. Величины суммарного иска распределены как αS и $(1-\alpha)S$ соответственно.

Перестрахование эксцедента убытка

Величина выплат страховщика по каждому i-му иску, согласно договору перестрахования эксцедента убытка с уровнем удержания M, равна $Y_i = \min(X_i, M)$.

Величина выплат перестраховщика равна $Z_i = \max(0, X_i - M)$.

Таким образом, величина суммарного нетто-иска страховщика может быть представлена следующим образом:

$$S_I = Y_1 + Y_2 + ...Y_N$$

и суммарного иска перестраховщика:

$$S_R = Z_1 + Z_2 + ...Z_N$$

Если, например, $N \sim P(\lambda)$, то S_I имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром Пуассона λ, а величины индивидуальных исков распределены как Y_i. Аналогично, S_R имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром Пуассона, равным λ, и величины индивидуальных исков распределены как Z_i. Отметим, однако, если $F(M) > 0$, что будет часто встречаться, то вероятность (то есть $F(M)$) того, что $Z_i = 0$, отлична от нуля. Другими словами, 0 считается возможным иском для перестраховщика. С практической точки зрения, такое определение S_R весьма искусственно. Страховщик знает наблюдаемую величину числа исков N, но перестраховщик знает только о тех исках, величина которых превысила уровень M, т.к. страховщик может уведомить перестраховщика только о наличии исков, превышающих M.

Пример 6.16 Величина ежегодного суммарного иска имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром 10. Величины индивидуальных исков равномерно распределены на (0,2000). Действует договор перестрахования эксцедента убытка с уровнем превышения 1,600. Вычислите среднее значение, дисперсию и коэффициент асимметрии суммарного иска для страховщика и для перестраховщика, согласно действующему договору.

Решение Пусть S_I и S_R — величины, определенные выше. Для того, что найти $E[S_I]$, вычислим $E[Y_i]$:

$$E[Y_i] = \int_0^M x f(x) dx + MP(X_i > M)$$

где $f(x) = 0.0005$ — плотность распределения $U(0, 2000)$ и $M = 1,600$. Учитывая это, получим:

$$E[Y_i] = \frac{0.0005x^2}{2}\Big|_0^M + 0.2M = 960$$

и значит

$$E[S_I] = 10E[Y_i] = 9,600$$

Чтобы найти $Var[S_I]$, вычислим $E[Y_i^2]$.

$$E[Y_i^2] = \int_0^M x^2 f(x) dx + M^2 P(X_i > M) =$$

$$= \frac{0.0005x^3}{3} \Big|_0^M + 0.2M^2 = 1,194,666.7$$

и значит

$$Var[S_I] = 10E[Y_i^2] = 11,946,667$$

Чтобы найти коэффициент асимметрии величины исков страховщика, вычислим $E[Y_i^3]$:

$$E[Y_i^3] = \int\limits_0^M x^3 f(x)dx + M^3 P(X_i > M) =$$

$$= \frac{0.0005x^4}{4} \Big|_0^M + 0.2M^3 = 1,638,400,000$$

Таким образом:

$$E[(S_I - E[S_I])^3] = 10E[Y_i^3] = 16,384,000,000$$

и коэффициент асимметрии равен

$$16,384,000,000/(11,946,667)^{3/2} = 0.397$$

Для того, чтобы найти $E[S_R]$, заметим, что ожидаемая величина суммарного иска за весь риск равна 10,000. Тогда

$$E[S_R] = 10,000 - E[S_I] = 400$$

Чтобы найти $Var[S_R]$, вычислим $E[Z_i^2]$:

$$E[Z_i^2] = \int\limits_M^{2000} (x - M)^2 f(x)dx = \{y = x - M\} = \int\limits_0^{2000-M} 0.0005y^2 dy =$$

$$= \frac{0.0005y^3}{3} \Big|_0^{200-M} = 10,666.7$$

Таким образом

$$Var[S_R] = 10E[Z_i^2] = 106,667$$

Для того, чтобы найти коэффициент асимметрии величины исков для перестраховщика, вычислим $E[Z_i^3]$:

$$E[Z_i^3] = \int\limits_M^{2000} (x - M)^3 f(x)dx = \{y = x - M\} =$$

$$= \int\limits_0^{2000-M} 0.0005y^3 dy = 3,200,000$$

и следовательно

$$E[(S_R - E[S_R])^3] = 10E[Z_i^3] = 32,000,000$$

коэффициент асимметрии равен

$$32,000,000/(106,667)^{3/2} = 0.92$$

Суммарные иски перестраховщика могут быть также представлены следующим образом:

$$S_R = W_1 + W_2 + ...W_{NR} \tag{6.3}$$

где случайная величина NR обозначает число действительных (ненулевых) выплат, производимых перестраховщиком.

Например, предположим, что по риску из прошлого примера за конкретный год было предъявлено восемь требований, следующих размеров:

403 1490 1948 443 1866 1704 1221 823

Тогда в формуле (**??**) наблюдаемая величина N равна 8, третий, пятый и шестой иски приводят к выплатам перестраховщика следующих размеров 348, 266 и 104 соответственно. "Выплаты"перестраховщика по остальным пяти искам равны 0.

В формуле (3.5) наблюдаемая величина NR равна 3, а величины W_1, W_2 и W_3 равны 348, 266 и 104 соответственно. Отметим, что величина S_R одинакова (то есть равна 718) для двух представлений.

Во II Части было показано, что W_i имеет следующую плотность распределения:

$$p(w) = \frac{f(w+M)}{1-F(M)}, \quad w > 0$$

Для распределения S_R виде (3.5) необходимо знать распределение величины NR. Его можно найти следующим образом. Определим

$$NR = I_1 + I_2 + ...I_N$$

где N обозначает число исков по данному риску (как и обычно). I_j — индикаторная случайная величина, которая принимает значение 1, если перестраховщик совершает (ненулевые) выплаты по j-му иску, и значение 0 в другом случае. Таким образом, NR дает число выплат, совершаемых перестраховщиком. Так как I_j принимает значение 1 только если $X_j > M$, то:

$$P(I_j = 1) = P(X_j > M) = \pi \ \text{(так обозначим), и}$$

$$P(I_j = 0) = 1 - \pi$$

Кроме того, I_j имеет производящую функцию моментов:

$$M_I(t) = \pi \exp\{t\} + 1 - \pi$$

и по формуле (3.1) NR имеет производящую функцию моментов:

$$M_{NR}(t) = M_N(\log M_I(t))$$

Пример 6.17 Продолжая предыдущий пример и используя формулу (3.5) в качестве представления случайной величины S_R, можно увидеть, что S_R имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром Пуассона, равным 0.2*10=2. Индивидуальные иски, W_i, имеют следующую плотность распределения:

$$p(w) = \frac{f(w+M)}{1-F(M)} = 0.0005/0.2 = 0.0025, \quad \text{для} \quad 0 < w < 400$$

т.е. W_i равномерно распределены на (0,400). $E[W_i] = 200$, $E[W_i^2]53,333.33$ и $E[W_i^3] = 16,000,000$ дают такие же результаты, что и раньше.
Таким образом, существует два способа задавать и устанавливать распределение S_R.

§4 Точные и приближенные вычисления $G(x)$ в модели коллективного риска

4.1 Введение

В этом параграфе будут проведены вычисления и приближенное представление $G(x)$, функции распределения суммарного иска для модели коллективного риска. В некоторых случаях возможно довольно легко найти распределение функции $G(x)$, например, если все иски одного размера, но предположения, сделанные в этих случаях, будут слишком ограничивающими, чтобы представлять интерес с практической точки зрения. В параграфе 4.2 будет выведена рекурсивная формула для вычисления $G(x)$. В параграфе 4.3 функция $G(x)$ будет аппроксимирована нормальным распределением. И наконец, в параграфе 4.4 $G(x)$ будет аппроксимирована (смещенным) гамма-распределением. В параграфе 4.2 предполагается, что распределение числа исков и распределение величины исков известны; в параграфах 4.3 и 4.4 предполагается, что только первые два или три момента этих распределений известны.

4.2 Рекурсивная формула для $G(x)$

В этом параграфе будем предполагать, что распределение индивидуальных исков, $F(x)$, дискретное распределение, принимающее положительные целые значения. Это означает, что индивидуальные иски могут принимать следующие значения: 1,2,3,... и, следовательно, возможные значения суммарного иска: 0,1,2,3,... . Кроме того, функция распределения для величины индивидуальных исков не имеет плотности распределения (т.к. каждая величина X_i – дискретная случайная величина).

Следующие обозначения будут использоваться для вероятностных функций величины индивидуального иска и суммарного иска соответственно.

$$f_k = P(X_i = k) \qquad k = 1, 2, 3, ...$$
$$g_k = P(S = k) \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Если распределение индивидуальных исков не является дискретным с положительными целыми значениями (что часто встречается), то оно может быть всегда аппроксимировано подходящим распределением.

Задача вычисления $G(x)$ согласно сделанным предположениям сводится к вычислению g_k для $k \leq x$. Предполагается, что:

- распределение числа исков известно
- распределение индивидуальных исков (т.е. f_k) известно

Перед доказательством рекурсивной формулы, или даже до формулировки этой формулы, необходимо сделать одно предположение относительно распределения N, числа исков. Обозначим $P(N = r)$ через p_r и предположим, что существуют такие a и b, что:

$$p_r = (a + b/r)p_{r-1} \qquad \text{для } r = 1, 2, 3, ... \tag{6.3}$$

Все три распределения числа исков, рассмотренные в главе 3, удовлетворяют Предположению (4.2).
Формула для g_r:

$$g_0 = p_0 \tag{6.3}$$

$$g_r = \sum_{j=1}^{r}(a + bj/r) f_j g_{r-j} \qquad \text{для } r = 1, 2, ... \tag{6.3}$$

Формула (4.2) следует из того факта, что минимальный размер иска равен 1. Суммарный иск равен нулю только в том случае, если не было предъявлено ни одного иска.

Для доказательства формулы (4.2) будем использовать следующие три формулы, для $n = 2, 3, ...$:

$$E\left[X_1 | \sum_{i=1}^{n} X_i = r\right] = r/n \tag{6.3}$$

$$E\left[X_1 | \sum_{i=1}^{n} X_i = r\right] = \sum_{j=1}^{r} j \ f_j \ f_{r-j}^{(n-1)*}/f_r^{n*} \tag{6.3}$$

$$p_n f_r^{n*} = \sum_{j=1}^{r-1}(a + bj/r) \ f_j \ p_{n-1} \ f_{r-j}^{(n-1)*} \tag{6.3}$$

Формулы (4.2) и (4.2) справедливы для любых значений r, для которых f_r^{n*} не равно нулю; (4.2) справедлива для $r = 1, 2, ...$, в любом случае.
Формула (4.2) следует из того, что $X_1, X_2, ..., X_n$ одинаково распределены, и если их сумма равна r, то ожидаемое значение любого из них должно быть равно r/n.

Чтобы увидеть, почему справедлива формула (4.2), заметим, что $f_j \ f_{r-j}^{(n-1)*}/f_r^{n*}$ — (условная) вероятность того, что X_1 равно j при условии, что $\sum\limits_{j=1}^{n} X_j = r$. (В (4.2) предполагается, что вероятность того, что $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = r$, т.е. f_r^{n*}, не равна нулю.) Учитывая, что $\sum\limits_{j=1}^{n} X_j = r$, значение X_1 не может быть больше r. Следовательно, правая часть (4.2) — есть сумма по каждому значению X_1 этого значения, умноженного на вероятность того, что X_1 принимает это значение, условие равенства r величины $\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$. Эта сумма равняется левой части (4.2).

Теперь получим (4.2). Во-первых, заметим, что (4.2) справедлива, если f_r^{n*} равно нулю, т.к. в этом случае для любых значений $j = 1, 2, ..., r$, либо одна из величин f_j или $f_{r-j}^{(n-1)*}$ равна нулю, либо обе должны быть равны нулю. Следовательно, если f_r^{n*} равна нулю, обе части (4.2) равны нулю. Теперь предположим, что f_r^{n*} не равно нулю. Тогда

используя (4.2) $\qquad p_n f_r^{n*} = p_{n-1}(a + b/n) f_r^{n*} =$

используя (4.2) $\qquad = p_{n-1} E[a + bX_1/r| \sum_{i=1}^{n} X_i = r] f_r^{n*} =$

используя (4.2) $\qquad = p_{n-1} \sum_{j=1}^{r} (a + bj/r) f_j f_{r-j}^{(n-1)*} =$

$$= p_{n-1} \sum_{j=1}^{r-1} (a + bj/r) f_j f_{r-j}^{(n-1)*} \qquad (\text{т.к. } f_0^{(n-1)*} = 0)$$

Наконец, теперь можем получить (4.2). Для $r = 1, 2, ...$

используя (3.1) $\qquad g_r = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_r^{n*} =$

$$= p_1 f_r + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} f_r^{(n+1)*} =$$

используя (4.2) $\qquad = (a + b) p_0 f_r + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r-1} (a + bj/r) f_j p_n f_{r-j}^{n*} =$

$$= (a + b) g_0 f_r + \sum_{j=1}^{r-1} (a + bj/r) f_j \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_{r-j}^{n*} =$$

используя (3.1) $\qquad = (a + b) g_0 f_r + \sum_{j=1}^{r-1} (a + bj/r) f_j g_{r-j} =$

$$= \sum_{j=1}^{r} (a + bj/r) f_j g_{r-j}$$

Формула (4.2) доказана.

В случая, когда N имеет распределение Пуассона ($a = 0$ и $b = \lambda$), формулы имеют следующий вид:

$$g_0 = e^{-\lambda}$$

$$g_r = \frac{\lambda}{r} \sum_{j=1}^{r} j \ f_j \ g_{r-j}$$

4.3 Аппроксимация $G(x)$ нормальным распределением

Рекурсивная формула для вычисления $G(x)$, доказанная в параграфе 4.2, является очень полезным "инструментом но она имеет некоторые недостатки. Во-первых, она может потребовать значительного времени для вычисления значений для $G(x)$ на компьютере. Во-вторых, её нельзя использовать, если распределения N и X_i не известны, или, по крайней мере, не могут быть оценены довольно точно.
В этом параграфе предполагается, что всё, что известно (или может быть довольно точно оценено), насчет S — это математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины. Так как довольно много различных распределений имеют одинаковые средние значения и дисперсии, $G(x)$ нельзя найти только по этой информации. Один из способов аппроксимировать $G(x)$ в этой ситуации — предположить, что S аппроксимировано нормальным распределением.

Более формально, пусть $\Phi(z)$ – функция распределения нормально распределенной случайной величины со средним значением 0 и дисперсией 1. Таким образом:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp\{-x^2/2\} dx$$

Теперь пусть μ и σ^2 обозначают среднее и дисперсию S. По предположению в этом параграфе, что S аппроксимирована нормальным распределением со средним значением μ и дисперсией σ^2, получим, что для любого x:

$$G(x) = P(S \leq x) = P((S-\mu)/\sigma \leq (x-\mu)/\sigma) \approx \Phi((x-\mu)/\sigma)$$

Для нормального распределения легко получить значения вероятностей.

S — сумма случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин. По Центральной Предельной Теореме можно использовать аппроксимацию нормальным распределением. Чем больше (ожидаемое) значение N (число случайных величин), тем лучше будет это приближение.

4.4 Аппроксимация $G(x)$ смещенным гамма-распределением

Теперь предположим, что нам известны, или могут быть достаточно точно оценены, первые три момента S. Другой способ аппроксимации распределения S — приближение смещенным гамма-распределением. Пусть μ, σ^2 и β обозначают среднее, дисперсию и коэффициент асимметрии S соответственно. Для аппроксимации смещенным гамма-распределением предположим, что S имеет приближенно то же самое распределение, что и случайная величина $Y + k$, где k – некоторая константа и Y имеет гамма-распределение с параметрами α и δ. Параметры k,α и δ подобраны так, чтобы величина $k + Y$ имела такие же первые три момента, что и S. Отметим, что $k + Y$ — это случайная величина Y, которая имеет простое гамма-распределение, смещенная на положительную или отрицательную величину k. Одна из причин, почему смещенное гамма-распределение дает приближение лучше, чем нормальная аппроксимация, — это положительная асимметрия у смещенного гамма-распределения, которая часто встречается на практике.

Коэффициент асимметрии, β, гамма-распределения с параметрами α и δ равен $2/\sqrt{\alpha}$.

Приравнивая коэффициенты асимметрии, средние значения и дисперсии S и $k + Y$, получим следующие формулы:

$$\beta = 2/\sqrt{\alpha}$$

$$\sigma^2 = \alpha/\delta^2$$

$$\mu = k + \alpha/\delta$$

из которых α, δ и затем k могут быть найдены через известные величины: β, σ^2, μ.

Основание для аппроксимации распределения S смещенным гамма, или нормальным, распределением — это то, что значения вероятностей таких как $P(a < k+Y < b)$ могут быть легче найдены, чем $P(a < S < b)$. Вероятности для гамма-распределения легко получить с помощью многих статистических компьютерных пакетов.

В некоторых простейших случаях возможно оценить вероятности для гамма-распределения из таблиц вероятностей для распределения χ^2. Если Y имеет $gamma(\alpha, \delta)$–распределение и 2α–целое число, то $2\delta Y$

имеет $\chi^2_{2\alpha}$–распределение. Это свойство может использоваться, даже если 2α не является целым числом, т.к. можно интерполировать между соседними целыми числами.

§5 Модель индивидуального риска

Согласно этой модели, рассматривается портфель, состоящий из фиксированного числа рисков. Это предполагает следующее:

- эти риски независимы
- величины исков по данным рискам не являются одинаково распределенными случайными величинами
- число рисков не изменяется в течение всего периода страхования.

Как и прежде, суммарных иск по данному портфелю обозначим за S. Таким образом:

$$S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$$

где Y_j обозначает величину иска по j-му риску и n обозначает число рисков. Возможно, что по некоторым искам не предъявлено ни одного иска. Следовательно, некоторые наблюдаемые величины из $\{Y_j\}_{j=1}^n$ могут быть равны нулю.

Для каждого риска сделаем следующие предположения:

– количество исков по j-му риску, N_j, равно 0 или 1 (6.3)

– вероятность возникновения иска по j-му риску равна q_j (6.3)

Если по j-му риску предъявлен иск, то величину иска обозначим за X_j. Пусть $F_j(x), \mu_j$ и σ_j^2 обозначают функцию распределения, среднее и дисперсию X_j соответственно.
Предположение (§5) весьма ограничивающее. Это означает, что по каждому риску может быть предъявлен максимум один иск. Эта модель включает в себя такие риски, как одногодичное страхование, но не включает многие другие распространенные типа страхования. Например, при страхование жилищного имущества нет ограничений на число предъявленных исков за год.

Между моделью коллективного риска и моделью индивидуального риска существуют три важных различия:

(1) Количество рисков в портфеле определено по-разному. В модели коллективного риска нет необходимости определять это число, так как оно фиксировано в течение всего периода страхования (но не тогда, когда предполагается, что $N \sim b(n,q)$).

(2) Число исков по каждому индивидуальному риску ограничено. В модели индивидуального риска это число неограничено.

(3) Предполагается, что индивидуальные риски независимы. В модели коллективного риска независимыми являются величины индивидуальных исков.

Из предположений (§5) и (§5) следует, что $N_j \sim b(1,q_j)$. Таким образом, распределение Y_j — обобщенное биномиальное, в котором индивидуальные иски распределены как X_j. Из формул (3.3) и (3.3) следует:

$$E[Y_j] = q_j\mu_j \tag{6.3}$$

$$Var[Y_j] = q_j\sigma_j^2 + q_j(1-q_j)\mu_j^2 \tag{6.3}$$

S — сумма n независимых случайных величин, имеющих обобщенное биномиальное распределение. В параграфе 3.4 было замечено, что нет общего результат для распределения такой суммы. Это распределение может быть установлено только тогда, когда обобщенные биномиальные величины одинаково распределены, а также независимы. Можно, хотя и затруднительно, найти функцию распределения S по определенным условиям. Однако, легко найти среднее и дисперсию S.

$$E[S] = E[\sum_{j=1}^{n} Y_j] = \sum_{j=1}^{n} E[Y_j] = \sum_{j=1}^{n} q_j\mu_j \tag{6.3}$$

Предположение о независимости индивидуальных рисков необходимо для:

$$Var[S] = Var[\sum_{j=1}^{n} Y_j] = \sum_{j=1}^{n} Var[Y_j] = \sum_{j=1}^{n}(q_j\sigma_j^2 + q_j(1-q_j)\mu_j^2) \tag{6.3}$$

В случае, когда $\{Y_j\}_{j=1}^{n}$ — последовательность одинаково распределенных, а также независимых, случайных величин, тогда для каждого полиса величины q_j, μ_j и σ_j^2 одинаковы, обозначим их за q, μ и σ^2. Кроме того, $F_j(x)$ не зависит от j, обозначим за $F(x)$. Следовательно, S имеет обобщенное биномиальное распределение с биномиальными параметрами n и q, индивидуальные иски имеют функцию распределения $F(x)$. Этот случай сводится к модели коллективного риска и из (§5), (§5) видно, что:

$$E[S] = nq\mu$$

$$Var[S] = nq\sigma^2 + nq(1-q)\mu^2$$

которые соответствуют (3.3) и (3.3) соответственно.

§6 Параметр изменчивость/неопределенность

6.1 Введение

До сих пор рисковые модели изучались, предполагая, что параметры (а именно моменты и в некоторых случаях даже распределения) числа исков и величины индивидуального иска точно известны. Вообще говоря, эти параметры не известны, но должны быть оценены с помощью подходящих наборов данных. В этом параграфе мы рассмотрим как вводятся модели до того, как их можно будет доопределить, учитывая параметр изменчивости/разброса. Для этого рассмотрим несколько примеров. Большинство, но не все, из этих примеров будут рассматривать разброс в распределении числа исков, т.к. ему уделяется большее внимание в актуарной литературе, чем распределению индивидуальных исков. Все рассматриваемые примеры основываются на том, что число исков имеет распределение Пуассона.

6.2 Неопределенность в неоднородном портфеле

Рассмотрим портфель, содержащий n независимых полисов. Суммарные иски по i-му полису обозначим за S_i, где S_i имеет обобщенное распределение Пуассона с параметрами λ_i и $F(x)$. Будем считать для простоты, что распределение индивидуальных исков, $F(x)$, одинаково для всех полисов. В этом примере распределение индивидуальных исков, т.е. $F(x)$, предполагается известным, но значения параметров Пуассона, λ_i, не известны. Случайные величины λ_i предполагаются независимыми с одинаковым (известным) распределением. Другими словами, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ трактуется как набор независимых одинаково распределенных случайных величин с известным распределением. Это означает, что если полис выбран из портфеля случайным образом, то параметр Пуассона для этого полиса не известен, но можно сделать вероятностные предположения о нем. Например, "вероятность 50%, что значение параметра Пуассона лежит между 3 и 5". Это важно для того, чтобы понять, что параметр Пуассона для выбранного из портфеля полиса – фиксированная величина; проблема состоит в том, что это величина нам не известна.

Пример 6.18 Предположим, что параметры Пуассона для портфеля полисов страхования не известны, но с равной вероятностью могут принимать два значения: 0.1 или 0.3.

(i) Найти среднее и дисперсию (через m_1 и m_2) суммарного иска по выбранному случайным образом из портфеля полису.

(ii) Найти среднее и дисперсию (через m_1, m_2 и n) суммарного иска по всему портфелю.

Пусть данная модель описывает автострахование. Все полисы по всему портфелю были разбиты на группы с учетом таких показателей как: "возраст водителя "тип автомобиля"и даже "статистика предъявленных исков в прошлом". Полисы каждой группы из портфеля имеют идентичные значения по каждому из этих показателей. Однако, существуют некоторые показатели, такие как "способность к вождению которые сложно измерить и поэтому они не могут быть явно учтены. Предполагается, что одни страховщики из данной группы полисов "умелые"водители, а другие — "неумелые"водители. Распределение величины индивидуальных исков для всех водителей из группы одинаковое, но "умелые"водители предъявляют меньше исков (в среднем 0.1 ежегодно), чем "неумелые"водители (в среднем 0.3 в год). Предполагается, что по каким-то данных известно, что страховщик из данной группы с равной вероятностью может быть как "умелым так и "неумелым"водителем, но не известно точно, является ли отдельный страховщик "умелым"или "неумелым"водителем.

Решение Пусть $\lambda_i,\ i = 1, 2, ..., n$ — параметр Пуассона для i-го полиса из портфеля. $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — набор независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых имеет следующее распределение:

$$P(\lambda_i = 0.1) = 0.5$$

$$P(\lambda_i = 0.3) = 0.5$$

Отсюда следует,что:

$$E[\lambda_i] = 0.2$$

$$Var[\lambda_i] = 0.01$$

(i) Моменты S_i могут быть найдены при условии λ_i. Т.к. $S_i|\lambda_i$ имеет прямое обобщенное распределение Пуассона, то, используя формулы (3.2) и (3.2), получим:

$$E[S_i] = E[E[S_i|\lambda_i]] = E[\lambda_i m_1] = 0.2m_1$$

$$Var[S_i] = E[Var[S_i|\lambda_i]] + Var[E[S_i|\lambda_i]] =$$
$$= E[\lambda_i m_2] + Var[\lambda_i m_1] = 0.2m_2 + 0.01m_1^2$$

(ii) Случайные величины $\{S_i\}_{i=1}^n$ – независимые и одинаково распределенные, каждая с распределением, данным в пункте (i). Следовательно, используя полученные результаты из пункта (i), получим:

$$E\left[\sum_{i=1}^n S_i\right] = nE[S_i] = 0.2nm_1$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^n S_i\right] = nVar[S_i] = 0.2nm_2 + 0.01nm_1^2$$

Пример 6.19 Пусть параметры Пуассона имеют гамма-распределение с параметрами α и δ. Найти распределение числа исков по полису, выбранному из портфеля случайным образом.

Решение Пусть N_i обозначают число исков по i-му полису из страхового портфеля и λ_i–их параметры Пуассона. Тогда N_i имеет распределение Пуассона с параметром λ_i, но проблема в том, что (по предположению) значение λ_i нам не известно. А известно — распределение, по которому был выбран параметр λ_i. В итоге, задача может быть поставлена следующим образом:

Учитывая, что:

$$N_i|\lambda_i \sim P(\lambda_i) \quad \text{и} \quad \lambda_i \sim G(\alpha, \delta)$$

найдем безусловное распределение N_i.

Эта задача можно решить, избавляясь от условий стандартным способом:

Для $x = 0, 1, 2, ...$

$$P(N_i = x) = \int_0^\infty \exp\{-\lambda\}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\exp\{-\delta\lambda\}d\lambda =$$

$$= \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)x!}\int_0^\infty \exp\{-\lambda(\delta+1)\}\lambda^{x+\alpha-1}d\lambda$$

Вычислим интеграл, сравнив подынтегральную функцию с плотностью гамма-распределения,и получим, что:

$$P(N_i = x) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)x!}\frac{\Gamma(x+\alpha)}{(\delta+1)^{x+\alpha}}$$

Последнее равенство показывает, что безусловное распределение N_i — отрицательное биномиальное с параметрами α и $\delta/(\delta+1)$.

6.3 Изменчивость в однородном портфеле

Теперь рассмотрим другой пример. Пусть, как и раньше, страховой портфель состоит из n полисов. Суммарный иск по каждому отдельному полису имеет обобщенное распределение Пуассона с параметрами λ и $F(x)$. Эти параметры одинаковы для всех полисов в портфеле. Если значение λ известно, то суммарные иски по различным полисам будут независимых величинами. Предположим, что значение λ не известно, возможно, потому что это значение изменяется от года к году, но есть некоторый вероятностный признак, что значение λ будет находиться в данном диапазоне. Так же как и в предыдущем примере, предположим для простоты, что нам известны моменты и распределение индивидуальных исков, т.е. $F(x)$. Неизвестность значения λ можно представить, как случайную величину λ с известным распределением.

Пример 6.20 Пусть параметр Пуассона, λ, принимает два значения 0.1 или 0.3 с приблизительно одинаковой вероятностью.

(i) Найти среднее и дисперсию (через m_1 и m_2) суммарного иска по выбранному случайным образом из портфеля полису.

(ii) Найти среднее и дисперсию (через m_1, m_2 и n) суммарного иска по всему портфелю.

Решение Используя те же обозначения, что и раньше, пусть S_i обозначает суммарный иск по i-му полису из портфеля. Тогда задача ставится следующим образом:

Случайные величины $\{S_i|\lambda\}_{i=1}^n$ независимые и одинаково распределенные, каждая из которых имеет обобщенное распределение Пуассона с параметрами λ и $F(x)$. Случайная величина λ имеет следующее распределение:

$$P(\lambda = 0.1) = 0.5$$

$$P(\lambda = 0.3) = 0.5$$

(i) При условии λ

$$E[S_i] = E[E[S_i|\lambda]] = E[\lambda m_1] = 0.2m_1$$

$$Var[S_i] = E[Var[S_i|\lambda]] + Var[E[S_i|\lambda]] =$$
$$= E[\lambda m_2] + Var[\lambda m_1] = 0.2m_2 + 0.01m_1^2$$

(ii)

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = nE[S_1] = 0.2nm_1 \qquad \text{(т.к. } \{S_i\}_{i=1}^{n} \text{ одинаково распределены)}$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = E\left[Var\left[\sum_{i=1}^{n} S_i|\lambda\right]\right] + Var\left[E\left[\sum_{i=1}^{n} S_i|\lambda\right]\right] =$$
$$= E[n\lambda m_2] + Var[n\lambda m_1] = 0.2nm_2 + 0.01n^2m_1^2$$

Полезно сравнить результаты с прошлыми результатами Примера 6.19. Значения среднего и дисперсии, когда рассматривается отдельно каждый полис (пункт (i)), во двух случаях одинаковы. Различия происходят, когда рассматривают более одного полиса. В этом случае второй пример дает большую дисперсию. Важно понять разницу (а также сходство) между двумя примерами. На практике второй пример может быть применен, если рассматривать полисы портфеля страхования зданий некоторой области. Число исков может зависеть, наряду с другими факторами, от погодных условий в течение года; необычно большое число ураганов может привести к большому ожидаемому числу исков (т.е. большое значение λ) для всех полисов вместе.

6.4 Изменчивость числа исков и величины исков и параметр неопределенности

Этот параграф содержит ещё два примера. Первый — весьма сложный пример, включающий в себя неопределенность как числа исков, так и величин исков.

Пример 6.21 Страховая компания моделирует иски, касающиеся компенсации ущерба при возникновения урагана, согласно полисам страхования имущества, используя следующие предположения.

Число ураганов ежегодно, K, по предположению имеет распределение Пуассона с параметром λ.

Число исков за i-ый ураган, N_i, $i = 1,2,...,K$, по предположению имеет распределение Пуассона с параметром Θ_i.

Пусть параметры Θ_i, $i = 1,2,...,K$, независимые и одинаково распределенные случайные величины, с $E[\Theta_i] = n$ и $Var[\Theta_i] = s_1^2$.

Величина j-го иска за i-ый ураган,X_{ij}, $j = 1,2,...,N_i$, имеет логнормальное распределение с параметрами μ_i и σ, где σ считается известной величиной. Средние значения величин исков,$\Lambda_i = \exp(\mu_i + \sigma^2/2)$, по предположению являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами со средним p и дисперсией s_2^2.

Также предположим, что Θ_i и Λ_i независимы.

(i) Показать, что $E[X_{ij}] = p$ и $Var[X_{ij}] = \exp\{\sigma^2\}(p^2 + s_2^2) - p^2$.

(ii) Пусть S_i обозначает суммарный иск в следствии i-го урагана, так что случайная величина $S_i|\{\Theta_i, \Lambda_i\}$ имеет обобщенное распределение Пуассона.
Показать, что $E[S_i] = np$ и $Var[S_i] = (p^2+s_2^2)(n^2+s_1^2+n\exp\{\sigma^2\})-n^2p^2$.

(iii) Найти выражение для среднего и дисперсии ежегодного суммарного иска в следствии всех произошедших ураганов.

Решение

(i)

$$E[X_{ij}] = E[E[X_{ij}|\Lambda_i]] = E[\Lambda_i] = p$$
$$Var[X_{ij}] = E[Var[X_{ij}|\Lambda_i]] + Var[E[X_{ij}|\Lambda_i]] =$$
$$= E[\Lambda_i^2(\exp\{\sigma^2\} - 1)] + Var[\Lambda_i] =$$
$$= (p^2 + s_2^2)(\exp\{\sigma^2\} - 1) + s_2^2 =$$
$$= (p^2 + s_2^2)\exp\{\sigma^2\} - p^2$$

(ii)

$$E[S_i] = E[E[S_i|\Theta_i, \Lambda_i]] = E[\Theta_i\Lambda_i] = np$$

т.к. Θ_i и Λ_i независимы.

Т.к. $S_i|\{\Theta_i, \Lambda_i\}$ имеет обобщенное распределение Пуассона, то:

$$Var[S_i|\Theta_i, \Lambda_i] = \Theta_i E[X_{ij}^2|\Lambda_i] = \Theta_i(\Lambda_i \exp\{\sigma^2\})$$

и тогда

$$E[Var[S_i|\Theta_i, \Lambda_i]] = n(p^2 + s_2^2)\exp\{\sigma^2\}$$

А также

$$Var[E[S_i|\Theta_i, \Lambda_i]] = Var[\Theta_i \Lambda_i] = E[\Theta_i^2 \Lambda_i^2] - n^2 p^2 =$$

$$= (n^2 + s_1^2)(p^2 + s_2^2) - n^2 p^2$$

Объединяя последние два результата, получим:

$$Var[S_i] = (n^2 + s_1^2)(p^2 + s_2^2) - n^2 p^2 + n(p^2 + s_2^2)\exp\{\sigma^2\}$$

(iii) Пусть R – случайная величина, обозначающая ежегодный суммарный иск в следствии всех произошедших ураганов. Тогда R может быть представлена следующим образом:

$$R = \sum_{i=1}^{K} S_i$$

где K имеет распределение Пуассона и случайные величины $\{S_i\}$ независимые и одинаково распределенные. Следовательно, R имеет распределение Пуассона и

$$E[R] = \lambda E[S_i] = \lambda np$$

$$Var[R] = \lambda E[S_i^2] = \lambda(Var[S_i] + E[S_i]^2) =$$

$$= \lambda(p^2 + s_2^2)(n^2 + s_1^2 + n\exp\{\sigma^2\})$$

Пример 6.22 Каждый год страховая компания продает большое число полисов страхования жилищного имущества, ежегодная премия по каждому из которых равна £80. Ежегодный суммарный иск по каждому полису имеет обобщенное распределение Пуассона; параметр Пуассона равен 0.4 и величины индивидуальных исков имеют гамма-распределение с параметрами α и λ. Расходы, включенные в выплаты по иску, представляют собой случайную величину, равномерно распределенную между £50 и £b ($>$ £50). Величина расходов не зависит от величины иска, связанного с этими расходами. Случайная величина S представляет общий суммарный иск вместе с расходами за один год по данному портфелю страхования. Можно предположить, что S имеет приблизительно нормальное распределение.

(i) Положим, что

$$\alpha = 1; \quad \lambda = 0.01; \quad b = 100$$

Показать, что компания должна продать по крайней мере 884 полиса в год, чтобы быть хотя бы на 99% уверенной, что величина полученных премий превысит величину исков и расходов за год.

(ii) Предположим, что величины α, λ и b не известны точно, но могут принимать значения из заданных диапазонов:

$$0.95 \leq \alpha \leq 1.05; \quad 0.009 \leq \lambda \leq 0.011; \quad 90 \leq b \leq 110$$

Предполагая, что α, λ и b принимают наихудшие (для страховой компании) значения, найти число полисов, которое должна продать страховая компания, чтобы быть по крайней мере на 99% уверенной, что величина полученных премий превысит величину исков и расходов за год.

Решение Пусть X_i — величина i-го иска и Y_i —величина соответствующих расходов. Пусть N — общее число исков по всему страховому портфелю и пусть n — число полисов в этом портфеле. Тогда N имеет распределение Пуассона с параметром $0.4n$ и S можно записать так:

$$S = \sum_{i=1}^{N} (X_i + Y_i)$$

где $\{X_i + Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, независимых от N. Из этого можно заключить, что S имеет обобщенное распределение Пуассона, где $(X_i + Y_i)$ представляет "величину i-го индивидуального иска". Используя известные формулы, можем записать выражения для моментов величины S:

$$E[S] = 0.4nE[X_i + Y_i]$$

$$Var[S] = 0.4nE[(X_i + Y_i)^2] =$$

$$= 0.4n(E[X_i^2] + 2E[X_iY_i] + E[Y_i^2])$$

Записывая моменты X_i и Y_i через α, λ и b, получим:

$$E[X_i] = \alpha/\lambda \qquad E[Y_i] = (b + 50)/2$$

$$E[X_i^2] = \alpha(\alpha + 1)/\lambda^2 \qquad E[Y_i^2] = (b^2 + 50b + 2500)/3$$

$$E[X_iY_i] = E[X_i]E[Y_i]$$

Последнее равенство следует из независимости X_i и Y_i.

(i) Положим

$$\alpha = 1; \quad \lambda = 0.01; \quad b = 100$$

Тогда можно записать

$$E[S] = 70n \quad \text{и} \quad Var[S] = 127.80^2 n$$

Следовательно, S имеет приблизительно нормальное распределение со средним значением $70n$ и стандартным отклонением $127.80\sqrt{n}$. Величина полученных премий равна $80n$. Тогда наименьшее возможное значение n найдем из условия:

$$P(S < 80n) \geq 0.99$$

Приводя к нормальному распределению стандартным способом, получим:

$$P\left[\frac{(S - 70n)}{127.80\sqrt{n}} < \frac{(80n - 70n)}{127.80\sqrt{n}}\right] \geq 0.99$$

Для стандартного нормального распределения 99-я процентиль равна 2.326. Таким образом, получим выражение для n:

$$\frac{(80n - 70n)}{127.80\sqrt{n}} \geq 2.326$$

следовательно

$$n \geq 883.7 \qquad (\text{или } n \geq 884, \text{ округляя до целого числа сверху}).$$

(ii) Для страховой компании наихудшая комбинация значений для α, λ и b — это комбинация, при которой $E[S]$ и $Var[S]$ принимают максимальные значения. Для того, чтобы это увидеть, предположим, что μ и σ обозначают среднее и стандартное отклонение величины суммарного иска и расходов по каждому полису соответственно. Следовательно:

$$E[S] = n\mu \qquad \text{и} \qquad Var[S] = n\sigma^2$$

Аналогично следуя всем шагам из пункта (i), получим выражение для n:

$$\frac{(80 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \geq 2.326$$

Таким образом:

$$n \geq [2.326\sigma/(80 - \mu)]^2$$

Следовательно, наибольшее значение n получается при максимальных значениях μ и σ (при условии, что максимальное значение μ меньше 80). Теперь заметим, что

$$\mu = 0.4E[X_i + Y_i] \qquad \text{и} \qquad \sigma^2 = 0.4E[(X_i + Y_i)^2]$$

Из формул (данных выше) для моментов X_i и Y_i, μ и σ принимают наибольшие значения, когда α и b принимают максимально возможные значения, а λ — минимально возможное, т.е. когда

$$\alpha = 1.05; \qquad \lambda = 0.009; \qquad b = 110$$

Этот набор значений дает следующие результаты для μ и σ:

$$\mu = 78.67 \qquad \text{и} \qquad \sigma = 144.14$$

Подставляя эти значения в выражение для n, получим, что если n будет равно не меньше, чем 63,546, то страховая компания будет уверена, по крайней мере на 99%, что величина полученных премий превысит величину исков и расходов за год.

§7 Вопросы студентам

В1 Модели индивидуального и коллективного риска кажутся очень похожими. Какие основные отличия между ними?

О1 Обе модели в основном похожи. Главным отличием является то, что модель индивидуального риска рассматривает каждый полис, тогда как модель коллективного риска рассматривает отдельно каждый иск.

В2 Вы получили общие формулы для среднего и дисперсии суммарного иска в модели коллективного риска. Существует ли похожая формула для величины асимметрии?

О2 Да. Вот она:

$$skew[S] = E[N]skew[X] + 3Var[N]E[X]Var[X] + skew[N](E[X])^3$$

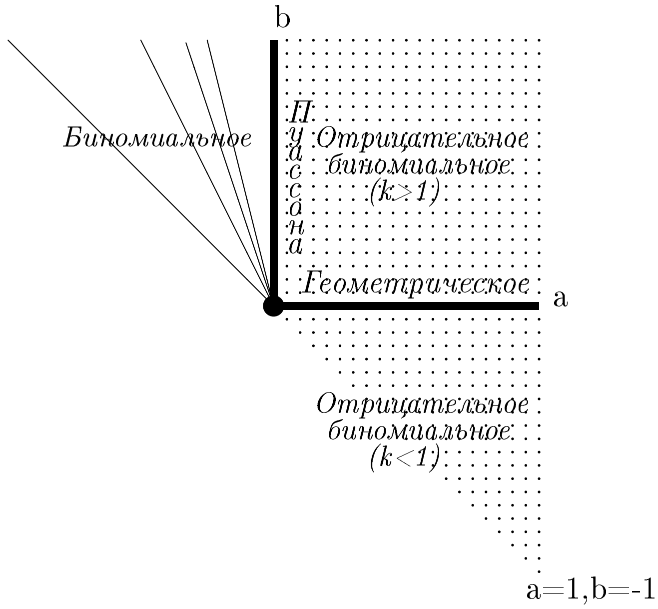
Но для экзамена вы не обязаны её знать.

В3 Есть ли ещё какие-нибудь распределения, которые можно вычислить с помощью итерационной формулы?

О3 Существует ещё несколько распределений, вероятностные функции которых могут быть выражены в итерационной форме. Однако, дискретные распределения, которые можно вычислить, используя итерационную формулу, приведенную здесь, должны быть распределением Пуассона, отрицательным биномиальным или биномиальным распределением. (Геометрическое распределение — это частный случай отрицательного биномиального распределения при $k = 1$.)

Диаграмма, приведенная ниже, показывает значения a и b, для которых распределения удовлетворяют итерационной формуле, вместе с соответствующими распределениями. Подходящие распределения обозначены черными линиями и заштрихованной областью. Начало координат соответствует "вырожденному распределению которое всегда принимает значение ноль. Незаштрихованные области соответствуют значениям a и b, которые не дают подходящую вероятностную функцию (например, когда формула дает отрицательное значение или когда сумма вероятностей не сходится). Сплошная линия с наклонными линиями соответствуют биномиальному распределению с $n = 1,\ n = 2, \ldots$

в зависимости от наклона. Чем больше n, тем ближе наклонные линии к вертикальной прямой, соответствующей распределению Пуассона.



В4 Применяются ли эти рекурсивные формулы на практике?

О4 Да, они применяются для вычисления вероятностей распределения суммарного иска на компьютерах. Однако, существует одна проблема, которая может возникнуть, когда размер индивидуального иска может принимать очень много различных значений. Рекурсивный тип формулы означает, что любые небольшие ошибки округления, которые возникают, имеют тенденцию к увеличению на каждом шаге вычисления. Это может привести к катастрофическому результату. Так что вы должны удостовериться, что арифметика, используемая вашим компьютером, достаточно точна (например, точность до 15 знаков), и вы должны проверять, что вычисляемые вероятности принимают корректные значения (в сумме дают единицу), и что среднее значение общего распределения принимает корректное значение.

В5 Как подобрать хи-квадрат вероятности для смещенного гамма-распределения, когда они не принимают значения,

близкие к 5%, 1% и т.д.?

О5 Если число степеней свободы достаточно велико, вы можете аппроксимировать хи-квадрат распределение нормальным распределением; т.е. $\chi_n^2 \sim N(n, 2n)$.

В6 Если мы должны использовать нормальную аппроксимацию в случае, описанном в предыдущем вопросе, почему мы сразу не применяем нормальное распределение?

О6 Подбор подходящего смещенного гамма-распределения в сущности растягивает и сжимает исходное распределение так, чтобы их асимметрия уменьшалась. Окончательное распределение является почти совсем симметричным, так что нормальная аппроксимация преобразованного распределения более точна.

В7 К какому распределению приближается смещенное гамма-распределение, когда асимметрия слишком мала?

О7 Если параметр k в смещенном гамма-распределении стремится к $-\infty$, при постоянных среднем и дисперсии исходного распределения, асимметрия стремится к нулю и распределение приближается к нормальному распределению.

В8 Действительно ли обобщенные распределения отличны от "исходных или они — это только сложные способ представить "исходные"распределения.

О8 Вообще говоря, обобщенное распределение — это распределение, отличающееся от любого стандартного распределения, т.е. не являются лишь сложным представлением простого распределения.

7.1 Подсказки для ответов на вопросы

1. Вопросы в этой теме главным образом алгебраические.

2. Отметим, что предполагается, что вы способны воспроизвести все доказательства из данной главы.

3. Значения величин, представленных в статистических экспериментах, часто представляют собой вещественные числа, которые имеют измерения, например, длины могут быть выражены в метрах. Как например в физических формулах, уравнения в статистике основываются на таких величинах, которые должны быть согласованы

с размерностью. Это правило иногда используется для проверки сложных выражений или для помощи в запоминании формул.

Например, если вы измеряете длину в единицах L (например, в метрах), то:

- все вероятности должны быть безразмерными, т.е. L^0
- среднее значение и среднеквадратичное отклонение распределения должны быть иметь ту же размерность, что и измеряемая величина, т.е. L
- дисперсия должна иметь размерность в квадрате, т.е. L^2

Пример 6.23 Если обобщенная случайная величина $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$, то дисперсия равна

- (a) $Var[S] = E[N]Var[X] + Var[N](E[X])^2$ или
- (b) $Var[S] = (E[N])^2 Var[X] + Var[N]E[X]$?

Решение N — это счетчик, поэтому должен быть безразмерным. Величины X и S выражены в денежных единицах, в £ скажем. Проверим размерность двух представленных альтернатив:

- (a) $£^2 = £^0 £^2 + £^0 £^2 \qquad \checkmark$
- (b) $£^2 = £^0 £^2 + £^0 £^1 \qquad \times$

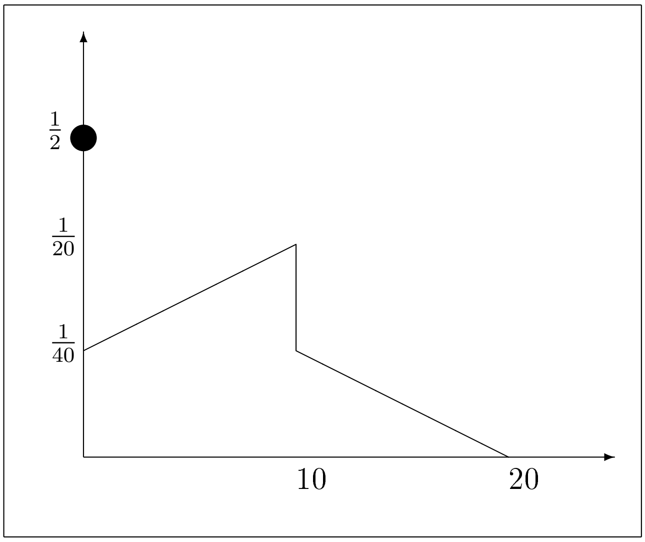
Таким образом, первая формула верная.

§8 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 5.1

Если $N = 0$, то $S = 0$. Тогда имеет "точечную"вероятность того, что $S = 0$.
Если $N = 1$, то S имеет $U(0, 10)$–распределение. Это происходит с вероятностью $1/4$.
Если $N = 2$, то S — есть сумма двух независимых $U(0, 10)$–распределений. Это распределение имеет форму симметричного треугольника на интервале (0,20).
Объединяя все это, мы получим общее распределение, график которого

представлен ниже:



Решение 5.2

1. $E[t^S]$ — определение производящей функции вероятностей S.

2. Вместо S подставляем $X_1 + X_2 + ... + X_N$.

3. Следующий шаг доказательства получается, учитывая всевозможные значения N, т.е.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E[t^{X_1+X_2+...+X_N}|N=n]P(N=n)$$

что является суммой математических ожиданий при $N = n$, умноженных на вероятность $P(N = n)$.

4. Следующий шаг получается разложением на множители математических ожиданий, поскольку X_i не зависимы.

5. Далее, поскольку X_i одинаково распределены, получаем, что $E[t^{X_i}]$ – это производящая функция вероятностей случайной величины X, которая имеет то же распределение, что и X_i.

6. Следующее действие получается из определения $E[(G_X(t))^N]$, выписанного полностью:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(G_X(t))^n P(N=n)$$

7. $E[(G_X(t))^N]$ — это определение производящей функции вероятностей величины N, но вместо t подставили $G_X(t)$. Следовательно, получили $G_N(G_X(t))$.

Решение 5.3

Используя вторую формулу:

$$M_S(t) = G_N(M_X(t)) = \exp(\lambda(M_X(t) - 1)) = \exp\left(\lambda\left[\left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha} - 1\right]\right)$$

Решение 5.4

Мы имеем:

$$G_N(t) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)t}\right)^k \quad \text{и} \quad G_X(t) = (1 - q + qt)^m$$

Объединяя это, получим:

$$G_S(t) = G_N(G_X(t)) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)(1 - q + qt)^m}\right)^k$$

Будьте внимательны. Различайте правильно p и q.

Решение 5.5

При условии всех возможных значений N, получаем:

$$Var[S] = E[Var[S|N]] + Var[E[S|N]] =$$

$$= E[Var[X_1 + X_2 + ...X_N|N]] + Var[E[X_1 + X_2 + ...X_N|N]] =$$

$$= E[NVar[X]] + Var[NE[X]] =$$

$$= Var[X]E[N] + (E[X])^2 Var[N]$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что $Var[X]$ и $E[X]$ — это константы в выражениях $E[NVar[X]]$ и $Var[NE[X]]$.

Решение 5.6

Используя формулу из таблицы для производящей функции моментов обобщенного геометрического распределения, получим:

$$\frac{p}{1 - qM_X(t)} = \frac{p}{1 - q\beta/(\beta - t)}$$

Решение 5.7

Используем общие формулы:

$$E[S] = E[N]E[X] = mpm_1$$

и

$$Var[S] = E[N]Var[X] + Var[N](E[X])^2 =$$

$$= mp(m_2 - m_1^2) + mpqm_1^2 = mpm_2 - mp^2m_1^2$$

Решение 5.8

Производящая функция моментов обобщенного распределения Пуассона:

$$M_S(t) = e^{\lambda[M_X(t)-1]}$$

Тогда производящая функция семиинвариантов:

$$K_S(t) = \log M_S(t) = \lambda[M_X(t) - 1]$$

Дифференцируя по t, получим:

$$K'_S(t) = \lambda M'_X(t)$$

Дифференцируем ещё раз по t:

$$K''_S(t) = \lambda M''_X(t)$$

И ещё раз дифференцируем по t:

$$K'''_S(t) = \lambda M'''_X(t)$$

Положим $t = 0$:

$$skew[S] = K'''_S(0) = \lambda m_3$$

Решение 5.9

Производящая функция семиинвариантов:

$$K(t) = \log(q + pM(t))^m = m \log(q + pM(t))$$

Дифференцируем это выражение по t:

$$K'(t) = mpM'(t)[q + pM(t)]^{-1}$$

Дифференцируем снова:

$$K''(t) = mpM''(t)[q + pM(t)]^{-1} - mp^2[M'(t)]^2[q + pM(t)]^{-2}$$

И снова:

$$K'''(t) = mpM'''(t)[q + pM(t)]^{-1} - mp^2M'(t)M''(t)[q + pM(t)]^{-2} +$$
$$+ 2mp^3[M'(t)]^3[q + pM(t)]^{-3} - 2mp^2M'(t)M''(t)[q + pM(t)]^{-2}$$

Положим $t = 0$:

$$K'''(0) = mpm_3 - 3mp^2m_1m_2 + 2mp^3m_1^3$$

Следовательно, коэффициент асимметрии равен:

$$\frac{mpm_3 - 3mp^2m_1m_2 + 2mp^3m_1^3}{[mpm_2 - mp^2m_1^2]^{3/2}}$$

Решение 5.10

Да, при условии, что параметр p в распределении числа исков одинаковый для двух распределений, и что распределения величин индивидуальных исков одинаковы. Если эти условия выполнены, то обобщенное биномиальное распределение обладает свойством аддитивности, т.е. если S_1 имеет обобщенное биномиальное распределение с параметрами m и p, и распределение величины иска имеет производящую функцию моментов $M_X(t)$, и S_2 имеет обобщенное биномиальное распределение с параметрами n и p, и распределение величины иска имеет производящую функцию моментов $M_X(t)$, и S_1 и S_2 независимы, тогда $S_1 + S_2$ также имеет обобщенное биномиальное распределение с параметрами $m+n$ и p, и величина иска имеет распределение с производящей функцией моментов $M_X(t)$. (Вы можете доказать это, используя производящие функции моментов).

Решение 5.11

Пусть $S = S_1 + S_2$. Тогда S имеет обобщенное распределение Пуассона с параметрами 300 и $F(x)$, где

$$F(x) = \frac{1}{3}F_1(x) + \frac{2}{3}F_2(x) = 1 - \frac{1}{3}\exp(-x/\alpha) - \frac{2}{3}\exp(-x/\beta)$$

$F(x)$ — пример смешанного экспоненциального распределения. Мы можем интерпретировать распределение S следующим образом. Число исков имеет распределение Пуассона с параметром 300. С вероятностью 1/3 величина индивидуального иска получается из экспоненциального распределения с параметром α, с вероятностью $2/3$ величина индивидуального иска получается из экспоненциального распределения с параметром β.

Решение 5.12

Итак, мы имеем 5 полисов ("индивидуальные риски"). Тогда $n = 5$.

Компании A, C и D не предъявляли исков. Следовательно: $X_1 = X_3 = X_4 = 0$
Компания B предъявила иск в размере £$2,500$. Следовательно: $X_2 = 2,500$
Компания E предъявила два иска общего размера £$20,000$. Следовательно: $X_5 = 20,000$

Решение 5.13

Вероятность того, что произойдет ровно 5 смертных случаев среди штатных сотрудников, подчиняется биномиальному закону:

$$\binom{500}{5} * 0.005^5 * (1-0.005)^{500-5} =$$

$$= \frac{500*499*498*497*496}{5*4*3*2*1}(0.005)^5(0.995)^{495} = \\ = 0.0667$$

и вероятность того, что произойдет ровно 20 смертей среди числа рабочих, есть:

$$\binom{2,500}{20} * 0.010^{20} * (1-0.010)^{2,500-20} =$$

$$= \frac{2,500*2,499*...*2,481}{20!}(0.010)^{20}(0.990)^{2,480}$$

Таким образом, учитывая, что случаи смерти независимы, общая вероятность равна 0.0035, т.е. 0.35%.

Решение 5.14

X_i имеет следующую функцию вероятностей:

$$X_i = \begin{cases} b & \text{с вероятностью} \quad q \\ 0 & \text{с вероятностью} \quad p \end{cases}$$

Таким образом:

$$E[X_i] = q * b + p * 0 = qb$$

А также:

$$E[X_i^2] = q * b^2 + p * 0^2 = qb^2$$

Тогда:

$$Var[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = b^2q - (bq)^2 = b^2q(1-q)$$

Решение 5.15

Аналогично:

$$E[X_i^3] = q * b^3 + p * 0^3 = qb^3$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} skew[X_i] &= E[X_i^3] - 3E[X_i^2]E[X_i] + 2(E[X_i])^3 = \\ &= b^3q - 3(b^2q)(bq) + 2(bq)^3 = \\ &= b^3q(1-q)(1-2q) \end{aligned}$$

(В качестве альтернативы вы можете вычислить $E[(X_i - \mu)^3]$ непосредственно).

Решение 5.16

Мы имеем:

$$\mu = \frac{5}{0.002} = 2,500$$

$$\sigma^2 = \frac{5}{0.002^2} = 1,250,000$$

Тогда среднее значение и дисперсия величины суммарного иска будут равны:

$$E[S] = 1000 * 2500 * 0.004 = 10,000$$

$$Var[S] = 1000 * [1,250,000 * 0.004 + 2,500^2 * 0.004 * 0.996] = (£5,468)^2$$

Решение 5.17

Мы рассматриваем три иска. Тогда $N = 3$.

Первый иск (предъявленный компанией E в марте) был в размере £8,000. Следовательно: $X_1 = 8,000$

Второй иск (предъявленный компанией B в сентябре) был в размере £2,500. Следовательно: $X_2 = 2,500$

Третий иск (предъявленный компанией E в ноябре) был в размере £12,000. Следовательно: $X_3 = 12,000$

Решение 5.18

Согласно такому договору, если брутто-величина индивидуального иска равна X, тогда нетто-выплаты прямого страховщика равны $D = kX$. Следовательно, производящая функция моментов будет равна:

$$M_D(t) = E[e^{tD}] = E[e^{tkX}] = E[e^{(kt)X}] = M_X(kt)$$

Таким образом, производящая функция моментов величины суммарного иска равна:

$$M_{Snet}(t) = M_N[\log M_D(t)] = e^{\lambda[e^{\log M_D(t)}-1]} = e^{\lambda[M_X(kt)-1]}$$

Решение 5.19

Пусть S обозначает величину суммарного иска до перестрахования. Тогда:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

где X имеет распределение $Pareto(\alpha, \lambda)$ и $\alpha = 3,\ \lambda = 1000$. Таким образом:

$$E[X] = \frac{\lambda}{\alpha - 1} = 500 \qquad \text{и} \qquad Var[X] = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = 750,000$$

Тогда, если параметр Пуассона (значение которого точно не известно) обозначить за μ, то получим:

$$E[S] = 500\mu \qquad \text{и} \qquad Var[S] = \mu E[X^2] = \mu(750,000 + 500^2) = 1,000,000\mu$$

(i) Ожидаемая прибыль страховщика без перестрахования равна разности полученных премий и ожидаемых исков. Но если используется коэффициент нагрузки на премии, равный 0.2, то суммарная премия будет равна $1.2 * 500\mu$, и ожидаемая прибыль страховщика равна $600\mu - 500\mu = 100\mu$.

Теперь рассмотрим результат применения перестрахования. Для каждой случайной величины X_i имеем $X_i = Y_i + Z_i$, где

$$\begin{array}{lll} Y_i = X_i & \text{если } X_i < 1,000 & \text{(распределение} \\ Y_i = 1,000 & \text{если } X_i \geq 1,000 & \text{исков страховщика)} \end{array}$$

и

$$\begin{array}{lll} Z_i = 0 & \text{если } X_i < 1,000 & \text{(распределение} \\ Z_i = X_i - 1,000 & \text{если } X_i \geq 1,000 & \text{исков перестраховщика)} \end{array}$$

Таким образом, для перестраховщика общий суммарный иск представляет следующую случайную величину: $S_R = Z_1 + Z_2 + ... + Z_N$ с обобщенным распределением Пуассона, в котором каждая величина Z_i имеет распределение, данное выше.

Премии для перестраховщика равны $1.3E[S_R]$, где

$$E[S_R] = E[Z]E[N] = \mu E[Z]$$

$$E[Z] = \int\limits_{1,000}^{\infty} (x - 1,000) \frac{3 * 1,000^3}{(1,000 + x)^4} dx$$

Положим $u = x - 1,000$ в этом интеграле:

$$E[Z] = \int\limits_{0}^{\infty} u \frac{3 * 1,000^3}{(2,000 + u)^4} du = \left(\frac{1,000}{2,000}\right)^3 \int\limits_{0}^{\infty} u \frac{3 * 2,000^3}{(2,000 + u)^4} du$$

Последний интеграл — есть математическое ожидание $Pareto(3, 2, 000)$ распределения. Следовательно, можем записать:

$$E[Z] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \frac{2000}{3 - 1} = 125$$

Тогда:

$$E[S_R] = 125\mu$$

Следовательно, премии перестраховщика равны 162.5μ. Итак, ожидаемая прибыль страховщика равна $600\mu - 162.5\mu - E[S - S_R]$, т.к. $S - S_R$ — это величина выплат страховщика по искам в результате перестрахования. Но

$$E[S - S_R] = E[S] - E[S_R] = 375\mu$$

Окончательно получим, что ожидаемая прибыль страховщика равна 62.5μ, и уменьшение (в процентном соотношении) ожидаемой прибыли без применения перестрахования (которая равна 100μ) равно 37.5%.

(ii) Теперь рассмотрим дисперсию прибыли, сначала без перестрахования. Прибыль страховщика равна разности полученных премий с учетом нагрузки и выплат по искам, так что дисперсия прибыли (до перестрахования) равна:

$$Var[S] = 1,000,000\mu$$

Тогда среднеквадратичное отклонение величины прибыли равно $1,000\sqrt{\mu}$.

С учетом перестрахования, прибыль страховщика равна разности нагруженных премий и нетто-выплат по искам. Тогда, если величина суммарных нетто-выплат по искам равна S_I, то дисперсия прибыли равна дисперсии S_I (т.к. другие выражения — константы). Значит:

$$S_I = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$$

имеет ещё одно распределение Пуассона.

Дисперсия S_I равна $Var[S_I] = \mu m_2$, где $m_2 = E[Y^2]$ и

$$E[Y^2] = \int\limits_0^{1,000} x^2 \frac{3*1,000^3}{(1,000+x)^4}dx + \int\limits_{1,000}^{\infty} 1,000^2 \frac{3*1,000^3}{(1,000+x)^4}dx =$$

$$= 3*1,000^3 \int\limits_0^{1,000} \frac{x^2}{(1,000+x)^4}dx + 3*1,000^5 \int\limits_{1,000}^{1,000} \frac{1}{(1,000+x)^4}dx$$

Второй интеграл равен:

$$\left.\frac{(1,000+x)^{-3}}{-3}\right|_{1,000}^{\infty} = \frac{1}{3*2,000^3}$$

Для первого интеграла положим u=1,000+x и получим:

$$\int\limits_{1,000}^{2,000} \frac{(u-1,000)^2}{u^4}du = \left.-\frac{1}{u} + \frac{1,000}{u^2} - \frac{1,000,000}{3u^3}\right|_{1,000}^{2,000} = \frac{1}{24,000}$$

Отсюда получаем $E[Y^2]$:

$$E[Y^2] = \frac{3 * 1,000^3}{24,000} + \frac{3 * 1,000^5}{3 * 2,000^3} = 250,000$$

Окончательный результат: $Var[S_I] = 250,000\mu$, среднеквадратичное отклонение равно $500\sqrt{\mu}$. Таким образом, уменьшение (в процентном соотношении) среднеквадратичного отклонения равно 50%.

Решение 5.20

Для того, чтобы найти вероятности выигрышей за один год, воспользуемся решением предыдущего примера. Единственное отличие состоит в том, что "параметр выигрыша"увеличится в 12 раз, так что: $\lambda = 12,000/15,000$.
Следовательно:

$$p_S(0) = e^{-\lambda} = e^{-12,000/15,000} = 0.4493$$

$$p_S(50) = \lambda p_X(50) p_S(0) = (12,000/15,000) * (15/16) * 0.4493 = 0.3370$$

$$p_S(100) = \frac{\lambda}{2}[p_X(50)p_S(50) + 2p_X(100)p_S(0)] = 0.1488$$

$$p_S(150) = \frac{\lambda}{3}[p_X(50)p_S(100) + 2p_X(100)p_S(50) + 0] = 0.0484$$

Тогда: $P(S \geq 200) = 1 - 0.4493 - 0.3370 - 0.1488 - 0.0484 = 0.0165$.

Итак, вероятности равны:

(a) 44.9% (b) 33.7% (c) 14.9% (d) 4.8% (e) 1.7%

Решение 5.21

Для распределения Пуассона:

$$\frac{p_N(n)}{p_N(n-1)} = \frac{\lambda}{n}$$

Таким образом, $a = 0, \quad b = \lambda$.

Для геометрического распределения (которое является частным случаем биномиального распределения, когда $k = 1$):

$$\frac{p_N(n)}{p_N(n-1)} = pq^n/pq^{n-1} = q$$

Таким образом, $a = q, \quad b = 0$.

Для биномиального распределения:

$$\frac{p_N(n)}{p_N(n-1)} = \frac{\binom{m}{n}p^n q^{m-n}}{\binom{m}{n-1}p^{n-1}q^{m-n+1}} =$$

$$= \frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{(n-1)!(m-n+1)!}{m!}\frac{p}{q} = \left(\frac{m-n+1}{n}\right)\frac{p}{q} =$$

$$= \left(-1 + \frac{m+1}{n}\right)\frac{p}{q}$$

Таким образом, $a = -\frac{p}{q}, \quad b = \frac{(m+1)p}{q}$.

Решение 5.22

Отношение вероятностных функций на двух соседних значениях (для $n = 1, 2, ...$) равно:

$$\frac{p_N(n)}{p_N(n-1)} = \frac{1}{2^{3n+1/2}}\frac{(2n)!}{n!^2}\Big/\frac{1}{2^{3n-2\frac{1}{2}}}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} = \frac{2^{3n-2\frac{1}{2}}}{2^{3n+1/2}}\frac{(2n)!}{(2n-2)!}\frac{(n-1)!^2}{n!^2} =$$

$$= \frac{1}{8} * 2n(2n-1) * \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$$

Получили выражение вида $a + \frac{b}{n}$, где $a = 1/2, \quad b = -1/4$.

Сравнивая эти значения со значениями из таблицы, мы видим, что данное распределение соответствует отрицательному биномиальному распределению (единственное распределение, которое имеет положительное значение a и ненулевое b) с параметрами $p = q = 1/2, \quad k = 1/2$.

(Чтобы проверить, действительно ли это отрицательное биномиальное распределение, мы должны проверить значение $p_N(0)$ и сравнить его с нормирующей постоянной.)

Решение 5.23

Для распределения Пуассона $a = 0, \quad b = \lambda$.
Следовательно:

$$E[N] = \frac{a+b}{1-a} = \frac{0+\lambda}{1-0} = \lambda \quad \checkmark$$

Для отрицательного биномиального распределения $a = q$, $b = (k-1)q$.
Следовательно:

$$E[N] = \frac{a+b}{1-a} = \frac{q+(k-1)q}{1-q} = \frac{kq}{p} \quad \checkmark$$

Для геометрического распределения $a = q, \quad b = 0$.
Следовательно:

$$E[N] = \frac{a+b}{1-a} = \frac{q+0}{1-q} = \frac{q}{p} \quad \checkmark$$

Для биномиального распределения $a = -\frac{p}{q}, \quad b = \frac{(m+1)p}{q}$.
Следовательно:

$$E[N] = \frac{a+b}{1-a} = \left(-\frac{p}{q} + \frac{(m+1)p}{q}\right) \Bigg/ \left(1 + \frac{p}{q}\right) = \frac{mp}{q} \Bigg/ \left(\frac{q+p}{q}\right) = mp \quad \checkmark$$

Решение 5.24

Начнем с того, что

$$G'_N(t) = \left(\frac{a+b}{1-at}\right) G_N(t)$$

Дифференцируя по t, получим:

$$G''_N(t) = \frac{a(a+b)}{(1-at)^2} G_N(t) + \left(\frac{a+b}{1-at}\right) G'_N(t)$$

Положим $t = 1$:

$$G''_N(1) = \frac{a(a+b)}{(1-a)^2} + \left(\frac{a+b}{1-a}\right)^2$$

Используя формулу для выражения дисперсии через производящую функцию вероятностей, упрощая, получим:

$$Var[N] = G''_N(1) + G'_N(1) - [G'_N(1)]^2 =$$

$$= \frac{a(a+b)}{(1-a)^2} + \left(\frac{a+b}{1-a}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{1-a}\right) - \left(\frac{a+b}{1-a}\right)^2 = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

Решение 5.25

Используя рекурсивную формулу, получим:

$$p_S(0) = p^k = 0.4^2 = 0.16$$

$$p_S(1) = q\left(1 + \frac{1}{1}\right) p_X(1)p_S(0) = 0.6 * 2 * 0.4 * 0.16 = 0.0768$$

$$p_S(2) = q\left(1 + \frac{1}{2}\right) p_X(1)p_S(1) + q\left(1 + \frac{2}{2}\right) p_X(2)p_S(0) =$$

$$= 0.6 * \frac{3}{2} * 0.4 * 0.0768 + 0.6 * 2 * 0.6 * 0.16 = 0.1428$$

Решение 5.26

Для распределения Парето с параметрами 4 и 3 получим $m_1 = 1$ и $m_2 = 3$.

(i) Если $\lambda = 10$, используя стандартные формулы, среднее и дисперсия S равны 10 и 30 соответственно. Тогда

$$P(S \le x) \doteqdot P(N(10,30) \le x) = P\left(N(0,1) \le \frac{x-10}{\sqrt{30}}\right) = \Phi\left(\frac{x-10}{5.477}\right)$$

(a) Из Таблицы получаем значение $\Phi(1.645) = 0.95$. Таким образом:

$$\frac{x-10}{5.477} = 1.645$$

Получаем $x = 19.01$.

(b) Т.к. $\Phi(2.326) = 0.99$, аналогично получаем:

$$\frac{x-10}{5.477} = 2.326$$

Находим $x = 22.74$.

(ii) Для $\lambda = 50$ используем тот же самый способ для вычисления значения x. Среднее и дисперсия S равны 50 и 150 соответственно.

(a)

$$\frac{x-50}{\sqrt{150}} = 1.645 \quad \Rightarrow \quad x = 70.15$$

(b)

$$\frac{x-50}{\sqrt{150}} = 2.326 \quad \Rightarrow \quad x = 78.49$$

Решение 5.27

k-ый момент $Gamma(\alpha, \lambda)$-распределения равен:

$$E[X^k] = \int_0^\infty x^k \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda^k} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^k \frac{\lambda^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda^k} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} P(0 < Gamma(\alpha+k, \lambda) < \infty) = \frac{1}{\lambda^k} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$$

Следовательно:

$$skew[X_i] = E[X_i^3] - 3E[X_i^2]E[X_i] + 2E[X_i]^3 =$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha)} - 3\frac{1}{\lambda^2} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} + 2\left[\frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\right]^3 =$$

$$= \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\lambda^3} - 3\frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} \frac{\alpha}{\lambda} + 2\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3 =$$

$$= \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha - 3\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3}{\lambda^3} = \frac{2\alpha}{\lambda^3}$$

Решение 5.28

Сначала вычислим m_3, третий центральный момент величины X_i. Он вычисляется по формуле:

$$E[X^3] = \int_0^\infty x^3 \frac{4 * 3^4}{(3+x)^5} dx$$

Рассмотрим этот интеграл в качестве производящей функции вероятностей обобщенного распределения Парето с параметрами $k = 4$, $\lambda = 3$ и $\alpha = 1$. А также учтем, что:

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(1)\Gamma(4)} \frac{3x^3}{(3+x)^5} dx = 1$$

Таким образом:

$$E[X^3] = \frac{\Gamma(1)\Gamma(4)}{\Gamma(5) * 3} * 4 * 3^4 = 27$$

(i) Если $\lambda = 10$, то уравнения для вычисления параметров смещенного гамма-распределения имеют вид:

$$\frac{2\alpha}{\lambda^3} = 270 \qquad \frac{\alpha}{\lambda^2} = 30 \qquad \frac{\alpha}{\lambda} + k = 10$$

Решая систему из трех уравнений, получим:

$$\alpha = 1.481 \qquad \lambda = 0.222 \qquad k = 3.333$$

Т.к. $2\alpha = 2.962 \doteqdot 3$, то $2\lambda(S - k)$ имеет приближенно χ_3^2–распределение. Тогда

$$P(S \leq x) = P(2\lambda(S - k) \leq 2\lambda(x - k)) \doteqdot$$

$$\doteqdot P(\chi_3^2 \leq 0.444(x - 3.333))$$

(a) Из Таблицы получим $P(\chi_3^2 \leq 7.815) = 0.95$, тогда $0.444(x - 3.333) = 7.815$. Из этого выражения находим значение $x = 20.93$.

(b) Аналогично:

$$P(\chi_3^2 < 11.34) = 0.99$$

Следовательно, $0.444(x - 3.333) = 11.34$ и $x = 28.87$.

(ii) Если $\lambda = 50$, уравнения для вычисления параметров смещенного гамма-распределения имеют вид:

$$\frac{2\alpha}{\lambda^3} = 1350 \qquad \frac{\alpha}{\lambda^2} = 150 \qquad \frac{\alpha}{\lambda} + k = 50$$

Решая систему из трех уравнений, получим:

$$\alpha = 7.407 \qquad \lambda = 0.222 \qquad k = 16.67$$

В этом случае $2\alpha = 14.814$, и значит, распределение $2\lambda(S-k)$ расположено между χ_{14}^2–распределением и χ_{15}^2–распределением. Из Таблицы получим значения:

$$P(\chi_{14}^2 \leq 23.68) = 0.95 \qquad P(\chi_{14}^2 \leq 29.14) = 0.99$$

$$P(\chi_{15}^2 \leq 25.00) = 0.95 \qquad P(\chi_{15}^2 \leq 30.31) = 0.99$$

Используя линейную интерполяцию:

$$P(2\lambda(S - k) \leq 24.75) \doteqdot 0.95 \qquad P(2\lambda(S - k) \leq 30.31) \doteqdot 0.99$$

т.к. $P(S \leq x) \doteqdot P(2\lambda(S-k) \leq 2\lambda(x-k))$, получим:

$$2\lambda(x-k) = 24.75 \quad \Rightarrow \quad x = 72.41$$

и

$$2\lambda(x-k) = 30.31 \quad \Rightarrow \quad x = 84.94$$

Заключение части III

Обобщенное распределение — есть сумма случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин. Конкретные примеры обобщенных распределений включают в себя обобщенное распределение Пуассона, обобщенные биномиальное, отрицательное биномиальное и геометрическое распределения. Для обобщенного распределения можно найти выражения для моментов производящей функции моментов.

Величина суммарного иска для страхового портфеля может быть описана, используя модель индивидуального риска или модель коллективного риска. Модель индивидуального риска рассматривает выплаты по каждому полису (риску). А модель коллективного риска рассматривает выплаты по каждому иску.

Если величина исков принимает дискретные значения, для нахождения вероятностной функции суммарного иска может быть использована рекурсивная формула.

Метод моментов используется для аппроксимации распределения величины суммарного иска нормальным распределением или смещенным гамма-распределением.

Часть IV

Глава 7

Основы теории–Теория разорения

§1 Введение

Учтем, что f(x) мала в окрестности нуля, поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Основные понятия

Условные обозначения

В предыдущей части были изучены суммарные иски, порожденные страховым портфелем в отдельный период времени. В актуарной литературе слово "риск"часто используется вместо фразы ”портфель полисов”. В этой части будут использоваться оба термина, так что под "риском"будет подразумеваться либо отдельный полис, либо совокупность полисов. Здесь мы перейдем к следующему этапу изучения и будем рассматривать иски, порожденные портфелем в последовательные периоды времени. Нам понадобятся некоторые условные обозначения.

$N(t)$	число исков, порожденных портфелем во временном интервале $[0, t]$, для всех $t \geqslant 0$.
X_i	величина i-ого иска, $i = 1, 2, 3, \ldots$
$S(t)$	суммарные иски во временном интервале $[0, t]$, для всех $t \geqslant 0$.

$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин. $\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ и $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ — последовательности случайных величин, для каждой из которых $t \geqslant 0$; другими словами, $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ — случайные процессы.

Легко увидеть, что
$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$
учитывая, что $S(t)$ равно нулю, если $N(t)$ равно нулю. Случайный процесс $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, по определению, известен как процесс суммарных исков для риска. Случайные переменные $N(1)$ и $S(1)$ показывают число исков и суммарные иски соответственно для данного портфеля в первую единицу времени. Эти две случайные величины соотносятся со случайными величинами N и S соответственно, введенными в Главе 3.

Страховщик этого портфеля будет получать премии от держателей полиса. На протяжении всей этой части предполагаем, что премии поступают непрерывно и с постоянной интенсивностью. Пусть c— интенсивность премиального дохода в единицу времени, так что совокупный премиальный доход, полученный в интервал $[0, t]$ равен ct. Кроме того, можно предположить, что c строго положительна.

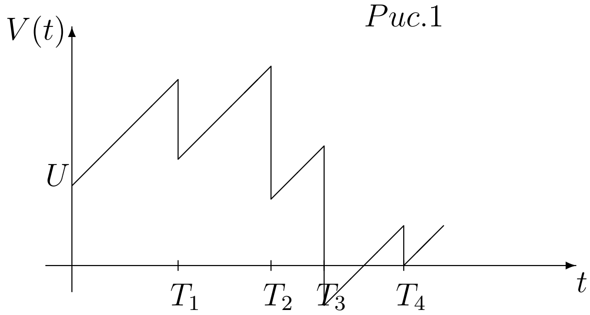
§2 Процесс формирования фонда собственных средств

Допустим, что в момент 0 страховщик имеет некоторую сумму денег, отложенную для данного портфеля. Эта сумма денег называется начальный фонд собственных средств (остаток) и обозначается U. В дальнейшем для краткости будем называть этот фонд капиталом. Всегда можно предположить, что $U \geqslant 0$. Страховщик нуждается в этом начальном остатке, потому что будущие доходы от премий могут быть не достаточны, чтобы покрыть будущие иски. Капитал страховщика в любой будущий момент $t (> 0)$ — это случайная величина, так как его значение зависит от практики выплаты страховых возмещений к моменту времени t. Значение капитала в момент времени t обозначается $U(t)$. Можно записать для $U(t)$ следующую формулу:
$$U(t) = U + ct - S(t)$$
Иными словами, капитал страховщика в момент времени t — это начальный остаток плюс премиальный доход к моменту t минус суммарные иски к этому моменту. Заметим, что начальный остаток и премиальный доход — не случайные величины, так как они определяются до начала процесса риска. Вышеуказанная формула обоснована для $t \geqslant 0$, с учетом

того, что $U(0) = U$. Для данного значения t, $U(t)$ — случайная величина, потому что $S(t)$ — случайная величина. Следовательно, $\{U(t)\}_{t \geqslant 0}$ — случайный процесс, который известен как процесс движения денежных средств или процесс формирования фонда собственных средств.

Рисунок 1 показывает один из возможных результатов такого процесса. Иски происходят в моменты времени T_1, T_2, T_3, и T_4 и в эти моменты капитал непосредственно понижается на величину иска. Между исками капитал возрастает с постоянной интенсивностью c в единицу времени. Модель, используемая для определения капитала страховщика, включает в себя множество упрощений, как и любая другая модель комплексной реальной операции. Некоторые важные упрощения состоят в предположении, что иски оплачиваются сразу, как только происходят, и что капитал страховщика не пускается в оборот для получения процентов. Несмотря на свою простоту, эта модель может дать содержательное понимание математики страховой операции.

*Рис.*1



2.1 Вероятность разорения в непрерывной модели

Из Рисунка 1 видно, что капитал страховщика опускается ниже нуля в результате иска, произошедшего в момент T_3. Говоря общими словами, в тот момент, когда капитал опустится ниже нуля, деньги страховщика иссякнут, и говорят, что наступит разорение. В этой упрощенной модели, страховщик хочет сделать вероятность этого события, то есть вероятность разорения, настолько маленькой, насколько это возможно, или, по крайней мере, ниже некоторой заранее определенной величины. Говоря еще более общим языком, разорение может пониматься в значении банкротства, хотя, на практике, определение, является ли страховая компания банкротом или нет, очень сложная проблема. Другой способ рассмотрения вероятности разорения — это представить ее, как вероятность того, что, в некоторый будущий момент времени, страховой компании будет нужно предоставить большее состояние, чтобы финансировать определенный страховой портфель.

Дадим более точное определение. Следующие две вероятности определяются так:

$$\psi(U) = P[U(t) < 0, \text{для некоторых } t, 0 < t < \infty]$$

$$\psi(U,t) = P[U(\tau) < 0, \text{для некоторых } \tau, 0 < \tau < t].$$

$\psi(U)$ — это вероятность окончательного разорения (с данным начальным остатком U) и $\psi(U,t)$ — вероятность разорения в момент времени t (с данным начальным остатком U). К этим вероятностям иногда относятся, как к вероятности разорения за неограниченный период времени и вероятности разорения за ограниченный период времени. Существует несколько важных логических отношений между этими вероятностями для $0 < t_1 \leqslant t_2 < \infty$ и для $0 \leqslant U_1 \leqslant U_2$:

$$\psi(U_2,t) \leqslant \psi(U_1,t) \tag{7.0}$$

$$\psi(U_2) \leqslant \psi(U_1) \tag{7.0}$$

$$\psi(U,t_1) \leqslant \psi(U,t_2) \leqslant \psi(U) \tag{7.0}$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi(U,t) = \psi(U) \tag{7.0}$$

Интуитивные объяснения для этих формул:

Для большего начального остатка менее вероятно, что разорение произойдет за конечный период времени, следовательно, (2.1) или за бесконечный период времени, следовательно, (2.1).

Для данного начального остатка U, для более долгого периода рассмотрения наиболее вероятно, что произойдет разорение, отсюда (2.1).

Наконец, вероятность окончательного разорения может быть приблизительно найдена с помощью вероятности разорения за конечный период времени t, при условии, что t достаточно большое, поэтому (2.1).

2.2 Вероятность разорения в дискретной модели

Две вероятности разорения, рассматриваемые до этого момента, являются вероятностями для непрерывной модели, называемые так потому, что они контролируют разорение непрерывно. На практике, может быть возможным (или даже желательным) контролировать разорение только в дискретные интервалы времени.

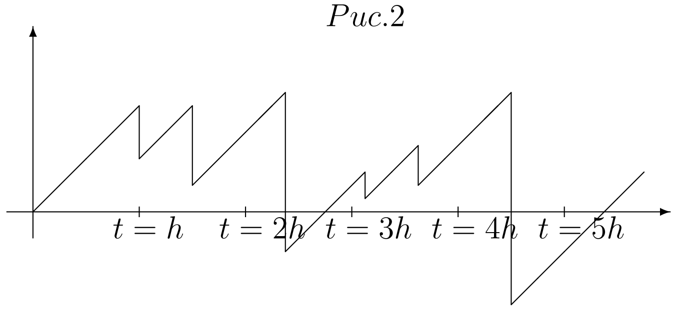
Для данного интервала времени, обозначенного h, определены следующие две вероятности разорения для дискретной модели:

$$\psi_h(U) = P[U(t) < 0, \text{ для некоторых } t, t = h, 2h, 3h, \ldots]$$

$$\psi_h(U,t) = P[U(\tau) < 0, \text{ для некоторых } \tau, \tau = h, 2h, 3h, \ldots, t-h, t].$$

Заметим, что для удобства определения $\psi_h(U,t)$ предполагается, что t кратно h. Рисунок 2 показывает такую же реализацию процесса формирования капитала, как и изображенная на Рисунке 1, но с предположением, что этот процесс контролируется только в дискретные временные интервалы. Черные метки показывают значения процесса в целые временные интервалы (то есть $h = 1$); черные метки вместе с белыми показывают значения процесса в интервалы длинной $\frac{1}{2}$.

*Рис.*2



Из Рисунка 2 можно увидеть, что в дискретных моментах с $h = 1$, для этой реализации процесса разорения не произойдет до момента 5, а для дискретных моментов с $h = \frac{1}{2}$ разорение произойдет (в момент $2\frac{1}{2}$).

Ниже перечислены пять отношений между различными дискретными вероятностями разорения для $0 \leqslant U_1 \leqslant U_2$ и для $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < \infty$. Формулы (2.2), (2.2), (2.2) и (2.2) — дискретные версии формул (2.1), (2.1), (2.1) и (2.1) и их интуитивные объяснения похожи. Интуитивное объяснение формулы (2.2) отображено на Рисунке 2.

$$\psi_h(U_2,t) \leqslant \psi_h(U_1,t) \tag{7.0}$$

$$\psi_h(U_2) \leqslant \psi_h(U_1) \tag{7.0}$$

$$\psi_h(U,t_1) \leqslant \psi_h(U,t_2) \leqslant \psi_h(U) \tag{7.0}$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_h(U,t) = \psi_h(U) \tag{7.0}$$

$$\psi_h(U,t) \leqslant \psi(U) \tag{7.0}$$

Интуитивно ожидается, что следующие два отношения верны, так как вероятность разорения в непрерывной модели можно аппроксимировать вероятностью разорения дискретной модели, с таким же начальным остатком U и временным горизонтом t, при условии, что разорение контролируется достаточно часто, то есть что h достаточно мало.

$$\lim_{h\to 0+} \psi_h(U,t) = \psi(U,t) \tag{7.0}$$

$$\lim_{h\to 0+} \psi_h(U) = \psi(U) \tag{7.0}$$

Формулы (2.2) и (2.2) верны, но их доказательства довольно громоздки и не будут приводиться здесь.

До сих пор не было сделано никаких предположений относительно распределения $S(t)$. Сделав эти предположения, можно получить более детальные результаты, в отличие от очень общих результатов, представленных в этом параграфе. Такие предположения сделаны в следующем разделе.

§3 Пуассоновский и обобщенный пуассоновский процессы

3.1 Введение

В этом разделе будут сделаны некоторые предположения о случайном процессе числа исков $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ и последовательности исковых величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Случайный процесс числа исков может, предположительно, быть пуассоновским процессом, ведущим к обобщенному пуассоновскому процессу $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ для суммарных исков. Предположения, сделанные в этом разделе, распространяются на на всю главу в целом.

3.2 Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс — это пример вычислительного процесса. Здесь нас интересует количество исков, возникающих для какого-либо риска. Так как количество исков подсчитывается с течением времени, случайный процесс числа исков $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ должен удовлетворять следующим условиям:

i) $N(0) = 0$, то есть в момент 0 исков не будет

ii) для любого $t > 0$, $N(t)$ должно иметь целое значение

iii) если $s < t$, то $N(s) \leqslant N(t)$, то есть число исков с течением времени не убывает

iv) если $s < t$, то $N(t) - N(s)$ представляет собой число исков, произошедших во временном интервале (s, t).

Случайный процесс $\{N(t)\}_{t \geqslant 0}$ является пуассоновским процессом с параметром λ, если он удовлетворяет следующим условиям:

i) $N(0) = 0$, и $N(s) \leqslant N(t)$ при $s < t$

ii) $P[N(t+h) = r | N(t) = r] = 1 - \lambda h + o(h)$
$P[N(t+h) = r+1 | N(t) = r] = \lambda h + o(h)$
$P[N(t+h) > r+1 | N(t) = r] = o(h)$

iii) при $s < t$ число исков в интервале $(s, t]$ не зависит от числа исков к моменту s.

Условие (ii) утверждает, что в очень короткий интервал длины h возможное число исков — это только ноль или один. Заметим, что условие (ii) также подразумевает, что число исков в интервале длины h не зависит от того, в какой момент мы этот интервал рассматриваем.

Причина, по которой процесс, удовлетворяющий условиям (i) и (iii) называется пуассоновским процессом, заключается в том, что для фиксированного значения t, случайная величина $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt. Это доказывается следующим образом:

Пусть $p_n(t) = P[N(t) = n]$. Тогда

$$p_n(t) = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (7.0)$$

что может быть доказано выведением и решением дифференциально-разностного уравнения.

Для фиксированного значения $t > 0$ и малого положительного значения h, поставим условия для числа исков в момент t и запишем

$$p_n(t+h) = p_{n-1}(t)[\lambda h + o(h)] + p_n(t)[1 - \lambda h + o(h)] + o(h) =$$

$$= \lambda h p_{n-1}(t) + [1 - \lambda h]p_n(t) + o(h).$$

Таким образом,

$$p_n(t+h) - p_n(t) = \lambda h[p_{n-1}(t) - p_n(t)] + o(h) \qquad (7.0)$$

и это тождество верно для $n = 1, 2, 3, \dots$.

Теперь разделим (3.2) на h и устремим h к нулю сверху, чтобы получить дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)] \tag{7.0}$$

При $n = 0$ тождественный анализ приводит к результату

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda p_0(t) \tag{7.0}$$

Решение для $p_n(t)$ получим с помощью введения производящей функции вероятности $G(s, t)$, определенной как

$$G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n(t)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{d}{dt} p_n(t)$$

Далее умножаем (3.2) на s^n и суммируем по всем значениям n, чтобы получить

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{d}{dt} p_n(t) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n p_{n-1}(t) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n p_n(t).$$

Прибавляем (3.2) к этому тождеству и имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{d}{dt} p_n(t) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n p_{n-1}(t) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n(t),$$

что может быть записано как

$$\frac{d}{dt} G(s,t) = \lambda s G(s,t) - \lambda G(s,t),$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{1}{G(s,t)} \frac{d}{dt} G(s,t) = \lambda(s-1) \tag{7.0}$$

Так как левая часть (3.2) — то же самое, что производная по t от $\log G(s,t)$, (3.2) можно проинтегрировать и найти, что

$$\log G(s,t) = \lambda t(s-1) + c(s),$$

где $c(s)$ — некоторая функция от s. $c(s)$ может быть определена из тех соображений, что при $t = 0$ $p_0(t) = 1$ и $p_n(t) = 0$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, $G(s, 0) = 1$ и $\log G(s, 0) = 0 = c(s)$.

Таким образом,

$$G(s, t) = \exp\{\lambda t(s - 1)\},$$

что является производящей функцией для распределения Пуассона с параметром λt. Так как производящие функции и функции распределения в данном случае должны быть одинаковыми, получим, что $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt.

Изучение пуассоновского процесса завершим рассмотрением распределением времени до начала первого иска и интервалами между исками.

Пусть случайная величина T_1 обозначает время первого иска. Затем, фиксируем переменную t. Если к моменту t не произошло ни одного иска, то $T_1 > t$. Следовательно,

$$P[T_1 > t] = P[N(t) = 0] = \exp\{-\lambda t\}$$

и

$$P[T_1 \leqslant t] = 1 - \exp\{-\lambda t\},$$

то есть T_1 имеет экспоненциальное распределение с параметром λ.

Пусть для $i = 1, 2, 3, \ldots$, случайные величины T_i обозначают время между $(i-1)$-ым и i-ым исками. Тогда

$$P[T_{n+1} > t | \sum_{i=1}^{n} T_i = r] = P[\sum_{i=1}^{n+1} T_i > t + r | \sum_{i=1}^{n} T_i]$$

$$= P[N(t + r) = n | N(r) = n]$$

$$= P[N(t + r) - N(r) = 0 | N(r) = n].$$

Из условия (2.2),

$$P[N(t + r) - N(r) = 0 | N(r) = n] = P[N(t + r) - N(r) = 0].$$

Наконец,

$$P[N(t + r) - N(r) = 0] = P[N(t) = 0] = \exp\{-\lambda t\},$$

так как число исков во временном интервале длины r не зависит от того, в какой момент начинает рассматриваться этот интервал (условие (ii)). Таким образом, интервалы между моментами появления событий также имеют экспоненциальное распределение с параметром λ.

3.3 Обобщенный пуассоновский процесс

В этом разделе пуассоновский процесс для числа исков будет скомбинирован с распределением величины иска, чтобы определить обобщенный пуассоновский процесс для процесса суммарных исков, как сказано в разделе 1.1.

Сделаем несколько важных предположений:

- случайные величины $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимы и одинаково распределены
- случайные величины $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ не зависят от $N(t)$ для всех $t \geqslant 0$
- случайный процесс $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ — это пуассоновский процесс с параметром λ.

Как было показано в разделе 2.2, последнее предположение означает, что для любого $t \geqslant 0$ случайная величина $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt, так что

$$P[N(t) = k] = \exp\{-\lambda t\}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad \text{для } k = 0, 1, 2, \ldots$$

При таких предположениях процесс суммарных исков $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ называется обобщенным пуассоновским процессом с пуассоновским параметром λ. Сравнивая эти предположения с данными из предыдущей части (Разделы 1.3 и 2.2), можно увидеть взаимосвязь между ними: если $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ — обобщенный пуассоновский процесс с параметром λ, то, для фиксированного значения t ($t \geqslant 0$), $S(t)$ имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром λt. (Заметим, что в терминологии есть небольшое изменение: "параметр λ"становится "параметром λt то есть изменение процесса распространяется и на распределение.)

Общую функцию распределения для X_i-ых будем обозначать $F(x)$ и для оставшейся части этой главы предположим, что $F(0) = 0$, так что все иски являются положительными величинами.

Функцию плотности для X_i, если она существует, обозначим $f(x)$ и k-ый момент для X_i в окрестности нуля, если он существует, будем обозначать m_k, так что

$$m_k = E[X_i^k] \text{ для } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Если общая производящая функция моментов для X_i существует, то ее значение в точке r будем обозначать $M_X(r)$.

Так как для фиксированного значения t, $S(t)$ имеет обобщенное пуассоновское распределение, из Части 3 (раздела 2.2) следует, что процесс $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ имеет среднее значение $\lambda t m_1$, дисперсию $\lambda t m_2$, и производящую функцию моментов $M_S(r)$, где

$$M_S(r) = \exp\{\lambda t(M_X(r) - 1)\}$$

Для оставшейся части этой главы сделаем следующее (интуитивно справедливое) предположение, касающееся интенсивности премиального дохода:

$$c > \lambda m_1, \tag{7.0}$$

так что премиальный доход страховщика (в единицу времени) больше, чем ожидаемые исковые затраты (в единицу времени). Иногда c может быть записано как

$$c = (1+\theta)\lambda m_1,$$

где $\theta(> 0)$ — относительная безопасная нагрузка премии.

3.4 Техническая сторона

В следующем разделе нам понадобится технический результат, касающийся $M_X(r)$ (производящей функции моментов распределения величины индивидуального иска), который, для удобства, будет представлен здесь.

До конца этой главы будет действовать предположение, что существует некоторое число γ $(0 < \gamma \leqslant \infty)$, такое что $M_X(r)$ конечно для всех $r > \gamma$ и

$$\lim_{r\to\gamma^-} M_X(r) = \infty \tag{7.0}$$

(Например, если $X_i(s)$ ограничено некоторым конечным значением, то γ будет ∞; если $X_i(s)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром α, то γ будет равно α).

В следующем разделе нам понадобится следующий результат:

$$\lim_{r\to\gamma^-}(\lambda M_X(r) - cr) = \infty \tag{7.0}$$

Если γ конечно, (3.4) сразу следует из (3.4). Теперь можно показать, что (3.4) имеет место при бесконечном γ. Это требует немного больше внимания. Во-первых, зададим положительное число ε, такое что

$$P[X_i > \varepsilon] > 0.$$

Это возможно потому, что все величины исков положительны. Обозначим такую вероятность π. Тогда

$$M_X(r) \geqslant e^{r\varepsilon}\pi.$$

Следовательно,

$$\lim_{r\to\gamma^-}(\lambda M_X(r) - cr) \geqslant \lim_{r\to\gamma^-}(\lambda e^{r\varepsilon}\pi - cr) = \infty.$$

§4 Коэффициент поправки и неравенство Лундберга

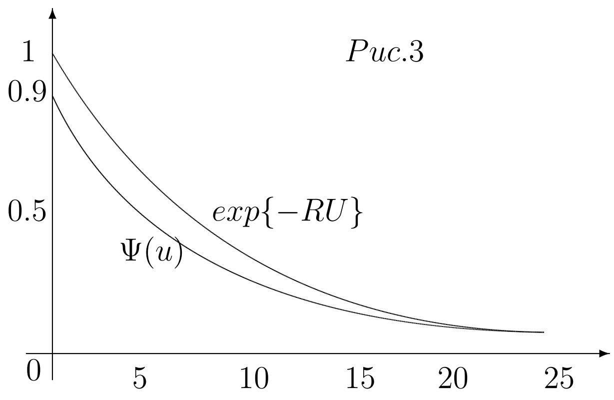
4.1 Неравенство Лундберга

Неравенство Лундберга утверждает, что

$$\psi(U) \leqslant \exp\{-RU\},$$

где U — это начальный остаток страховщика. R — это параметр, связанный с остаточным процессом, известный как коэффициент поправки. Его значение зависит от распределения суммарных исков и интенсивности премиального дохода. До того, как определить R и доказать неравенство Лундберга, проиллюстрируем важность этого результата и некоторые характеристики коэффициента поправки.

На Рисунке 3 изображены графики функций $\exp\{-RU\}$ и $\psi(U)$ для U, когда исковые величины экспоненциально распределены со средним значением 1 и когда премиальный коэффициент нагрузки 10%. (Решение для R будет найдено в разделе 4.2. Формула для $\psi(U)$ дана в разделе 4.) Легко увидеть, что для больших значений U, $\psi(U)$ очень близко к верхней границе, так что $\psi(U) \simeq \exp\{-RU\}$.



В актуарной литературе, $\exp\{-RU\}$ часто используется как приближение $\psi(U)$.

R может интерпретироваться как измерительный риск. Большее значение R будет меньшим значением верхней границы для $\psi(U)$. Следовательно, $\psi(U)$ будет закономерно уменьшаться, когда R будет возрастать. R — это функция от параметров, которые влияют на вероятность разорения, и поведение R, как функции этих параметров может быть исследовано.

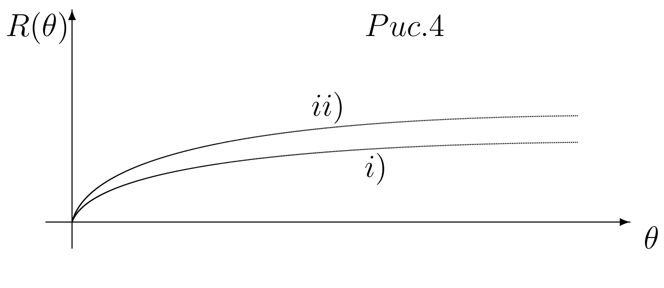


Рисунок 4 показывает график R, как функцию относительной безопасной нагрузки, θ, когда

i) распределение величины иска экспоненциальное со средним значением 10, и

ii) все иски имеют величину 10.

Заметим, что в обоих случаях R — возрастающая функция от θ. Закономерно, что $\psi(U)$ — убывающая функция от θ, и, так как $\psi(U) \simeq \exp\{-RU\}$, любой коэффициент, вызывающий убывание $\psi(U)$, вызывает возрастание R.

Заметим также, что значение R, когда исковые величины экспоненциально распределены, меньше, чем, когда величины исков равны 10. Опять же, такой результат не удивителен. Оба распределения исковых величин имеют одинаковое среднее значение, но экспоненциальное распределение имеет большее непостоянство. Большее непостоянство связано с большим риском, и, следовательно, для экспоненциального распределения закономерно большее значение $\psi(U)$ и меньшее значение R. Этот пример иллюстрирует, что R находится под влиянием относительной безопасной нагрузки и характеристик распределения величины индивидуальных исков. В общем-то, мы определили и ввели R, чтобы объединить все коэффициенты, влияющие на процесс формирования капитала.

4.2 Коэффициент поправки

Процесс формирования капитала зависит от начального остатка, процесса суммарных исков и интенсивности премиального дохода. Коэффициент поправки — это параметр, связанный с процессом формирования капитала, который учитывает два из этих факторов: суммарные иски и премиальный доход. Коэффициент поправки дает меру риска для процесса формирования капитала. Если суммарные иски являются обобщенным пуассоновским процессом, коэффициент поправки определяется в терминах пуассоновского параметра, момента производящей функции величины индивидуального иска и премиального дохода в единицу времени.

Коэффициент поправки, обозначаемый R, определяется как единственный положительный корень уравнения

$$\lambda M_X(r) - \lambda - cr = 0. \tag{3.1}$$

Преобразуем его,

$$\lambda M_X(r) = \lambda + cr. \tag{3.2}$$

Заметим, что уравнение (3.1) подразумевает, что значение коэффициента поправки зависит от пуассоновского параметра, распределения величины индивидуального иска и интенсивности премиального дохода. Однако, записав $c = (1+\theta)\lambda m_1$, получим

$$M_X(r) = 1 + (1+\theta)\lambda m_1 r,$$

так что R не зависит от параметра Пуассона и зависит только от относительной безопасной нагрузки, θ, и от распределения величины индивидуального иска.

Можно показать, что уравнение (3.1) действительно имеет только один положительный корень.

Определим $g(r) = \lambda M_X(r) - \lambda - cr$ и рассмотрим график $g(r)$ на интервале $[0, \gamma]$. Заметим, во-первых, что $g(0) = 0$. Далее, $g(r)$ в нуле — убывающая функция, так как

$$\frac{d}{dr} g(r) = \lambda \frac{d}{dr} M_X(r) - c,$$

так что производная $g(r)$ в точке $r = 0$ равна $\lambda m_1 - c$, что, по предположению меньше нуля (2.8).

Также можно показать, что, если функция $g(r)$ имеет экстремум, то он будет минимумом функции. Функция слабо выпукла в районе нуля. Следовательно, может существовать только один экстремум, так как любой экстремум здесь является минимумом. Чтобы показать, что он существует, заметим из (2.10), что $\lim\limits_{r \to \gamma^-} g(r) = \infty$.

Таким образом, существует единственное положительное число R, удовлетворяющее уравнению (3.1).

Уравнение (3.1) — неявное выражение для R. Для некоторых видов $F(x)$ существует явное решение для R; для других уравнение приходится решать в числах.

Рассмотрим экспоненциальное распределение, где $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$.

Для этого распределения, $M_X(r) = \frac{\alpha}{\alpha - r}$, тогда

$$\lambda + cr = \frac{\lambda\alpha}{\alpha - R}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda\alpha - \lambda R + cR\alpha - cR^2 = \lambda\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad R^2 - (\alpha - \lambda/c)R = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R = \alpha - \lambda/c,$$

так как R — положительный корень уравнения (3.1).

Если $c = (1+\theta)\lambda/\alpha$, то $R = \alpha\theta/(1+\theta)$.

Глава 8

Вероятность разорения

Цели главы

После изучения этой главы вы сможете:

- описать модель развития суммарного иска
- находить и использовать коэффициент поправки, узнаете его свойства
- вычислять вероятность разорения в простых случаях, включая случаи с перестрахованием

§1 Введение

В последней главе мы использовали модель коллективного иска, чтобы рассмотреть суммарный иск S, возникший в течение фиксированного периода времени. S задается равенством $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, где N означает количество исков, произошедших за данный период.

В этой главе мы расширим нашу модель, рассматривая $S(t)$ как функцию времени. Тогда получаем равенство $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$, где $N(t)$ означает количество исков, случившихся до момента времени t. Мы можем использовать эту модель, зависящую от времени, чтобы описать количество наличных средств страховщика и определить особенности вероятности разорения в коротком и долгосрочном периодах.

Теория этой главы очень . В особенности обратите внимание на раздел о результате изменения значений параметров и на раздел о перестраховании.

§2 Развитие суммарного иска, непрерывная и дискретная по времени модели

В данной главе рассматривается изменение величины фонда собственных средств в зависимости от изменения величины суммарного иска.

Мы будем рассматривать две модели, описываемых зависимостью страховых исков от времени. В непрерывной модели ситуация описывается непрерывно. В дискретной модели ситуация описывается исключительно интервалами времени.

Развитие суммарного иска в случае непрерывной модели математически может быть сформулировано следующим образом:

2.1 Развитие суммарного иска (непрерывная по времени модель)

Развитие суммарного иска определяется уравнением:

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad t \geqslant 0$$

Где $U(t)$ – это фонд собственных средств страховщика в момент времени t

u – это начальный фонд собственных средств в момент времени $t = 0$

c – это норма притока (нетто) премий, считается, что премии поступают постоянно

$S(t)$ – это суммарный иск к моменту времени t

Премии и иски считаются нетто,т.е. без учета издержек и премий перестрахования.

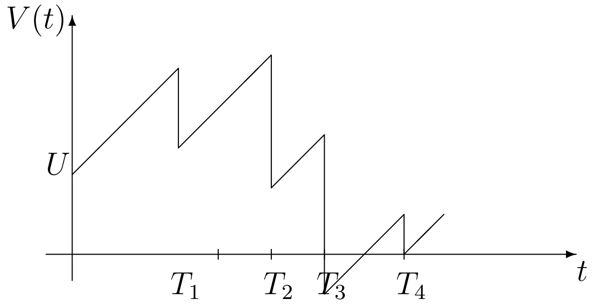
Модель игнорирует проценты на фонд собственных средств.

Пример 8.1 Дайте логическое обоснование уравнению, определяющему развитие суммарного иска.

Решение Фонд собственных средств страховщика $U(t)$ представляет собой нетто наличные средства в момент времени t. Начальный фонд собственных средств обозначен через u, премии поступают постоянно размера c, что означает, что общий доход за период времени t равняется $u+ct$. $S(t)$ обозначает суммарный иск, оплаченный к моменту времени t. Таким образом фонд собственных средств страховщика в момент времени t равняется разности между общим доходом и общим расходом, т.е. $u + ct - S(t)$

Для непрерывной модели $U(t)$ имеет, как показано ниже, пиловидный график, где фонд собственных средств монотонно возрастает , но резко падает каждый раз, когда возникает иск.

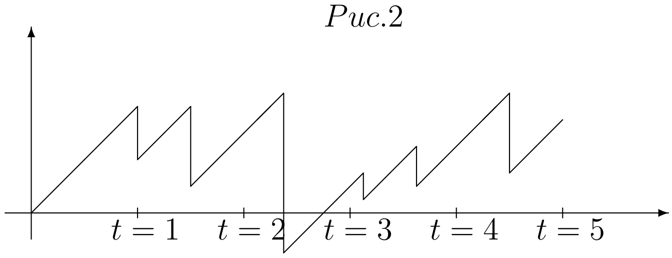
*Рис.*1



Мы будем интересоваться вычислением вероятности разорения, то есть вероятностью того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля. В данном случае страховщик разоряется в момент времени 3.

В соответствующей дискретной модели графика (используются равные интервалы в 1 единицу) разорение не наблюдается в течение наблюдаемого периода[1], поэтому мы не отмечаем, что происходит между точками времени.

*Рис.*2



Вопрос для самоподготовки 8.1. Найдите значения u и c для развития иска, изображеного на непрерывном графике, и проверьте то, что соотношение выполняется при $t = 5$.

§3 Вероятности разорения

В этом параграфе определяется вероятность разорения в бесконечном/конечном и непрерывном/дискретном случаях, формулируется и

[1]Фонд собственных средств падает ниже нуля до того, как страховщик понимает, что он разорен.

объясняется взаимосвязь между различными вероятностями разорения.

Мы будем интересоваться определением вероятности разорения для непрерывной и дискретной модели в случаях конечного и бесконечного времени. Различные вероятности разорения, которые обозначаются ψ (произносится "psi") определяются следующим образом:

3.1 Вероятности разорения (непрерывная модель)

Вероятность разорения в случае конечного времени $\psi(u, t_0)$- это вероятность того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля в какой-то момент времени до t_0, при начальном капитале u:

$$\psi(u, t_0) = P[U(t) < 0 \text{ при некотором } t \leqslant t_0]$$

Вероятность разорения в случае бесконечного времени $\psi(u, t_0)$- это вероятность того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля в какой-то момент времени при начальном фонде собственных средств u:

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ при некотором } t]$$

3.2 Вероятности разорения (дискретная модель)

Вероятность разорения в случае конечного времени $\psi_h(u, t_0)$- это вероятность того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля в какой-то момент времени до t_0, при начальном фонде собственных средств u, и когда используются временные интервалы в h единиц:

$$\psi_h(u, t_0) = P[U(t) < 0 \text{ при некотором } t = h, 2h, 3h, \ldots \text{ и } t \leqslant t_0]$$

Вероятность разорения в случае бесконечного времени $\psi_h(u, t_0)$- это вероятность того, что фонд собственных средств упадет ниже нуля в какой-то момент времени до t_0, при начальном капитале u, и когда используются временные интервалы в h единиц:

$$\psi_h(u) = P[U(t) < 0 \text{ при некотором } t = h, 2h, 3h, \ldots]$$

§4 Взаимосвязь между вероятностями разорения

Вероятности разорения для непрерывной и дискретной модели в случаях конечного и бесконечного времени связаны следующими неравенствами и соотношениями:

Взаимосвязь между вероятностями разорения (непрерывный/дискретный случай)

Расширим рассматриваемый промежуток времени ($0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < \infty$):

$$\psi(u,t_1) \leqslant \psi(u,t_2) \leqslant \psi(u) \qquad \psi_h(u,t_1) \leqslant \psi_h(u,t_2) \leqslant \psi_h(u)$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi(u,t) = \psi(u)$$

Расширим начальный фонд собственных средств ($0 \leqslant u_1 \leqslant u_2$):

$$\psi(u_2,t) \leqslant \psi(u_1,t) \qquad \psi_h(u_2,t) \leqslant \psi_h(u_1,t)$$

$$\psi(u_2) \leqslant \psi(u_1) \qquad \psi_h(u_2) \leqslant \psi_h(u_1)$$

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u,t) = 0$$

Разделим на интервалы времени (n=1,2,3,...):

$$\psi_{h/n}(u,t) \geqslant \psi_h(u,t)$$

$$\psi_{h/n}(u) \geqslant \psi_h(u)$$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{h/n}(u,t) = \psi(u,t)$$

Доказательство

Все эти соотношения соответствуют общему смыслу:

- Увеличивая длину рассматриваемого периода, увеличивается возможность того, что случится разорение
- Чем больше значение начального фонда собственных средств, тем больше требуется убытков, чтобы произошло разорение
- Уменьшая интервалы времени для дискретной модели увеличивается возможность того, что разорение будет наблюдаться между точками времени

4.1 Вероятность разорения в коротком периоде

Если мы знаем распределение суммарного иска $S(t)$, то часто мы можем сразу определить вероятность разорения для дискретной модели в случае конечного времени (без ссылки на модели), рассматривая используемые наличные средства.

Пример 8.2 Предполагается, что суммарный иск, полученный в течение каждого года от отдельных видов годичных страховых полисов, имеет нормальное распределение со средним значением $0.7P$ и средним отклонением $2.0P$, где P это премии за год. Считается, что иски возникают независимо. Страховщики хотят оценить свою платежеспособность в конце каждого года.

Мелкий страховщик с начальным фондом собственных средств 0.1 миллиона £предполагает по определенному виду страхования продать 100 полисов в начале следующего года, годовая премия по каждому из этих рисков составляет 5000£. Страховщик терпит издержки в $0.2P$ на оформление каждого полиса. Вычислите вероятность того, что страховщик окажется неплатежеспособным к концу следующего года. Не учитывайте проценты на фонд собственных средств.

Решение Используя условие получаем, что фонд собственных средств страховщика к концу следующего года будет равняться:

$$
\begin{aligned}
U_1 = &\text{ начальный фонд собственных средств} + \text{премии} - \text{издержки} - \text{убытки} \\
&= 0.1m + 100 \times 5000 - 100 \times 0.2 \times 5000 - S(1) \\
&= 0.5m - S(1)
\end{aligned}
$$

Распределение $S(1)$ является:

$$S(1) \sim N(100 \times 0.7 \times 5000, 100 \times (2.0 \times 5000)^2) = N(0.35m, (0.1m)^2)$$

Следовательно вероятность того, что значение фонда собственных средств будет меньше нуля:

$$
\begin{aligned}
P[U(1) < 0] &= P[S(1) > 0.5m] \\
&= P[N(0.35m, (0.1m)^2) > 0.5m] \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{0.5m - 0.35m}{0.1m}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.93319 = 0.067
\end{aligned}
$$

Следовательно искомая вероятность равняется 6.7%

Вопрос для самоподготовки 8.2. Если страховщик предполагает продать 200 полисов в течение второго года за те же премии и ожидает такую же ставку издержек, то вычислите вероятность того, что страховщик окажется неплатежеспособным к концу второго года.

§5 Модели Пуассона

В непрерывной модели мы предположим, что иски случаются согласно предположениям модели Пуассона. Это отдельное приложение моделей коллективного риска, которые мы изучали в предыдущей главе.

В этом параграфе определяется пуассоновский процесс, получают распределение числа событий на заданном интервале, выводят распределение времени между событиями и применяют полученные результаты.

Мы предполагаем, что количество предъявленных исков соответствует пуассоновскому процессу.

Пуассоновский процесс

Общее число событий $N(t)$ на временном интервале $(0, t)$ имеет вид пуассоновского процесса, если:

- Вероятность того, что в течение какого-то короткого промежутка времени $(t, t+h)$ произойдет одно событие, равняется λh

  то есть $P[$ В точности 1 событие на $(t, t+h)] = \lambda h + o(h)$[2]

- Вероятность того, что в течение этого интервала произойдет более 1 события, незначительна в сравнении с вероятностью одного события

  то есть $P[$ Более 1 события на $(t, t+h)] = o(h)$

- События в разные временные интервалы случаются независимо.

Пример 8.3 Объясните, как иски автомобильного страхования могут быть представлены пуассоновским процессом.

Решение В данном случае событиями являются случившиеся иски (то есть несчастные случаи, пожары, кражи) или иски, сообщенные страховщику. Параметр λ означает среднюю норму случившихся исков (например 50 в день). Предположение, что на достаточно коротком интервале времени может случиться не более одного иска, выполняется, если мы предполагаем, что события, повлекшие за собой иск не могут привести к многократным искам (то есть не рассматриваются аварии на автомагистралях и т.д.).

Число событий за данный период времени

Для пуассоновского процесса с параметром λ число событий $N(t)$, произошедших на интервале $(0, t)$ имеет $Poisson(\lambda t)$ распределение, то есть вероятность того, что произошло точно x событий:

$$P[N(t) = x] = p_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

[2]Обозначение $o(h)$ означает величину "меньшего порядка, чем λh то есть эта величина при h стремящемся к нулю стремится к нулю быстрее, чем λh.

"Число исков имеет пуассоновское распределение с параметром, равным ожидаемому числу исков"

Доказательство

В течение небольшого интервала времени $(t, t+h)$ может быть либо ровно одно событие (с вероятностью $\lambda h + o(h)$), либо ни одного события (с вероятностью $1 - \lambda h + o(h)$). Это приводит нас к следующему набору равенств, связывающих число событий, произошедших к моменту времени $t+h$, с числом событий, произошедших к моменту времени t:

$$p_0(t+h) = (1 - \lambda h + o(h))p_0(t)$$

$$p_1(t+h) = (\lambda h + o(h))p_0(t) + (1 - \lambda h + o(h))p_1(t)$$
$$p_2(t+h) = (\lambda h + o(h))p_1(t) + (1 - \lambda h + o(h))p_2(t)$$

и т.д.

Перенесем слагаемые, которые не содержат h, из правой части уравнения, в левую и поделим на h, получаем:

$$[p_0(t+h) - p_0(t)]/h = -\lambda p_0(t) + o(t)$$

$$[p_1(t+h) - p_1(t)]/h = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) + o(1)$$
$$[p_2(t+h) - p_1(2)]/h = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t) + o(1)$$

и т.д.

Устремляем $h \to 0$, получаем:

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$

$$p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t)$$
$$p_2'(t) = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t)$$

и т.д.

Эти дифференциальные уравнения можно решить, используя различные математические методы (смотри вопрос для самоподготовки 8.4 в конце этого параграфа), и тогда получаем:

$$p_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Мы также можем найти распределение времени между последовательно произошедшими событиями:

Время между событиями

Для пуассоновского процесса с параметром λ время между событиями T, то есть время до наступления следующего события, имеет $Exp(\lambda)$ распределение, то есть его функция плотности распределения равняется:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0)$$

Доказательство

Так как вероятность того, что ожидаемое время превысит t, это есть вероятность того, что в течение интервала времени $(0, t)$ не произойдет ни одного события, функция распределения ожидаемого времени равняется:

$$F_T(t) = P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t) = 1 - P[N(t) = 0] = 1 - e^{-\lambda t}$$

Дифференцируя, получаем функцию плотности распределения:

$$f_T(t) = F'_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0)$$

которая является функцией плотности $Exp(\lambda)$ распределения.

Заметим, что время между событиями не зависит от общего времени. Другими словами время до наступления следующего события имеет такое же распределение, независимо от времени последнего события или числа событий, которые уже произошли. Это опирается на отсутствие последействия экспоненциального распределения.

Вопрос для самоподготовки 8.3. Если предъявленные иски описываются пуассоновским процессом с параметром 5 в день (и страхователь имеет круглосуточную телефонную "горячую линию"), то вычислите:

1. вероятность того, что будет сообщено менее чем о двух исках в день
2. вероятность того, что ещё об одном иске будет сообщено в течение следующего часа.

Вопрос для самоподготовки 8.4. Решите дифференциальные уравнения, используемые при выведении распределения числа событий.

5.1 Обобщенные пуассоновские процессы

В этом параграфе определяется обобщенный пуассоновский процесс и получают моменты и производящую функцию моментов для этого процесса.

Предположим, что величина предъявленных исков соответствует обобщенному пуассоновскому процессу.

Обобщенный пуассоновский процесс

Общая сумма иска $S(t)$ за интервал времени $(0, t)$ соответствует обобщенному пуассоновскому процессу, если:

- Иски случаются в соответствии с пуассоновским процессом.
- Величины индивидуальных исков X независимы и одинаково распределены.
- Величины индивидуальных исков X не зависят от числа исков $N(t)$

Мы можем использовать формулу производящей функции моментов для модели коллективного риска, чтобы получить производящую функцию моментов суммарного иска за данный период времени:

5.2 Производящая функция моментов обобщенного пуассоновского процесса

Если иски случаются в соответствии с обобщенным пуассоновским процессом с параметром λ и производящая функция моментов индивидуальных исков есть $M_X(u)$[3], тогда производящая функция моментов для $S(t)$ будет:

$$M_{S(t)}(u) = e^{\lambda t[M_X(u)-1]}$$

Доказательство

Суммарный иск может быть представлен в терминах модели коллективного иска как:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)}$$

Это случайная сумма независимых и одинаково распределеных случайных величин(X_i) и $N(t)$ имеет пуассоновское распределение со средним

[3]Мы будем использовать u в качестве фиктивной переменной производящей функции моментов в этом параграфе, чтобы избегать путаницы с t.

значением λt. Поэтому $S(t)$ имеет обобщенное пуассоновское распределение, и формула производящей функции моментов сложного распределения дает:

$$M_{S(t)}(u) = M_{N(t)}[\log M_X(u)] = e^{\lambda t[e^{\log M_X(u)}-1]} = e^{\lambda t[M_X(u)-1]}$$

Пример 8.4 Если иски случаются в соответствии с обобщенным пуассоновским процессом с параметром μ и величины индивидуальных исков имеют $Gamma(\alpha, \lambda)$ распределение, найдите выражение для производящей функции моментов суммарного иска $S(t)$ на интервале $(0, t)$.

Решение Используя формулу для производящей функции моментов для $S(t)$ (и учитывая, что λ имеет теперь особое значение):

$$M_{S(t)}(u) = e^{\mu t[M_X(u)-1]} = e^{\mu t[(1-u/\lambda)^{-\alpha}-1]}$$

Мы также можем использовать свойства обобщенных распределений, выведенные раньше, чтобы получить формулу для моментов величины суммарного иска:

Среднее значение и дисперсия величины суммарного иска

Для обобщенных пуассоновского процесса $S(t)$ среднее значение и дисперсия величины суммарного иска равняется:

$$E[S(t)] = \lambda t E[X] \qquad Var[S(t)] = \lambda t E[X^2]$$

Доказательство

Эти результаты непосредственно следуют из формулы моментов обобщенного пуассоновского распределения.

Вопрос для самоподготовки 8.5. Проверьте, что непосредственно из производящей функции моментов эти формулы верны для предыдущего примера.

§6 Вероятность разорения для долгосрочного периода.

В этом параграфе определяется коэффициент поправки для обобщенного пуассоновского процесса, показывает, что он существует, его вычисляют в простых случаях и получают простые ограничения и оценки.

6.1 Коэффициент поправки

Вычисления вероятностей разорения для обобщенного пуассоновского процесса включает в себя величину, называемую коэффициентом поправки. Коэффициент поправки может использоваться для вычисления вероятности окончательного разорения в отдельных случаях или для установления границ оценок в более сложных ситуациях.

Коэффициент поправки

Коэффициент поправки r для обобщенного пуассоновского процесса это наименьшее положительное решение уравнения:

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

где

λ- это частота исков, то есть норма происшествия исков.

c- это текущая ставка притока премий (включая поправки на безопасную нагрузку и перестрахование).

$M_X(r)$- это производящая функция моментов величин текущих индивидуальных распределенных исков X, принимающая значения при $t = r$, то есть $E(e^{rX})$ (включая поправки на перестрахование).

Часто безопасная нагрузка включается в текущие премии, чтобы прибыли и издержки обеспечивали повышенную сохранность.

Пример 8.5 Покажите, что если текущая премия составляет премию за риск с относительной безопасной нагрузкой θ, тогда коэффициент поправки удовлетворяет: $1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$

Решение Премия за риск:

$$\text{частота исков} \times \text{средняя величина иска} = \lambda E(X)$$

С относительной безопасной нагрузкой θ ставка текущего годового дохода премий будет:

$$c = (1 + \theta)\lambda E(X)$$

Уравнение коэффициента поправки $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$ будет:

$$\lambda + (1 + \theta)\lambda E(X)r = \lambda M_X(r)$$

Сократив на λ, получим:

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r)$$

Вопрос для самоподготовки 8.6. Покажите, что $r = 0$ всегда является тривиальным решением уравнения коэффициента поправки.

Мы часто можем использовать тот факт, что $r = 0$ всегда является тривиальным решением, для упрощения вычислений, включенных в решение уравнения коэффициента поправки.

Пример 8.6 Выведите формулу для коэффициента поправки, если иски случаются согласно обобщенному пуассоновскому процессу с параметром λ и величины индивидуальных исков X имеют $Exp(\beta)$ распределение, и офисная премия равняется премии за риск плюс безопасная нагрузка θ. Не учитывайте перестрахование.

Решение Коэффициент поправки удовлетворяет: $1+(1+\theta)E(X)r = M_X(r)$

Так как величины индивидуальных исков X имеют $Exp(\beta)$ распределение:

$$E(X) = \frac{1}{\beta} \qquad \text{и} \qquad M_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t} \text{ (которое выполняется при } t < \beta)$$

Поэтому уравнение коэффициента поправки будет:

$$1 + (1+\theta)\frac{1}{\beta}r = \frac{\beta}{\beta - r}$$

Умножая на $\beta(\beta - r)$, получаем:

$$\beta(\beta - r) + (1+\theta)(\beta - r)r = \beta^2$$

Сократив обе части уравнения на β^2, получаем:

$$-\beta r + (1+\theta)(\beta - r)r = 0$$

Поделим на r (которое соответствует тривиальному решению $r = 0$) получаем:

$$\beta + (1+\theta)(\beta - r) = 0$$

Выразим r:

$$r = \beta - \frac{\beta}{1+\theta} = \beta\left(1 - \frac{1}{1+\theta}\right) = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$$

Вопрос для самоподготовки 8.7. Напишите уравнение коэффициента поправки для исков личного страхования от несчастных случаев, если 90% исков в 10000£и 10% исков в 25000£, относительную безопасную нагрузку возьмите в 20%.

Покажите, что это уравнение имеет решение в интервале:

$$0.00002599 < r < 0.00002601$$

6.2 Существование коэффициента поправки

Так как мы не учитываем проценты, то страховая компания может оставаться в бизнесе в долгосрочном периоде, если ставка текущей премии больше, чем ставка премии за риск, то есть средней стоимости исков. Согласно этому предположению коэффициент поправки ненулевой и определен единственным образом.

Существование коэффициента поправки

Если производящая функция моментов величин индивидуальных исков $M_X(r)$ определена при $r < \gamma$, где γ это положительная константа и ставка текущей премии больше, чем ставка премии за риск (то есть $c > \lambda E(X)$), тогда существует единственное значение r, которое удовлетворяет уравнению коэффициента поправки $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$ при $0 < r < \gamma$.

Если производящая функция моментов определена при некоторых положительных значениях, то коэффициент поправки единственен

Доказательство использует график, приведенный ниже.

Доказательство

Когда мы изучали производящие функции моментов, мы рассматривали, что производящая функция моментов $M_X(r)$ (и, следовательно, уравнение коэффициента поправки) определена при $r < \gamma$, где γ это положительная константа (которая может быть $+\infty$).

Доказательство осуществляется демонстрацией того, что график функции $g(r) = \lambda M_X(r) - \lambda - cr$ (то есть разность правой и левой части уравнения коэффициента поправки) имеет следующие свойства:

- (a)начинается в точке (0,0) с отрицательным наклоном
- (b)стремится к ∞ при r стремящемся к γ
- (c)его наклон всегда возрастает, поэтому может быть только один экстремум

Поэтому график пересекает ось x только один раз при $r < \gamma$, то есть существует ровно одно решение уравнения коэффициента поправки.

Доказательство осуществляется следующим образом:

- (a) Так как $r = 0$ всегда является решением уравнения коэффициента поправки:

$$g(0) = 0$$

Первая производная функции $g(r)$ будет: $\quad g'(r) = \lambda M'_X(r) - c$

Следовательно: $\quad g'(0) = \lambda E(X) - c < 0$

- (b) Мы должны показать, что:

$$\lim_{r \to \gamma} g(r) = +\infty$$

Если $\gamma < \infty$ (то естьγ конечное),то это непосредственно следует из того, что $M_X(\gamma) = +\infty$ и все остальные элементы в уравнении для $g(r)$ остаются конечными.

Если $\gamma = \infty$, то мы можем использовать тот факт, что $E(e^{rX})$ должно быть больше любых других элементов в разложении $1+rE(X)+1/2r^2E(X^2)+\ldots$ (так как r и X оба положительные). Используя квадрат элемента, получаем:

$$g(r) = \lambda E(e^r X) - \lambda - cr > \lambda \frac{r^2}{2} E(X^2) - \lambda - cr$$

При r стремящемся к ∞, первое слагаемое правой части, которое является квадратным относительно r с положительным коэффициентом, будет превосходить другие два слагаемые, которые являются линейными функциями r. Поэтому $g(r)$ будет стремиться к $+\infty$.

- (c) Вторая производная функции $g(r)$ будет:

$$g''(r) = \lambda M''_X(r) = \lambda E(X^2 e^{rX}) > 0$$

так как элементы математического ожидания положительны. Это означает, что наклон графика всегда возрастает.

6.3 Верхняя граница коэффициента поправки

В большинстве случаев невозможно непосредственно решить уравнение коэффициента поправки. Поэтому применяются численные методы. Начальная оценка для значения может быть найдена из следующего неравенства.

Верхняя граница коэффициента поправки.

Коэффициент поправки удовлетворяет неравенству:

$$r < \frac{2[c/\lambda - E(X)]}{E(X^2)}$$

Доказательство

Уравнение коэффициента поправки есть: $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$
Преобразуя правую часть, получаем:

$$\lambda + cr = \lambda E(e^{rX}) = \lambda[1 + rE(X) + \frac{r^2}{2}E(X^2) + \ldots]$$

Так как величины индивидуальных исков X принимают положительные значения, то слагаемые правой части положительны. Поэтому, пренебрегая слагаемыми, степень которых выше X^2, получаем:

$$\lambda + cr > \lambda[1 + rE(X) + \frac{r^2}{2}E(X^2)]$$

Сократив на λ с каждой стороны:

$$cr > \lambda[rE(X) + \frac{r^2}{2}E(X^2)]$$

Разделив на r (которое должно быть положительным):

$$c > \lambda[E(X) + \frac{r}{2}E(X^2)]$$

Преобразуем, чтобы получить неравенство для r:

$$r < \frac{2[c/\lambda - E(X)]}{E(X^2)}$$

Вопрос для самоподготовки 8.8. Найдите верхнюю границу для коэффициента поправки в предыдущем примере.

Заметим, что согласно определенным обстоятельствам, мы также можем найти нижнюю границу для коэффициента поправки. Смотри параграф 3.2 Основной Лекции для дополнительных подробностей.

6.4 Неравенство Лундберга

Здесь выводится неравенство Лундберга для обобщенного пуассоновского процесса и объясняется смысл коэффициента поправки.

Одним очень полезным результатом является неравенство Лундберга.
Неравенство Лундберга

Неравенство Лундберга [4] формулируется следующим образом:

$$\psi(u) \leqslant e^{-ru}$$

Объяснение

Неравенство Лундберга следует из точной формулы, которая была получена для вероятности окончательного разорения для обобщенного пуассоновского процесса, которая формулируется так:

$$\psi(u) = \frac{e^{-ru}}{E[e^{-ru(T)} \mid T < \infty]}$$

В этой формуле T обозначает время, когда наступает разорение (если это когда либо случается) и $u(t)$ обозначает величину дефицита непосредственно после того, как случился иск, приведший к разорению.

Так как дефицит $u(T)$ должен быть отрицательный, $-ru(T)$ должно быть положительной величиной и $e^{-ru(T)}$ должно быть больше 1. Поэтому условное математическое ожидание в знаменателе также должно быть больше 1, и получается неравенство Лундберга.

Дифференцирование неравенства Лундберга приводится в **Приложении**

В большинстве случаев знаменатель очень близок к 1, поэтому знак неравенства близок к знаку равенства, то есть $\psi(u)$ совсем ненамного меньше e^{-ru}.

Это значит, что e^{-ru} дает хорошую оценку для $\psi(u)$.

6.5 Взаимосвязь коэффициента поправки и вероятности разорения

$$\psi(u) = e^{-ru}$$

"При увеличении коэффициента поправки, уменьшается вероятность разорения"

Пример 8.7 Начертите график вероятности окончательного разорения $\psi(u)$, как функцию начального фонда собственных средств u, для ситуации из примера 4.6, дано, что: $\beta = 0.001$ в единицах $£^{-1}$ и $\theta = 0.2$

[4] Филипп Лундберг — шведский математик. Он опубликовал эти результаты в 1909 году.

Решение В этом случае коэффициент поправки:

$$r = \frac{\beta\theta}{1+\theta} = \frac{0.001 \times 0.2}{1.2} = 0.0001667$$

Поэтому: $\psi(u) = e^{-ru} = e^{-0.0001667u}$

График этой функции выглядит следующим образом:

6.6 Изменение значений параметров

В этом пункте описывается эффект вероятности разорения, в случаях конечного и бесконечного времени, при изменении значений параметров.

Значимость результатов Лундберга в том, что мы можем использовать коэффициент поправки как индикатор платежеспособности страховщика. Большое значение коэффициента поправки означает низкую вероятность разорения.

Пример 8.8 Объясните эффект изменения каждого из параметров: u, θ, β и λ для вероятности окончательного разорения для ситуации из Примера 4.6.

Решение Коэффициент поправки: $\frac{\beta\theta}{1+\theta}$

Результаты Лундберга показывают нам, что вероятность окончательного разорения приблизительно равняется:

$$\psi(u) \doteq \exp\left(-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u\right)$$

здесь вместо $=$ должно быть равно с точкой.

Изменение u: Увеличение u дает уменьшение значения вероятности разорения. Это логично, так как, чем больше начальное значение u, тем больше величина фонда собственных средств. Поэтому страховщик может оплатить дополнительные убытки прежде, чем окажется платежеспособным.

Изменение θ: Так как $\frac{\theta}{1+\theta} = 1 - \frac{1}{1+\theta}$, то увеличение θ дает уменьшение значения вероятности разорения. И снова это логично, так как это означает, что страховщик включает большую безопасную нагрузку. Поэтому нагруженные премии превышают премию за риск на большую величину.

Изменение β: Увеличение β дает уменьшение значения вероятности разорения. И снова это логично, так как это означает, что среднее значение величины иска $\frac{1}{\beta}$ уменьшается. Поэтому сумма, выплачиваемая страховщиком по искам, уменьшается.

Изменение λ: Так как формула не содержит какую бы то ни было λ, то изменение значения λ никак не влияет на вероятность разорения. Это логично, если мы понимаем, что λ означает. λ это норма происшествия исков, выраженная в терминах произвольных промежутков времени, например 100 исков в год. Если, скажем, λ увеличили до 100 исков в месяц, то вероятность окончательного разорения для непрерывной модели будет точно такая же, так как различие будет только в том, что все будет происходить в 12 раз быстрее. Поэтому разорение может произойти в точно таких же обстоятельствах, разница будет только в том, что, если это произойдет, это произойдет в 1/12 времени.

(Заметим, что вероятность разорения для конечного периода времени зависит от значения λ.)

6.7 Эффект перестрахования

Этот подпараграф анализирует влияние коэффициента поправки и, следовательно, на вероятность разорения при простых соглашениях перестрахования.

Когда иски перестрахованы, вычисления точно такие же, как и раньше, исключая то, что премии и иски, используемые в вычислениях должны быть исправлены так, что они должны быть чистыми от перестрахования.

Пример 8.9

(example(4.9)) Иски случаются согласно пуассоновскому процессу с параметром λ, и величины индивидуальных исков X имеют $Exp(\beta)$ распределение. Офисные премии включают в себя безопасную нагрузку θ_1. Действует договор эксцедента индивидуального убытка, согласно которому перестраховщик оплачивает эксцедент индивидуального убытка, превышающего величину M, в оплату за премию, равную премии за риск перестрахования увеличенную на относительную безопасную нагрузку θ_2. Выведите уравнение, удовлетворяющее коэффициенту поправки, для прямого страховщика.

Решение Уравнение коэффициента поправки $\lambda + cr = \lambda M_X(r)$

Нетто-ставка дохода от премий для прямого страховщика равняется ставке премии, нагруженной для страхователя, минус ставка премий, выплачиваемая перестраховщику.

$$c = (1+\theta_1)\lambda\frac{1}{\beta} - (1+\theta_2)\lambda\int\limits_M^\infty (x-M)\beta e^{-\beta x}dx$$

Второе слагаемое можно проинтегрировать, используя замену $y = x - M$. Получаем:

$$c = \lambda\frac{1}{\beta}[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}]$$

Индивидуальные нетто иски это иски, выплачиваемые страхователю, минус покрытия перестрахования. Поэтому производящая функция моментов (которая определена при $r < \infty$) будет:

$$M_X(r) = \int\limits_0^M e^{rx}\beta e^{-\beta x}dx + \int\limits_M^\infty e^{rM}\beta e^{-\beta x}dx = \frac{1}{\beta - r}[\beta - re^{-(\beta - r)M}]$$

Поэтому уравнение коэффициента поправки:

$$\lambda + \lambda\frac{1}{\beta}[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}]r = \lambda\frac{1}{\beta - r}[\beta - re^{-(\beta-r)M}]$$

Сокращая на λ и умножая на $\beta(\beta - r)$, получаем:

$$\beta(\beta - r) + (\beta + r)[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}]r = \beta[\beta - re^{-(\beta-r)M}]$$

Сокращая на β^2 с каждой стороны:

$$-\beta r + (\beta - r)[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}]r = -\beta re^{-(\beta-r)M}$$

Сократим на r, исключая тривиальное решение, получим:

$$-\beta + (\beta + r)[(1+\theta_1) - (1+\theta_2)e^{-\beta M}] = -\beta e^{-(\beta-r)M}$$

Коэффициент поправки r это минимальное положительное решение этого уравнения.

Уравнение коэффициента поправки обычно не может быть решено явно с помощью алгебры. Поэтому обычно используются численные методы.

Пример 8.10 Используя приближение

$$e^x = 1 + x + x^2/2$$

найдите приблизительное численное значение коэффициента поправки для предыдущего примера при $\beta = 0.05$, $\theta_1 = 0.3$, $\theta_2 = 0.4$ и $M = 10$

Решение Используя данные значения, уравнение коэффициента поправки будет:

$$-0.5 + (0.05 + r)(1.3 - 1.4e^{-0.5}) = -0.05e^{-0.5+10r}$$

Умножая на $-20e^{0.5}$, чтобы избавиться от некоторых дробей, получаем:

$$e^{0.5} - (1 - 20r)(1.3e^{0.5} - 1.4) = e^{10r}$$

Раскрываем скобки в левой части равенства и используем приближение в правой:

$$0.90538 + 14.8668r = 1 + 10r + 50r^2$$

$$\text{то есть } -0.09462 + 4.8668r - 50r^2 = 0$$

Решаем, используя формулу для корней квадратного уравнения (выбираем наименьший положительный корень), получаем:

$$r = \frac{-4.8668 + \sqrt{4.8668^2 - 4(-50)(0.09462)}}{2(-50)} = 0.0268$$

Вопрос для самоподготовки 8.9. Найдите наилучшее приближение коэффициента поправки для этого примера, используя метод Ньютона-Рафсона.

Вопрос для самоподготовки 8.10. Выведите формулу коэффициента поправки перестраховщика для примера 8.9 и объясните свой ответ.

Вопрос для самоподготовки 8.11. Выведите формулу коэффициента поправки прямого страховщика для примера 8.9, если действует квотный договор перестрахования, согласно которому перестраховщик оплачивает долю $1-k$ всех исков и получает долю $1-k$ всех премий.

§7 Краткое изложение

Модель фонда собственных средств основного страховщика в будущем может быть представлена с помощью модели развития суммарного иска, которая используется для нахождения вероятности разорения в случаях конечного и бесконечного времени для непрерывной и дискретной модели.

Число исков может быть смоделировано, используя процесс Пуассона. Общие суммы исков могут быть смоделированы, используя обобщенный пуассоновский процесс.

Для непрерывной модели в случае бесконечного времени неравенство Лундберга, которое использует параметр, называемый коэффициентом поправки, обеспечивает хорошую оценку вероятности окончательного разорения.

Вероятность разорения можно также вычислить, когда действует перестрахование, работая с нетто-исками и нетто-премиями.

§8 Формулы

Процесс суммарных исков

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad t \geqslant 0 \qquad (\text{ непрерывный случай })$$

Вероятности разорения

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ для некоторых } t] \qquad \text{непрерывный случай}$$

$$\psi(u, t_0) = P[U(t) < 0 \text{ для некоторых } t \leqslant t_0]$$

$$\psi_h(u) = P[U(t) < 0 \text{ для некоторых } t = h, 2h, 3h, \ldots] \qquad \text{дискретный случай}$$

$$\psi_h(u) = P[U(t) < 0 \text{ для некоторых } t = h, 2h, 3h, \ldots \text{ и } t \leqslant t_0]$$

Пуассоновский процесс

$$P[N(t) = x] = p_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0)$$

Смешанный пуассоновский процесс

$$M_{S(t)}(u) = e^{\lambda t[M_x(u) - 1]}$$

$$E[S(t)] = \lambda t E(X) \qquad Var[S(t)] = \lambda t E(X^2)$$

Коэффициент поправки

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

$$r < \frac{2[c/\lambda - E(X)]}{E(X^2)}$$

Неравенство Лундберга

$$\psi(u) \leqslant e^{-ru}$$

$$\psi(u) = \frac{e^{-ru}}{E[e^{-ru(T)} \mid T < \infty]} \qquad \psi(u) \doteq e^{-ru}$$

Неравенство Лундберга

$$f(x) = 0 \qquad x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

§9 Приложение

В основном тексте мы использовали неравенство Лундберга без доказательства. Доказательсьтво этого утверждения приводится ниже. Работа над доказательством показывает, почему коэффициент поправки определяется таким способом. Вы должны уметь воспроизвести это доказательство на экзамене.

Неравенство Лундберга

Для смешанного пуассоновского процесса: $\psi(u) \leqslant e^{-ru}$

Доказательство (схема)

Доказательство использует математическую индукцию. Этапы доказательства:

1. Показываем, что результат эквивалентен доказательству того, что $\psi_n(u) \leqslant e^{-ru}$ для $n = 1, 2, \ldots,$, где $\psi_n(u)$ — вероятность, что разорение произойдет не позднее n-ого иска.[5]
2. Вывод выражения для $\psi_1(u)$ в терминах интегралов.
3. Показываем (используя определение коэффициента коррекции), что $\psi_1(u) \leqslant e^{-ru}$, то есть, что неравенство верное для $n = 1$.
4. Выражение $\psi_{n+1}(u)$ через $\psi_n(u)$, определяющееся временем и величиной первого иска.
5. Использование этого отношения , чтобы показать , что, если $\psi_n(u) \leqslant e^{-ru}$, то $\psi_{n+1}(u) \leqslant e^{-ru}$. (Процесс, происходящий на этой стадии очень похож на стадию 3.)

[5] Следует заметить, что используемое здесь $\psi_n(u)$ отличается от $\psi_h(u)$, которое мы использовали ранее для вероятности разорения в дискретной модели. Результат же Лундберга применяется только для непрерывной модели. Это не должно вызывать путаницу.

Детали каждой из ступеней доказательства таковы:

Ступень 1

Если происходит разорение, то оно должно случится во время иска. Если мы зададим $\psi_n(u)$, чтобы определить разорение, которое случиться во время или до n-ого иска, тогда вероятность окончательного разорения — $\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u)$ и неравенство $\psi(u) \leqslant e^{-ru}$ эквивалентно утверждению, что $\psi_n(u) \leqslant e^{-ru}$ для всех значений n=1,2,....

Ступень 2

С того момента как мы предполагаем, что иски происходят в соответствии с пуассоновским процессом, время, которое пройдет до первого иска имеет экспоненциальное распределение с коэффициентом λ. Тогда вероятность, что иск случится в короткий временной интервал $(t, t+dt)$, равна $\lambda e^{-\lambda t}dt$

Разорение наступит в этом промежутке, если $u + ct - x < 0$, где x обозначает величину первого иска. Что эквивалентно: $x > u + ct$

Тогда вероятность того, что первый иск произойдет во временном интервале $(t, t + dt)$ и что он будет достаточно большим, чтобы вызвать разорение равна:

$$\lambda e^{-\lambda t}dt \times \int\limits_{u+ct}^{\infty} f_X(x)dx$$

Интегрирование по всем будущим временным интервалам, в течение которых может произойти первый иск, дает выражение для вероятности того, что он вызовет разорение:

$$\psi_1(u) = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_{u+ct}^{\infty} f_X(x)dxdt$$

Ступень 3

"Внутренний" интеграл берется по переменным x, для которых $x > u + ct$, то есть $u + ct - x < 0$. Так как поправочный коэффициент для этих x больше или равен 0, имеем неравенство $-r(u + ct - x) \geqslant 0$, которое означает, что $e^{-r(u+ct-x)} \geqslant 1$.

Тогда, если мы введем дополнительный коэффициент $e^{-r(u+ct-x)}$ во внутренний интеграл, это может только увеличить его значение.

$$\text{Итак:} \qquad \psi_1(u) = \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_{u+ct}^{\infty} e^{-r(u+ct-x)} f_X(x) dx dt$$

Так как экспоненциальная функция всегда имеет положительные значения, коэффициент $e^{-r(u+ct-x)}$ будет также положительным, когда $x \leqslant u + ct$. Если мы расширим интеграл, чтобы включить сюда также и этот ряд переменных, это, опять же, может только увеличить его значение (так как $f_X(x)$ тоже всегда положительна).

$$\text{Тогда:} \qquad \psi_1(u) = \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{\infty} e^{-r(u+ct-x)} f_X(x) dx dt \qquad \ldots(2)$$

Выводим за знак интеграла величины, не зависящие от x и от t:

$$\psi_1(u) = e^{-ru} \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+cr)t} \int\limits_0^{\infty} e^{rx} f_X(x) dx dt$$

Сейчас мы видим, что внутренний интеграл — это $M_X(r)$, то есть момент производящей функции величины индивидуального иска, оцененным значением коэффициента поправки.

$$\psi_1(u) = e^{-ru} \int\limits_0^{\infty} \lambda M_X(r) e^{-(\lambda+cr)t} dt$$

Так как поправочный коэффициент определяется как корень уравнения $\lambda M_X(r) = \lambda + cr$:[6]

$$\psi_1(u) = e^{-ru} \int\limits_0^{\infty} (\lambda + cr) e^{-(\lambda+cr)t} dt$$

Так как интеграл соответствует функции плотности экспоненциального распределения с параметром $\lambda + cr$, проинтегрированной по всей области, он равен 1.

Получаем $\psi_1(u) \leqslant e^{-ru}$

[6]Это и есть причина, по которой коэффициент поправки определяется таким образом

Ступень 4

Мы можем установить отношение между $\psi_{n+1}(u)$ и $\psi_n(u)$, базируясь на времени и величине первого иска.

Если первый иск произошел в момент времени t, то

(а) величина иска будет такой, что $x > u + ct$, в таком случае разорение наступит в этот момент.

или

(б) величина иска будет такой, что $x \leqslant u + ct$, тогда процесс будет продолжаться, начиная с остатка $u + ct - x$ в момент времени t.

Тогда $\psi_{n+1}(u)$, вероятность того, что разорение наступит на или до $n+1$-ого иска, может быть выражено как сумма двух компонентов:

(а) вероятность того, что первый иск будет достаточно большим, чтобы вызвать разорение, преобладающая с коэффициентом 1 (так как разорение бесспорно в этом случае)

и

(б) вероятность того, что первый иск не окажется настолько велик, чтобы вызвать разорение, преобладающая с коэффициентом $\psi_n(u+ct-x)$ (то есть вероятность того, что разорение впоследствии произойдет до или на n-ом иске, начиная с нового остатка $u + ct - x$).

Выражаясь математически, это наблюдение приведет нас к следующему отношению, где первый двойной интеграл относится к случаю (а) и второй относится к случаю (б):

$$\psi_{n+1}(u) = \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_{u+ct}^\infty 1 f_X(x)dxdt + \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} \psi_n(u+ct-x) f_X(x)dxdt$$

Ступень 5

Чтобы выполнить шаг индукции, мы предположим (условно), что этот результат верен для определенного значения n, то есть $\psi_n(u) \leqslant e^{-ru}$ (при каком-либо остатке u).

В частности, это предполагает, что: $\psi_n(u + ct - x) \leqslant e^{-r(u+ct-x)}$

Тогда, из отношения, выведенного в Ступени 4:

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty 1 f_X(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} e^{-r(u+ct-x)} f_X(x)dxdt$$

Опять же, введение дополнительного коэффициента $e^{-r(u+ct-x)}$ во внутренний интеграл может только увеличить его значение. Если мы сделаем это, правая сторона станет такой:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-r(u+ct-x)} f_X(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} e^{-r(u+ct-x)} f_X(x)dxdt$$

Так как функции, интегрируемые в этих двух двойных интегралах теперь одинаковы, мы можем скомбинировать их, чтобы получить:

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-r(u+ct-x)} f_X(x)dxdt$$

Это тот же интеграл, который у нас был в неравенстве (2) в Ступени 3. Тогда: $\psi_{n+1}(u) \leqslant e^{-ru}$

Итак, мы показали, что неравенство верное для $n = 1$ и что, если оно верно для n, то оно также верно для $n+1$. Из принципа математической индукции следует, что оно верное для всех значений $n = 1, 2, \ldots$

$$\text{то есть} \qquad \psi_n(u) \leqslant e^{-ru} \text{для } n = 1, 2, \ldots \qquad \Rightarrow \psi(u) \leqslant e^{-ru}$$

Вопрос для самоподготовки 8.12. Запишите интегральное соотношение, соответствующее $\psi(u)$, вероятности окончательного разорения.

Часть V

Глава 9

Байесовские методы

Цель главы: После изучения данной главы вы сможете:

- Описывать оценку приближения по Байесу
- Пользоваться формулой Байеса для расчета простых вероятностей
- Понимать взаимоотношения между априорным распределением параметра, функцией правдоподобия и апостериорным распределением
- Определять апостериорное распределение в простых случаях
- Описывать и пользоваться наиболее общими типами функции ущерба
- Применять Байесовские методы для определения точек и интервалов оценки параметров

§1 Введение

До сих пор мы рассматривали классическую оценку статистического приближения. В этой главе мы рассмотрим Байесовские методы предоставляющие альтернативную оценку приближения.

Мы будем пользоваться Байесовским подходом в Главе 6 (Теория Достоверности (вероятности)).

Содержание главы Core reading вводит нас в основные идеи Байесовской статистики. Затем в ней формулируется Теорема Байеса и приводятся примеры ее применения. В последующих частях рассматриваются априорное и апостериорное распределения и применение различных функций ущерба. В финальной части демонстрируется применение бета/биномиальной модели в Байесовской статистике.

§2 Подходы к статическим выводам

2.1 Классический подход

Часто исследователи, изучающие неизвестный параметр генеральной совокупности, получают информацию из других источников перед началом работы представляющий четкие признаки тех значений параметра, которые он вероятно может принимать. Эта дополнительная информация может быть в такой форме, что ее нельзя непосредственно вставить в эту работу. Классический статистический подход не предоставляет индикаторов, по которым исследователь может сделать вывод можно ли учитывать эту дополнительную информацию.

Примером этого является то, когда страховая компания пересматривает ставки страхового взноса для отдельного типа страхового полиса и при этом имеет доступ к результатам других страховых компаний, в той же степени как и к данным собственных держателей страховых полисов. Эти данные нельзя сравнивать непосредственно, потому что сроки и условия полисов других компаний могут слегка отличаться. Однако в этих дополнительных данных может содержаться много полезной информации, которой не следует пренебрегать.

2.2 Байесовский подход

Байесовский метод дает более гибкий подход, позволяющий исследователю сочетать любую доступную априорную информацию с результатами исследований для создания полной общей картины.

Согласно байесовскому подходу параметры генеральной совокупности, которые обычно неизвестны, считаются так, как если бы они являлись случайными величинами, т.е. они моделируются, используя вероятностную функцию или функцию плотности распределения вероятности, отражающие степень вероятности, с которой они могут принимать определенные значения, опираясь на доступную информацию.

Байесовский подход включает следующие шаги:

Шаг 1 (выбор параметра априорного распределения)

Каждый неизвестный параметр первоначально подразумевается, что он получается из отдельного априорного распределения, выбранного до того, как исследование было сделано. Выбранное априорное распределение отражает первоначальное "мнение"исследователя относительно параметра, основанное на любой доступной достоверной ключевой информации.

Шаг 2(определение функции правдоподобия)

Затем проводится исследование/эксперимент для получения дополнительных данных о неизвестном параметре. Для любого указанного значения параметра может быть определена функция правдоподобия получения отдельного результата в исследовании.

Шаг 3 (определение апостериорного распределения параметра)

Апостериорное распределение параметра для неизвестных параметров определяется далее сочетая априорное распределение параметра с функцией правдоподобия результатов. Апостериорное распределение отражает мнение исследователя относительно параметра после проведения исследования.

Шаг 4 (выбор функции ущерба)

Выбирается функции ущерба, которая отражает насколько "серьезны"любые расхождения между оцениваемым значением параметра и действительным значением параметра.

Шаг 5 (оценка неизвестного параметра)

Затем апостериорное распределение сочетается с функцией потери для получения оценки неизвестного параметра. [1]

[1]Томас Бейес Thomas Bayes (1702-1761) английский теолог и исследователь теории вероятности.

§3 Формула Байеса

Одним из ключевых шагов в Байесовском подходе является сочетание априорного распределения параметра с функцией правдоподобия для определения апостериорного распределения параметра. Это осуществляется с использованием результатов теории вероятности, известных как Формула Байеса, которая может быть сформулирована так:

Формула Байеса (дискретная форма)

Предположим, что у нас есть набор взаимоисключающих и составляющих полную группу событий, так что $A1, A2, ..., Am$ и другое событие B такое что $P(B) \neq 0$. Тогда мы можем вычислить $P(A_i|B)$следующим образом:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\Sigma_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Доказательство

Результат получается сразу, как только мы вставляем промежуточный шаг:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\Sigma_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Первое равенство следует из определения условной вероятности $P(A_i|B)$.

Второе равенство следует из определения $P(B|A_i)$ в числителе и приведения каждого из возможных событий A_i в знаменателе.

В ситуации, когда формула Байеса используется там, где есть набор условных вероятностей, которые мы должны привести "развернутому виду".

Пример 9.1 Производственная компания покупает 80% своих комплектующих у поставщика X и 20% у поставщика Y. В прошлом году 5% комплектующих полученных от поставщика X были с дефектом и 1% комплектующих от поставщика Y являлись дефектными. В каких пропорциях дефектные компоненты были поставлены поставщиком X?

В этом, нам говорится, что вероятность того, что компонент полученный от отдельного поставщика окажется дефектным, и нам требуется обратить это для нахождения вероятности того, что этот компонент был получен от данного конкретного поставщика.

Мы можем решить это применяя формулу Байеса как описано ниже:

Решение Метод 1. Если мы определим следующие события:

A_X : Поставщик X поставил отдельный компонент
A_Y : Поставщик Y поставил отдельный компонент
D : Отдельный компонент является дефектным

Тогда вопрос говорит нам о следующих вероятностях:
$P(D|A_X) = 0.05$ $P(A_X) = 0.80$
$P(D|A_Y) = 0.01$ $P(A_Y) = 0.20$

Мы хотим найти вероятность того, что компонент, оказавшийся дефектным, пришел от поставщика X. Используя формулу Байеса, получаем:

$$P(A_X|D) = \frac{P(D|A_X)P(A_X)}{P(D|A_X)P(A_X) + P(D|A_Y)P(A_Y)} = \frac{00.5 * 0.80}{0.05 * 0.80 + 0.01 * 0.20} = 0.952$$

Итак, требуемая вероятность равна 95.2%.

Мы также могли бы решить эту проблему используя следующий более интуитивный подход:
Метод 2. Предположим, что производственная компания купила 1000 всего компонентов в прошлом году. Так как поставщик X снабжает 80% из них, мы знаем, что 800 прибыли от X, и 200 прибыли от Y.

Среди 800 компонентов, поступивших от X 5 %, т.е. 40 были дефектны и т.д. Так что мы можем получить следующий таблицу:

	Дефектных	Без дефекта	Всего
Поставщик X	40	760	800
Поставщик Y	2	198	200
Всего	42	958	1000

Таким образом, 40 из 42, т. е. 95.2 % дефектных компонентов прибыли от поставщика X.
Обратите внимание, что в использовании этого подхода общее количество, мы его приняли равным 1000, произвольно, т.к. все пропорционально. Этот факт

позволит нам использовать сокращения, чтобы определить апостериорное вероятностное распределение.

Вопрос для самоподготовки 9.1. На конференции присутствуют 100 актуариев и 200 бухгалтеров. 60% актуариев и 40% бухгалтеров могут сделать простую умственную арифметику правильно. Во время обеда вы подслушиваете одно из высказываний представителей "Три из моих четырех детей, были рождены на Рождество, и близнецы были рождены в новогодний день. "Какова вероятность, что этот представитель является актуарием?

Следующее упражнение показывает, что мы можем также применить формулу Баеса, когда случай B соответствует непрерывной случайной величине, принимающей определенные значения.

Вопрос для самоподготовки 9.2. Иски, пришедшие из определенного класса общего страхования, могут классифицироваться в три взаимно исключающих типа: S, M и L. Размеры исков в каждой категории равны соответственно 80 %, 15 % и 5 %.

Распределение количества индивидуальных исков в каждой категории может быть смоделировано с помощью функции плотности $f_x(x) = 2\theta^2/x^3$, $(x > \theta)$, где X является размером индивидуального иска. Параметры для этих трех категорий - $\theta_S =$\$100,$\theta_M =$\$1000 и $\theta_L =$\$2500

Учитывая , что индивидуальный иск был равен \$5000, найти вероятность того, что этот иск принадлежит каждой из этих трех категорий.

Если предположить, что параметр θ в последнем примере является непрерывной величиной, в отличае от трех дискретных переменных, которые мы использовали, мы получаем непрерывную форму формулы Байеса:

Формула Байеса(непрерывная форма)

Предположим, что мы имеем случайную величину θ с функцией распределения $f(\theta)$ и случаем B, такой что $P(B) \neq 0$. Тогда, мы можем вычислить условную функцию распределения θ данного B следующим образом:

$$f(\theta|B) = \frac{P(B|\theta)f(\theta)}{\int f(\theta|B)f(\theta)d\theta}$$

§4 Получение апостериорного распределения

4.1 Дискретное априорное распределение

Следующий пример показывает, как мы можем получить апостериорное распределение.

Пример 9.2 Вы купили коробку лампочек на рынке несколько месяцев назад. Вы знаете, что лампочки имеют либо маленькую среднюю продолжительность работы 500 часов либо большую - 2 500 часов, но вы не можете сказать точно, потому что на коробке не было ярлыка.

Поскольку вы бывали на этом рынке прежде, вы первоначально не имеете никакого мнения относительно того, могли ли вас обмануть.

Приблизительно после 300 часов, эти 5 лампочек , которые вы использовали, все еще не перегорели. Принимая, время работы отдельной лампочки имеет показательное распределение, оцените вероятность что, вы купили лампочки с большой продолжительностью работы.

Решение В этом примере, мы первоначально считаем альтернативы равновероятными, тогда априорное распределение для λ [2], параметра распределения сроков службы лампочки, является дискретным распределением:

$$\lambda = \begin{cases} 1/500, \text{ с вероятностью } 1/2 \\ 1/2500, \text{ с вероятностью } 1/2 \end{cases}$$

Вероятность, что отдельная лампочка с параметром распределения λ (математическое ожидание времени работы $1/\lambda$)будет работать более 300 часов равна:

$$\int_{300}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-300\lambda}$$

Таким образом, функция правдоподобия того, что все 5 лампочек будут работать в этот момент равна:

$$\left(e^{-300\lambda}\right)^5 = e^{-1500\lambda}$$

Итак мы имеем:

$$P(5 \text{ работают } |\lambda = 1/500) = e^{-1500/500} = e^{-3} = 0.04979$$
$$P(5 \text{ работают } |\lambda = 1/2500) = e^{-1500/2500} = e^{-0.6} = 0.54881$$

Применяя формулу Байеса, получаем:

[2]Т.к. многие студенты плохо воспринимают заглавные греческие буквы, в этой главе автор использует строчные для обозначения случайных величин.

$P(\lambda = 1/500|5\ \text{работают})$

$= \frac{P(5\ \text{работают}|\lambda=1/500)P(\lambda=1/500)}{P(5\ \text{работают}|\lambda=1/500)P(\lambda=1/500)+P(5\ \text{работают}|\lambda=1/2500)P(\lambda=1/2500)}$

$= \frac{0.04979*1/2}{0.04979*1/2+0.54881*1/2} = 0.08318$

Обратите внимание, что знаменатели для обеих вероятностей для апостериорного распределения были те же самые. Так что мы, только что вычислили нумераторы и затем использовали факт, что апостериорные вероятности должны равняться 1, чтобы найти фактические вероятности. Если мы смотрим на нумератор, мы видим, что это - только функция правдоподобия $P(5\ \text{работают}|\lambda = 1/500)$ моментов времени, когда $P(\lambda = 1/500)$. Это ведет нас к следующему результату:

Нахождение апостериорного распределения

Апостериорное распределение $\propto$ Априорное распределение $*$ Функция правдоподобия

где знак пропорциональности ($\propto$) указывает, что любые факторы, которые не зависят от неизвестных параметров, можно рассмотреть как константы и следовательно опущенными.

Таким образом, можно решить задачу более простым образом:

	Априорное распределение $*$ Функция правдоподобия	$\propto$ Апостериорное распределение	Фактическое апостериорное распределение
$\lambda = 1/500$:	$1/2 \quad e^{-1500/500} = 0.04979$	0.02490	0.08319
$\lambda = 1/500$	$1/2 \quad e^{-1500/2500} = 0.54881$	0.27441	0.91681
Всего		0.29931	1.00000

Результаты последней колонки были получены делением предыдущей колонки на 0.29931.

Вопрос для самоподготовки 9.3. Фокусник смешал 5 колод карт так, что в каждой колоде содержится 52 карты и колоды содержат 0, 13, 26, 39 и 52 красные карты соответственно. Вам предложили выбрать одну колоду и из нее выбрать 3 карты (вы не знаете какие карты содержатся в каждой колоде). Среди выбранных карт оказались 1 красная и 2 черные карты. Предполагая. Что фокусник говорит правду, определить апостериорную вероятность, что вы выбрали каждую из колод.

4.2 Непрерывное априорное распределение

Те же рассуждения применяются в случае, где неизвестный параметр имеет непрерывное распределение. Так, снова, мы можем использовать формулу "Апостериорное распределение$\propto$ Априорное распределение $*$ Функция правдоподобия чтобы найти распределение апостериорного параметра.

Алгоритм нахождения апостериорного распределения следующий:

Шаг 1(выбор априорного распределения)

Запишите априорное распределение неизвестного параметра. Помните, что неизвестный параметр берет место "x"в функции распределения.

Шаг 2(определение распределения)

Запишите (объединенную) функцию правдоподобия для наблюдения(й).

Шаг 3(определение распределения апостериорного параметра)

Умножите априорное распределение параметра и функцию правдопообия, чтобы найти форму апостериорного распределения параметра. Вы можете проигнорировать любые множители, которые не содержат неизвестный параметр. Они будут "поглощены"в отношении пропорциональности.

Шаг 4(идентификация распределения апостериорного параметра)

Или просмотрите стандартные распределения, которые имеют функции распределения с подобной алгебраической формой и диапазоном значений как и найденная вами функция распределения,т.е сравните с функциями распределения в таблицах.

Или (если найденное распределение не похоже ни на одно из стандартных распределений)проинтегрируйте или просуммируйте неизвестный параметр, чтобы найти нормализованную константу апостериорной функции распределения.

Пример 9.3 Предположим X - число успехов, достигнутых в последовательности из n испытаний с постоянной неизвестной вероятностью успеха p ,и что априорная функция распределения для p - $Beta(\alpha, \beta)$. Определить апостериорное распределение p.

Решение Формула априорной функции распределения для p - $Beta(\alpha, \beta)$, исключая множетили, не содержащие p, следующая:

$$p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \ ,0 < p < 1$$

X имеет $Beta(n, p)$ распределение, следовательно функция правдоподобия, исключая множетили, не содержащие p, следующая:

$$p^{x}(1-p)^{n-x}$$

Суммируя получаем, что апостериорное распределение пропорционально

$$p^{x+\alpha-1}(1-p)^{n-x+\beta-1}, \ 0 < p < 1$$

Сравнивая полученную формулу с формулами распределений из таблицы, видим, что такуюже формулу и диапазон значений имеет Beta- распределение (помним, что p - случайная величина)с параметрами $x + \alpha$ и $n - x + \beta$.

Итак, апостериорное распределение p - $Beta(x + \alpha, n - x + \beta)$

Вопрос для самоподготовки 9.4. Если $x_1, x_2, ..., x_n$ случайная выборка $Exp(\lambda)$ распределения,где параметр λ неизвестен, найти апостериорное распределение для λ, предполагая, что априорное распределение - $Exp(\lambda')$.

Таблица в конце этой главы показывает некоторые апостериорные распределения параметров для часто встречающихся комбинаций функции правдоподобия и априорных распределений. Нет необходимости запоминать эту таблицу. Однако, рекомендуется проверить результаты, которые вы можете получить из таблицы, разбирая пример 5.3.

4.3 Сопряженные распределения

(l2) Объяснение того, что подразумевают под сопряженным априорным распределением.

Иногда априорное распределение и апостериорное распределение принадлежат к одному семейству распределений, например оба могли бы быть гамма-распределениями. Тогда говорят, что они формируют сопряженную пару. В таблице сопряженные распределения были отмечены со звездочкой.

Функция правдоподобия определяет, какое семейство распределений приведет к сопряженной паре. Сопряженные распределения могут быть найдены с помощью выбора семейства распределений, которые имеют одинаковые формулы функции правдоподобия, рассматривая неизвестный параметр как случайную величину.

Пример 9.4 $x_1, x_2, ..., x_n$ - независимые одинаково распределенные (НОРН) наблюдения, имеющие $Geo(p)$ распределение, где p неизвестно. Найти семейство распределений, которому принадлежат сопряженные априорное и апостериорное распределения.

Решение Функция правдоподобия имеет вид $\prod\limits_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1} = p^n(1-p)^{\Sigma x_i - n}$

Итак, нам необходимо найти семейство функций вида $p^{\text{что-то}}(1-p)^{\text{что-то}}$, где $0 < p < 1$, т.е. нужно использовать beta-распределение.

Использование сопряженных распределений часто делает Байесовские вычисления более простыми. Они также подходят для использования в случае семейства распределений, которые могли бы быть определены для обеспечения "естественной"модели для неизвестного параметра, например, в предыдущем примере, где параметр p принимает значения в диапазоне $0 < p < 1$.

4.4 Неподходящие априорные распределения

Иногда полезно использовать неинформативное априорное распределение, которое предполагает, что неизвестный параметр одинаково вероятно примет любое значение. Например, мы могли бы иметь плотность нормального распределения с математическим ожиданием μ, где мы ничего не знаем о μ.Это ведет к проблеме в этом примере, потому что мы были бы должны принять $U(\infty, \infty)$ за функцию распределения для μ, что не имеет смысла, так как функция распределения для этой плотности была бы всюду равна 0 .

Мы можем легко обойти эту проблему, используя распределение $U(-N, N)$, где N - принимает очень большие значения, и затем устремить N к бесконечности. Тогда функция распределения - $1/2N$, является константой. Если мы используем "пропорциональный"метод, описанный выше, с априорным распределением, пропорциональным 1, все удается легко вычислить, даже при том, что диапазон значений в этом случае бесконечный.

Функция правдоподобия выборки НОРС величин $X_1, ..., X_n$	Неизвестный параметр	Функция распределения параметра	
		априорная	апостериорная
$Posson(\lambda)$	$\lambda > 0$	$Exp(\lambda')$	$Gamma(\Sigma x + 1, n + \lambda')$
$Exp(\lambda)$			$Gamma(n + 1, \Sigma x + \lambda')$
$Gamma(\alpha, \lambda)$			$Gamma(\alpha n + 1, \Sigma x + \lambda')$
$Exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$Gamma(\alpha', \lambda')$	$Gamma(n + \alpha', \Sigma x + \lambda')$ *
$Gamma(\alpha, \lambda)$			$Gamma(\alpha n + \alpha', \Sigma x + \lambda')$ *
$B(m, p)$	$0 < p < 1$	$Beta(\alpha', \beta')$	$Beta(\Sigma x + \alpha', nm - \Sigma x + \beta')$ *
$Geo(p)$			$Beta(n + \alpha', \Sigma x - n + \beta')$ *
$N(\mu, \sigma^2)$	$-\infty < \mu < \infty$	$N(\mu', \sigma'^2)$	$N\left(\frac{\frac{\Sigma x}{\sigma^2} + \frac{\mu'}{\sigma'^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma'^2}}, \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma'^2}}\right)$ *
$LogN(\mu, \sigma^2)$	$-\infty < \mu < \infty$	$U(-\infty, \infty)$	$N(\frac{1}{n}\Sigma \log x, \frac{\sigma^2}{n})$
$N(\mu, \sigma^2)$			$N(\frac{1}{n}\Sigma x, \frac{\sigma^2}{n})$
$Exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$U(0, \infty)$	$Gamma(n + 1, \Sigma x)$
$Gamma(\alpha, \lambda)$			$Gamma(\alpha n + 1, \Sigma x +)$
$Geo(p)$	$0 < p < 1$	$U(0, 1)$	$Beta(n + 1, nm - \Sigma x - n + 1)$
$B(m, p)$			$Beta(\Sigma x + 1, nm - \Sigma x + 1)$
$NB(K, p)$			$Beta(nk + 1, nm - \Sigma x + 1)$

§5 Функция ущерба и Байесовские оценки

Чтобы применять метод Байеса для получения выводов о неизвестных параметрах, мы должны выбрать функцию ущерба. Функция ущерба показывает насколько серьезной была бы "ошибка если бы вместо истинного параметра θ приняли $\overline{\theta}$.

Мы можем использовать апостериорное распределение для параметра, чтобы найти ожидаемую потерю, если мы используем в качестве оценки $\overline{\theta}$. Если функция равняется $Loss(\overline{\theta}, \theta)$, то ожидаемая потеря будет равна:

$$E[Loss(\overline{\theta}, \theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} Loss(\overline{\theta}, \theta) f_{post}(\theta) d\theta$$

Оценка Байеса проходит следующим образом:

Нахождение оценки Байеса

Байесовская оценка неизвестного параметра - значение параметра, которое минимизирует ожидаемые потери, базирующееся на апостериорной функции распределения.

Пример 9.5 $x_1, x_2, ..., x_n$ - НОРН, имеющие $N(\mu, \sigma^2)$ распределение, где μ неизвестно, а μ известно. априорное распределение μ - $U(\infty, \infty)$. Найти выражение для ожидаемых потерь, если потери при оценке μ с помощью $\overline{\mu}$ равны $(\overline{\mu} - \mu)^2$. Найдите значение $\overline{\mu}$, которое минимизирует ожидаемые потери.

Решение Из таблицы следует, что апостериорное распределение для μ - $N(\overline{x}, \sigma^2/n)$ Используя функцию ущерба $(\overline{\mu} - \mu)^2$, ожидаемые потери равны:

$$E[(\overline{\mu} - \mu)^2] = \overline{\mu}^2 - 2\mu E(\mu) + E(\mu^2) = \overline{\mu}^2 - 2\mu\overline{x} + \overline{x}^2 + \frac{\sigma^2}{n} = (\overline{\mu} - \overline{x})^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

Ожидаемые потери примут наименьшее значение, когда $\overline{\mu} = \overline{x}$.

В этом примере при использовании квадратичная функции ущерба Байесовская оценка μ оказалась равна $\overline{x}$.

На практике, обычно используются три типа функции ущерба, оказывается, каждая из этих функций дает простую Байесовскую оценку, базирующуюся на апостериорной функции распределения. Это показано в следующей таблице:

Функция ущерба		Байесовская оценка θ
Квадратичная ошибка ущерба	$(\overline{\theta}-\theta)^2$	математическое ожидание апостериорной функции вероятности
Абсолютная ошибка ущерба	$\lvert\overline{\theta}-\theta\rvert$	медиана апостериорной функции вероятности
Бинарная ошибка ущерба	$I[\overline{\theta}\neq\theta]$	мода апостериорной функции вероятности

Бинарная ошибка ущерба определена через функцию-индикатор $I[\overline{\theta}\neq\theta]$, которая принимает значение 0, если присутствует ошибка, и 1 в противном случае.

Пример 9.6 Показать, что при использовании квадратичной функции ущерба, непрерывный параметр θ должен быть оценен с помощью математического ожидания апостериорной функции.

Решение

Мы должны выбрать такое $\overline{\theta}$, которое минимизирует ожидаемые потери $E = E[(\overline{\theta}-\theta)^2]$.

Мы можем раскрыть это выражение

$$E = \overline{\theta}^2 - 2\overline{\theta}E[\Theta] + E[\Theta^2]$$

Для нахождения минимума, продифференцируем по $\overline{\theta}$

$$\frac{dE}{d\overline{\theta}} = 2\overline{\theta} - 2E[\Theta]$$

Выражение принимает значение 0 при $\overline{\theta} = E[\Theta]$, т.е. $\overline{\theta}$ является математическое ожиданием апостериорной функции распределения.

Доказательством, что мы получили минимум функции является:

$$\frac{d^2E}{d\overline{\theta}^2} = 2 > 0$$

Вопрос для самоподготовки 9.5. Показать,что используя функцию бинарной ошибки ущерба, дискретный параметр θ должен быть оценен с помощью моды апостериорной функции.

Вопрос для самоподготовки 9.6. Показать,что используя функцию абсолютной ошибки ущерба, непрерывный параметр θ должен быть оценен с помощью медианы апостериорной функции.

Полученные результаты упрощают нахождение Байесовской оценки.

Пример 9.7 $x_1, x_2, ..., x_n$ - НОРН, имеющие $Gamma(\alpha, \lambda)$ распределение, где λ неизвестна, а α известна. Априорное распределение λ - $Exp(\theta)$, где θ известная константа. Найти Байесовскую оценку λ, используя бинарную ошибку ущерба

Решение Предшествующая функция распределения λ : $e^{-\theta\lambda}$

Функция правдоподобия пропорциональна:

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda^{\alpha} e^{-\lambda x_i} = \lambda^{n\alpha} e^{-\lambda \Sigma x_i}$$

Тогда апостериорное распределение пропорционально :

$$\lambda^{n\alpha} e^{-\lambda \Sigma x_i} * e^{-\theta\lambda} = \lambda^{n\alpha} e^{-\lambda(\Sigma x_i + \theta)}$$

что соответствует распределению $Gamma(n\alpha + 1, \Sigma x_i + \theta)$

Используя бинарную ошибку ущерба, неизвестный параметр оценивается модой апостериорного распределения

После дифференцирования логарифма от функции распределения и приравнивания выражения к 0, находим моду распределения $Gamma(\alpha, \lambda)$. Она равна $\frac{\alpha-1}{\lambda}$

Тогда Байесовская оценка λ имеет вид:

$$\overline{\lambda} = \frac{n\alpha}{\Sigma x_i + \theta}$$

Вопрос для самоподготовки 9.7. Десять НОРН, имеющих распределение $Poisson(\lambda)$, равняются 3,4,3,1,5,5,2,3,3,2.
Предполагая, что априорное распределение λ - $Exp(0.2)$, найти Байесовскую оценку λ, используя квадратичную ошибку ущерба.

§6 Оценка метода Байесовских оценок

Аналогичные процедуры, использующиеся для оценки эффективности (MLE), могут быть применены и к Байесовским оценкам. Мы можем рассмотреть математическое ожидание квадратичной ошибки получаемых оценок и оценить на состоятельность,эффективность и отклонение.

Пример 9.8 Единичное наблюдение используется для оценки параметра биномиального распределения $B(n, \theta)$

1. Покажем, что MLE равно $\overline{\theta} = \frac{x}{n}$

2. Покажем, что Байесовская оценка, использующая неинформативное предыдущее распределение, равна $\widetilde{\theta} = \frac{x+1}{n+2}$

3. Найдем математическое ожидание квадратичных ошибок обеих оценок и сравним их эффективность в случае $n = 100$.

Решение (1) Функция правдоподобия равна $L(\theta) = \binom{n}{k}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$

Тогда прологорифмировав, получим

$$\log L = constant + x \log \theta + (n - x) \log(1 - \theta)$$

Продифференцируем по θ

$$\frac{d}{d\theta} \log L = \frac{x}{\theta} - \frac{n - x}{1 - \theta}$$

Приравнивая полученное к 0 и упростив выражение, получим:

$$\overline{\theta} = \frac{x}{n}$$

Используя предыдущую функцию распределения, которая однородна на (0,1), получаем:

$$Post(\theta) = constant * \theta^x(1 - \theta)^{n-x}, 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

Получили формулу beta-распределения с параметрами $\lambda = x+1$ и $\beta = n-x+1$. Таким образом, Байесовская оценка с использованием квадратичной ошибки ущерба является математическим ожиданием beta-распределения:

$$\widetilde{\theta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{x + 1}{x + 1 + n - x + 1} = \frac{x + 1}{n + 2}$$

(3) Математическое ожидание и дисперсия наблюдений биномиального распределения $B(n, \theta)$ равны $E(X) = n\theta$ и $Var(X) = n\theta(1 - \theta)$ соответственно. Тогда для $\overline{\theta}$ имеем:

$$E(\theta) = \frac{1}{n}E(X) = \theta$$

Тогда $\overline{\theta}$ не искажено для θ и математическое ожидание квадратичной ошибки равно:

$$Var(\overline{\theta}) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{1}{n^2}n\theta(1-\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

Для $\widetilde{\theta}$ имеем:

$$E(\widetilde{\theta}) = x\left(\frac{X+1}{n+2}\right) = \frac{n\theta+1}{n+2} \neq \theta$$

Тогда $\widetilde{\theta}$ имеет искажение равное:

$$\frac{n\theta+1}{n+2} - \theta = \frac{1-2\theta}{n+2}$$

Тогда математическое ожидание квадратичной ошибки $\widetilde{\theta}$:

$$MSE(\widetilde{\theta}) = Var(\widetilde{\theta}) + [Bias(\widetilde{\theta})]^2 = Var\left(\frac{X+1}{n+2}\right) + \left(\frac{1-2\theta}{n+2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2}Var(X) + \left(\frac{1-2\theta}{n+2}\right)^2 = \frac{1+(n-4)\theta-(n-4)\theta^2}{(n+2)^2}$$

При $n = 100$ MSE равны:

$$MSE(\overline{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{100} \text{ и } MSE(\widetilde{\theta}) = \frac{1+96\theta-96\theta^2}{102^2}$$

Мы можем найти значение θ. для которого $MSE(\overline{\theta})$ меньше :

$$\frac{\theta(1-\theta)}{100} \leqslant \frac{1+96\theta-96\theta^2}{102^2} \Rightarrow 1000 - 804\theta + 804\theta^2 \geqslant 0$$

Решив квадратное неравенство, получим: $\theta \leqslant 0.146$ или $\theta \geqslant 0.854$.

Таким образом, для больших и маленьких значений θ ($\theta \leqslant 0.146$ или $\theta \geqslant 0.854$), $\overline{\theta}$ имеет меньшее MSE и является более эффективной оценкой. Для значений θ между 0.146 и 0,854, $\widetilde{\theta}$ имеет меньшее MSE и является более эффективной оценкой.

§7 Байесовские доверительные интервалы

Мы использовали апостериорное распределение, чтобы найти точки оценки параметра распределения, используя математическое ожидание, медиану или моду апостериорного распределения.

Мы можем также использовать апостериорное распределение, чтобы найти оценку интервала значений параметра, используя стандартный подход применения доверительных интервалов. Действительно, выражения типа $P(1.54 < \theta < 2.68) = 0.95$, являются теперь значащими, так как мы рассматриваем θ как случайную величину, тогда как используя традиционный подход значение θ была фиксированной, но неизвестной.

Вопрос для самоподготовки 9.8. Используя данные задачи 5.7, найти приблизительный на 95% Байесовский доверительный интервал для λ

Вопрос для самоподготовки 9.9. Из $LogN(\mu, 8)$ распределения был взята выборка объемом, равным 10. Из выборки следует, что $\Sigma \log x_i = 49.32$. Используя метод Байесовского анализа с неинформативной априорной функцией, найти 95% доверительный интервал для μ.

В заключении этой главы приведем пример типичного вопроса на экзамене по третьей главе.

Пример 9.9 Пусть $X_1, ..., X_n$ - случайная выборка, имеющая экспоненциальное распределение с параметром $\theta > 0$, имеющая плотность распределения:

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0$$

1.
   а Покажите, что сопряженная предыдущая функция распределения для - $Gamma(\alpha, \lambda)$, и следовательно определите полностью апостериорное распределение θ.

   б В частном случае математическое ожидание и стандартное отклонение предыдущей функции равно 2.0 и 0.2, соответственно. Запишите соответствующую предыдущую Gamma функцию.

2.
   а Математическое ожидание случайной выборки объема 50 равно $\overline{x} = 0.48$. Используя предыдущую функцию из части (1)(б), получите апостериорную функцию распределения θ и следовательно определите Байесовскую оценку θ, используя квадратичную ошибку ущерба.

   б Объясните, почему апостериорное распределение может быть аппроксимировано подходящим нормальным распределением.

   в Используйте нормальную аппроксимацию для определения 95% Байесовского интервала для θ.

Решение (1)(a)
Функция правдоподобия равна:

$$L(\theta) = \theta e^{-\theta x_1} \theta e^{-\theta x_2} ... \theta e^{-\theta x_n} = \theta^n e^{-\theta \sum x_i}$$

Рассматривая неизвестный параметр θ как случайную величину, получаем выражение в форме Gamma - распределения. Следовательно Gamma - распределение является сопряженным априорным распределением в данном случае.

Используя $Gamma(\alpha, \lambda)$ в качестве априорного распределения для θ, получим апостериорное распределение, пропорциональное априорному распределению, помноженному на функцию правдоподобия:

$$Post(\theta) \propto \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta} * \theta^{n}e^{-\theta\sum x_i} \propto \theta^{n+\alpha-1}e^{-(\lambda+\sum x_i)\theta}$$

Это другое Gamma-распределение с параметрами $n = \alpha$ и $\lambda + \sum x_i$.

(б) Используя формулу для математическое ожидания и дисперсии, получаем:
$\frac{\alpha}{\lambda} = 2.0$ $\frac{\alpha}{\lambda^2} = 0.2^2$

Решая уравнения получим $\alpha = 100$ и $\lambda = 50$

(2)(а) Используя полученные результаты, имеем апостериорное распределение - Gamma-распределение с параметрами:
$n + \alpha = 150$ и $\lambda + \sum x_i = 74$

Тогда Байесовская оценка θ с использованием квадратичной ошибки ущерба - математическое ожидание $Gamma(150, 74)$.

$$\overline{\theta} = \frac{150}{74} = 2.027$$

(б) Коэффициент асимметрии Gamma-распределения равен $2/\sqrt{\alpha}$, который является небольшим для α. Т.к. $\alpha = 150$ и коэффициент распределение мал, апостериорное распределение является симметричным. Следовательно хорошо подходит нормальная аппроксимация.

В качестве альтернативы, можно представить это Gamma-распределение как сумма 150 экспоненциальных распределений, каждое из которых имеет параметр $\lambda = 74$. Т.к. мы суммируем большое количество одинаковых случайных величин, из центральной предельной теоремы следует, что и результирующее распределение также будет нормальным.

(в) 95% доверительный интервал для $N(\mu, \sigma^2)$ распределения равен $\mu \pm 1.96\sigma$. Мы использовали нормальное распределение с такими же математическое ожиданием и дисперсией как и у апостериорного Gamma-распределения, т.е. $\mu = 2.027$ и $\sigma^2 = \frac{150}{74^2} = 0.02739$

Следовательно, Байесовский интервал для θ равен:

$$2.027 \pm 1.96\sqrt{0.02739} = (1.703, 2.351)$$

§8 Краткое изложение

Баесовский подход к статистическому выводу, который базируется на Баесовской формуле, предполагает априорное распределение для неизвестного параметра. Функция правдоподобия в этом случае определяется на основе множества наблюдений. Объединяя полученное, выводится апостериорное распределение для неизвестного параметра.

Во многих ситуациях есть естественное априорное распределение, использование которого ведет к сопряженному априорному и апостериорному распределению.

Функция ущерба, например квадратичная ошибка ущерба, абсолютная ошибка ущерба или бинарная ошибка ущерба, выбирается для определения серьезности неправильной оценки.

§9 Формулы

Формула Байеса

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_i P(B|A_i)P(A_i)} \text{ дискретная форма}$$

$$f(\theta|B) = \frac{P(B|\theta)f(\theta)}{\int P(B|\theta)f(\theta)d\theta} \text{ непрерывная форма}$$

Апостериорное распределение

Апостериорное распределение $\propto$ Априорное распределение $*$ Функция правдоподобия

Глава 10

Основы теории–Методы Байеса

§1 Введение

Байесовская теория предлагает совершенно другой подход к статистике. Байесовская версия оценки, рассмотренная здесь, касается основных ситуаций оценки параметра распределения случайной выборки. Классическая оценка заключается в методе нахождения максимума функции правдоподобия.

Фундаментальное различие в Баейсовского подхода от классического заключается в том, что параметр θ рассматривается как случайная величина.

В классической статистике θ фиксирована, но неизвестная величина. Данное предположение приводит к трудностям в интерпретации, требующейся для классических доверительных интервалов, которые являются случайными. После взятия данных по наблюдениям и расчета числового интервала, отпадает предположение о вероятности. Т.е. выражение $P(10.45 < \theta < 13.26) = 0.95$ не имеет смысла, т.к. θ не является случайной величиной.

В Байесовской статистике таких трудностей не возникает, и вероятностные утверждения могут быть применены относительно значений параметра θ.

§2 Теорема Байеса

Пусть $B_1, ..., B_k$ некоторые попарно несовместимые события пространства элементарных событий S, такие что $P(B_i) \neq 0$ для $i = 1, ..., k$, тогда для некоторого события $A \in S$ и $P(A) \neq 0$ верно:

$$P(B_r|A) = \frac{P(A|B_r)P(B_r)}{P(A)}, \text{где } P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)$$

для $r = 1, ..., k$

Пример 10.10
Три изготовителя поставляют одежду розничному продавцу. 60 % одежды прибывают от изготовителя 1, 30 % от изготовителя 2 и 10 % от изготовителя 3. 10 % одежды от изготовителя 1, 5% от изготовителя 2 и 15% от изготовителя 3 являются дефектными. Определить вероятность, поступления дефектной одежды от изготовителя 3.

Решение Пусть A - событие, что прибыла дефектная одежда.

Пусть B_i - событие, прибыла одежда от производителя i. Согласно Байесовской теореме получаем:

$$P(B_3|A) = \frac{(0.15)(0.1)}{(0.1)(0.6) + (0.05)(0.3) + (0.15)(0.1)} = \frac{0.015}{0.09} = 0.167$$

Хотя производитель 3 поставляет только 10% одежды, его доля в поставке дефектной одежды составляет около 17%.

§3 Априорные и апостериорные распределения

Предположим, что $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ случайная выборка с плотностью или функцией вероятности $f(x; \theta)$ и требуется оценить параметр θ.

Т.к параметр θ - случайная величина, она будет иметь распределение. Это позволяет использовать любые доступные предположения о возможных значениях для θ до получения каких-либо значений. Эти предположения выражаются через априорное распределение .

Затем после получения подходящих значений, определяется апостериорное распределение θ, и формируются основные выводи касающиеся θ.

3.1 Замечания

Т.к θ - случайная величина, она должна обозначаться Θ и ее априорная плотность должна записываться как $f_\Theta(\theta)$. Однако, для простоты нет мы не различаем Θ и θ, плотность параметра обозначается как $f(\theta)$. Заметим, что предполагается, что θ непрерывная случайная величина. Это предположение остается верным, даже в случае если X дискретная случайная величина, например имеющая Биномиальное или Пуассоновское распределение с параметрами (p или λ), принимающими непрерывное значение ((0,1) и $(0, \infty)$ соответственно).

3.2 Определение апостериорной плотности

Предположим $\underline{X}$ случайная выборка с $f(x|\theta)$ и θ имеет априорную плотность $f(\theta)$.

Апостериорная плотность $\theta|\underline{X}$ определяется, используя определение условной плотности:

$$f(\theta|\underline{X}) = \frac{f(\theta, \underline{X})}{f(\underline{X})} = \frac{f(\underline{X}|\theta)f(\theta)}{f(\underline{X})}$$

Заметим, что $f(\underline{X}) = \int f(\underline{X}|\theta)f(\theta)d\theta$. Этот результат аналогичен непрерывной версии Байесовской теоремы.

Часто удобно записать полученный результат в терминах статистики, обозначая случайную выборку $\overline{X}$:

$$f(\theta|\overline{X}) = \frac{f(\overline{X}|\theta)f(\theta)}{f(\overline{X})}$$

На практике эти обозначения эквивалентны.

Удобным способом обозначения апостериорной плотности - использование пропорциональности. $f(\underline{X})$ не определяет θ единственным образом. Для достижения единственности требуется определение константы. Следовательно:

$$f(\theta|\underline{X}) \propto f(\underline{X}|\theta)f(\theta)$$

Также заметим, что $f(\underline{X})$ - совместная плотность распределения элементов выборки не является чем-то отличным от функции правдоподобия. Таким образом апостериорное распределение пропорционально функции правдоподобия.

Для данной функции правдоподобия, если априорное распределение приводит к апостериорному распределению, принадлежащему тому же семейству, что и априорное распределение, тогда априорное распределение называют сопряженным априорным для этой функции правдоподобия.

§4 Функция ущерба

Чтобы получить оценку параметра θ, необходимо для начала определить функцию ущерба. Это мера понесенных ущерба, при использовании $g(\underline{X})$ в качестве оценки параметра θ. Функция ущерба выбрана так, что она принимает значение ноль, когда оценка точна, что значит $g(\underline{X}) = \theta$, и принимает положительное значение и не возрастает, когда $g(\underline{X})$ далека от θ. Существует одна наиболее часто используемая функция ущерба, называемая квадратичная ошибка ущерба. Две остальные также применяются на практике.

Таким образом, Байесовская оценка $g(\underline{X})$ минимизирует ожидаемые потери при выводе апостериорного распределения.

Главная функция ущерба - квадратичные потери определена формулой:

$$L(g(\underline{x}), \theta) = [g(x) - \theta]^2$$

аналогом ее в классической статистике является среднеквадратичная ошибка.

Вторая функция ущерба - абсолютная ошибка ущерба определяется формулой:

$$L(g(\underline{x}), \theta) = |g(x) - \theta|$$

Третья функция ущерба - "0/1" или "все-ничего" потеря определяется формулой:

$$L(g(\underline{x}), \theta) = \begin{cases} 0, \text{ при } g(x) = \theta \\ 1, \text{ при } g(x) \neq \theta \end{cases}$$

Байесовской оценкой, которая достигается минимизацией ожидаемых потерь, для каждой из этих трех функций ущерба является математическое ожидание, медиана и мода апостериорного распределения соответственно. Ожидаемые апостериорные потери равны:

$$EPL = E[L(g(\underline{x}), \theta)] = \int L(g(\underline{x}), \theta) f(\theta|\underline{x}) d\theta$$

4.1 Квадратичная ошибка ущерба

Для простоты будем писать g вместо $g(\underline{x})$.

$$EPL = \int (g-\theta)^2 f(\theta|\underline{x}) d\theta$$

$$\frac{d}{dg} EPL = 2 \int (g-\theta) f(\theta|\underline{x}) d\theta$$

Приравнивание к нулю $\Rightarrow g \int f(\theta|\underline{x}) d\theta = \int \theta f(\theta|\underline{x}) d\theta$

но $\int f(\theta|\underline{x}) d\theta = 1$ более того $g = \int \theta f(\theta|\underline{x}) d\theta = E[\theta|\underline{x}]$.

Ясно, что это минимизирует EPL/

Получили, что Байесовская оценка с использованием квадратичной потери является математическое ожиданием апостериорного распределения.

4.2 Абсолютная ошибка ущерба

Снова для простоты будем писать g вместо $g(\underline{x})$.

$$EPL = \int |g-\theta| f(\theta|\underline{x}) d\theta$$

Предполагая, что θ принимает значения из интервала $(-\infty, \infty)$, получаем:

$$EPL = \int\limits_{-\infty}^{g} (g-\theta) f(\theta|\underline{x}) d\theta + \int\limits_{g}^{\infty} (\theta - g) f(\theta|\underline{x}) d\theta$$

Более того:

$$\frac{d}{dg} EPL = \int\limits_{-\infty}^{g} f(\theta|\underline{x}) d\theta - \int\limits_{g}^{\infty} f(\theta|\underline{x}) d\theta$$

[Используется формула $\frac{d}{dy} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) dx = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) dx + b'(y) f(b(y), y) - a' f(a(y), y)$]

приравнивая к нулю получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{g} f(\theta|\underline{x}) d\theta = \int\limits_{g}^{\infty} f(\theta|\underline{x}) d\theta$$

Следовательно $P(\theta \leqslant g) = P(\theta \geqslant g)$

откуда следует медиана апостериорного распределения.

4.3 Бинарная ошибка ущерба

Вместо подхода дифференцирования будет использован прямой подход с ограничениями.

Рассмотрим

$$L(g(\underline{x}), \theta) = \begin{cases} 0, \text{ при } g - \epsilon < \theta < g + \epsilon \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}$$

Тогда при $\epsilon \to 0$ получаем требуемую функцию ущерба.

$$EPL = 1 - \int\limits_{g-\epsilon}^{g+\epsilon} f(\theta|\underline{x})d\theta = 1 - 2\epsilon f(\theta|\underline{x})$$

для маленьких значений ϵ.

Приравняв g к моде $f(\theta|\underline{x})$ получим минимум этого выражения.

Пример 10.11 Для оценки биномиальной вероятности θ единичного наблюдения X с априорным распределением θ - $Beta(\alpha, \beta)$ исследуйте форму апостериорного распределения θ и определите Байесовскую оценку θ, используя квадратичную ошибку ущерба.

Решение Используя отношение пропорциональности, можем опустить любые константы. Таким образом, получаем:

Априорное распределение: $f(\theta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$,опуская константу $\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$

Функция правдоподобия: $f(\theta|X) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}$, пропуская константу $\binom{n}{k}$.

Следовательно $f(\theta|X) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} = \theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1}$

можно заметить, что не принимая во внимание пропущенные константы, получаем плотность Beta - распределения случайной величины. Более того получаем апостериорное распределение θ с параметрами $(x+\alpha)$ и $(n-x+\beta)$.

Также можно заметить, что апостериорная плотность и априорная плотность принадлежат одному семейству распределений. Следовательно, сопряженное априорное распределение для биномиального распределения - Beta-распределение. Байесовская оценка с использованием квадратичной ошибки ущерба - математическое ожидание этого распределения: $\frac{x+\alpha}{(x+\alpha)(n-x+\beta)} = \frac{x+\alpha}{n+\alpha+\beta}$

§5 Вопросы студентам

В1 Используется ли метод Байеса?

О1 Метод достаточно часто используется, например, в общем страховании в теории доверия, которую мы рассмотрим в главе 6.

В2 Не является ли метод Байеса произвольным, т.к. вы можете выбрать любую априорную и апостериорную функцию?

О2 Во многих ситуациях априорное распределение выбирается согласно фактически наблюдаемому распределению, как показано в наших примерах. Функция правдоподобия должна основываться на серьезности недооценки истинного значения, например, снижение прибыли компании в случае планирования на основе ложных значений. Таким образом, предположения не настолько произвольны, как может показаться на первый взгляд.

Однако, существует некоторая степень произвольности в любых методах статистической оценки. Например, метод моментов произвольно присваивает ожидаемую степень, вместо некоторого другого набора функций. В то же время, метод максимального правдоподобия подразумевает использование неинформативной априорной функции и функции бинарной ошибки ущерба, получаемые через предположения. Байесовский подход пытается охватить всю доступную информацию, делая очевидные предположения.

В3 Функция бинарная ошибки ущерба, кажется, не является непрерывным распределением. Т.к. вы не можете точно

оценить неизвестный параметр, вы уверены, что не ошибаетесь каждый раз?

О3 Вы правы. Для непрерывных распределений функция бинарная ошибки ущерба является математической идеализацией. Она похожа на обобщенную функцию Дирака дельта $\delta(x-a)$, которая используется в физике. Эта функция принимает значение 0 везде, кроме точки $x=a$, а в этой точке она неопределена. Однако, она имеет полезное свойство: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a)$, что может быть использовано для упрощения вычислений.

5.1 Подсказки для ответов на вопросы

1. Основные вопросы по данной главе заключаются в нахождении апостериорного распределения и дальнейшего его использования для решения задачи.

2. При нахождении апостериорного распределения следует учитывать следующее:

   - в априорной и апостериорной функции распределения неизвестный параметр рассматривается как случайная величина, следовательно этот параметр занимает место x в формуле функции распределения.

   - существует множество одинаковых по значению переменных, например λ и λ' или μ и m.

   Поэтому важно понимать значение переменных и помнить:

   - в априорном и апостериорном распределении вы принимаете параметр распределения (например θ) за случайную переменную

   - и функция правдоподобия - функция от неизвестного параметра, а наблюдаемая случайная величина принимается за константу.

3. Функция квадратичной ошибки ущерба - наиболее часто используемая функция, поэтому убедитесь, что вы правильно поняли ее применение.

4. Заметим, что вам нет необходимости запоминать таблицу сопряженных функций, но на экзамене вас могут спросить их вывод.

§6 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 5.1

Число людей, делающих вычисления без ошибок равно:

	Могут	Не могут	Всего
Актуарии	60	40	100
Бухгалтера	80	120	200
Всего	140	160	300

Итак вероятность, что представитель, кто думает, что $2+3=4$ является актуарием равна $40/160 = 1/4$

Решение 5.2

Определим следующие события (где h мала)

A_S : индивидуальный иск типа S
A_M : индивидуальный иск типа M
A_L : индивидуальный иск типа L
B : размер индивидуального иска лежит между \$5000 и \$$(5000+h)$
Для данного θ вероятность события B равна:

$$P(B|\Theta=\theta) = \int\limits_{5000}^{5000+h} \frac{2\theta^2}{x^3}dx$$

Мы можем аппроксимировать интеграл, используя типичное значение функции, умноженное на длину интервала

$$P(B|\Theta=\theta) \doteq \frac{2\theta^2}{5000^3}h$$

Отсюда получаем следующие вероятности:

$$P(B|\Theta=\theta_S) = \frac{2*100^2}{5000^3}h = 0.00000016h$$

$$P(B|\Theta=\theta_M) = \frac{2*1000^2}{5000^3}h = 0.000016h$$

$$P(B|\Theta=\theta_L)=\frac{2*2500^2}{5000^3}h=0.0001h$$

Известно, что
$P(\Theta=\theta_S)=0.80$
$P(\Theta=\theta_M)=0.15$
$P(\Theta=\theta_L)=0.05$

Используя формулу Байеса, получаем:

$$\begin{aligned}
&P(\Theta=\theta_S|B)\\
&\quad=\frac{P(B|\Theta=\theta_S)P(\Theta=\theta_S)}{P(B|\Theta=\theta_S)P(\Theta=\theta_S)+P(B|\Theta=\theta_M)P(\Theta=\theta_M)+P(B|\Theta=\theta_L)P(\Theta=\theta_L)}\\
&\quad=\frac{0.00000016h*0.80}{0.00000016h*0.80+0.000016h*0.15+0.0001h*0.05}\\
&\quad=0.0170
\end{aligned}$$

Аналогично:
$P(\Theta=\theta_M|B)=0.3188$
$P(\Theta=\theta_L|B)=0.6642$

Итак, апостериорная вероятность типа S,L и M равна 1.70%, 31.88% и 66.42%.

(Далее мы рассмотрим более легкий подход к решению подобной проблемы через пропорции.)

Решение 5.3

Вероятность выбрать 1 красную и 2 черных карты из колоды, состоящей из R красных карт равна:

$$3*\frac{R(52-R)(51-R)}{52*51*50}$$

т.к. каждая из ситуаций : (RBB),(BRB),(BBR) - имеет одинаковую вероятность.

Функция правдоподобия равна:
$P(1\text{кр.}+2\text{чер.}|R=0)=0$
$P(1\text{кр.}+2\text{чер.}|R=13)=3(13)(39)(38)/(52)(51)(50)=114k$
$P(1\text{кр.}+2\text{чер.}|R=26)=3(26)(26)(25)/(52)(51)(50)=100k$
$P(1\text{кр.}+2\text{чер.}|R=39)=3(39)(13)(12)/(52)(51)(50)=36k$
$P(1\text{кр.}+2\text{чер.}|R=52)=0$
где $k=\frac{3*13^2}{52*51*50}$

Функция априорного распределения является константой (1/5 в каждом случае), т.к. выбирается один случайным образом.

Тогда из формулы "Апостериорное распределение$\propto$ Априорное распределение $*$ Функция правдоподобия апостериорное распределение того, что $R = 0, 13, 26, 39, 52$ следующее:
0, 45.6%, 40%, 14.4%, 0

Решение 5.4

Априорное распределение λ $Exp(\lambda')$ плотностью
$e^{\lambda'\lambda}$, $\lambda > 0$

X_i имеют $Exp(\lambda)$ распределение, поэтому функция правдоподобия пропорциональна
$\lambda^n e^{-(\sum x_i + \lambda')\lambda}$ $\lambda > 0$

Сравнивая полученную формулу с распределениями в таблице, видим, что она имеет ту же форму и значения, что и Gamma-распределение (помните, что λ - случайная величина) с параметрами $n + 1$ и $\sum x_i + \lambda'$

Решение 5.5

Нам необходимо выбрать такое $\overline{\theta}$, чтобы минимизировать ожидаемые потери $E = E[I(\overline{\theta} \neq \theta)]$.
Из определения соотношения и индикатора следует, что выражение равно $1 * P(\overline{\theta} \neq \theta)$.
Итак нам необходимо выбрать такое $\overline{\theta}$, чтобы минимизировать вероятность того, что она не равна θ или максимизировать вероятность того, что она равна θ.
По определению это достигается выбором моды апостериорного распределения θ.

Решение 5.6

Нам необходимо выбрать такое $\overline{\theta}$, чтобы минимизировать ожидаемые потери $E = E[|\overline{\theta} - \theta|]$.

Если $f(\theta)$ апостериорное распределение, мы можем разделить соотношение на две части:

$$E = \int\limits_{-\infty}^{\overline{\theta}} (\overline{\theta} - \theta) f(\theta) d\theta - \int\limits_{\overline{\theta}}^{\infty} (\overline{\theta} - \theta) f(\theta) d\theta$$

Дифференцируя по $\overline{\theta}$, получаем:

$$\frac{E}{d\overline{\theta}} = \int\limits_{-\infty}^{\overline{\theta}} f(\theta) d\theta - \int\limits_{\overline{\theta}}^{\infty} f(\theta) d\theta$$

Приравнивая к нулю, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\overline{\theta}} f(\theta) d\theta = \int\limits_{\overline{\theta}}^{\infty} f(\theta) d\theta$$

Итак,$\overline{\theta}$ - медиана апостериорного распределения.

Решение 5.7

Апостериорное распределения для Пуассоновской функции правдоподобия и априорное распределение даны в таблице, как $Gamma(\sum x + 1, n + \lambda')$ (Проверьте, что вы можете получить эти результаты). Имеем $n = 10, \sum x = 31, \lambda' = 0.2$.
Следовательно апостериорное распределение для λ - $Gamma(32, 10.2)$.
Используя квадратичную функцию ущерба, получаем, что Байесовская оценка - математическое ожидание апостериорного распределения, т.е. $\overline{\lambda} = \frac{32}{10.2} = 3.14$

Решение 5.8

Апостериорное распределение для λ - $Gamma(32, 10.2)$.
Используя то, что если X имеет $Gamma(\alpha, \delta)$, тогда $2\delta X$ - $\chi^2_{2\alpha}$, имеем 20.4λ имеет χ^2_{64} распределение.
Интерполируя данные таблицы между χ^2_{60} и χ^2_{70} получаем
$0.95 \doteq P(43.79 < 20.4\lambda < 87.99) = P(2.15 < \lambda < 4.31)$
Таким образом 95% Байесовский доверительный интервал для λ равен (2.15,4.31).

Решение 5.9

Из таблиц результатов, представленных раньше в главе, получаем, что апостериорная вероятность для μ равна $N\left(\frac{49.32}{10}, \frac{8}{10}\right) = N(4.932, 0.8)$.
Итак 95% доверительный интервал равен:
$4.932 \pm 1.96 * \sqrt{0.8} = (3.18, 6.69)$

Часть VI

Глава 11

Теория правдоподобия

Цели главы

К концу данной главы вы будете уметь:

- объяснять и использовать факторы доверия
- вычислять факторы доверия и правдоподобные премии, используя байесовский подход
- описывать и применять модели Пуассоновского/Гамма и Нормального/Нормального распределений
- описывать и применять две эмпирические байесовские модели

§1 Введение

В данной главе мы рассмотрим теорию правдоподобия, представляющую из себя технику для вычисления премий или частот исков при общих видах страхования.

Будет рассмотрен байесовский подход к правдоподобию, а также две модели, называемые эмпирическими байесовскими моделями правдоподобия.

Теория правдоподобия изучается с практической точки зрения в приложении G.

Мы будем использовать теорию байесовской оценки, рассмотренную в предыдущей главе (Байесовские методы). Вам следует кратко просмотреть её, если вы что-то забыли.

Алгебра, используемая в эмпирических байесовских моделях правдоподобия, которые мы изучим в этой главе, очень сложна для понимания, и все студенты находят данную тему достаточно сложной. Не позволяйте себе слишком глубоко увязнуть в математике в этой части и не заучивайте формулы (большинство из них приведены в *Таблицах*). Сконцентрируйтесь на понимании разницы между различными моделями и на ходе решения числовых примеров.

Краткий конспект главы также достаточно сложен. Опять же, постарайтесь разрабатывать умение понимать различия между моделями для улучшения своего понимания теории.

§2 Правдоподобие

2.1 Факторы доверия

Компании, осуществляющие общие виды страхования, обычно определяют величины премий для конкретного вида риска путем анализа полученных исков и издержек для этого типа риска.

В то же время, во многих ситуациях страховщик не имеет в наличии достаточного количества данных, относящихся к конкретному типу риска (*прямых данных*), для вычисления величины премии с достаточной уверенностью. Тем не менее, страховщик может располагать другой информацией (*сопутствующие или вспомогательные данные*), которая, возможно, даст хорошее указание относительно верного размера премии. В идеальном случае, страховщик хотел бы использовать всю имеющуюся информацию путем объединения прямых и вспомогательных данных.

Пример 11.1 Опишите три ситуации, упоминая конкретные виды страхования, в которых страховщик может определять величину премии, объединяя прямые данные относительно риска со вспомогательными.

Решение

Новый вид покрытия

Страховщик, предлагающий новый вид покрытия (например, защита от повреждений, вызванных падением спутниковой тарелки), изначально не будет иметь достаточно прямых данных от исков по новым полисам для точного определения премии. Страховщик может использовать данные об исках в близких, хорошо определенных типах покрытий (например, падение ТВ антенн), как сопутствующую информацию в течение первых нескольких лет. Как только компания продаст достаточное количество новых полисов, модель исков, вызванных спутниковыми тарелками, станет яснее и страховщик сможет делать больший акцент на прямых данных.

Необычные риски

Страховщик, страхующий небольшое количество иностранных автомобилей определенной модели, не будет иметь достаточно прямых данных для этой модели автомобилей для установки соответствующей премии. Он может использовать опыт прошлых исков по близким типам иностранных автомобилей как вспомогательные данные Страховщик может никогда и не получить достаточное количество данных для точного определения риска на основе прямых данных.

Опытная оценка

Страховщик, страхующий парк автомобилей, используемых компанией средней величины, возможно захочет взимать премию на основе сопутствующих данных, полученных от парка автомобилей как единого целого, но в то же время рассматривается и прошлый опыт, полученный с помощью прямых данных для конкретного парка. Если статистика аварий для компании была хорошей, то она заплатит премию меньше средней.

Одним из способов объединения прямых и вспомогательных данных для определения величины премии является использование взвешенной средней премии, полученной с помощью прямых и вспомогательных данных.

Формула правдоподобия

Если Z есть фактор доверия, то премия вычисляется как:

$$P = Z\overline{X} + (1 - Z)\mu$$

где $\overline{X}$ премия, основанная на прямых данных, а μ премия, основанная на вспомогательных данных

Формула правдоподобия также может быть использована для оценки как частоты исков, так и рисковых премий.

Свойства фактора доверия

Величина премии P является линейной функцией фактора доверия Z. Фактор доверия Z принимает значения из диапазона $0 \leqslant Z \leqslant 1$

Интерпретация различных значений фактора доверия представлена в следующей таблице.

Фактор доверия	Доверие	Премия	Формула
$Z = 1$	Полное доверие	Премия целиком определяется исходя из прямых данных	$P = \overline{X}$
$0 < Z < 1$	Частичное доверие	Премия определяется как взвешенная сумма	$P = Z\overline{X} + (1 - Z)\mu$
$Z = 0$	Отсутствие доверия	Премия целиком определяется из вспомогательных данных	$P = \mu$

Доказательство. Эти свойства напрямую вытекают из формулы $P = Z\overline{X} + (1-Z)\mu$ $\square$

Пример 11.2 Специалист страховщика, осуществляющего страхование от поломок копировального оборудования, вычисляет премии, используя формулу правдоподобия. Основываясь на последнем опыте компании относительно всех моделей копиров, премия на текущий год должна равняться 100 за один копир. Опыт компании относительно новой модели копира, который считается более надежным, показывает, что премия должна быть равной 60 за одну машину. Какую величину премии должен взимать страховщик за страхование новой модели, если величина фактора доверия равна 0.75?

Решение Премия, основанная на вспомогательных данных (включая все машины), равна $\mu = 100$
Премия, основанная на прямых данных (новая модель) $\overline{X} = 60$ Таким образом, формула правдоподобия при $Z = 0.75$ дает нам следующую величину премии:

$$P = 0.75 * 60 + 0.25 * 100 = 70$$

Вопрос для самоподготовки 11.1. Начертите график взимаемой премии как функции фактора доверия для данного примера.

2.2 Полное и частичное доверие

Когда страховщики используют формулу правдоподобия для вычисления премий или определения размеров бонусов, выплачиваемых владельцам полисов в соответствии с рейтинговой системой, они должны вычислять величину фактора доверия, используя подходящую статистическую формулу.

Пример 11.3 Показать при каких значениях параметров формулы:

$$Z_1 = min\left\{\frac{m_0+\phi}{m_0}\frac{M}{M+\phi}, 1\right\},\ Z_2 = min\left\{(M/m_0)^{1/2}, 1\right\}$$

могут рассматриваться как подходящие для использования при вычислении факторов доверия для данного риска. M означает число поданных исков по данному полису, а ϕ и m_0 - положительные константы.

Решение Эти формулы обладают следующими свойствами, которые должна иметь формулы правдоподобия

1. Значения Z_1 и Z_2 должны лежать в диапазоне от 0 до 1 0. Для каждого из определений фактор доверия равен 0 при $M = 0$ и равен 1 при $M \geqslant m_0$

2. Вычисляемые значения возрастают так же как и объем данных, относящихся к риску (отображаются величиной M).

3. Функции хорошо себя "ведут"с математической точки зрения и просты для вычисления.

Формулы, используемые для вычисления фактора доверия, обычно могут принимать значение, соответствующее полному доверию (фактор доверия при этом равен 1). В то же время ради упрощения (а так же по рыночным причинам) страховщики обычно решают, что когда фактор доверия превышает определенный уровень (близкий к 1), то риск имеет *полное доверие*, т.е. при расчетах используется фактор доверия равный 1.

Вопрос для самоподготовки 11.2. Полным доверием к большим рискам, входящим в один класс, страховщиком считается то, что если статистика *полностью достоверна (5%,90%)*, т.е. если вероятность того, что реальное число исков в определенном году лежит в пределах 5% отклонения от ожидаемого числа равна как минимум 90%. Страховщик предполагает, что число исков имеет распределение Пуассона $Poisson(\lambda)$ в любом году (где λ фиксировано, но неизвестно.)

Покажите, что, используя этот критерий, риск можно считать полностью достоверным при условии, что число прошедших исков составило не менее 1082.

2.3 Цели моделей правдоподобия

Модели правдоподобия используются для определения соответствующего уровня премий для страхового портфеля, в котором уровень риска различен для различных типов риска[1]

Мы рассмотрим два различных подхода: *Байесовский* подход и *Эмпирическое байесовское правдоподобие* (ЕВС).

Цель моделей оценить одно из следующих значений для каждого индивидуального риска:

- ожидаемая частота исков по риску, которое затем может быть использовано совместно со средней величиной иска для вычисления "истинной"премии за риск.

- ожидаемая суммарная величина иска по конкретному виду риска, которая определяет "истинную"премию напрямую.

[1]Здесь слово "риск"означает индивидуальный полис или группу полисов с близкими характеристиками

В моделях используется предположение, что возможные иски по каждому конкретному полису зависят от *параметра риска* (обозначаемого θ), который изменяется от полиса к полису. Во всех моделях θ считается случайной величиной. Различные модели строят различные предположения относительно статистических свойств θ и его отношения к возможным искам по каждому полису.

Основное отличие между байесовским подходом и EBC заключается в сделанных предположениях. Байесовский подход предполагает определенный вид распределения параметра θ и условного распределения исков для риска при фиксированном θ. EBC модели не делают каких-либо специфических предположений относительно распределения θ и используют только глобальные свойства (среднее и дисперсию) условного распределения исков.

Вопрос для самоподготовки 11.3. Запишите каждое из следующих выражений в более простом виде, который может быть легче для вычисления.X и Y являются случайными величинами. f и g - произвольные функции. Укажите, является ли каждое из выражений функцией от X, Y или ни того, ни другого.

1. $E[E(X|Y)]$
2. $Var[E(X|Y)] + E[Var(X|Y)]$
3. $E[f(X)g(X,Y)|X]$

§3 Байесовский подход к принятию решений

3.1 Общий способ

Байесовский подход к правдоподобию включает в себя следующие элементы:

Априорное распределение параметра

Априорное распределение параметра подобрано для описания возможных значений неизвестного параметра исходя из анализа частоты исков. Форма априорного распределения должна быть получена из информации, предоставленной вспомогательными данными.

Функция правдоподобия

Для любого заданного значения параметра существует определенная вероятность того, что часть исков, присутствующих в прямых данных, соответствует этому значению. Это определяет *вероятность* данной группы исков как функцию неизвестного параметра.

Апостериорное распределение параметра
Априорное распределение параметра можно совместить с функцией правдоподобия, используя байесовскую формулу для определения *апостериорного распределения параметра*
Функция ущерба
Функция ущерба выбирается для измерения того, насколько серьезной будет ошибка определения параметра. Функция ущерба должны выбираться из коммерческих соображений относительно финансового эффекта от неверной оценки параметра и, следовательно, величины премии на бизнес страховщика.
Оценка параметра
Функция ущерба применяется к апостериорному распределению для определения *байесовской оценки* неизвестного параметра. Байесовская оценка — это значение параметра, минимизирующее ожидаемые потери, исходя из апостериорного распределения параметра.

В этом параграфе мы рассмотрим две специфические модели, основанные на байесовском подходе:

- Модель Пуассоновского/Гамма-распределения, в которой рассматриваются частоты исков.
- Модель Нормального/Нормального распределения, в которой рассматриваются величины исков.

3.2 Модель Пуассоновского/Гамма-распределения

Одной из моделей, которые могут быть использованы для вычисления суммарного числа исков, является модель Пуассоновского/Гамма-распределения.
Модель Пуассоновского/Гамма-распределения
Модель включает в себя следующие предположения:

1. Фиксированная, но неизвестная частота исков λ (которая варьируется среди полисов) моделируется с помощью априорного $\Gamma(\alpha, \beta)$ распределения
2. Для данного значения λ число исков $X_j|\lambda$ в течение периода j (где $1 \leqslant j \leqslant n$) имеет распределение Пуассона $Poisson(\lambda)$.
3. В качестве функции ущерба используется квадратичная ошибка.

Пример 11.4 Найдите байесовскую оценку частоты исков для модели Пуассоновского/Гамма-распределения.

Решение Используя формулу для гамма-распределения, функция плотности априорного распределения частоты исков λ, основанная на вспомогательных данных, будет иметь вид:

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda},\ 0<\lambda<\infty$$

Вероятность следования X_i из i-го полиса равна (используя пуассоновское распределение):

$$L=\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_j}}{x_j!}=e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_j}*C$$

Их перемножение для нахождения апостериорного распределения дает нам:

$$\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}*e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_j}*C=\lambda^{\sum x_j+\alpha-1}e^{-(n+\beta)\lambda}*C$$

Заметим, что это функция плотности гамма-распределения $\Gamma(\sum x_j+\alpha,n+\beta)$ λ

Использование в качестве функции ущерба квадратичной ошибки приводит к тому, что байесовская оценка неизвестного параметра λ является математическим ожиданием апостериорного распределения:

$$\widehat{\lambda}=\frac{\sum x_j+\alpha}{n+\beta}$$

Вопрос для самоподготовки 11.4. Предложите другие статистические распределения, которые можно использовать вместо гамма-распределения и пуассоновского распределения в байесовском подходе.

Для данной модели байесовская оценка неизвестного параметра может быть выражена в виде оценки правдоподобия, т.е. как взвешенное среднее оценки, полученной из прямых данных, и оценки, полученной из вспомогательных данных.

Пример 11.5 Покажите, что оценка частоты исков в модели Пуассоновского / Гамма-распределения может быть выражена в виде оценки правдоподобия.

Решение Естественной оценкой, используемой при оценивании частоты исков, основываясь только на прямых данных, является среднее число исков на полис:

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$$

(Фактически данная оценка является одновременно оценкой максимального правдоподобия и оценкой математического ожидания пуассоновского распределения в методе моментов) Средняя частота исков, основанная исключительно на вспомогательных данных, является средним априорного распределения и равно:

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta}$$

Z Если байесовская оценка может быть выражена в виде оценки правдоподобия, то её можно записать в терминах взвешенного среднего, основываясь на факторе доверия Z.

$$\widehat{\lambda} = Z\overline{X} + (1 - Z)\mu$$

Подстановка выражений для $\widehat{\lambda}$ и μ дает нам:

$$\frac{n\overline{X} + \alpha}{n + \beta} = Z\overline{X} + (1 - Z)\frac{\alpha}{\beta}$$

Разбив левую часть на два слагаемых будем иметь:

$$\frac{n\overline{X} + \alpha}{n + \beta} = \frac{n\overline{X}}{n + \beta} + \frac{\alpha}{n + \beta} = \frac{n}{n + \beta}\overline{X} + \left(1 - \frac{n}{n + \beta}\right)\frac{\alpha}{\beta}$$

Таким образом байесовская оценка может быть записана в форме оценки правдоподобия, основанной на факторе доверия $Z = \frac{n}{n+\beta}$.

Вопрос для самоподготовки 11.5. Проверьте численно, что формула правдоподобия работает в случае, где $n = 500$ и $\overline{X} = 0.072$ (для прямых данных) и $\alpha = 3.5$ и $\beta = 45$ (для вспомогательных данных)

3.3 Модель Нормального/Нормального распределения

Суммарную величину иска можно моделировать, используя *модель Нормального/Нормального распределения*

модель Нормального/Нормального распределения

Модель включает в себя следующие предположения:

1. Фиксированный, но неизвестный параметрμ (который изменяется среди полисов), моделируется с помощью нормального априорного распределения $N(\mu_0, \sigma_0^2)$
2. Для данного значения μ суммарные величины исков $X_j|\mu$ за период j (где $1 \leqslant j \leqslant n$) имеют нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$
3. В качестве функции ущерба используется квадратичная ошибка.

Пример 11.6 Найдите байесовскую оценку рисковой премии для модели Нормального/Нормального распределения.

Решение Т.к. $X_j|\mu$ имеют нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$, то параметр μ представляет собой "истинную"рисковую премию для данного типа риска. Таким образом, нам нужно оценить μ, основываясь на $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Априорное распределение μ: $N(\mu_0, \sigma_0^2)$.
Вероятность величины иска $X_j|\mu$ для каждого периода времени: $N(\mu, \sigma^2)$.
Из формул в *Таблицах* следует, что апостериорным распределением θ является $N(\mu_*, \sigma_*^2)$, где

$$\mu_* = \left(\frac{n\overline{X}}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) \Big/ \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right), \ \sigma_*^2 = 1 \Big/ \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right)$$

Использование в качестве функции ущерба квадратичной ошибки приводит к тому, что байесовская оценка неизвестного параметра μ является математическим ожиданием апостериорного распределения и равно μ_*. Таким образом оценкой истинной рисковой премии является следующее выражение:

$$E(\mu|X_1, X_2, \ldots, X_n) \doteqdot \left(\frac{n\overline{X}}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) \Big/ \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right) = \frac{n\overline{X}\sigma_0^2 + \mu_0\sigma^2}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}$$

Пример 11.7 Вывести формулы для μ_* и σ_*^2 ,приведенные в *Таблицах*

Решение Неизвестным параметром является μ, имеющем априорное распределение $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Таким образом, его плотность пропорциональна (за исключением констант не содержащих μ):

$$exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

$X_j|\mu$ имеет распределение $N(\mu, \sigma^2)$. Таким образом суммарная функция правдоподобия пропорциональна:

$$\prod_{j=1}^{n} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_j - \mu}{\sigma}\right)^2\right] = exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Тогда апостериорное распределение пропорционально произведению:

$$exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Так как экспонента в этом выражении является квадратичной функцией μ, то она пропорциональна выражению:

$$exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu_*}{\sigma_*}\right)^2\right]$$

которое является функцией плотности нормального распределения $N(\mu_*, \sigma_*^2)$ при некоторых значениях μ_* и σ_*^2. Для нахождения значений μ_* и σ_*^2 приравняем коэффициенты при μ и μ^2 в этих двух выражениях. Это даст нам (после отбрасывания множителей $\frac{1}{2}$):

$$\mu^2: \ \frac{1}{\sigma^0}+\frac{n}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma_*^2}, \ \mu: \ \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}x_j=\frac{\mu_*}{\sigma_*^2}$$

Из данных выражений могут быть найдены значения μ_* и σ_*^2, приведенные в *Таблицах.*

Вопрос для самоподготовки 11.6. Покажите, что оценка рисковой премии в модели Нормального/Нормального распределения может быть выражена в форме оценки правдоподобия, записанной как формула от Z.

§4 Эмпирические байесовские модели

1. Объясните применение эмпирического байесовского подхода к теории правдоподобия, и особенно его сходство с и отличие от байесовского подхода.

2. Используя эмпирический байесовский подход выведите формулы для вычисления правдоподобной премии в двух моделях, одна из которых включает величины риска, а другая нет.

3. Укажите предположения, лежащие в основе двух эмпирических байесовских моделях.

4. Вычислите правдоподобные премии для двух эмпирических байесовских моделей.

4.1 Эмпирический байесовский подход

В этом параграфе мы обсудим две *эмпирические байесовские модели* (ЕВС). Так же как и модели Пуассоновского/Гамма и Нормального/Нормального распределений эти модели используются для оценки "истинной"частоты исков и рисковой премии, основываясь на суммарных величинах исков в следующих друг за другом периодах. В модели 1 каждый риск в каждом году имеет одинаковый вес. Модель 2 является более сложной и учитывает объем бизнеса по каждому из рисков в каждом году.

Основные общие и отличительные черты байесовских и EBC моделей приведены ниже.

Параметр риска

Оба подхода используют дополнительный параметр риска θ.В байесовском подходе мы оцениваем величину θ, в то время как в EBC моделях это $m(\theta)$, т.е. функция θ. В отличие от байесовского подхода, мы не предполагаем какого-либо специфического распределения θ.

Условное распределение исков

Оба подхода подразумевают, что условные случайные величины $X_j|\theta$ независимы и одинаково распределены. В отличие от байесовского подхода, в EBC моделях не подразумевается какого-либо специального распределения для $X_j|\theta$. Вместо этого формулы выводятся исходя из предположения, что математическое ожидание $m(\theta)$ и дисперсия $s^2(\theta)$[2] величины $X_j|\theta$ могут быть выражены как функции θ. Затем в моделях оцениваются величины $m^2(\theta)$ и $s^2(\theta)$.

Формула правдоподобия

В обоих подходах итоговая формула для оценки частоты исков или рисковой премии за конкретный риск может быть выражена с использованием формулы правдоподобия, т.е. как линейная комбинация (взвешенное среднее) среднего, вычисленного из прошлых исков, и суммарного среднего.

4.2 Модель 1

EBC модель 1 рассматривает число или суммарную величину исков относительно конкретного риска в течение n различных периодов времени.

Эмпирическое байесовское правдоподобие (модель 1)

В эмпирической байесовской модели правдоподобия 1 X_j означает суммарную величину исков (либо суммарное число исков) для конкретного риска за определенный период j (где $1 \leqslant j \leqslant n$). Модель включает в себя следующие предположения:

1. X_j одинаково распределены (но необязательно независимы).

[2]Для того чтобы избежать слишком большого числа скобок, мы будем использовать $m^2(\theta)$ и $s^2(\theta)$ для обозначения $[m(\theta)]^2$ и $[s(\theta)]^2$

2. Распределение каждого X_j зависит от значения фиксированного, но неизвестного параметра θ, называемого *параметром риска*, являющегося мерой некоторых неотъемлемых характеристик каждого риска.

3. Неопределенность θ (т.е. изменение θ от риска к риску) моделируется рассмотрением θ как случайной величины, имеющей определенное (но неизвестное) распределение вероятностей.

4. Условные случайные величины $X_j|\theta$ независимы и одинаково распределены со средним $m(\theta) = E(X_j|\theta)$ и дисперсией $s^2(\theta) = Var(X_j|\theta)$.

Мы хотим использовать модель для оценки истинной частоты исков или рисковой премии для определенного риска. Если настоящий (неизвестный) параметр риска для данного риска равен θ, то рассмотрим $m(\theta)$, т.е. $E(X_j|\theta)$. Так как мы не знаем истинного значения θ, то мы должны основывать наши вычисления на оценке, полученной из данных за периоды наблюдения. Удобно использовать векторное обозначение $\overrightarrow{X}$, которое является сокращенным вариантом записи выражения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (где - n число периодов) для представления данных о случившихся исках по риску. Таким образом, необходимо найти величину $m(\theta)$ из данных за периоды наблюдения, т.е. $E[m(\theta)|\overrightarrow{X}]$.
Формула правдоподобия, которую мы выведем, позволит выразить $E[m(\theta)|\overrightarrow{X}]$ как взвешенную сумму среднего $\overline{X}$, полученного из прошедших исков, и суммарного среднего $m(\theta)$, т.е. $E[m(\theta)]$.

Пример 11.8 Специалист страховой компании сконцентрировал свои усилия на предоставлении третьей стороне страховки для водителей определенного типа автомобилей, проживающих в Лондоне. Объясните, что будет представлять собой каждая из переменных и функций ЕВС модели 1, если модель использовалась для описания числа страховых случаев, вызванных различными водителями в разные годы. Единственным фактором риска, имеющем к ней отношение, является стандарт безопасности, принятый каждым водителем.

Решение В данном случае параметр риска представляет собой "коэффициент безопасности"каждого отдельного водителя. Подразумевается, что каждый водитель имеет присущий ему уровень безопасности, который (теоретически) может быть измерен некоторыми средними. Величина (θ) для конкретного водителя оказывает влияние на вероятное число страховых случаев, которые могут случиться по его вине. Например, значение $(\theta) = 1$ может означать, что водитель "100% безопасен"(т.е. никогда не попадает в аварии), в то время как $(\theta) = 0$ может означать водителя с уровнем "0% безопасности"(т.е. попадает в аварии при любом использовании машины).

Распределение значений (θ), изменяющегося от водителя к водителю, определяется некоторым (неизвестным) распределением вероятностей.

X_j - случайная величина, представляющая собой число страховых случаев, вызванных определенным водителем за год j. $X_j|\theta$ представляет собой число страховых случаев, вызванных определенным водителем с коэффициентом безопасности (θ). $m(\theta) = E(X_j|\theta)$ - среднее (теоретическое) число исков по вине водителя с коэффициентом безопасности (θ). В данном примере $m(\theta)$ будет являться убывающей функцией (θ), так как большее значение коэффициента безопасности уменьшит среднее число исков. $s^2(\theta) = Var(X_j|\theta)$ дисперсия (теоретическая) числа исков по вине водителя с коэффициентом безопасности (θ) за различные годы. $s^2(\theta)$ будет принимать меньшие значения для водителей с высоким коэффициентом безопасности, так как они, вероятно, не вызовут страховых случаев или, возможно, один иск ежегодно, в то время как число ежегодных исков от водителей с низким коэффициентом безопасности может изменяться от нуля до пяти и более.

Вопрос для самоподготовки 11.7. Опишите, что будет представлять каждая из переменных и функций в EBC модели 1, если модель использовалась для изучения набранных различными игроками в гольф очков в различные дни, при условии, что количество очков игрока зависит от его "недостатков".

Нахождение фактора доверия (модель 1) Истинная премия может быть выражена в терминах формулы правдоподобия.

Формула для фактора доверия (модель 1)

Фактор доверия для EBC модели 1 вычисляется по следующей формуле:

$$Z = n \bigg/ \left(n + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]} \right)$$

Доказательство (основные пункты). Доказательство включает в себя следующие шаги:

1. Обоснование того, что формула правдоподобия должна иметь вид $a+b\overline{X}$ где a и b являются константами (т.е. они не зависят от θ). Константа b соответствует фактору доверия Z.
2. Обоснование того, что решение проблемы включает в себя нахождение значений a и b, минимизирующих следующую величину:

$$Q_2 = E\left[\left(m(\theta) - (a + b\overline{X})\right)^2\right]$$

3. Нахождение системы уравнений, решение которой являются a и b (путем приравнивания частных производных к нулю).

4. Вывод взаимоотношений для упрощения формул.
5. Упрощение итоговых выражений для a и b

$\square$

Доказательство (шаг 1). Так как мы ищем формулу правдоподобия в виде линейной функции от X_j, то формула для правдоподобной премии должна иметь вид:

$$P = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

где a являются константами. Т.к. порядок следования X_j не имеет значения, то формула должна быть симметричной относительно X_j. Таким образом значения $a_1, \ldots, a_n$ должны быть одними и теми же, тогда правдоподобная премия запишется в виде:

$$P = a + b\overline{X}$$

где $\overline{X}$ является средним значением X_j $\square$

Доказательство (шаг 2). Так же как и в байесовских моделях, мы будем оценивать параметры, используя в качестве функции ущерба квадратичную ошибку. Это требует от нас нахождения значений констант a и b, минимизирующих выражение:

$$Q_1 = E\left[\left(E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] - (a + b\overline{X})\right)^2\right]$$

Можно показать, что Q_1 может быть записано в более простом (но эквивалентном) виде Q_2, в котором опущено одно из ожиданий:

$$Q_2 = E\left[\left(m(\theta) - (a + b\overline{X})\right)^2\right]$$

Выражение $m(\theta) - (a + b\overline{X})$ может быть записано в виде $A + B$, где

$$A = m(\theta) - E[m(\theta)|\overrightarrow{X}],\ B = E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] - (a + b\overline{X})$$

Таким образом:

$$Q_2 = E[(A + B)^2] = E(A^2) + 2E(AB) + E(B^2)$$

Можно показать, что $E(AB) = 0$ путем нахождения условных ожиданий:

$$E(A|\overrightarrow{X}) = E(m(\theta) - E[m(\theta)|\overrightarrow{X}]|\overrightarrow{X}) =$$
$$= E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] - E(E[m(\theta)|\overrightarrow{X}]|\overrightarrow{X}) = E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] - E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] = 0$$

Т.к. B является функцией, зависящей только от $\overrightarrow{X}$, то:

$$E(AB) = E[E(AB|\overrightarrow{X})] = E[BE(A|\overrightarrow{X})] = 0$$

Так как выражение в определении Q_1 есть просто B^2, то:

$$Q_2 = E(A^2) + 2E(AB) + E(B^2) = E(A^2) + 0 + Q_1$$

Так как определение A не зависит от констант a и b, то минимизация Q_1 эквивалентна минимизации Q_2. □

Доказательство (шаг 3). Значения констант a и b, минимизирующие Q_2, можно найти, приравняв к нулю частные производные.

$$\frac{\partial Q_2}{\partial a} = -2E\left[m(\theta) - (a + b\overline{X})\right] = 0$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial b} = -2E\left[\overline{X}\left(m(\theta) - (a + b\overline{X})\right)\right] = 0$$

Это приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} a + bE(\overline{X}) = & E[m(\theta)] \\ aE(\overline{X}) + bE(\overline{X}^2) = & E[\overline{X}m(\theta)] \end{cases}$$

Её разрешение относительно b, а затем и относительно a, даст нам:

$$b = \left(E[\overline{X}m(\theta)] - E(\overline{X})E[m(\theta)]\right)\Big/\left(E(\overline{X}^2) - [E(\overline{X})]^2\right)$$

$$a = E[m(\theta)] - bE(\overline{X})$$

□

Доказательство (шаг 4). Эти выражения можно упростить, выразив их в терминах следующих величин: $E[m(\theta)]$, $Var[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$.
Это можно сделать с помощью следующих соотношений:

1. $E(\overline{X}) = E[m(\theta)]$
2. $E[\overline{X}m(\theta)] = E[m^2(\theta)]$
3. $E(\overline{X}^2) - [E(\overline{X})]^2 = \frac{1}{n}E[s^2(\theta)] + Var[m(\theta)]$

1. Так как X_j одинаково распределены, то:

$$E(\overline{X}) = E(X_j) = E[E(X_j|\theta)] = E[m(\theta)]$$

2. Т.к. $m(\theta)$ является функцией только от (θ), то:

$$E[\overline{X}m(\theta)] = E\left(E[\overline{X}m(\theta)|\theta]\right) = E\left(m(\theta)E[\overline{X}|\theta]\right) = E[m^2(\theta)]$$

3. $E(\overline{X}^2) - [E(\overline{X})]^2$ есть просто дисперсия $Var(\overline{X})$, которую можно выразить через условные математические ожидания и дисперсии как:

$$Var(\overline{X}) = E\left[Var(\overline{X}|\theta)\right] + Var\left[E(\overline{X}|\theta)\right] =$$
$$= E\left[\frac{1}{n}Var(X_j|\theta)\right] + Var\left[E(X_j|\theta)\right] = \frac{1}{n}E[s^2(\theta)] + Var[m(\theta)]$$

□

Доказательство (шаг 5). Затем мы можем записать оцененные параметры a и b в следующем виде:

$$b = n\Big/\left(n + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]}\right), \ a = (1-b)E[m(\theta)]$$

Таким образом правдоподобная премия $a + b\overline{X}$ запишется как:

$$\left(E[m(\theta)]E[s^2(\theta)]/Var[m(\theta)] + \sum X_j\right) \Big/ \left(n + E[s^2(\theta)]/Var[m(\theta)]\right)$$

которая имеет вид $Z\overline{X} + (1-Z)E[m(\theta)]$, где

$$Z = n\Big/\left(n + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]}\right)$$

□

Вопрос для самоподготовки 11.8. Покажите то, что только что доказанная формула для Z в EBC модели 1, также верна для фактора доверия в случае модели Пуассоновского/Гамма-распределений.

Оценка параметров (модель 1)

В только что полученной формуле для фактора правдоподобия величины $E[s^2(\theta)]$ и $Var[m(\theta)]$ являются константами. Таким образом, значение фактора правдоподобия зависит только от величины n, т.е. от числа лет, для которых мы располагаем статистикой по рассматриваемому риску.

Однако, для того чтобы можно было четко вычислить фактор доверия, мы должны уметь оценивать две величины: $E[s^2(\theta)]$ и $Var[m(\theta)]$.

Для того чтобы сделать это, нам нужно использовать данные от некоторого числа различных рисков. Например, оценки могут быть основаны на данных по всем остальным полисам страховщика в том же классе или же на данных от компаний, осуществляющих страхование похожих рисков. Мы уже использовали нижний индекс j для обозначения последовательных периодов времени. Дополнительный нижний индекс i используется для обозначения величин, относящихся к i-му риску ($1 \leqslant i \leqslant N$). Значения соответствующего параметра риска θ_i (которые в действительности фиксированы, но неизвестны) являются независимыми и одинаково распределенными значениями случайной величины θ.

Формулы для оценок (модель 1)

Следующие оценки (являющиеся объективными) используются в EBC модели 1:

Величина	Оценка
$E[m(\theta)]$	$\overline{X}$ - суммарное среднее всех рассматриваемых значений по всем рискам
$E[s^2(\theta)]$	$\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$ - среднее от выборочных дисперсий рассматриваемых значений для каждого риска.
$Var[m(\theta)]$	$\frac{1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^{N}(\overline{X}_i-\overline{X})^2-\frac{1}{Nn}\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$
где $\overline{X}_i=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_{ij}$	Средняя величина рассматриваемых значений для i-го риска
и $\overline{X}=\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\overline{X}_i$	суммарное среднее всех рассматриваемых значений по всем рискам

С помощью этих оценок можно вычислить фактор доверия и правдоподобные премии для индивидуальных рисков.

Пример 11.9 Таблица, приведённая ниже, показывает агрегированные величины исков (в млн. £) для страхового портфеля международной компании, включающего в себя риски возникновения пожара, за 5-летний период вместе с некоторой итоговой статистикой. Заполните пропущенные ячейки и вычислите $E[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$, используя EBC модель 1.

Страна (i)	Год (j)					$\overline{X}_i$	$\frac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{5}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$
	1	2	3	4	5		
1	48	53	42	50	59	50.4	39.3
2	64	71	64	73	70	68.4	17.3
3	85	54	76	65	90	74.0	215.5
4	44	52	69	55	71	?	?

Решение В данном примере $n = 5$ означает число лет, а $N = 4$ - количество рисков (=стран). $\overline{X}_i$ просто средняя величина иска для i-го риска за 5-летний период. Так что пропущенная средняя величина равна:

$$\overline{X}_4 = (44 + 52 + 69 + 55 + 71)/5 = 58.2$$

Мы можем вычислить и другое пропущенное значение:

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{5}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2 = \frac{1}{4}\left[(44 - 58.2^2) + \cdots + (71 - 58.2)^2\right] = 132.7$$

Для нахождения оценок нам необходимо знать $\overline{X}$, которое равно:

$$\overline{X} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\overline{X}_i = (50.4 + 68.4 + 74.0 + 58.2)/4 = 62.75$$

Теперь могут быть вычислены непосредственно оценки:

$$E[m(\theta)] \doteqdot \overline{X} = 62.75$$

$$E[s^2(\theta)] \doteqdot \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{5}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2 = (39.3 + 17.3 + 215.5 + 132.7)/4 = 101.2$$

Вопрос для самоподготовки 11.9. Найти оценку для $Var[m(\theta)]$

Пример 11.10 Найдите фактор доверия для этого примера и отсюда вычислите EBC премию для каждой страны в текущем году.

Решение Оценки, вычисленные ранее, могут быть использованы для нахождения фактора доверия:

$$Z = \frac{n}{n + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]}} = \frac{5}{5 + \frac{101.2}{90.33}} = 0.8169$$

Т.к. у нас одинаковое число временных периодов для каждой из стран, то фактор доверия для каждой из них будет одним и тем же.

Можно использовать основную формулу правдоподобия $P = Z\overline{X}_i + (1 - Z)E[m(\theta)]$ для нахождения EBC премии для каждой страны:

Страна 1	$P = 0.8169 * 50.4 + (1 - 0.8169) * 62.75 = 52.66$
Страна 2	$P = 0.8169 * 68.4 + (1 - 0.8169) * 62.75 = 67.37$
Страна 3	$P = 0.8169 * 74.0 + (1 - 0.8169) * 62.75 = 67.37$
Страна 4	$P = 0.8169 * 58.2 + (1 - 0.8169) * 62.75 = 67.37$

Вопрос для самоподготовки 11.10. Являются ли следующие утверждения верными или ложными для EBC модели 1?

1. θ представляет собой "истинную"рисковую премию для данного риска.
2. Дисперсия $X_j|\theta$ не зависит от θ.
3. Ни для одной из случайных величин или параметров модели не делается предположения относительно нормальности распределения.

4.3 Модель 2

EBC модель 2 является обобщением EBC модели 1 с учетом изменений в величине бизнеса.

Эмпирическое байесовское правдоподобие (модель 2)

В эмпирической байесовской модели правдоподобия 2:

- Y_j означает суммарную величину иска (или суммарное число исков) за период j
- P_j означает константу, представляющую объем бизнеса за период j
- $X_j = Y_j/P_j$ означает суммарную величину иска в расчете на единицу объема за период j

Модель предполагает, что:

1. Распределение X_j зависит от величины фиксированного, но неизвестного, параметра θ.
2. Изменчивость θ моделируется путем трактовки её как случайной величины, удовлетворяющей определенному распределению.

3. Условные случайные величины $X_j|\theta$ независимы (но необязательно одинаково распределены) и имеют среднее и дисперсию $m(\theta) = E(X_j|\theta)$ и $s^2(\theta) = P_j Var(X_j|\theta)$, которые не зависят от j.

P_j действуют как нормализующие константы, цель которых в удалении искажающих эффектов, вызванных изменениями объема бизнеса от одного года к другому.

Пример 11.11 Предложите возможные величины, которые могут быть использованы в качестве P_j в EBC модели 2.

Решение Следующие значения можно взять в качестве P_j:

1. суммарное поступление премий за год j или же

2. количество полисов, проданных за год j.

Т.к. каждую из этих величин можно считать приблизительно пропорциональной суммарным искам за год j.

Нахождение фактора доверия (модель 2)

Истинная премия может быть выражена в терминах формулы правдоподобия.

Формула для фактора доверия (модель 2)

Фактор доверия для EBC модели 2 рассчитывается как:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} P_j \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{n} P_j + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]} \right)$$

Доказательство пункты. Пункты доказательства (которые очень близки к модели 1) включают в себя:

1. Заметим, что формула правдоподобия должна иметь вид $a_0 + \sum a_j X_j$, где a являются константами (а $\sum$ представляет из себя сумму по всем значениям $j = 1, 2, \dots, n$).

2. Обоснование того, что решение включает в себя нахождение значений a, минимизирующих:

$$Q_2 = E\left[\left(m(\theta) - (a_0 + \sum a_j X_j) \right)^2 \right]$$

3. Нахождение системы уравнений, решением которой являются константы a_j (путем приравнивания частных производных к 0).

4. Вывод взаимоотношений для упрощения формул.

5. Упрощение итоговых выражений для a_j.

$\square$

Доказательство шаг 1. Т.к. мы ищем формулу правдоподобия в виде *линейной* зависимости от X_j, то она должна иметь вид:

$$P = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_jX_j$$

где a являются константами. Т.к. X_j получены путем деления Y_j на P_j, которые в общем случае различны, то модель больше не симметрична относительно X_j. Таким образом мы не можем упростить выражение так же, как это было сделано для модели 1. $\square$

Доказательство шаг 2. Как и в байесовских моделях, мы будем оценивать параметры, используя в качестве функции ущерба квадратичную ошибку. Для этого необходимо найти значения a и b, минимизирующие:

$$Q_1 = E\left[\left(E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] - (a_0 + \sum a_jX_j)\right)^2\right]$$

Можно показать, что Q_1 может быть записано в более простом (но эквивалентном) виде Q_2, в котором опущено одно из ожиданий:

$$Q_2 = E\left[\left(m(\theta) - (a_0 + \sum a_jX_j)\right)^2\right]$$

Выражение $m(\theta) - (a_0 + \sum a_jX_j)$ можно записать в виде $A + B$, где:

$$A = m(\theta) - E[m(\theta)|\overrightarrow{X}],\ B = E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] - (a_0 + \sum a_jX_j)$$

Таким образом:

$$Q_2 = E[(A+B)^2] = E(A^2) + 2E(AB) + E(B^2)$$

Можно показать, что $E(AB) = 0$ путем нахождения условных ожиданий:

$$E(A|\overrightarrow{X}) = E(m(\theta) - E[m(\theta)|\overrightarrow{X}]|\overrightarrow{X}) =$$
$$= E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] - E(E[m(\theta)|\overrightarrow{X}]|\overrightarrow{X}) = E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] - E[m(\theta)|\overrightarrow{X}] = 0$$

Т.к. B является функцией, зависящей только от $\overrightarrow{X}$, то:

$$E(AB) = E[E(AB|\overrightarrow{X})] = E[BE(A|\overrightarrow{X})] = 0$$

Т.к. выражение в определении Q_1 есть просто B^2, то

$$Q_2 = E(A^2) + 2E(AB) + E(B^2) = E(A^2) + 0 + Q_1$$

Т.к. в определение выражения A не входят константы a_j, то минимизация Q_1 эквивалентна минимизации Q_2. $\square$

Доказательство шаг 3. Значения констант a_j, минимизирующих Q_2 могут быть найдены путём приравнивания частных производных к нулю.

$$\frac{\partial Q_2}{\partial a_0} = -2E\left[m(\theta) - (a_0 + \sum a_j X_j)\right] = 0$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial a_k} = -2E\left[X_k\left(m(\theta) - (a_0 + \sum a_j X_j)\right)\right] = 0,\ k = \overline{1,n}$$

Это приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + \sum a_j E(X_j) = & E[m(\theta)] \\ a_0 E(X_k) + \sum a_j E(X_k X_j) = & E[X_k m(\theta)],\ k = \overline{1,n} \end{cases}$$

□

Доказательство шаг 4. Эти выражения можно упростить, выразив их в терминах следующих величин: $E[m(\theta)]$, $Var[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$.
Это можно сделать с помощью следующих соотношений:

1. $E(X_j) = E[m(\theta)]$
2. $E[X_k m(\theta)] = E[m^2(\theta)]$
3. $E(X_k^2) = \frac{1}{P_k}E[s^2(\theta)] + E[m^2(\theta)]$
4. $E(X_k X_j) = E[m^2(\theta)],\ k \neq j$

Данные результаты доказываются следующим образом:

1. Используя условные математические ожидания, будем иметь:

$$E(X_j) = E[E(X_j|\theta)] = E[m(\theta)]$$

2. Т.к. $m(\theta)$ является функцией только θ, то:

$$E[X_k m(\theta)] = E\left(E[X_k m(\theta)|\theta]\right) = E\left(m(\theta)E[X_k|\theta]\right) = E[m^2(\theta)]$$

3. Используя условные математические ожидания, будем иметь:

$$E(X_k^2) = E[E(X_k^2|\theta)] = E\left(Var(X_k|\theta) + [E(X_k|\theta)]^2\right) =$$
$$= E\left(\frac{1}{P_k}s^2(\theta) + m^2(\theta)\right) = \frac{1}{P_k}E[s^2(\theta)] + E[m^2(\theta)]$$

4. Используя условные математические ожидания, будем иметь:

$$E(X_k X_j) = E[E(X_k X_j|\theta)] = E[E(X_k|\theta)E(X_j|\theta)] = E[m^2(\theta)]$$

Тогда первое из уравнений системы для констант a_j примет вид:

$$a_0 + \sum a_j E[m(\theta)] = E[m(\theta)] \Rightarrow a_0 = (1 - \sum a_j) E[m(\theta)] \qquad (11.0)$$

Второе уравнение системы можно записать следующим образом:

$$a_0 E(X_k) + \sum_{j \neq k} a_j E(X_k X_j) + a_k E(X_k^2) = E[X_k m(\theta)], \ k = \overline{1, n}$$

Это приводит нас к выражению:

$$a_0 E[m(\theta)] + \sum a_j E[m^2(\theta)] + \frac{a_k}{P_k} E[s^2(\theta)] = E[m^2(\theta)] \qquad (11.0)$$

□

Доказательство шаг 5. Подстановка выражения для a_0 из 4.3 в 4.3 даст нам:

$$(1 - \sum a_j) \left(E[m(\theta)]\right)^2 + \sum a_j E[m^2(\theta)] + \frac{a_k}{P_k} E[s^2(\theta)] = E[m^2(\theta)]$$

Или:

$$\frac{a_k}{P_k} E[s^2(\theta)] = (1 - \sum a_j) E[m^2(\theta)] - (1 - \sum a_j) \left(E[m(\theta)]\right)^2$$

Упрощение правой части приводит к виду:

$$\frac{a_k}{P_k} E[s^2(\theta)] = (1 - \sum a_j) Var[m(\theta)]$$

Или:

$$a_k E[s^2(\theta)] / Var[m(\theta)] = P_k (1 - \sum a_j) \qquad (11.0)$$

Суммирование по всем $k = \overline{1, n}$ даст нам:

$$\sum a_k E[s^2(\theta)] / Var[m(\theta)] = \sum P_k (1 - \sum a_j)$$

Так как $\sum a_k$ то же самое, что и $\sum a_j$, то данное выражение может быть переписано в следующем виде:

$$\sum a_j \left(\sum P_k + \sum E[s^2(\theta)] / Var[m(\theta)] \right) = \sum P_k$$

Таким образом:

$$\sum a_j = \sum P_k \Big/ \left(\sum P_k + \sum E[s^2(\theta)] / Var[m(\theta)] \right)$$

И

$$1-\sum a_j = E[s^2(\theta)]/Var[m(\theta)]\Big/\Big(\sum P_k + \sum E[s^2(\theta)]/Var[m(\theta)]\Big)$$

Теперь мы можем найти a_0 из выражения 4.3:

$$a_0 = E[m(\theta)]E[s^2(\theta)]/Var[m(\theta)]\Big/\Big(\sum P_k + \sum E[s^2(\theta)]/Var[m(\theta)]\Big)$$

Также из выражения 5.1 можно найти a_k:

$$a_k = P_k\Big/\Big(\sum P_k + E[s^2(\theta)]/Var[m(\theta)]\Big),\ k=\overline{1,n}$$

Таким образом правдоподобная премия $a_0+\sum a_j X_j$ примет вид (с учетом того, что $P_j X_j = Y_j$):

$$\Big(E[m(\theta)]E[s^2(\theta)]/Var[m(\theta)] + \sum Y_j\Big)\Big/\Big(\sum P_k + \sum E[s^2(\theta)]/Var[m(\theta)]\Big)$$

Которая имеет вид $Z\overline{X} + (1-Z)E[m(\theta)]$, где:

$$\overline{X} = \sum_{j=1}^{n} P_j X_j\Big/\sum_{j=1}^{n} P_j,\ Z = \sum_{j=1}^{n} P_j\Bigg/\left(\sum_{j=1}^{n} P_j + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]}\right)$$

$\square$

Вопрос для самоподготовки 11.11. Проверить, что в случае, когда все P_j равны друг другу, формула для фактора доверия в модели 2 сводится к формуле для модели 1.

Оценка параметров (модель 2)

Так же как и раньше, дополнительный индекс i в обозначении указывает на то, что значение относится к риску i.

Формулы для оценок (модель 2)

Следующие оценки для ЕВС модели 2 являются объективными:

Величина	Оценка
$E[m(\theta)]$	$\overline{X}$
$E[s^2(\theta)]$	$\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$
$Var[m(\theta)]$	$\frac{1}{P^*}\left[\frac{1}{Nn-1}\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2 - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2\right]$

где

$$\overline{P}_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij},\ \overline{P} = \sum_{i=1}^{N} \overline{P}_i$$

$$P^* = \frac{1}{Nn-1}\sum_{i=1}^{N}\overline{P}_i(1-\overline{P}_i/\overline{P})$$

$$\overline{X}_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}X_{ij}/\overline{P}_i,\ \overline{X} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}X_{ij}/\overline{P}$$

Пример 11.12 Таблица, расположенная сверху следующей страницы, показывает примерные значения объемов бизнеса для каждой из стран для страховщика из примера 6.9. Вычислите EBC премию для страны 1, используя модель 2.

Решение Начальные данные для суммарных исков - Y_{ij}, и в первой таблице приводятся значения P_{ij}. Количество исков на единицу объема $X_{ij} = Y_{ij}/P_{ij}$ показано во второй таблице. Теперь мы можем вычислить $\overline{P}_i$ $\overline{P}$ и P^* (см. третью таблицу) $\overline{X}_i$ и $\overline{X}$ вычисляются как:

$$\overline{X}_i = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}/\overline{P}_i,\ \overline{X} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}/\overline{P}$$

Таким образом это дает нам:

$$E[m(\theta)] \doteqdot \overline{X} = 3.984$$

Из других колонок таблицы мы имеем:

$$E[s^2(\theta)] \doteqdot \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{5} P_{ij}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2 =$$
$$= (57.13 + 111.59 + 1237.82 + 267.73)/16 = 104.64$$

$$Var[m(\theta)] \doteqdot \frac{1}{P^*}\left[\frac{1}{4*5-1}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} P_{ij}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2 - 104.64\right] =$$
$$= \frac{1}{11.81}[(58.94 + 147.71 + 2756.56 + 492.04)/19 - 104.64] = 6.54$$

Фактор доверия для страны 1:

$$Z_1 = \sum_{j=1}^{n} P_j \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} P_j + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]}\right) = 66\Big/\left(66 + \frac{104.64}{6.539}\right) = 0.8048$$

Величина рисковой премии в расчете на единицу объема:

$$Z_1\overline{X}_1 + (1-\overline{Z}_1)E[m(\theta)] = 0.8048 * 3.818 + (1 - 0.8048) * 3.984 = 3.851$$

Т.к. объем на текущий год для страны 1 равен 20 единицам, то EBC премия равна $20 * 3.851 = 77.01$.

Объем бизнеса (P_{ij})

Страна (i)	Год (j)					
	1	2	3	4	5	Текущий год
1	12	15	13	16	10	20
2	20	14	22	15	30	25
3	5	8	6	12	4	10
4	22	35	30	16	10	12

Суммарные иски в расчете на единицу объема X_{ij}

Страна (i)	Год (j)				
	1	2	3	4	5
1	4.000	3.533	3.231	3.125	5.900
2	3.200	5.071	2.909	4.867	2.333
3	17.000	6.750	12.667	5.417	22.500
4	2.000	1.486	2.300	3.438	7.100

Страна (i)	$\overline{P}_i$	$\overline{P}_i(1-\overline{P}_i/\overline{P})$	$\overline{X}_i$	$\sum P_{ij}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$	$\sum P_{ij}(X_{ij}-\overline{X})^2$
1	66	52.17	3.818	57.13	58.94
2	101	68.62	3.386	111.59	147.71
3	35	31.11	10.571	1237.82	2756.56
4	113	72.46	2.575	267.73	492.04
	$\overline{P} = 315$	$P^* = 11.81$	$\overline{X} = 3.984$		

Вопрос для самоподготовки 11.12. Вычислите EBC премии для стран 2, 3 и 4.

Вопрос для самоподготовки 11.13. Объясните эффект, который окажет каждое из следующих изменений (по отдельности) на величину фактора доверия в EBC модели 2

1. $E[s^2(\theta)]$ возрастет
2. $Var[m(\theta)]$ уменьшится
3. Изменится единица измерения (например с \$ на £)
4. Все P_j увеличаться на одну и ту же величину

"Ведет"ли себя фактор доверия так как вы и ожидали?

Краткое содержание главы

Частоты исков и рисковые премии могут быть получены путем вычисления фактора доверия и использования формулы правдоподобия.

Правдоподобные премии можно получить, используя байесовский подход. Например, величина исков моделируется с помощью модели Пуассоновского/Нормального распределений либо суммарная величина иска моделируется с помощью модели Нормального/Нормального распределений

Или же могут быть использованы эмпирическая баейсовская модель правдоподобия типа 1 или 2 (которая принимает во внимание изменения в величине бизнеса). Это решение подразумевает, что иски по каждому типу риска зависят от соответствующего параметра риска. Правдоподобная премия может быть выражена в терминах фактора доверия, который зависит от среднего и дисперсии условного распределения исков. Эти величины можно оценить основываясь на данных, полученных из нескольких различных рисков.

Формула главы

Формула правдоподобия:

$$P = Z\overline{X} + (1 - Z)\mu$$

Сводная таблица моделей:

<table>
<tr><td>Модель</td><td>Оцениваемое значение</td><td>Предположения относительно распределения параметра риска θ</td><td>Предположения относительно условного распределения исков $X|\theta$</td></tr>
<tr><td>Пуассоновское/ Гамма</td><td>частота</td><td>гамма-распределение</td><td>Пуассоновское распределение</td></tr>
<tr><td>Нормальное/ Нормальное</td><td>рисковая премия</td><td>нормальное распределение</td><td>Нормальное распределение</td></tr>
<tr><td>EBC модель 1</td><td rowspan="2">рисковая премия или частота исков</td><td rowspan="2">определенное, но неизвестное распределение</td><td rowspan="2">Распределение со средним $m(\theta)$ и дисперсией $s^2(\theta)$

В модели 2 учтены поправки на объем бизнеса</td></tr>
<tr><td>EBC модель 2</td></tr>
</table>

Модель Пуассоновского/Гамма-распределения

Определения	X_j представляет собой число исков
Априорное распределение	$\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$
Вероятность	$X_j|\lambda \sim Poisson(\lambda)$
Фактор доверия	$\frac{n}{n+\beta}$
Доверительная частота	$E(\lambda|\overrightarrow{X}) = \frac{n\overline{X}+\alpha}{n+\beta} = Z\overline{X} + (1-Z)\frac{\alpha}{\beta}$

Модель Нормального/Нормального распределения

Определения	X_j представляет суммарную величину исков
Априорное распределение	$\mu \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$
Вероятность	$X_j|\mu \sim N(\mu, \sigma^2),\ \sigma^2 = Const$
Фактор доверия	$Z = n/(n + \sigma^2/\sigma_0^2)$
Правдоподобная премия	$E(\mu|\overrightarrow{X}) = \frac{n\overline{X}\sigma_0^2+\mu_0\sigma^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2} = Z\overline{X} + (1-Z)\mu_0$

Эмпирическая байесовская модель правдоподобия 1

Определения	X_j представляет число исков
	$m(\theta) = E(X_j\|\theta),\ s^2(\theta) = Var(X_j\|\theta)$
Фактор доверия	$Z = n \Big/ \left(n + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]}\right)$
Правдоподобная премия	$E(m(\theta)\|\overrightarrow{X}) = Z\overline{X}_i + (1-Z)E(m(\theta))$

Эмпирическая байесовская модель правдоподобия 2

Определения	Y_j представляет число исков
	$X_j = Y_j/P_j,\ P_j = Const$
	$m(\theta) = E(X_j\|\theta),\ s^2(\theta) = P_j Var(X_j\|\theta)$
Фактор доверия	$Z = \sum\limits_{j=1}^{n} P_j \Bigg/ \left(\sum\limits_{j=1}^{n} P_j + \frac{E[s^2(\theta)]}{Var[m(\theta)]}\right)$
Правдоподобная премия	$E(m(\theta)\|\overrightarrow{X}) = Z\overline{X}_i + (1-Z)E(m(\theta))$

§5 Основы теории правдоподобия

5.1 Введение

Важной методикой в теории правдоподобия, как и во многих других разделах актуарной математики, является применение операций с условным математическим ожиданием. В этой главе потребуются следующие результаты:

для любых случайных величин X и Y (у которых существуют соответствующие моменты) и для любой функции f (кроме некоторых частных случаев, не имеющих практического интереса) справедливо:

$$E[X] = E[E[X|Y]] \tag{11.0}$$

$$E[f(Y)|Y] = f(Y) \tag{11.0}$$

$$E[Xf(Y)] = E[E[Xf(Y)|Y]] = E[f(Y)E[X|Y]] \tag{11.0}$$

Формула (5.1) является стандартным результатом. Формула (5.1) интуитивно очевидна; если, например, Y принимает значение y, то известно, что случайная величина $f(Y)$ должна принять значение $f(y)$. Первое равенство в (5.1) следует из (5.1); второе равенство следует из (5.1). Если, например, Y принимает значение y, то известно, что случайная величина $Xf(Y)$ должна принять значение $Xf(y)$. Поэтому для любого Y значение $E[Xf(Y)|Y]$ равно $f(Y)E[X|Y]$.

Другим важным понятием является условная независимость. Если случайные величины X_1 и X_2 условно независимы относительно случайной величины Y, то:

$$E[X_1X_2|Y] = E[X_1|Y]E[X_2|Y] \tag{11.0}$$

Это означает, что X_1 и X_2 зависят от Y, но, если известно, какое значение приняла случайная величина Y, то X_1 и X_2 независимы. Отсюда не следует, что X_1 и X_2 независимы, и может оказаться, что

$$E[X_1X_2] \neq E[X_1]E[X_2],$$

даже если выполнено (5.1).

§6 Теория правдоподобия

6.1 Формула страховой премии

Основная идея, лежащая в основе формулы страховой премии, очень проста. Рассмотрим простой пример.

Предположим, что в небольшом городе местные власти создали автобусный парк из 10 автобусов на несколько лет и хотят в наступающем году застраховать его от исков, которые могут возникнуть при авариях автобусов. Необходимо вычислить чистую премию такого страхования, то есть ожидаемую стоимость исков в наступающем году. Данные за предыдущие 5 лет показывают, что средняя стоимость исков (для 10 автобусов) составила £1600 в год. Предположим также, что имеются данные, относящиеся к большому количеству автобусных парков по всей Великобритании, которые показывают, что средняя стоимость исков для одного автобуса составляет £250 в год, соответственно £2500 в год для парка из 10 автобусов. Однако, хотя полученная стоимость £2500 основана на данных о большем числе автобусных парков, чем £1600, некоторые парки, включенные в этот большой набор данных, функционируют при условиях (которые могут влиять на число и размер исков, например в больших городах или сельских районах), отличных от условий работы рассматриваемого автобусного парка.

Поэтому существует два экстремальных значения для чистой премии в наступающем году:

£1600, исходя из того, что эта оценка основана на более подходящих данных, или

£2500, исходя из того, что эта оценка основана на большем количестве данных и в этом смысле более надежна.

Доверительный подход к этой задаче заключается во взятии взвешенного среднего экстремальных значений:

$$Z \times 1600 + (1 - Z) \times 2500,$$

где $Z \in (0, 1)$. Число Z называется коэффициентом доверия. В качестве примера положим $Z = 0.6$, тогда чистая премия будет равна £1960.

Мы еще вернемся к этому примеру в следующем параграфе, теперь более формализуем полученные результаты. Задача состоит в оценке ожидаемого суммарного иска, или, может быть, только лишь ожидаемого числа исков в наступающем году. Под риском подразумевается один полис или группа полисов. Обычно, это краткосрочные полисы, и для удобства период берется равным одному году, хотя можно рассматривать и любой другой краткосрочный период. Имеется следующая информация:

$\overline{X}$ — оценка ожидаемого суммарного иска (или числа исков) в наступающем году, основанная исключительно на данных о рассматриваемом риске;

μ — оценка ожидаемого суммарного иска (или числа исков) в наступающем году, основанная на вспомогательных данных, то есть на информации о похожих, но необязательно таких же рисках.

Формула страховой премии:

$$Z\overline{X} + (1 - Z)\mu, \tag{11.0}$$

где $Z \in (0, 1)$ — коэффициент доверия. Достоинством формулы является ее простота и тот факт, что она будет понятна даже непрофессионалу.

6.2 Коэффициент доверия

Коэффициент доверия Z является всего лишь весовым множителем. Его значение говорит о том, насколько можно "доверять" информации о самом риске ($\overline{X}$) по сравнению с данными о большей группе рисков (μ); чем больше значение Z, тем больше "доверия" к $\overline{X}$ по сравнению с μ, и наоборот. Эта идея будет разъяснена на примере из раздела 6.1.

Предположим, что имеются данные о рассматриваемом автобусном парке более, чем за 5 лет. Пусть, например, оценка суммарного иска в наступающем году, основанная на информации о данном парке, составляет, как и раньше, £1600, но теперь она получена за 10 лет. В этом случае, значение £1600 более надежно, чем значение £2500, и коэффициент доверия увеличивается, например, до 0.75. В результате доверительная оценка суммарного иска составит £1825.

Пусть теперь значение £1600 основано на данных только за 5 лет, а значение £2500 основано на данных лишь о тех автобусных парках, которые функционируют в городах приблизительно такого же размера, то есть информация о больших городах и сельских районах в оценку не включена. В этом случае, вспомогательные данные становятся более подходящими, чем в разделе 6.1, и соответственно коэффициент доверия уменьшается, например, до 0,4, откуда страховая премия равна £2140.

В заключение, рассмотрим такую же, как и в разделе 6.1, ситуацию, за исключением того, что значение £2500 получено только из данных о работе автобусных парков в Лондоне и Глазго. В этом случае вспомогательная информация становится менее подходящей, чем в разделе 6.1, и соответственно коэффициент доверия увеличивается, например, до 0,8, откуда страховая премия равна £1780.

Из примеров видно, что поведение коэффициента доверия, в общем случае, следующее:

чем больше информации о самом риске, тем больше должно быть значение коэффициента доверия;

чем больше вспомогательные данные соответствуют рассматриваемому риску, тем значение коэффициента доверия должно быть меньше.

Сделаем одно важное замечание. Хотя коэффициент доверия и отражает доступное количество информации о самом риске, его значение не должно зависеть от фактических данных о риске, то есть от значения $\overline{X}$. Если Z зависит от $\overline{X}$, то любая оценка суммарного иска (или числа исков) ϕ, принимающая значение между $\overline{X}$ μ, может быть записана в виде (6.1), где $Z = \dfrac{\phi - \mu}{\overline{X} - \mu}$.

Остаются задачи оценки степени соответствия вспомогательных данных и определения коэффициента доверия Z. Существует два подхода к решению этих задач: байесовская теория доверия и эмпирическая теория доверия Байеса.

§7 Байесовская теория доверия

7.1 Введение

Байесовский подход к теории доверия иллюстрируют две модели: пуассоновская/гамма–модель и нормальная/нормальная модель.

7.2 Пуассоновская/гамма модель

Пусть необходимо оценить частоту возникновения исков, то есть ожидаемое число исков в наступающем году. Задача сводится к следующему.

Пусть число исков в год имеет распределение Пуассона с параметром λ.

Значение λ неизвестно, но его можно оценить. Например, с вероятностью 0.5 значение λ лежит между 50 и 150.

Более точно, заранее известно, что λ имеет гамма–распределение с параметрами α и β.

Пусть теперь имеется информация о риске, то есть известно количество поданных исков в год за последние n лет.

Задачу можно рассматривать в рамках байесовской статистики и формализовать следующим образом:

случайная величина X представляет собой число исков в наступающем году;

распределение X зависит от неизвестного фиксированного значения параметра λ;

условное распределение X относительно λ — распределение Пуассона с параметром λ;

начальное распределение λ — гамма–распределение с параметрами α и β;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — наблюдаемые значения случайной величины X (для удобства обозначим их $\underline{x}$).

Задача состоит в оценке λ по $\underline{x}$. Требуется, чтобы эта оценка была байесовской с квадратичной функцией потерь, то есть $E[\lambda|\underline{x}]$.

Апостериорное распределение λ относительно $\underline{x}$ — гамма–распределение с параметрами $\alpha + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $\beta + n$, и

$$E[\lambda|\underline{x}] = \frac{\alpha + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\beta + n}. \tag{11.0}$$

Выборочное среднее числа исков равно $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и среднее число исков, основанное на начальных предположениях, равно $\frac{\alpha}{\beta}$. Перепишем соотношение 7.2 в форме:

$$E[\lambda|\underline{x}] = Z\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + (1-Z)\frac{\alpha}{\beta}, \tag{11.0}$$

где

$$Z = \frac{n}{\beta + n}. \tag{11.0}$$

Предположим теперь, что нет никаких данных о риске (другими словами, $n = 0$) и $Z = 0$. Единственной информацией, по которой можно составить оценку параметра λ, является его начальное распределение. Поэтому оптимальной оценкой λ будет среднее $\frac{\alpha}{\beta}$.

С другой стороны, если известна информация только о риске, то оптимальной оценкой будет $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. (Это является оценкой максимального правдоподобия параметра λ. Заметим, что эта оценка, которая играет роль $\overline{X}$ в формуле страховой премии (6.1), представляет собой линейную функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.)

Значение Z зависит от количества данных о риске, n, и вспомогательных данных (через β).

С увеличением n ошибка выборочного обследования для $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ (как оценки λ) уменьшается.

Аналогично, β отражает дисперсию начального распределения λ. Таким образом, Z отражает относительную надежность двух альтернативных оценок λ.

Байесовская оценка (7.2) параметра λ представляет собой взвешенное среднее оценки, основанной на информации только о риске, и оценки, основанной на некоторой дополнительной информации. Она в точности совпадает с доверительной оценкой, которую дает формула (6.1) ("вспомогательные данные" теперь более точно интерпретируются как начальное распределение). Заметим, что в данной модели коэффициент доверия Z уже не является некоторой неопределенной величиной, как в разделе 6.2; он точно задается формулой (7.2).

7.3 Численные примеры пуассоновской/гамма–модели

В этом разделе будут рассмотрены некоторые простые численные примеры, относящиеся к пуассоновской/гамма–модели.

Ситуация и задача в точности те же, что и в разделе 7.2. Значение λ равно 150 и число поданных исков в год имеет распределение Пуассона с параметром 150. В действительности, истинное значение λ неизвестно. В данном примере единственной информацией является начальное распределение λ, например, гамма–распределение с параметрами 100 и 1. (Это распределение имеет среднее 100 и среднеквадратичное отклонение 10.) Фактическое число поданных исков в год следующее:

Год	Число исков
1	144
2	144
3	174
4	148
5	151
6	156
7	168
8	147
9	140
10	161

На Рис. **??** изображен коэффициент доверия, а на Рис. **??** — доверительная оценка числа исков для начального гамма–распределения λ с параметрами 100 и 1. pic.eps8p1 pic.eps8p2

Из рисунков могут быть сделаны следующие наблюдения. Прежде всего, из Рис. **??** видно, что коэффициент доверия увеличивается со временем: со временем становится доступно больше информации о риске и надежность данных в оценке ожидаемого количества исков увеличивается. (Математически, Z возрастает просто потому, что $\dfrac{n}{\beta + n}$ есть возрастающая функция от n для любого положительного β.) Второе наблюдение касается оценок числа исков, изображенных на Рис. **??**. Начальная оценка равна 100, математическому ожиданию начального распределения λ. Однако, эта оценка оказывается плохой, так как фактические значения числа исков лежат около 150, и ни одно из них не опускается ниже 140 в первые 10 лет. Значение оценки числа исков возрастает со временем, пока не достигает уровня фактического числа исков по прошествии 8 лет. Это происходит из-за постепенно возрастающего "веса" информации о самом риске и соответственно уменьшающегося "веса" вспомогательных данных, то есть начального распределения λ.

Предположим теперь, что λ имеет начальное гамма–распределение с параметрами 500 и 5. На Рис. **??** и Рис. **??** изображены коэффициент доверия и оценки числа исков в этом случае в сравнении с ситуацией, когда λ имеет начальное гамма–распределение с параметрами 100 и 1. pic.eps8p3 pic.eps8p4

Из рисунков видно, что в этом случае поведение коэффициента доверия и оценки числа исков такое же. Очевидным отличием является то, что коэффициент доверия возрастает теперь более медленно. (Математически это объясняется большей величиной β.) Этот факт может объясняется в терминах теории доверия следующим образом. Оценка числа исков, основанная на вспомогательных данных, одинакова для обоих начальных распределений λ и равна их, 100. Однако, среднеквадратичная ошибка во втором случае меньше и равна $\sqrt{20} = 4.472$. Величина среднеквадратичной ошибки показывает, насколько мы можем "доверять" начальной оценке числа исков; чем она меньше, тем более надежна начальная оценка. Так как в байесовской теории доверия начальное распределение играет роль вспомогательных данных, то приведенное выше утверждение можно переформулировать: "чем меньше среднеквадратичная ошибка начального распределения, тем больше вспомогательные данные соответствуют рассматриваемому риску". В подтверждение этому, меньшая среднеквадратичная ошибка во втором случае приводит к меньшему значению коэффициента доверия, что видно из Рис. **??**.

Сделаем еще одно важное замечание. Задача состояла в оценке ожидаемого числа исков в следующем году, или, что то же самое, в оценке $E[X]$, где случайная величина X представляет собой число исков в следующем году. Это значение может быть найдено как

$$E[X] = E[E[X|\lambda]] = E[\lambda] = \frac{\alpha}{\beta}.$$

На самом деле, достаточно найти $E[X|\underline{x}]$. Из Рис. **??** видно, что значение $\dfrac{\alpha}{\beta}$ в качестве решения задачи брать нецелесообразно. Это означало бы, что оценка числа исков каждый год равна 100 и гораздо хуже доверительных оценок.

7.4 Нормальная/нормальная модель

В этом разделе рассматривается другая модель.

Задача заключается в оценке чистой премии, то есть ожидаемого суммарного иска. Пусть случайная величина представляет собой суммарный иск в следующем году. Сделаем следующие допущения:

распределение X зависит от неизвестного фиксированного значения параметра θ;

условное распределение X относительно θ: $N(\theta, \sigma_1^2)$;

неопределенность в отношении значения θ моделируется обычным в байесовском случае путем, когда параметр θ считается случайной величиной;

начальное распределение θ: $N(\mu, \sigma_2^2)$;

величины μ, σ_1^2 и σ_2^2 известны;

наблюдаются n последних значений случайной величины X, которые обозначаются как $x_1, \ldots, x_n$, или, более коротко, $\underline{x}$.

Если значение θ известно, точным значением чистой премии риска будет $E[X|\theta] = \theta$. Задача состоит в оценке по наблюдениям, и, как и в пуассоновской/гамма–модели, используется байесовская оценка с среднеквадратичной функцией потерь. Это означает, что оценкой будет $E[E[X|\theta]|\underline{x}]$, или, что то же самое, $E[\theta|\underline{x}]$.

Апостериорное распределение θ по наблюдениям $\underline{x}$:

$$N\left(\frac{\mu\sigma_1^2 + n\sigma_2^2\overline{x}}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\right),$$

где

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

и

$$E[\theta|\underline{x}] = \frac{\mu\sigma_1^2 + n\sigma_2^2\overline{x}}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\mu + \frac{n\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\overline{x} = Z\overline{x} + (1 - Z)\mu, \quad (11.0)$$

где

$$Z = \frac{n}{n + \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}. \quad (11.0)$$

Соотношение (7.4) является доверительной оценкой $E[\theta|\underline{x}]$ и представляет собой взвешенное среднее двух оценок: первая, $\overline{x}$, — оценка максимального правдоподобия, основанная на информации только о самом риске, а вторая, μ, — оптимальная оценка в случае, если о риске ничего не известно.

Заметим, что, как и в случае пуассоновской/гамма–модели, оценка, основанная на информации только о риске, есть линейная функция от наблюдений.

Сделаем несколько замечаний относительно коэффициента доверия Z в (7.4). Во–первых, Z принимает значения между 0 и 1. Во–вторых, Z представляет собой возрастающую функцию аргумента n, количества доступной информации, и возрастающую функцию аргумента σ_1^2, среднеквадратичной ошибки начального распределения.

7.5 Дальнейшие замечания относительно нормальной/нормальной модели

В разделе 7.4 нормальная модель для оценки чистой премии обсуждалась в рамках байесовской статистики. В этом разделе рассматривается та же модель, но слегка с другой стороны.

Причина заключается в том, что некоторые наблюдения окажутся полезными в дальнейшем при рассмотрении эмпирической теории доверия Байеса.

В этом разделе, как и в разделе 7.4, задача заключается в оценке ожидаемого суммарного иска. Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots$$

случайные величины, представляющие собой суммарные иски для каждого года. Сделаем следующие предположения:

(3.17) распределение случайной величины X_j, $\forall j$ зависит от неизвестного фиксированного параметра θ;

(3.18) условное распределение X_j относительно θ: $N(\theta, \sigma_1^2)$;

(3.19) случайные величины X_j условно независимы относительно θ;

(3.20) начальное распределение θ: $N(\mu, \sigma_2^2)$

(3.21) требуется построить оценку ожидаемого суммарного иска в году $n+1$ по наблюдениям $X_1, \ldots, X_n$.

Важно понимать, что поставленная задача и сделанные предположения те же, что и в разделе 7.4. В этом разделе будут использованы немного другие обозначения; в разделе 7.4 $X_1, \ldots, X_n$ обозначались как $x_1, \ldots, x_n$ и их значения предполагались известными, случайная величина X_{n+1} обозначалась как X. Предположения (3.17), (3.18), (3.20) и (3.21) были сделаны и в разделе 7.4. Единственное предположение (3.19) сделано впервые.

Рассмотрим некоторые важные выводы из предположений:

(3.22) относительно θ случайные величины X_j независимы и одинаково распределены;

(3.23) случайные величины X_j одинаково распределены;

(3.24) случайные величины X_j не являются независимыми.

(3.22) представляет собой непосредственное следствие предположения (3.18), которое говорит о том, что каждое X_j при условии θ имеет распределение $\mathcal{N}(\theta, \sigma_1^2)$. (3.23) есть другое следствие (3.18) — следующее выражение определяет функцию распределения X_j:

$$\mathbb{P}(X_j \leq y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \Phi\left(\frac{y-\theta}{\sigma_1}\right) d\theta,$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения. Выражение одно и то же для каждого j. Утверждение (3.24) не так очевидно, но может быть продемонстрировано следующим образом.

Используя выражение (1.1) и тот факт, что X_1 и X_2, при условии θ, независимы:

$$E[X_1X_2] = E[E[X_1X_2|\theta]] = E[E[X_1|\theta]E[X_2|\theta]] = E[\theta^2] = \mu^2 + \sigma_2^2$$

в силу $E[X_1|\theta] = E[X_2|\theta] = \theta$. В случае, если X_1 и X_2 независимы:

$$E[X_1X_2] = E[X_1]E[X_2].$$

Используя (1.1) имеем:

$$E[X_1] = E[E[X_1|\theta]] = E[\theta] = \mu,$$

аналогично и $E[X_2] = \mu$. Отсюда:

$$E[X_1X_2] = \mu^2 + \sigma_2^2 \neq E[X_1]E[X_2].$$

Это показывает, что X_1 и X_2 не являются независимыми. Связь X_1 и X_2 в том, что их средние берутся из совместного распределения. Если это среднее, θ, известно, то эта связь нарушается и X_1 и X_2 становятся условно независимыми.

7.6 Обсуждение байесовского подхода к теории доверия

Подход, используемый в пуассоновской/гамма и нормальной/нормальной моделях, следующий — единственное существенное различие состоит только в предположениях относительно распределений. Этот подход заключается в следующем:

1. Задача регулярна, например, нахождение распределения величины или числа исков. В каждом случае нужно оценить некоторую величину, которая характеризует это распределение, например, среднее значение числа исков или среднее значение величины исков.

2. Некоторые предположения относительно модели делаются в рамках байесовского подхода, например, предполагается, что случайная величина числа исков имеет пуассоновское распределение с гамма распределенным параметром.

3. Найдена байесовская оценка определенной величины.

4. Показано, что эта оценка представляется в форме доверительной оценки, то есть в форме выражения (2.1).

Этот подход хорошо работает в двух случаях. Он очень точно определяет вспомогательные данные (путем интерпретации в терминах априорного распределения) и дает формулы для вычисления коэффициента доверия. Каковы же недостатки этого подхода?

Первый недостаток в том, что байесовский подход может быть неприменим к задаче. А если и применим, то неизвестно, каковы значения параметров априорного распределения. Например, хотя пуассоновская/гамма модель дает формулу (3.3) для вычисления коэффициента доверия, там содержится параметр β. Какое значение β может быть выбрано, непонятно. При выборе значений параметра априорного распределения в байесовском подходе нужно убедиться, что этот параметр отражает степень доверия к возможным значениям оцениваемых величин, например, среднее число исков λ в пуассоновской/гамма модели.

Другой недостаток в том, что байесовский подход к каждой такой задаче может не работать в том смысле, что он может не давать оценок, которые легко могут быть преобразованы в форму доверительной оценки. Это демонстрирует априорное пуассоновское распределение числа исков.

§8 Эмпирическая теория доверия Байеса: Модель 1

8.1 Введение

Эмпирическая теория доверия Байеса является ни чем иным, как особенным подходом к задаче параграфа 1. Этот подход приводит к развитию большого числа различных моделей различной степени сложности. В этой главе две такие модели будут изучены. В этом разделе будет изучена наиболее простая модель. Хотя эта модель, которую мы будем называть Модель 1, не особо используется на практике, она обеспечивает достойное введение в принципы, лежащие в основе эмпирической теории доверия Байеса. В особенности, она покажет схожесть и различие между эмпирическим байесовским и просто байесовским подходами в теории доверия. В параграфе 4 будет изучена расширенная Модель 1, более часто использующаяся на практике.

8.2 Модель 1: описание

В этом разделе будут изложены предположения касательно Модели 1. Эта модель может быть рассмотрена как обобщение нормальной/нормальной модели, что будет сделано немного поздней.

Задача состоит в оценивании чистой премии. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — суммарные иски (число исков) в разные периоды рассматриваемого риска. Более точная постановка задачи состоит в следующем: даны известные величины $X_1, \ldots, X_n$, по которым необходимо оценить X_{n+1}.

Сделаем следующие предположения насчет Модели 1.

(4.1) Распределение каждого X_j зависит от параметра θ, значение которого фиксировано, но неизвестно.

(4.2) Величины X_j при условии θ независимы и одинаково распределены. Параметр θ известен как параметр риска. Он может быть действительным числом или, например, множеством действительных чисел.

Следующие предположения являются следствием этих двух:

(4.3) Случайные величины X_j одинаково распределены.

(4.4) X_j, вообще говоря, не являются независимыми.

Определим $m(\theta)$ и $s^2(\theta)$ следующим образом:

$$m(\theta) = E[X_j|\theta], \quad s^2(\theta) = \mathrm{Var}[X_j|\theta].$$

Если известны значение θ и распределения X_j при условии θ, то очевидно, что оценкой суммарного иска в следующем году X_{n+1} будет являться $m(\theta)$. Но, исходя из предположений, θ неизвестно. Задача состоит в следующем:

(4.5) Оценить $m(\theta)$ по наблюдениям $\underline{\mathrm{X}} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Сходства Модели 1 и нормальной/нормальной модели следующие:

(i) Роль θ одинакова для обеих моделей: оно характеризует распределение моделируемых процессов, например, распределение суммарного иска за год. Смотреть (3.17) и (4.1).

(ii) Предположения, касающиеся распределения X_j, одинаковы: X_j одинаково распределены в каждом случае. Смотреть (3.23), (3.24), (4.3) и (4.4).

(iii) Предположения, касающиеся условного распределения X_j при условии θ одинаковы: X_j условно одинаково распределены в каждом случае. Смотреть (3.19), (3.22) и (4.2).

Модель 1 может быть рассмотрена как обобщение нормальной/нормальной модели. Отличия нормальной/нормальной модели, то есть обобщения, следующие:

(i) $E[X_j|\theta]$ есть некоторая функция от θ; $m(\theta)$ для Модели 1 и просто θ для нормальной/ нормальной модели. Отсюда следует, что $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ Модели 1 соответствует $\mathrm{Var}[\theta] = \sigma_2^2$ нормальной/нормальной модели.

(ii) $\mathrm{Var}[X_j|\theta]$ есть функция от θ; $s^2(\theta)$ для Модели 1 и константа σ_1^2 для нормальной/ нормальной модели. Отсюда $E[s^2(\theta)]$ соответствует $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}[X_j|\theta]$.

(iii) Нормальная/нормальная модель дает достаточно точные предположения относительно распределений θ и X_j при условии θ: $X_j|\theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_1^2)$, $\theta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_2^2)$. Модель 1 не дает никаких подобных предположений.

(iv) Параметр риска θ есть действительное число в нормальной/нормальной модели, но может быть более общей величиной в Модели 1.

8.3 Модель 1: получение страховой премии

В предыдущем пункте были изучены предположения, касающиеся Модели 1, и сделан акцент на сходствах между Моделью 1 и нормальной/нормальной моделью. В этом разделе будет получено решение задачи (4.5) и получена оценка $m(\theta)$ по наблюдениям $\underline{\mathrm{X}}$.

Если байесовский подход будет применен к этой задаче, очевидно, что оценка $m(\theta)$ по наблюдениям $\underline{\mathrm{X}}$ будет апостериорным средним:

$$E[m(\theta)|\underline{\mathrm{X}}]. \tag{4.6}$$

Это байесовская оценка $m(\theta)$. Проблема оценки (4.6) в том, что она не всегда приводит к ответу, который может быть выражен в форме выражения для страховой премии, а нам желательно получить ответ задачи (4.5) в форме (2.1). Выражение (2.1) включает в себя оценку по наблюдениям информации о самом риске $\overline{X}$ и величинам Z и μ. В пуассоновской/гамма и нормальной/нормальной моделях оценка $\overline{X}$ наиболее проста, так как она линейна по всем наблюдаемым данным. Если желаемая оценка линейна по всем наблюдаемым данным, то будем искать оценку $m(\theta)$ в виде

$$a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n, \tag{4.7}$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — константы, выбранные таким образом, что оценка $m(\theta)$ является оптимальной среди всех оценок такого вида. Оптимальность здесь понимается в смысле наименьшего среднеквадратичного отклонения линейной оценки от $m(\theta)$, то есть нужно минимизировать

$$E[(m(\theta) - a_0 - a_1 X_1 - \ldots - a_n X_n)^2]. \tag{4.8}$$

Эта задача решается дифференцированием выражения (4.8) по $a_0, \ldots, a_n$. Сделаем некоторые технические преобразования.

(i) Используя (1.1) и (1.3) и определение $m(\theta)$, имеем:

$$E[X_j\, m(\theta)] = E[E[X_j\, m(\theta)|\theta]] = E[m(\theta) E[X_j|\theta]] =$$
$$= E[m^2(\theta)] = \mathrm{Var}[m(\theta)] + (E[m(\theta)])^2.$$

(ii) Используя (1.1) и тот факт, что X_j при условии θ независимы, имеем:

$$E[X_j X_k] = E[E[X_j X_k|\theta]] = E[E[X_j|\theta] E[X_k|\theta]] =$$
$$= E[m^2(\theta)] = \mathrm{Var}[m(\theta)] + (E[m(\theta)])^2.$$

(iii) Используя (1.1) и определение $s^2(\theta)$, имеем:

$$E[X_j^2] = E[E[X_j^2|\theta]] = E[\mathrm{Var}[X_j|\theta] + (E[X_j|\theta])^2] = E[s^2(\theta)] + E(m^2(\theta)) =$$

$$= E(s^2(\theta)) + \mathrm{Var}[m(\theta)] + (E[m(\theta)])^2.$$

Теперь дифференцируем (4.8) по a_0, приравнивая полученную производную к нулю. Получится следующее выражение:

$$E[m(\theta) - a_0 - a_1X_1 - \ldots - a_nX_n] = 0,$$

которое, по определению $m(\theta)$, равно:

$$a_0 = E[m(\theta)]\left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j\right). \tag{4.9}$$

Затем дифференцируем (4.8) по a_k, где $k \neq 0$, и приравниваем производную к нулю. Получаем:

$$E[X_k(m(\theta) - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_jX_j)] = 0,$$

откуда

$$\mathrm{Var}[m(\theta)] + (E[m(\theta)])^2 - a_0E[m(\theta)] - \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathrm{Var}[m(\theta)] + (E[m(\theta)])^2) - a_kE[s^2(\theta)] = 0.$$

Перегруппируем слагаемые:

$$a_kE[s^2(\theta)] = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j\right)(\mathrm{Var}[m(\theta)] + (E[m(\theta)])^2) - a_0E[m(\theta)]. \tag{4.10}$$

Соотношение (4.10) выполнено для $k = 1, \ldots, n$. Легко видеть, что a_k не зависит от k, другими словами

$$a_1 = \ldots = a_n.$$

Обозначим среднее арифметическое $a_1, \ldots, a_n$ через $\dfrac{Z}{n}$, тогда

$$Z = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

и оценка может быть записана в виде

$$a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j X_j = a_0 + Z\overline{X}, \tag{4.11}$$

где

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Получили линейную систему (4.9), (4.10) относительно неизвестных a_0 и Z. Ее решение:

$$a_0 = (1 - Z)E[m(\theta)], \tag{4.12}$$

$$Z = \frac{n}{n + \dfrac{E[s^2(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]}}. \tag{4.13}$$

Итак, решение задачи оценивания $m(\theta)$ по наблюдениям $\underline{X}$ задается правой частью (4.11) и значениями a_0 и Z, полученными из (4.12) и (4.13) соответственно.

Окончательно, оценка $m(\theta)$ по $\underline{X}$ в Модели 1:

$$(1 - Z)E[m(\theta)] + Z\overline{X}, \tag{4.14}$$

где

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

и

$$Z = \frac{n}{n + \dfrac{E[s^2(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]}}.$$

Важно отметить, что решение получено в форме доверительной оценки. Другими словами, правая часть (4.11) представляет собой формулу (2.1), где $E[m(\theta)]$ играет роль μ, а $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ — роль $\overline{X}$.

Также можно отметить, что полученное решение схоже с решением в нормальной модели, в частности формулой для коэффициента доверия. Формула (4.13) является обобщением формулы (3.5), а $E[s^2(\theta)]$ и $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ можно считать обобщениями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно.

В формулу доверительной оценки (4.14) входит три параметра $E[m(\theta)]$, $E[s^2(\theta)]$ и $\mathrm{Var}[m(\theta)]$. Модель 1 не делает никаких предположений относительно распределения параметра, в отличии от байесовского подхода в теории доверия, но значения этих параметров должны быть известны. Тот факт, что эти параметры зависят от первых и вторых моментов, а не от моментов более высокого порядка некоторых других величин, например, объясняется тем, что критерий выбора значений $a_0, a_1, \dots, a_n$ в (4.7) заключался в минимизации квадрата разности ожидаемого значения и его оценки. Способ оценивания этих трех параметров будет рассмотрен в следующем параграфе.

Рассмотрим немного другую ситуацию.

Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n$ — действительные числа. Рассмотрим

$$E[(E[m(\theta)|\underline{X}] - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j)^2]. \tag{4.15}$$

(i) Будет показано, что (4.15) можно записать как

$$E[(m(\theta) - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j)^2] - 2E[AB] - E[A^2],$$

где

$$A = m(\theta) - E[m(\theta)|\underline{X}]$$

и

$$B = E[m(\theta)|\underline{X}] - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j.$$

(ii) Будет показано, что:

$$E[AB] = 0.$$

(iii) Тем самым будет показано, что значения $a_0, a_1, \dots, a_n$, минимизирующие (4.15), совпадают со значениями $a_0, a_1, \dots, a_n$, минимизирующими (4.8).

(i)

$$E[(m(\theta) - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j)^2]$$

может быть представлено в виде $E[(A+B)^2]$, где A и B определяются, как и в (i). Возведя в квадрат, получим требуемое соотношение.

(ii) Используем формулу (1.1):

$$E[AB] = E[E[AB|\underline{X}]].$$

Заметим, что B есть функция от $\underline{X}$, поэтому воспользуемся формулой (1.3):

$$E[E[AB|\underline{X}]] = E[BE[A|\underline{X}]].$$

Но

$$E[A|\underline{X}] = E[m(\theta) - E[m(\theta)|\underline{X}]|\underline{X}] = E[m(\theta)|\underline{X}] - E[m(\theta)|\underline{X}] = 0$$

и

$$E[E[m(\theta)|\underline{X}]|\underline{X}] = E[m(\theta)|\underline{X}],$$

следовательно

$$E[AB] = E[B \times 0] = 0,$$

что и требовалось доказать.

(iii) В результате, (4.15) можно представить в виде

$$E[(m(\theta) - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j)^2] - E[A^2].$$

Заметим, что A, а поэтому и $E[A^2]$, не зависит от $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Это означает, что значения $a_0, a_1, \ldots, a_n$, минимизирующие (4.15), совпадают со значениями $a_0, a_1, \ldots, a_n$, минимизирующими

$$E[(m(\theta) - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j)^2],$$

что и требовалось доказать.

Итак, показано, что можно прийти к тому же результату, если вместо оптимальной линейной оценки $m(\theta)$ искать оптимальную линейную оценку $E[m(\theta)|\underline{X}]$. Это следует из того, что

(i) оптимальность понимается в смысле минимизации квадрата разности, и

(ii) $E[m(\theta)|\underline{X}]$ является оптимальной оценкой $m(\theta)$ среди всех функций от $\underline{X}$ и (4.14) дает оптимальную оценку $m(\theta)$ среди всех линейных функций от $\underline{X}$.

8.4 Модель 1: оценка параметров

В этом разделе будет решена задача оценивания $E[m(\theta)]$, $E[s^2(\theta)]$ и $\mathrm{Var}[m(\theta)]$, тем самым будет завершено нахождение оценки $m(\theta)$ по $\underline{X}$. Нам потребуется следующее предположение: в распоряжении имеется некоторая информация о сходных, но необязательно таких же рисках. Это требует менее общей постановки задачи, некоторых дополнительных предположений и немного других обозначений. Важное отличие чисто байесовского подхода к теории доверия от эмпирической теории доверия Байеса заключается в том, что в первом случае не требуется никаких данных для оценки параметров.

Интерес представляет задача оценки чистой премии, или ожидаемого числа исков, в модели индивидуального риска (как это было в разделах 4.2 и 4.3) и в модели коллективного риска. Под коллективным риском понимается набор различных рисков, связь между которыми будет разъяснена в дальнейшем. Для простоты, предположим, что интересующий нас индивидуальный риск имеет номер 1 в этом наборе. Предположим также, что для каждого из N рисков имеются наблюдения за последние n лет о суммарном иске или частоте подачи исков. Обозначим через X_{ij} суммарный иск (или число исков) для i-го риска в j-ом году, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, n$.

Соберем эти величины в таблицу:

Таблица 1

		Год			
		1	2	$\ldots$	n
Номер	1	X_{11}	X_{12}	$\ldots$	X_{1n}
риска	2	X_{21}	X_{22}	$\ldots$	X_{2n}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	N	X_{N1}	X_{N2}	$\ldots$	X_{Nn}

Каждая строка Таблицы 1 представляет собой наблюдения для конкретного риска; первая строка, относящаяся к риску номер 1, представляет собой последовательность наблюдений, которая в разделах 4.2 и 4.3 обозначалась как $\underline{X}$. (Заметим, что величины $X_1, \ldots, X_n$ из разделов 4.2 и 4.3 обозначаются теперь как $X_{11}, \ldots, X_{1n}$.)

В разделе 4.2 были сделаны предположения (4.1) и (4.2) о взаимосвязи наблюдений для индивидуального иска. В этом разделе будут сделаны в точности те же предположения для каждого из N рисков.

Для любого $i = 1, \ldots, N$:

(4.16) распределение случайной величины X_{ij} зависит от неизвестного значения параметра θ_i, которое фиксировано для каждого j;

(4.17) случайные величины X_{ij} условно независимы относительно θ_i и одинаково распределены для любого $j = 1, \ldots, n$.

Заметим, что параметр риска θ из разделов 4.2 и 4.3 теперь обозначается как θ_i, и из предположений следует, что значения параметров для различных рисков отличаются. (Но, по-прежнему, значение параметра для одного риска год от года не меняется.) Сделанные предположения отражают некоторую взаимосвязь элементов каждой строки Таблицы 1, но они не отражают связей между строками, то есть между различными рисками. Поэтому нам потребуется еще одно предположение:

(4.18) для любых $i \neq k$ пары (θ_i, X_{ij}) и (θ_k, X_{km}) независимы и одинаково распределены.

Это означает, что строки Таблицы 1 независимы.

Из предположения (4.18) немедленно вытекает следующее:

(4.19) для любых $i \neq k$ случайные величины X_{ij} и X_{km} независимы и одинаково распределены;

(4.20) параметры риска $\theta_1, \ldots, \theta_N$ независимы и одинаково распределены.

Связь между различными рисками, то есть между строками таблицы, возникает в результате предположения, что параметры риска $\theta_1, \ldots, \theta_N$ одинаково распределены. Это в свою очередь означает, что если значения $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_N$ известны, то известна некоторая информация о совместном распределении θ_i, а значит, и о θ_1, или, в конечном итоге, о распределении θ_1.

В разделе (4.2) были введены функции $m(\cdot)$ и $s^2(\cdot)$. Придерживаясь тех же определений этих функций, применим их к коллективному риску:

$$m(\theta_i) = E[X_{ij}|\theta_i],$$

$$s^2(\theta_i) = \mathrm{Var}[X_{ij}|\theta_i].$$

Заметим, что, как и в разделах 4.2 и 4.3, $E[X_{ij}|\theta_i]$ и $\mathrm{Var}[X_{ij}|\theta_i]$ не зависят от j, так как при фиксированном θ_i случайные величины $X_{i1}, \ldots, X_{in}$ одинаково распределены. Заметим также, что, так как $\theta_1, \ldots, \theta_N$ одинаково распределены, то $E[m(\theta_i)]$, $E[s^2(\theta_i)]$ и $\mathrm{Var}[m(\theta_i)]$ не зависят от i. А это в точности те параметры, которые в разделе 4.2 обозначались как $E[m(\theta)]$, $E[s^2(\theta)]$ и $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ и которые будут использованы для получения требуемой оценки.

Обозначим

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \text{ через } \overline{X_i}$$

и

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{X_i}\ \left(=\frac{1}{Nn}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\right)\ \text{через}\ \overline{X}.$$

Заметим, что величина $\overline{X_i}$ обозначалась в разделах 4.2 и 4.3 как $\overline{X}$. Важно видеть отличие между содержанием $\overline{X}$ в этом разделе и в предыдущих разделах.

Новое обозначение будет использовано для того, чтобы записать доверительную оценку чистой премии (или числа исков) в наступающем году для риска номер 1 в следующем виде:

$$(1-Z)E[m(\theta)]+Z\overline{X_1}, \tag{4.21}$$

где

$$\overline{X_1}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{1j}$$

и

$$Z=\frac{n}{n+\dfrac{E[s^2(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]}}.$$

Важно понимать, что формула (4.21) в точности совпадает с формулой (4.14), если вместо $\overline{X}$ и X_j использовать обозначения $\overline{X_1}$ и X_{1j}.

Теперь можно получить оценки для $E[m(\theta)]$, $E[s^2(\theta)]$ и $\mathrm{Var}[m(\theta)]$. Эти оценки будут функциями $\{\{X_{ij}\}_{j=1}^{n}\}_{i=1}^{N}$, чьи значения станут известны после вычисления оценки для $m(\theta_1)$.

Каждая строка Таблицы 1 соответствует фиксированному значению θ. Пользуясь определениями $m(\theta_i)$ и $s^2(\theta_i)$, получаем для них оценки

$$\overline{X_i}\ \text{и}\ \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X_i})^2\ \text{соответственно}.$$

$E[m(\theta)]$ является “средним” (по распределению θ) значений $m(\theta)$ для различных значений θ. Очевидной оценкой для $E[m(\theta)]$ является среднее значение оценок для $m(\theta_i)$, $i=1,\dots,N$. Другими словами, оценкой для $E[m(\theta)]$ является $\overline{X}$. Аналогично, $E[s^2(\theta)]$ является “средним” значений $s^2(\theta)$, поэтому очевидной оценкой будет среднее значение оценок для $s^2(\theta_i)$, а именно:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X_i})^2.$$

Для каждой строки Таблицы 1 $\overline{X_i}$ является оценкой для $m(\theta_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Поэтому можно было бы предположить, что выборочная дисперсия этих величин, то есть

$$\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\overline{X_i}-\overline{X})^2,$$

является очевидной оценкой для $\mathrm{Var}[m(\theta)]$. К сожалению, можно показать, что эта оценка не является несмещенной. Можно также показать, что несмещенная оценка для $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ получается вычитанием поправочного члена из выборочной дисперсии:

$$\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\overline{X_i}-\overline{X})^2 - \frac{1}{Nn}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X_i})^2.$$

Поправочный член равен оценке для $E[s^2(\theta)]$, деленной на n.

Итак,получено следующее:

	параметр	оценка
(4.22)	$E[m(\theta)]$	$\overline{X}$
(4.23)	$E[s^2(\theta)]$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X_i})^2$
(4.24)	$\mathrm{Var}[m(\theta)]$	$\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\overline{X_i}-\overline{X})^2 - \frac{1}{Nn}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X_i})^2$

Необходимо отметить, что хотя параметр $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ неотрицателен в силу того, что он является дисперсией, оценка (4.24) может получиться отрицательной. Формула (4.24) представляет собой разность двух слагаемых, каждое из которых неотрицательно, и на практике, если она оказывается отрицательной, то оценка $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ полагается равной нулю. Собственно говоря, это означает, что оценка для $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ равна максимуму из 0 и величины (4.24). Несмотря на то, что (4.24) дает несмещенную оценку, максимум из 0 и (4.24) несмещенной оценкой являться не будет. Однако, этот подход помогает избегать бессмысленных оценок для $\mathrm{Var}[m(\theta)]$.

Параметр $E[s^2(\theta)]$ тоже должен быть неотрицательным, но его оценка (4.23) и так всегда неотрицательна, поэтому никакой коррекции не требуется.

Можно показать, что оценки для $E[m(\theta)]$, $E[s^2(\theta)]$ и $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ являются несмещенными. Доказательство этого факта выходит за пределы данного изложения.

Рассмотрим теперь формулу (4.13) для коэффициента доверия в Модели 1. Входящие в эту формулу величины имеют следующую интерпретацию:

n	количество данных о риске;
$E[s^2(\theta)]$	среднее отклонение данных значений год от года для индивидуального риска, то есть среднее отклонение элементов в строках Таблицы 1;
$\mathrm{Var}[m(\theta)]$	отклонение средних значений для различных рисков, то есть средних значений каждой из строк Таблицы 1.

Из формулы (4.13) для Z можно сделать следующие наблюдения:

(i) значения Z лежат между 0 и 1;

(ii) Z является возрастающей функцией от n. Это вполне оправдано — чем больше имеется данных о риске, тем больше мы будем на них полагаться при построении доверительной оценки для чистой премии или числа исков;

(iii) Z является убывающей функцией от $E[s^2(\theta)]$. Это тоже оправдано — чем больше значение $E[s^2(\theta)]$, по сравнению с $\mathrm{Var}[m(\theta)]$, тем больше будут отклоняться данные о риске по сравнению с данными о схожих рисках.

(iv) Z является возрастающей функцией от $\mathrm{Var}[m(\theta)]$. И это оправдано — чем больше значение $\mathrm{Var}[m(\theta)]$, по сравнению с $E[s^2(\theta)]$, тем больше будут отклонения между различными рисками, и, следовательно, тем меньше будет их сходство с рассматриваемым риском и тем меньше мы будем полагаться на данные об этих рисках.

Итак, в этом разделе появляется некоторое противоречие. В разделе 2.2 было установлено, что коэффициент доверия не должен зависеть от данных об оцениваемом риске. Однако, эти данные используются при оценке $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$, чьи значения затем используются для вычисления Z. Противоречие объясняется тем, что коэффициент доверия Z, определяемый формулой (4.21), в принципе, не зависит от фактических данных об оцениваемом риске. Но, к сожалению, в формулу входят два параметра, $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$, значения которых неизвестны, но могут быть на практике оценены по данным о риске и о других схожих рисках.

Прокомментируем теперь предположения, сделанные в этой модели. Предположения касались того, что случайные величины X_{ij} одинаково распределены как для одного риска, так и для различных рисков.

Если рассматривать X_{ij} для различных рисков, то предполагалось, что они одинаково распределены (см.(4.19)). Если рассматривать X_{ij} для i-го риска, то предполагалось, что они одинаково распределены (см.(4.3)) и условно одинаково распределены относительно θ_i(см.(4.2) и (4.17)). Это означает, что $E[X_{ij}|\theta_i]$ и $\mathrm{Var}[X_{ij}|\theta_i]$ не зависят от j. Эти предположения были необходимы для получения оценки (4.21). На самом деле, предположения (4.17) и (4.18) (и соответствующее предположение (4.2) в разделе 4.2) можно заменить следующими, что позволит получить ту же оценку.

(4.25) Относительно θ_i случайные величины $X_{ij},\ j = 1, \ldots, n$ независимы для любого $i = 1, \ldots, N$;

(4.26) для любых $i \neq k$ пары (θ_i, X_{ij}) и (θ_k, X_{kl}) независимы и параметры риска $\theta_1, \ldots, \theta_N$ одинаково распределены;

(4.27) для любого $i = 1, \ldots, N$ $E[X_{ij}|\theta_i]$ и $\mathrm{Var}[X_{ij}|\theta_i]$ не зависят от j.

Предположения (4.25) и (4.26) являются ослабленными вариантами (4.17) и (4.18). Предположение (4.27) добавлено в силу того, что оно не является следствием (4.25) и (4.26).

Все полученные в параграфе 4 результаты при этом сохраняются, а изложение становится несколько проще. Кроме того, это поможет связать Модель 1 с Моделью 2 параграфа 5.

§9 Эмпирическая теория доверия Байеса: Модель 2

9.1 Введение

В этом параграфе приемы эмпирической теории доверия Байеса будут применены ко второй, немного более сложной, модели. Стиль изложения будет в точности таким же, как и в параграфе 4. В разделе 5.2 будет поставлена задача и сделаны предположения. Задача будет заключаться в том же, а именно, в оценке чистой премии или ожидаемого числа исков в наступающем году. Предположения будут немного отличаться от предположений параграфа 4. Затем в разделе 5.3 будет получена доверительная оценка для чистой премии или ожидаемого числа исков. Наконец, в разделе 5.4 будет рассмотрен метод оценивания значений параметров, входящих в доверительную оценку.

9.2 Модель 2: описание

Задача состоит в оценке ожидаемого суммарного иска (или ожидаемого числа исков) в наступающем году для данного иска. Пусть случайные величины $Y_1, Y_2, \ldots$ представляют собой суммарные иски (или значения числа исков) в разные периоды рассматриваемого риска. Необходимо оценить Y_{n+1} по наблюдениям $Y_1, \ldots, Y_n$. Пока задача выглядит в точности, как в параграфе 4. Важным отличием Модели 2 от Модели 1 является то, что в нее входит дополнительный параметр P_j — уровень риска. Значение P_j отражает "степень занятости" в году j. Например, P_j может представлять собой премиальный доход от риска в году j или число отдельных полисов по данному риску в году j. Необходимо отметить, что значение P_{n+1} в начале года $n+1$ предполагается известным.

Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, определяемых как

$$X_j = \frac{Y_j}{P_j} \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots$$

Случайная величина X_j представляет собой суммарный иск (или число исков) в году j, нормированный с целью устранения различий между уровнями риска. Предположения, характерные для Модели 2, следующие:

(5.1) распределение случайной величины X_j зависит от значения неизвестного параметра θ, одинакового для каждого j;

(5.2) для заданного θ случайные величины X_j независимы (но необязательно одинаково распределены);

(5.3) $E[X_j|\theta]$ не зависит от j;

(5.4) $P_j \mathrm{Var}[X_j|\theta]$ не зависит от j.

Как и в предыдущих разделах,θ является параметром риска и, как и в Модели 1, может быть действительным числом, либо вектором действительных чисел. Предположение (5.1) является стандартным для всех рассматриваемых здесь моделей. Предположение (5.2) соответствует предположению (4.2) в Модели 1, но немного слабее, чем (4.2). В предположении (5.2) не требуется, чтобы случайные величины X_j были условно относительно θ одинаково распределены. В Модели 2 также нет предположения о том, что X_j условно или безусловно одинаково распределены.

Заметим, что если все $P_j = 1$, то Модель 2 в точности совпадает с Моделью 1.

Имея предположения (5.3) и (5.4), определим

$$m(\theta) = E[X_j|\theta],$$

$$s^2(\theta) = P_j \mathrm{Var}[X_j|\theta].$$

Определение $m(\theta)$ в точности совпадает с определением в Модели 1, но определение $s^2(\theta)$ немного отличается.

Для того, чтобы лучше понять предположения (5.3) и (5.4), рассмотрим следующий пример. Пусть риск рассматривается как набор различного в каждом году числа полисов, и число полисов в году j равно P_j. Пусть также суммарный иск по одному полису в одном году имеет математическое ожидание $m(\theta)$ и дисперсию $s^2(\theta)$, где $m(\cdot)$ и $s^2(\cdot)$ являются функциями от θ, где θ — неизвестный фиксированный параметр риска для всех полисов. Пусть случайная величина Y_j представляет собой суммарный иск по всем полисам в году j. Тогда:

$$E[Y_j] = P_j m(\theta),$$

$$\mathrm{Var}[Y_j] = P_j s^2(\theta),$$

$$E[X_j] = m(\theta),$$

$$P_j \mathrm{Var}[X_j] = s^2(\theta).$$

Этот пример удовлетворяет предположениям (5.3) и (5.4).

9.3 Модель 2: получение страховой премии

В предыдущем разделе была довольно широко поставлена задача оценивания ожидаемого значения Y_{n+1} по данным $Y_1, \ldots, Y_n$. Уточним данную постановку. Требуется оценить величину среднего значения Y_{n+1} для заданного θ, то есть $P_{n+1} m(\theta)$. Так как значение P_{n+1} известно в начале года $n+1$, то задача состоит в оценке $m(\theta)$. Известны значения Y_j и соответствующие значения P_j для всех $j = 1, \ldots, n$. Для удобства, обозначим их через $\underline{X}$. Как и в параграфе 4, требуется построить оценку, линейную по $\underline{X}$, и в качестве линейной оценки для $m(\theta)$, оптимальной в среднеквадратичном смысле, будет выбрана линейная функция от $X_1, \ldots, X_n$. (Заметим, что линейная функция от $X_1, \ldots, X_n$ является также линейной функцией от $Y_1, \ldots, Y_n$.) Итак, задача состоит в оценке $m(\theta)$ функцией вида

$$a_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n,$$

где $a_0, \ldots, a_n$ минимизируют

$$E[(m(\theta) - a_0 - a_1 X_1 - \ldots - a_n X_n)^2]. \tag{5.5}$$

Задача поставлена в той же форме, что и в параграфе 4, но определения X_j и некоторые предположения различаются. Метод решения задачи будет тем же: дифференцируем (5.5) по $a_0, \ldots, a_n$ и приравниваем производные к нулю.

Ниже приведены некоторые технические результаты, которые помогут решить эту задачу.

(i) Используя выражения (1.1), (1.3) и определение $m(\theta)$, имеем:

$$E[X_j m(\theta)] = E[E[X_j m(\theta)|\theta]] = E[m(\theta)E[X_j|\theta]] = E[m^2(\theta)] = \mathrm{Var}[m(\theta)]+(E[m(\theta)])^2.$$

(ii) Используя (1.1) и тот факт, что X_j и X_k при условии θ независимы при $j \neq k$, имеем:

$$E[X_j X_k] = E[E[X_j X_k|\theta]] = E[E[X_j|\theta]E[X_k|\theta]] = E[m^2(\theta)] = \mathrm{Var}[m(\theta)]+(E[m(\theta)])^2.$$

(iii) Используя (1.1) и определение $s^2(\theta)$, имеем:

$$E[X_j^2] = E[E[X_j^2|\theta]] = E[\mathrm{Var}[X_j|\theta]+(E[X_j|\theta])^2] = \frac{1}{P_j}E[s^2(\theta)]+E[m^2(\theta)] =$$

$$= \frac{1}{P_j}E[s^2(\theta)] + \mathrm{Var}[m(\theta)] + (E[m(\theta)])^2.$$

Теперь,

$$\frac{\partial}{\partial a_0}\left(E[(m(\theta) - a_0 - a_1X_1 - a_2X_2 - \ldots - a_nX_n)^2]\right) = 0,$$

то есть

$$E[m(\theta) - a_0 - a_1X_1 - a_2X_2 - \ldots - a_nX_n] = 0.$$

Отсюда, по определению $m(\theta)$, получаем:

$$a_0 = E[m(\theta)]\left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j\right). \tag{5.6}$$

Теперь дифференцируем среднеквадратичное отклонение по a_k, $k = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\left(E[(m(\theta) - a_0 - a_1X_1 - a_2X_2 - \ldots - a_nX_n)^2]\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$E[X_k(m(\theta) - a_0 - a_1X_1 - a_2X_2 - \ldots - a_nX_n)] = 0.$$

Раскрываем математическое ожидание и подставляем уже вычисленные ранее выражения. В итоге:

$$\mathrm{Var}[m(\theta)]+(E[m(\theta)])^2-a_0E[m(\theta)]-\sum_{j=1}^{n}a_j\left(\mathrm{Var}[m(\theta)]+(E[m(\theta)])^2\right)-\frac{1}{P_k}E[s^2(\theta)]=0,$$

которое, с учетом (5.6) преобразовывается к виду

$$a_k=\frac{P_k\mathrm{Var}[m(\theta)]}{E[s^2(\theta)]}\left(1-\sum_{j=1}^{n}a_j\right). \tag{5.7}$$

Суммируя обе части выражения (5.7) по всем k от 1 до n, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\left(\sum_{j=1}^{n}P_j\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\frac{\mathrm{Var}[m(\theta)]}{E[s^(\theta)]}.$$

Разрешая это уравнение относительно $a_1+\ldots+a_n$ и подставляя его в (5.6) и (5.7), имеем:

$$a_0=\frac{E[m(\theta)]E[s^2(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]\sum\limits_{j=1}^{n}P_j+E[s^2(\theta)]} \tag{5.8}$$

$$a_k=\frac{P_k\,\mathrm{Var}[m(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]\sum\limits_{j=1}^{n}P_j+E[s^2(\theta)]} \tag{5.9}$$

Подставляя выражения для a_0 и a_k, $k=1,\ldots,n$ в общий вид оценки $m(\theta)$

$$a_0+a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n$$

получаем решение нашей задачи, то есть оптимальную в среднеквадратичном смысле линейную оценку $m(\theta)$ по наблюдениям $\underline{\mathrm{X}}$:

$$\frac{E[m(\theta)]E[s^2(\theta)]+\mathrm{Var}[m(\theta)]\sum\limits_{j=1}^{n}Y_j}{\mathrm{Var}[m(\theta)]\sum\limits_{j=1}^{n}+E[s^2(\theta)]}$$

Эта формула может быть переписана в более привлекательной форме:

$$Z\overline{X}+(1-Z)E[m(\theta)], \tag{5.10}$$

где

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} P_j X_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} P_j}$$

и

$$Z = \frac{\mathrm{Var}[m(\theta)] \sum\limits_{j=1}^{n} P_j}{\mathrm{Var}[m(\theta)] \sum\limits_{j=1}^{n} P_j + E[s^2(\theta)]}.$$

Этот результат показывает сходства и различия с результатами, полученными для Модели 1.

Ниже приведены некоторые замечания относительно решения этой задачи:

(i) Значения a_k не обязательно одинаковы для всех $k = 1, \ldots, n$. Это говорит о том, что Модель 2 не симметрична относительно X_k, как Модель 1, и это неудивительно, ведь каждый год уровень риска меняется. Если все P_k одинаковы, то модель симметрична, и, как следует из (5.9), a_k также одинаковы, $k = 1, \ldots, n$. Однако ж, если все P_k одинаковы, то Модель 2 эквивалентна Модели 1.

(ii) Если все P_k одинаковы и равны 1, то решение (5.10) в точности совпадает с решением (4.14) и Модель 2 полностью совпадает с Моделью 1.

(iii) Как и для Модели 1, решение (5.10) включает в себя три параметра: $E[m(\theta)]$, $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$. Оценка этих величин будет проведена в следующем разделе.

9.4 Модель 2: оценка параметров

Процедура оценки параметров $E[m(\theta)]$, $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$ полностью повторяет аналогичную процедуру, проведенную для Модели 1 в разделе 4.4.

Предположим теперь, что риск, который нас интересует, принадлежит совокупности N рисков, и что для каждого из N рисков и каждого из n прошедших лет существуют данные в форме, данной в разделе 5.2. Эти данные состоят из значений суммарного иска, или числа исков, и совпадают с размером риска. Пусть Y_{ij} — случайная величина, принимающая значение суммарного иска, или числа исков, для риска i в год j, и пусть P_{ij} — соответствующий уровень риска, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, n$.

Для каждых i и j определим

$$X_{ij} = \frac{Y_{ij}}{P_{ij}}.$$

Данные, приведенные в следующей таблице, соотносятся с данными для Модели 1:

		Год			
		1	2	...	n
Номер риска	1	Y_{11}, P_{11}	Y_{12}, P_{12}	...	Y_{1n}, P_{1n}
	2	Y_{21}, P_{21}	Y_{22}, P_{22}	...	Y_{2n}, P_{2n}
	.	.	.	...	.
	.	.	.	...	.
	N	Y_{N1}, P_{N1}	Y_{N2}, P_{N2}	...	Y_{Nn}, P_{Nn}

Предположим, как и в разделе 4.4, что интересующий нас риск — риск под номером 1. Это значит, что изучаемые ранее объекты Y_j, P_j и X_j теперь обозначены как Y_{1j}, P_{1j} и X_{1j} соответственно. Решение задачи оценки $X_{1,n+1}$ уже приведено в (5.10), с точностью до введенных только что обозначений. Риски с номерами $2, \ldots, N$ нужны только лишь для того, чтобы оценить параметры $E[m(\theta)]$, $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$, которые присутствуют в выражении (5.10).

Риски $2, \ldots, N$ удовлетворяют тем же предположениям ((5.1),(5.2),(5.3) и (5.4)), что и риск под номером 1. Эти предположения следующие.

Для каждого риска i, $i = 2, \ldots, N$, выполнено:

(5.11) распределение каждого X_{ij}, $j = 1, \ldots, n$, зависит только от параметра θ_i, который одинаков для всех j, но, тем не менее, неизвестен;

(5.12) X_{ij} независимы при условии θ_i;

(5.13) существует функция $m(.)$ такая, что $m(\theta_i) = E[X_{ij}|\theta_i]$;

(5.14) существует функция $s^2(.)$ такая, что $s^2(\theta_i) = P_{ij}\mathrm{Var}[X_{ij}|\theta_i]$.

Следующие два предположения, которые соотносятся с (4.18), (4.19) и (4.20), показывают, как связаны между собой рассматриваемые риски.

(5.15) Параметры риска $\theta_1, \ldots, \theta_N$ считаются независимыми одинаково распределенными случайными величинами.

(5.16) Для $i \neq k$ пары $(\theta_i,\ X_{ij})$ и $(\theta_k,\ X_{km})$ независимы.

Заметим, что так как θ_i одинаково распределены, то величины $E[m(\theta_i)]$, $\mathrm{Var}[m(\theta_i)]$ и $E[s^2(\theta_i)]$ не зависят от i и могут быть обозначены как $E[m(\theta)]$, $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$, как и в разделах 5.2 и 5.3.

Введем некоторые обозначения.

(5.17)

$$\overline{P}_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}$$

(5.18)

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{N} \overline{P}_i$$

(5.19)

$$P^* = \frac{1}{Nn-1} \sum_{i=1}^{N} \overline{P}_i \left(1 - \frac{\overline{P}_i}{\overline{P}}\right)$$

(5.20)

$$\overline{X}_i = \frac{1}{\overline{P}_i} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} X_{ij}$$

(5.21)

$$\overline{X} = \frac{1}{\overline{P}} \sum_{i=1}^{N} \overline{P}_i \overline{X}_i = \frac{1}{\overline{P}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} X_{ij}.$$

Заметим, что $\overline{X}$ в формуле (5.10) и $\overline{X}_1$ суть одно и то же, и что $\overline{X}$ теперь определяется другим выражением. Заметим также, что $\overline{X}_i$ и $\overline{X}$ — взвешенные средние величин X_{ij} с весами P_{ij}.

Доверительная оценка чистой премии, или числа исков, в грядущем году для риска под номером 1, данная выражением (5.10), в новых обозначениях переписывается теперь в виде

$$Z\overline{X}_1 + (1-Z)E[m(\theta)], \tag{5.22}$$

где

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} P_{1j} X_{1j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} P_{1j}}, \qquad Z = \frac{\mathrm{Var}[m(\theta)] \sum\limits_{j=1}^{n} P_{1j}}{\mathrm{Var}[m(\theta)] \sum\limits_{j=1}^{n} P_{1j} + E[s^2(\theta)]}.$$

Несмещенные оценки для $E[m(\theta)]$, $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ и $E[s^2(\theta)]$ могут быть получены из известных значений Y_{ij} и P_{ij}.

Оценкой для $E[m(\theta)]$ будет

$$\overline{X}. \tag{5.23}$$

Оценкой для $E[s^2(\theta)]$ будет

$$\frac{1}{N(n-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2. \tag{5.24}$$

Оценкой для $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ будет

$$\frac{1}{P^*}\left(\frac{1}{Nn-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}(X_{ij}-\overline{X})^2-\frac{1}{N(n-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2\right). \tag{5.25}$$

Сделаем некоторые замечания по поводу этих оценок.

(i) Эти оценки выписаны точно в такой же форме, как и аналогичные оценки для Модели 1 (4.22), (4.23) и (4.24). В частности, если все P_{ij} равны 1, то оценки двух моделей совпадают.

(ii) На практике может получиться, что оценка $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ будет отрицательной, тогда как дисперсия должна быть неотрицательной. В таких случаях считают, что оценка $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ равна нулю.

(iii) Формулы (5.23), (5.24) и (5.25) определяются из таблиц.

(iv) Доказательство несмещенности этих оценок выходит за рамки курса.

Часть VII

Глава 12

Временные ряды

Цели главы

К концу данной главы вы будете уметь:

- определять и опознавать основные виды процессов временных рядов, действующих в дискретном времени;
- определять и вычислять автокорреляционные функции;
- объяснять стационарность и дифференцирование временных рядов.

§1 Введение

Временной ряд — это просто ряд значений соответствующий сделанным измерениям в различные моменты времени. Временной ряд может быть множеством данных, полученных в результате фактических измерений "реальной" деятельности или может быть математической моделью или компьютерным моделированием этой деятельности.

Временной ряд может функционировать в дискретном времени, если измерения могут быть сделаны только в дискретные интервалы времени (например, RPI, публикуемые ежемесячно) или в непрерывном времени, если значения эффективно достижимы непрерывно (например, FTSE показатели обновляются каждые 2 минуты в течение часа торговли производственной деятельности). В этой главе мы будем интересоваться процессами временных рядов, функционирующих в дискретном времени. Пуассоновский процесс, который мы рассматривали в главе 5, является примером непрерывного временного ряда.

Наши основные интересы, связанные с временными рядами, связаны с приложениями в экономике, общем страховании и демографии, например, для моделирования экономических показателей, цен товаров, процентных ставок, производства в стране, количества страховых исков, количества смертей от различных причин, количество безработных в отдельных отраслях промышленности.

Однако, временные ряды активно применяются и в других областях, таких как эпидемиология (например, для планирования программ вакцинации), социальное планирование (например, сколько школ/учителей/врачей требуется), гражданское строительство (сколько машин будет пользоваться определенными дорогами).

Цель изучения временных рядов опознавать работу фундаментальных процессов. Пониманию этих процессов может способствовать прогнозируемые в будущем процентные ставки, инфляция, коэффициенты смертности, количество страховых исков и т. д.

Временные ряды имеют приложения в экономическом моделировании и в общем страховании для определения изменений моделей исков, оценок резервного фонда и премий.

Вы можете захотеть рассмотреть свойства ковариаций (из главы 4 раздел C1) и дисперсий линейных комбинаций случайных величин (из главы 5 раздел C1), которые мы будем использовать в этой главе.

§2 Компоненты аддитивного временного ряда

2.1 Определение компонент аддитивного временного ряда

Объясняет, что это означает по принципу направленной, периодической, сезонной и нерегулярной компонент.

На практике временные ряды часто можно разбить на четыре компоненты, представляющие дисперсию различных частот.

Компоненты аддитивного временного ряда

Временной ряд X_t, $t = 1, 2, 3, \ldots$ может рассматриваться как сумма четырех компонент:

$$X_t = \text{Напр}_t + \text{Пер}_t + \text{Сез}_t + \text{Случ}_t$$

где Напр_t обозначает основную направленную и

Пер_t, Сез_t, Случ_t обозначают периодическую, сезонную и случайную компоненты.

$$\text{Ряд} = \text{Направленная} + \text{Периодическая} + \text{Сезонная} + \text{Случайная}$$

Направленная компонента (Напр_t)

Многие временные ряды отображают направленность, то есть долгосрочное движение основной степень значимости. Направленности возникают в результате фундаментальных изменений первопричин. Например:

- Количество смертей в результате определенных болезней может неуклонно снижаться вследствие достижений медицины.
- Экономические измерения, связанные с уровнем жизни (например, уровни выплат, производство в стране), могут неуклонно возрастать в результате увеличения производительности.
- Количество несчастных случаев может неуклонно снижаться в результате улучшений безопасности мероприятий или большей общественной информированности об отдельных рисках.

Направленность должна действовать в одном направлении (то есть вверх или вниз) в течение рассматриваемого периода, но она не обязательно должна быть линейной. Направленности обычно можно удалить дифференцированием.

Периодическая компонента (Пер_t)

Многие временные ряды отображают суперпозиционную периодическую структуру с частотой в несколько лет. Например:

- Многие экономические показатели отображают экономический цикл, по которому экономика многократно движется от периода развития к последующему периоду спада.
- Цикл в страховании представлен в общем страховом рынке, где размеры премий уменьшаются в течение нескольких лет, а затем снова увеличиваются.

Может быть сложно строго определять периодические компоненты, отчасти потому, что период цикла может быть не постоянный.

Сезонная компонента (Сез_t)

Многие временные ряды отображают регулярную сезонную структуру с частотой ровно один год. Это может быть вследствие погодных условий или факторов, навязанных календарем. Например:

- Уровень безработицы обычно выше в зимние месяцы, потому что некоторые виды работ не могут выполняться в плохих погодных условиях.

- Частота исков по многим видам страхования увеличивается в определенное время года, например, наибольшее количество исков автомобильного страхования приходится в туманные и скользкие месяцы.

- Продажи в магазинах на главных улицах могут возрастать в периоды Рождества и Нового Года.

Сезонные компоненты могут быть удалены с помощью поправки, учитывающей сезонные изменения (например, устранением сезонных колебаний в данных по безработице). Это получено усреднением всех данных за январь и т. д. за несколько лет, чтобы найти относительное отклонение для каждого месяца, и затем вычесть отклонение.

Если временной ряд показывает годовые данные, то сезонная компонента отсутствует.

Случайная компонента (Случ$_t$)

Всегда ряд, основанный на измерениях реальных эффектов, включает в себя нерегулярную случайную компоненту. Это может быть в результате погрешности измерения или просто присуще случайности ("шум"), присутствующей в измеряемом эффекте. Нерегулярности также могут появляться вследствие исключительных событий ("выбросы"). Например:

- Такой экономический показатель как валовый внутренний продукт является сложным для точного измерения, поэтому публикуемые данные будут иметь погрешности измерения.

- Количество людей, умирающих каждый месяц, будет различаться, потому что "смерть непредсказуема".

- Забастовка может привести к необъяснимому уменьшению объема продаж компании.

- Ураган может привести к увеличению числа исков по страхованию зданий.

Искажения, вызванные случайной компонентой, могут быть уменьшены с помощью сглаживающих методов, таких как скользящего среднего.

Четыре компоненты объединены в таблице, приведенной ниже.

Компонента	Периодичность	Примеры
Направленная	Длительный срок (то есть длиннее, чем рассматриваемый период)	длительный срок повышает производительность, уровень жизни, техники и безопасности
Периодическая	Средний срок (обычно от 5 до 10 лет)	Экономический цикл, страховой цикл
Сезонная	Ежегодная	Эффекты, связанные с погодой; эффекты, связанные с календарным годом
Случайная	Нерегулярная	Случайное отклонение, погрешность измерения, выбросы

Вопрос для самоподготовки 12.1. Приведите примеры факторов, которые могут изменять каждую из компонент Напр_i, Пер_i, Сез_i, Случ_i для следующего временного ряда X_t:

(a) количество людей, погибших в результате несчастных случаев на дороге в Великобритании за последние месяцы

(b) количество страховых полисов для путешествующих, продаваемые каждую неделю

(c) количество детей, родившихся в Великобритании за последние месяцы

(d) количество краж в домах, сообщаемых каждый день

(e) население мира за каждый год, начиная с 1500 года

Пример 12.1 Таблица, приведенная ниже, показывает количество зарегистрированных безработных человек (в тысячах) в отдельных областях. Используя данные за первые 5 лет, вычислите данные в 1992 году с устранением сезонных колебаний.

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
1987	317	328	329	316	300	282	263	250	247	258	276	297
1988	315	323	321	311	293	274	255	243	244	254	272	293
1989	311	321	319	309	290	269	252	239	239	248	265	285
1990	303	312	310	302	283	265	248	237	235	246	263	284
1991	300	309	309	297	278	257	238	227	228	239	258	278
1992	295	306	305	295	276	253	233	220	219	228	244	261

Решение Мы можем вычислить сумму, среднее значение и отклонение от общего среднего для каждого месяца, основываясь на эти первые 5 лет. Результаты приведены в первой таблице ниже.

Применяя отклонения от общего среднего к данным за 1992 год, получим данные с устранением сезонных колебаний. Например, данные за январь на 30000 больше среднего значения данных по безработице, поэтому данные с устранением сезонных колебаний получаются вычитанием 30000 из зарегистрированных данных. Скорректированные данные приведены во второй таблице ниже.

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
Сумма	1546	1593	1588	1535	1444	1347	1256	1196	1193	1245	1334	1437
средн. знач.	309	319	318	307	289	269	251	239	239	249	267	287
отклонение	30	40	39	28	10	-10	-28	-40	-40	-30	-12	8

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
Зарегистр. данные	295	306	305	295	276	253	233	220	219	228	244	261
Скоррект. данные	265	266	266	267	266	263	261	260	259	258	256	253

2.2 Стационарный временной ряд

Как мы увидели в Секции 2, последовательные значения временных рядов связаны определенным образом. В оставшейся части этой секции мы рассмотрим некоторые свойства, которые могут быть использованы, чтобы описать природу этой взаимосвязи.

Одно полезное свойство, которым обладают некоторые временные ряды —это стационарность.

Стационарный временной ряд

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ стационарный, если для любого значения n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ совместное распределение $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ такое же, как и совместное распределение $X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \ldots, X_{t_n+k}$ для всех значений $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и для всех значений k.

"Совместное распределение стационарного временного ряда зависит только от величины интервалов между моментами времени, когда принимаются значения."

Стационарность соответствует интуитивной идее, что ряд не имеет тенденцию или предсказуемый период. Однако это не значит, что ряд совершенно случайный и успешные прогнозы насчет будущих значений невозможны. Временной ряд, в котором будущие значения ряда зависят от прошлых значений может, однако, быть стационарным.

Пример 12.2 Покажите, что стационарный временной ряд не может иметь продолжительную направленность.

Решение Если мы воспользуемся определением стационарности при $n = 1$ и $t_1 = t$, то это дает нам, что распределение стационарного временного ряда X_t должно быть таким же, как и совместное распределение X_{t+k} для всех значений t и k.

В частности, это означает, что $E(X_t) = E(X_{t+k})$ для всех значений k.

Другими словами, нет направленности в значениях X_t.

Вопрос для самоподготовки 12.2. Покажите, что стационарный временной ряд данных за месяц не может иметь сезонную составляющую.

2.3 Дифференцирование временных рядов

Часто полезно рассматривать разницу между последовательными значениями временных рядов (то есть значения $X_t - X_{t-1}$), чем непосредственно значения. Причина этого в том, что дифференцирование нестационарных рядов часто приводит к стационарным рядам, а стационарные ряды легче исследовать.

Для использования удобны оператор обратного сдвига и оператор обратной разности.

Оператор обратного сдвига

Оператор обратного сдвига B определяется следующим образом:$BX_t = X_{t-1}$

"Использует предыдущее значение"

Оператор обратной разности

Оператор обратной разности ∇ определяется следующим образом:$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$ или $(X_t - BX_t)$

"Вычитание предыдущего значения из текущего значения"

Символично операторы ∇ и B связаны соотношениями: $\nabla = 1 - B$ и $B = 1 - \nabla$.

В некоторых случаях может быть необходима разность более высокого порядка, тогда вычисления содержат $\nabla^2 X_t$, $\nabla^3 X_t$ и т.д. Они называются разностью второго порядка, разностью третьего порядка и т.д.

Обратный процесс, "восстанавливающий"ряд из разности, называется интегрированием

Вопрос для самоподготовки 12.3. Покажите, что $\nabla^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

Вопрос для самоподготовки 12.4. Напишите основную формулу для восстановления первоначальных значений X_t временного ряда из разности W_t и предыдущих значений X, если

(a) используются разности первого порядка, то есть $W_t = \nabla X_t$

(b) используются разности второго порядка, то есть $W_t = \nabla^2 X_t$

2.4 Автоковариация и автокорреляция

Другой пригодный для использования способ описания взаимосвязи последовательных значений, включает в себя вычисление автоковариационной и автокорреляционной функций ряда.

Автоковариационная функция

Автоковариационная функция для X_{t_1} и X_{t_2}:

$$\gamma(t_1, t_2) = cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = E[(X_{t_1} - E(X_{t_1}))(X_{t_2} - E(X_{t_2}))]$$

Для стационарного процесса:

$$\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t+k} - E(X_{t+k}))]$$

Объяснение

Автоковариационная функция — это непосредственно ковариация значений ряда, полученных в два разных момента времени.

Для стационарного ряда это будет зависеть только от величины "интервала то есть разности между двумя моментами времени. Поэтому автоковариационная функция может быть определена правильно в терминах разности времени k, которая называется запаздывание.

Интуитивно, автоковариация это мера степени связи между значениями в разные моменты времени, то есть величина, которой они "взаимосвязаны".

Заметим, что для дискретного временного ряда автоковариационная функция может быть определена функцией множества, соответствующей запаздываниям $k = 1, 2, 3, \ldots$ единиц времени.

График, приведенный ниже, показывает автоковариационную функцию для дискретного временного ряда, для которого есть сильная связь на протяжении короткого промежутка времени, но не на протяжении длительного промежутка времени.

Автокорреляционная функция (АКФ)

Автокорреляционная функция измеряется в квадратных единицах, поэтому эти значения получаются зависят от размеров абсолютной величины. Мы можем сделать эту величину независимой от абсолютной величины X_t, определяя ее безразмерной величиной, и автокорреляционная функция:

Автокорреляционная функция (АКФ) Автокорреляционная функция для X_{t_1} и X_{t_2}:

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{cov(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sqrt{Var(X_{t_1})Var(X_{t_2})}} = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sqrt{\gamma(t_1, t_1)\gamma(t_2, t_2)}}$$

Для стационарного процесса:

$$\rho(k) = \frac{cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Кроме того, автокорреляционная функция это мера степени связи между значениями в разные моменты времени.

Возможные значения автокорреляционной функции находятся между -1 и $+1$. Значение ноль означает, что связи нет. Значение $+1$ (или -1) означает сильную положительную (или отрицательную) связь, то есть значения имеют тенденцию перемещаться в одинаковых (или противоположных) направлениях.

Вопрос для самоподготовки 12.5. Опишите связи, которые вы предполагаете найти для временного ряда, представляющего среднесуточную температуру последовательных месяцев в отдельном городе, и, следовательно, изобразите график автокорреляционной функции для этого ряда.

Когда точная статистическая сущность ряда известна, автоковариационная и автокорреляционная функции могут быть найдены алгебраически.

В других случаях мы можем оценить автоковариационную и автокорреляционную функции, основываясь на наблюдаемые значения ряда.

Выборочные коэффициенты автоковариации

Выборочный коэффициент автоковариации с запаздыванием k основывается на n наблюдаемых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ временного ряда:

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \overline{x})(x_{t+k} - \overline{x})$$

Выборочный коэффициент автоковариации с запаздыванием k обеспечивает оценку автоковариационной функции с запаздыванием k.

Заметим, что знаменатель равен n, несмотря на то, что в сумме $n-k$ слагаемых.

Выборочные коэффициенты автокорреляции

Выборочный коэффициент автокорреляции с запаздыванием k основывается на n наблюдаемых значениях $x_1, x_2, \dots, x_n$ временного ряда:

$$r_k = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n-k}(x_t - \overline{x})(x_{t+k} - \overline{x})}{\sum\limits_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2} = \frac{c_k}{c_0}$$

Выборочный коэффициент автокорреляции с запаздыванием k обеспечивает оценку автокорреляционной функции с запаздыванием k.

Вопрос для самоподготовки 12.6. Найдите выборочный коэффициент автокорреляции с запаздыванием 1 месяц, 2 месяца и 6 месяцев, основываясь на следующие 12 последовательных значений месячного временного ряда:

$$4, 5, 6, 3, 3, 1, 0, 1, 3, 2, 3, 5$$

Прокомментируйте свои ответы.

§3 Процессы временного ряда

Ранее были определены: авторегрессивный процесс (АР), процесс скользящего среднего (СС) и авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС), АРИСС(p, d, q) процесс и определена автокорреляционная функция для младших порядков АР, СС и АРСС процессов.

3.1 Основные процессы временного ряда

В этом параграфе мы будем рассматривать различные виды процессов временного ряда.

Чисто случайные процессы

Простейшая форма временного ряда — это чисто случайный процесс

Чисто случайный процесс

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \dots)$ — чисто случайный процесс, если значения X_t статистически независимы.

В большинстве случаев предполагается, что значения чисто случайного процесса одинаково распределены, то есть распределение не меняется со временем. Поэтому прошлые значения не могут быть использованы для прогнозирования будущих значений.

Применение

Чисто случайный процесс может быть использован для моделирования случайного статистического "шума".

Примеры

Случайная составляющая в аддитивном временном ряду может быть смоделирована с использованием чисто случайного процесса.

Случайные блуждания

Другая форма временного ряда это случайное блуждание:

Случайные блуждания

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \dots)$ — случайное блуждание, если значения X_t могут быть представлены в форме:

$$X_t = X_{t-1} + Z_t$$

где Z_t $(t = 1, 2, 3, \dots)$ чисто случайный процесс.

Поэтому будущие значения ряда зависят от истории ряда, и прошлые значения могут быть использованы для прогнозирования будущих значений.

Применение

Случайные блуждания могут использоваться для моделирования ситуаций, когда текущее значение случайной переменной изменяется вследствие небольших изменений предыдущего значения, и изменения могут считаться случайными.

Примеры

Многие экономические показатели могут считаться случайными блужданиями. Примеры включают в себя:

- рыночную цену акций
- ставку процента
- валютные ценности

Значение показателя завтра может быть обоснованно корректировкой сегодняшнего значения.

В теории вероятности чистый выигрыш игрока в последовательных играх может быть смоделирован с использованием случайного блуждания.

В теории разорения прибыль страховщика в последовательные промежутки времени может быть смоделирована с использованием случайного блуждания.

В физике движение мелких частиц (Броуновское движение) может быть смоделировано с использованием случайного блуждания в трехмерном пространстве. Теория может использоваться для установления свойств диффузии в газах.

Пример 12.3 Выведите формулу вариации X_t, если X_t — случайное блуждание, определенное как $X_t = X_{t-1} + Z_t$, где Z_t имеет постоянное среднее значение μ и дисперсию σ^2, и $X_0 = 0$.

Решение Последовательной заменой значений X_{t-1}, X_{t-2} и т.д. в определении, мы можем выразить X_t в виде:

$$X_t = X_{t-1} + Z_t = X_{t-2} + Z_{t-1} + Z_t = \ldots = X_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{t-1} + Z_t$$

Так как $X_0 = 0$, то:

$$X_t = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{t-1} + Z_t$$

Так как все Z_t являются чисто случайными процессами, то их значения независимы.

Поэтому:

$$Var(X_t) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + \ldots + Var(Z_{t-1}) + Var(Z_t) = t\sigma^2$$

Вопрос для самоподготовки 12.7. Покажите, что случайное блуждание, определенное в предыдущем примере не является стационарным процессом, но стационарным является процесс, определенный разностями $X_t - X_{t-1}$.

Процессы скользящего среднего

Процесс скользящего среднего — это взвешенное среднее чисто случайного процесса:

Процесс скользящего среднего

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — процесс скользящего среднего порядка q (сокращенно СС(q)), если он может быть представлен как взвешенное среднее $q+1$ последовательных элементов чисто случайного ряда Z_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ со средним значением ноль и постоянной дисперсией σ^2:

$$X_t = Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

Так как Z могут содержать в себе произвольный масштабный множитель, то обычно предполагается, что они определены так, что коэффициент при Z_t равняется 1 (то есть $\beta_0 = 1$).

Применение Процесс скользящего среднего может использоваться для моделирования ситуаций, когда текущее значение случайной переменной может быть обоснованно взвешенным средним основного ряда.

На практике процесс скользящего среднего часто конструируется путем сглаживания временного ряда, то есть удалением компоненты случайного шума.

Примеры

Многие экономические измерения могут быть усреднены по периоду сглаживания случайных изменений.

Компания может усреднить свои продажи за трехмесячный период, когда нужно оценить, насколько быстро (или наоборот) она увеличивается.

Основной страховщик может усреднить иски по некоторым видам страхования за трехлетний период, чтобы уменьшить влияние случайных изменений по отдельным годам.

Пример 12.4 Процесс скользящего среднего определен как $X_t = Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-1} + Z_{t-q}$, где Z являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами со средним значением ноль. Выведите выражения для:

(a) среднего значения $E(X_t)$

(b) вариации $Var(X_t)$

(c) автоковариационную функцию $\gamma(k)$ $(0 \leqslant k \leqslant q)$

(d) автокорреляционную функцию $\rho(k)$ $0 \leqslant k \leqslant q)$

Решение

(a) Так как Z имеют среднее значение ноль:

$$E(X_t) = E(\beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}) = 0$$

(b) Так как Z независимы:

$$Var(X_t) = Var(\beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q})$$

$$= \beta_0^2 Var(Z_t) + \beta_1^2 Var(Z_{t-1}) + \ldots + \beta_q^2 Var(Z_{t-q}))$$

$$= (\beta_0^2 + \beta_1^2 + + \ldots + \beta_q^2)\sigma^2$$

(c) Ковариация Z_s и Z_t это $Var(Z_t) = \sigma^2$, если $s = t$ и ноль в других случаях. Поэтому автоковариационная функция (при $(0 \leqslant k \leqslant q)$):

$$\gamma(k) = CovZ(X_t, X_{t+k}) = Cov\begin{pmatrix} \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-1} + Z_{t-q}, \\ \beta_0 Z_{t+k} + \beta_1 Z_{t+k-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-1} + Z_{t+k-q} \end{pmatrix}$$

$$= (\beta_0\beta_k + \beta_1\beta_{k+1} + \ldots + \beta_{q-k}\beta_q)\sigma^2$$

(d) Автокорреляционная функция получается делением на автоковариационную функцию с параметром 0. Из (c) следует, что $\gamma(0) = \beta_0^2 + \beta_1^2 + + \ldots + \beta_q^2)\sigma^2$. Поэтому автокорреляционная функция (при $(0 \leqslant k \leqslant q)$):

$$\rho(k) = \frac{\beta_0\beta_k + \beta_1\beta_{k+1} + \ldots + \beta_{q-k}\beta_q}{\beta_0^2 + \beta_1^2 + + \ldots + \beta_q^2)\sigma^2}$$

Вопрос для самоподготовки 12.8. Какова $\gamma(k)$ для CC(q) процесса, если $k > q$

Авторегрессивные процессы

Авторегрессивный процесс — это взвешенное среднее прошедших значений объединенных в чисто случайного процесса:

Авторегрессивный (АР) процесс

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — авторегрессивный процесс порядка p (сокращенно АР(p)), если он может быть представлен как взвешенное среднее p прошедших элементов плюс чисто случайный ряд Z_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ со средним значением ноль и постоянной дисперсией σ^2:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t$$

Пример 12.5 Предположите, какая цена товара может быть смоделирована авторегрессивным процессом.

Решение Если мы сделаем простое предположение, что каждый день цена товара X_t увеличивается или уменьшается относительно цены предыдущего дня X_{t-1} на случайную величину Z_t, зависящую от относительного количества продавцов и покупателей, тогда цена товара может быть смоделирована как $X_t = X_{t-1} + Z_t$, то есть как авторегрессивный процесс порядка 1.

Пример 12.6 Если X_t — АР(1) процесс с $\alpha_1 = 1/2$, выразите X_t в терминах Z.

Решение Процесс определяется $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + Z_t$. Перегрупируем это определение, получим:

$$Z_t = X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} = X_t - \frac{1}{2}BX_t = (1 - \frac{1}{2}B)X_t$$

Выразим ряд, получим:

$$X_t = (1 - \frac{1}{2}B)^{-1}Z_t = (1 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}B^2 + \ldots)Z_t =$$

$$= Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1} + \frac{1}{4}Z_{t-2} + \ldots$$

Вопрос для самоподготовки 12.9. Выведите выражения для среднего значения и дисперсии АР(1) процесса $X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t$ для тех значений α, для которых процесс стационарный.

Метод, приведенный в следующем примере, может использоваться для вычисления автоковариационных функций временных рядов более высокого порядка.

Пример 12.7 Авторегрессивный стационарный временной ряд W_t определяется выражением:

$$W_t = 0.6W_{t-1} + 0.4W_{t-2} - 0.1W_{t-3} + Z_t$$

для целочисленных моментов времени t, где Z_t представляет собой множество некоррелированных случайных величин со средним значением ноль и дисперсией σ^2.

(a) Объясните, почему $Cov(W_t, Z_{t+1}) = 0$ и $Cov(W_{t-1}, W_t) = Cov(W_{t-1}, W_{t-2})$

(b) Учитывая $Cov(W_t, W_{t-k})$ при $k = 1, 2, 3$ и $Var(Z_t)$, напишите четыре уравнения, связывающие значения автоковариационных функций $\gamma(k)$ с запаздываниями $k = 0, 1, 2, 3$.

(c) Следовательно, определите выражения в терминах σ^2 для $\gamma(k)$ с запаздываниями $k = 0, 1, 2, 3$.

Решение

(a) W_t зависит только от $Z_t, Z_{t-1}, \ldots$, то есть от "прошедших"Z, которые не коррелированы с "будущими"Z. Поэтому $Cov(W_t, Z_{t+1}) = 0$. Так как W_t стационарный, только "интервал"имеет значение. Поэтому $Cov(W_{t-1}, W_t)$ и $Cov(W_{t-1}, W_{t-2})$ обе равны γ_1.

(b) При $k = 1$ мы имеем:

$$Cov(W_t, W_{t-1}) = 0.6Cov(W_{t-1}, W_{t-1}) + 0.4Cov(W_{t-2}, W_{t-1}) - 0.1Cov(W_{t-3}, W_{t-1})$$

Поэтому получаем:

$$\gamma_1 = 0.6\gamma_0 + 0.4\gamma_1 - 0.1\gamma_2 \qquad \ldots(1)$$

Аналогичным образом при $k = 2$ и $k = 3$ получаем выражения:

$$\gamma_2 = 0.6\gamma_1 + 0.4\gamma_0 - 0.1\gamma_1 \qquad \ldots(2)$$

$$\gamma_3 = 0.6\gamma_2 + 0.4\gamma_1 - 0.1\gamma_0 \qquad \ldots(3)$$

Чтобы получить четвертое выражение, мы выразим Z_t из определения временного ряда:

$$Z_t = W_t - 0.6W_{t-1} - 0.4W_{t-2} + 0.1W_{t-3}$$

(c) Беря дисперсию обоих частей уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \gamma_0 + 0.6^2\gamma_0 + 0.4^2\gamma_0 + 0.1^2\gamma_0 + \\ &+2(-0.6\gamma_1 + 0.24\gamma_1 - 0.04\gamma_1 - 0.4\gamma_2 - 0.06\gamma_2 + 0.1\gamma_3) \qquad \ldots(4) \\ &= 1.53\gamma_0 - 0.80\gamma_1 - 0.92\gamma_2 + 0.2\gamma_3 \end{aligned}$$

Вопрос для самоподготовки 12.10. Решите эти четыре уравнения, чтобы найти (a)автоковариационную функцию и (b)коэффициенты автокорреляции.

3.2 Смешанные процессы временного ряда

Некоторые временные ряды могут быть смоделированы с использованием смешанных рядов, в которых взаимосвязь между последовательными элементами включает в себя комбинацию более чем одного основного процесса временного ряда.

В заключении этой главы мы рассмотрим АРСС процессы, которые являются смешанными процессами, и АРиСС процессы, которые получаются из АРСС процессов.

Авторегрессионные процессы скользящего среднего

Авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС)

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — авторегрессивный процесс скользящего среднего (сокращенно АРСС(p,q)[1]), если этот временной ряд является суммой авторегрессивного процесса порядка p и процесса скользящего среднего порядка q, то есть:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} +$$

$$+ Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

"АРСС(p,q) процесс является суммой АР(p) и СС(q) процессов"

Пример 12.8 Объясните, как следующие виды процессов могут считаться особыми случаями АРСС(p,q) процесса:

[1]обычно всегда используются P,Q

(a) АР(p) процесс

(b) СС(q) процесс

Решение

(a) АР(p) процесс является особым случаем АРСС(p,q) процесса при $q = 0$

(b) СС(q) процесс является особым случаем АРСС(p,q) процесса при $p = 0$

Авторегрессивные интегрированные процессы скользящего среднего

Временной ряд X_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ — авторегрессивный интегрированный процесс скользящего среднего порядка d (сокращенно АРИСС(p,d,q)), если разности d-го порядка $W_t = \nabla^d X_t$ формируют АРСС(p,q) процесс, то есть:

$$W_t = \alpha_1 W_{t-1} + \alpha_2 W_{t-2} + \ldots + \alpha_p W_{t-p} +$$

$$+ Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

"Разности порядка d АРИСС(p,d,q) процесса формируют АРСС(p,q) процесс"

Вопрос для самоподготовки 12.11. Объясните, как следующие виды процессов могут считаться особыми случаями АРИСС(p,q) процесса:

(a) чисто случайный процесс

(b) случайное блуждание

(c) процесс скользящего среднего

(d) авторегрессивный процесс

(e) авторегрессивный процесс скользящего среднего

§4 Краткое изложение

Временные ряды, встречающиеся в страховой деятельности, часто содержат аддитивные компоненты: направленная, периодическая, сезонная и случайная.

Дифференцирование значений отдельных временных рядов может создавать стационарные ряды. Это может быть сделано при помощи оператора обратной разности ∇, который взаимосвязан с оператором обратного сдвига B.

Временные ряды включают в себя следующие виды процессов:

- чисто случайный
- случайное блуждание
- скользящего среднего (СС)
- авторегрессивный (АР)
- авторегрессивный скользящего среднего (АРСС)
- авторегрессивный интегрированный скользящего среднего (АРИСС)

Особенности модели временных рядов характеризуются вычислением автоковариационной функции или автокорреляционной функции (АКФ). Эти функции можно оценить, исходя из реальных данных при помощи выборки коэффициентов автоковариации или коэффициентов автокорреляциации.

§5 Формулы

Компоненты аддитивного временного ряда

$$X_t = \text{Напр}_t + \text{Пер}_t + \text{Сез}_t + \text{Случ}_t$$

$$\text{Ряд} = \text{Направленная} + \text{Периодическая} + \text{Сезонная} + \text{Случайная}$$

Оператор обратной разности

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$$

$$\nabla^2 X_t = \nabla(\nabla X_t) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Оператор обратного сдвига

$$BX_t = X_{t-1}$$

$$B^2 X_t = B(BX_t) = X_{t-2}$$

Автоковариационная функция

$$\gamma(t_1, t_2) = cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = E[(X_{t_1} - E(X_{t_1}))(X_{t_2} - E(X_{t_2}))]$$

$$\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t+k} - E(X_{t+k}))] \text{ (стационарный процесс)}$$

Автокорреляционная функция

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{cov(X_{t_1},X_{t_2})}{\sqrt{Var(X_{t_1})Var(X_{t_2})}}=\frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sqrt{\gamma(t_1,t_1)\gamma(t_2,t_2)}}$$

$$\rho(k)=\frac{cov(X_t,X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}}=\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}\ \text{(стационарный процесс)}$$

Выборочные коэффициенты автоковариации

$$c_k=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_t-\overline{x})(x_{t+k}-\overline{x})$$

Выборочные коэффициенты автокорреляции

$$r_k=\sum_{t=1}^{n-k}(x_t-\overline{x})(x_{t+k}-\overline{x})\Bigg/\sum_{t=1}^{n}(x_t-\overline{x})^2=\frac{c_k}{c_0}$$

Чисто случайный процесс

$$X_t=Z_t \qquad \text{(среднее значение 0, дисперсия } \sigma^2\text{)}$$

Случайное блуждание

$$X_t=X_{t-1}+Z_t$$

Процесс скользящего среднего (СС)

$$X_t=Z_t+\beta_1 Z_{t-1}+\ldots+\beta_q Z_{t-q}$$

Авторегрессивный процесс (АР)

$$X_t=\alpha_1 X_{t-1}+\alpha_2 X_{t-2}+\ldots+\alpha_p X_{t-p}+Z_t$$

Авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС)

$$X_t=\alpha_1 X_{t-1}+\alpha_2 X_{t-2}+\ldots+\alpha_p X_{t-p}+$$
$$+Z_t+\beta_1 Z_{t-1}+\ldots+\beta_q Z_{t-1}+Z_{t-q}$$

Авторегрессивный интегрированный процесс скользящего среднего (АРИСС)

$$W_t=\alpha_1 W_{t-1}+\alpha_2 W_{t-2}+\ldots+\alpha_p W_{t-p}+$$
$$+Z_t+\beta_1 Z_{t-1}+\ldots+\beta_q Z_{t-1}+Z_{t-q} \qquad \text{где } W_t=\nabla^d X_t$$

§6 Вопросы студентам

В1 Почему модель аддитивных компонент не включает в себя дополнительные периоды величиной в 1 месяц или 1 неделю?

О1 Еженедельные и ежедневные периоды, несомненно, встречаются. Например, продажи в магазинах могут различаться в рабочие дни и выходные. Однако, вследствие очень короткой длительности этих периодов, их результаты составляют среднюю величину на очень короткий промежуток времени. Поэтому, включая эти дополнительные компоненты можно заметить небольшое различие результатов, полученных из моделей, используемых в экономике, страховании и других актуарных приложениях.

В2 Есть ли простой путь определить, что временной ряд является стационарным, непосредственно "взглянув на формулу"?

О2 Многие свойства временных рядов могут быть отняты использованием оператора обратного сдвига для представления временного ряда в терминах Z, и затем изучения свойств "полинома"для B. Это и есть тест на стационарность, но (обычно) он слишком сложный, чтобы делать его в уме.

В3 Я видел немного отличающееся определение выборки коэффициентов автокорреляции в другой книге. Почему так?

О3 Некоторые авторы включают множитель $(n-k)/n$ в знаменатель выборки коэффициентов автокорреляции. Это означает, что учитывается тот факт, что в числителе в сумме ровно $(n-k)$ слагаемых, тогда как в знаменателе в сумме ровно n слагаемых. В большинстве случаев значение n довольно большое, поэтому это корректирование создает небольшое отличие. Однако, вычисления, включающие в себя временные ряды, значительно проще когда это корректирование игнорируется. Другая незначительная проблема, связанная с выборкой коэффициентов автокорреляции, в том, что в определении используется общее среднее $\overline{x}$, даже если сумма в знаменателе не включает в себя все элементы ряда симметрично.

В4 Почему появилось название "случайные блуждания"?

О4 Одно из интуитивных описаний, используемых для представления этой модели, включает в себя пьяного, "блуждающего"вдоль прямой дороги, стараясь попасть домой из трактира. Делая шаг, пьяный или идет шатаясь несколько шагов вперед, или идет шатаясь несколько шагов назад. Другими словами местоположение пьяного после каждого шага определяется как случайное корректирование, примененное к местоположению до того, как шаг был сделан.

В5 Один мой приятель упомянул "Бокс-Дженкинс". Кто или что это такое?

О5 Бокс и Дженкинс — два исследователя, которые описали свойства временных рядов и разработали различные методы исследования временных рядов в 1970-х.

В6 Если оператор обратного сдвига может использоваться для выражения АР, АРСС и АРИСС моделей непосредственно в терминах Z, почему они изучаются как отдельные модели?

О6 Вы правы в том, что все эти модели могут быть выражены в терминах Z. Однако, ряд, который Вы получаете, если вы это делаете обыкновенно, включает в себя гораздо больше слагаемых (в действительности, обычно бесконечное количество). Практические задачи, включающие в себя временные ряды, часто включают в себя оценку параметров модели. Более трудно становится, когда модели выражаются в виде суммы величин Z, так как в этом случае больше коэффициентов для оценки.

В7 А как Вы собираетесь "подгонять"модели временных рядов к реальным, "жизненным"процессам?

О7 Для этого существует несколько способов. Составляющие стадии:

1. Выбираем соответствующую модель (например, АР, СС и т.д.). Решение часто приходит с пониманием механизмов, лежащих в основе процесса.

2. Определяем порядок процесса (то есть значения p, d и q). Для некоторых процессов (например, для СС процесса) вид коррелограммы (то есть графика выборочной автокорреляционной

функции) дает четкое указание на порядок процесса. В других случаях методы, плохо зарекомендовавшие себя на практике, могут требоваться, когда процессы последовательно высоких порядков испытываются до тех пор, пока не находят то, что дает приемлемое соответствие.

3. Оцениваем параметры (то есть коэффициенты). Это может быть сделано применением метода наименьших квадратов или метода приближения моментов.

Другой подход — это применить ряды Фурье для анализа спектра частот периодов, которые присутствуют в данных (то есть определить "мощности"циклов с различными периодами).

В8 Используются ли временные ряды для чего-нибудь еще, кроме прогнозирования?

О8 Прогнозирование — это главное назначение. Однако, временные ряды могут также применяться для мониторинга и контроля. Например, экономисты могут анализировать экономические показатели, такие как уровень безработицы, и советовать соответствующим министрам в правительстве, если это необходимо, сдерживать тенденцию, выявленную расчетами. Также временные ряды могут также применяться для анализа основных механизмов, действующих в реальных процессах. Например, эпидемиологи, изучающие распространение СПИДа, могут рассматривать факторы, влияющие на темпы возникновения новых случаев различными способами распространения (например, незащищенный секс, использование внутривенных наркотиков, загрязнённые кровью продукты, от матери к ребенку).

6.1 Подсказки для ответов на вопросы

1. Важно четко понимать разницу между различными процессами и их математическими описаниями.

2. Z обычно нормализованы таким образом, что коэффициент Z_t в определениях АР, СС и АРСС процессах равняется 1.

§7 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 12.1

Здесь может быть несколько возможных ответов:

(a) количество людей, погибших в результате несчастных случаев на дороге в Великобритании за последние месяцы

направленная безопасность транспортных средств ($\downarrow$), улучшение дорог ($\downarrow$), интенсивное движение на дорогах ($\uparrow$)

периодическая угоны машин ради баловства, полицейские операции за безопасность (например, против управления автомобилем в состоянии опьянения), изменения ограничений скорости

сезонная плохая погода и темнота служат причиной многих аварий зимой.

случайная изменения условий движения, аварии на автомагистралях.

(b) количество страховых полисов для путешествующих, продаваемые каждую неделю

направленная многие люди могут позволить себе путешествовать в связи с улучшением уровня жизни ($\uparrow$)

периодическая путешествия ограничивают/отменяют в периоды политических волнений

сезонная большинство людей путешествуют в период отпусков, например, летом, на Рождество

случайная изменения дат отпусков

(c) количество детей, родившихся в Великобритании за последние месяцы

направленная увеличение применения методов контрацепции ($\downarrow$), размеры семьи уменьшаются в связи с уровнем улучшения жизни ($\downarrow$)

периодическая изменение "модного"размера семьи

сезонная многие дети рождаются в летние месяцы

случайная изменение дат зачатия и периодов беременности

(d) количество краж в домах, сообщаемых каждый день

направленная увеличение технологий безопасности (↓), увеличение криминальный технологий (↑)

периодическая уровень преступности возрастает в периоды экономического спада

сезонная грабители остаются дома в плохую погоду

случайная преступления конъюнктурщиков, задержки отчетности

(e) население мира за каждый год, начиная с 1500 года

направленная основное увеличение уровня рождаемости опережает уровень смертности (↑)

периодическая возникновение новых болезней, войн

сезонная (не может быть не включена в ежегодные данные)

случайная эпидемии, голод, стихийные бедствия, погрешности оценки

Решение 12.2

Если мы возьмем $n = 12$ и $t_1 = Jan$, $t_2 = Feb$, $\ldots$ и пусть k принимает последовательные значения 1,2,3,. . . ,12. Из определения стационарности следует, что совместное распределение величин за январь-декабрь такое же, как и совместное распределение величин за январь-февраль и т.д. Поэтому совместное распределение за 12 последовательных месяцев такое же, независимо от того, с какого месяца мы начинаем, то есть сезонность отсутствует.

Решение 12.3

Разность второго порядка:

$$\nabla^2 X_t = \nabla(\nabla X_t) = \nabla(X_t - X_{t-1}) = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Другим способом, используя символичное соотношение $\nabla = 1 - B$, получаем:

$$\nabla^2 X_t = (1 - B)^2 X_t = (1 - 2B + B^2) X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Решение 12.4

[a] Разности первого порядка: $W_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}$

Перегруппируем, получим: $X_t = X_{t-1} + W_t$

[b] Разности второго порядка: $W_t = \nabla^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

Перегруппируем, получим: $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + W_t$

Решение 12.5

Мы будем предполагать найти следующие корреляции:

- довольно сильную положительную корреляцию температур соседних месяцев (то есть величин, разделенных 1 или 2 месяцами)
- очень сильную положительную корреляцию температур одинаковых месяцев в разные годы (то есть величин, разделенных 12 месяцами, 24 месяцами и т.д.), хотя она может уменьшаться со временем, если имеется цикл с длительным периодом, влияющий на погоду
- сильную отрицательную корреляцию температур в противоположные времена года (то есть величин, разделенных 5, 6 или 7 месяцами)

Поэтому автокорреляционная функция может выглядеть следующим образом:

Решение 12.6

Выборочное среднее:

$$\overline{x} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12} x_t = \frac{36}{12} = 3$$

Вычитая это из значений ряда, получаем:

$$1, 2, 3, 0, 0, -2, -3, -2, 0, -1, 0, 2$$

Применим формулу $c_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n-k}(x_t - \overline{x})(x_{t+k} - \overline{x})$ для вычисления коэффициентов автокорреляциации:

$$c_0 = \frac{1}{12}[(1)(1) + (2)(2) + (3)(3) + \ldots + (2)(2)] = \frac{36}{12} = 3$$

$$c_1 = \frac{1}{12}[(1)(2) + (2)(3) + (3)(0) + \ldots + (0)(2)] = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$c_2 = \frac{1}{12}[(1)(3) + (2)(0) + (3)(0) + \ldots + (-1)(2)] = \frac{7}{12}$$

$$c_6 = \frac{1}{12}[(1)(-3) + (2)(-2) + (3)(0) + \ldots + (-2)(2)] = -\frac{11}{12}$$

Поэтому коэффициенты автокорреляциации:

интервал 1 месяц: $r_1 = c_1/c_0 = 5/9 = 0.556$

интервал 2 месяца: $r_2 = c_2/c_0 = 7/36 = 0.194$

интервал 6 месяцев: $r_6 = c_6/c_0 = -11/36 = -0.306$

Коэффициенты показывают, что значения последовательных месяцев схожи ($r_1 = 0.556$), но эта взаимосвязь уменьшается, когда интервал увеличивается (например, $r_2 = 0.194$), и превращается в обратную зависимость ($r_6 = -0.306$) для месяцев из противоположных частей года.

Решение 12.7

Так как вариация X_t зависит от фактического времени t (потому что по формуле $Var(X_t) = t\sigma^2$), то исходный ряд X_t не может быть стационарным.

По определению разностями являются $X_t - X_{t-1} = Z_t$. Так как Z_t являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами, то они формируют стационарный процесс.

Решение 12.8

Элементами автоковариационной функции $Cov(X_t, X_{t+k})$ являются:

$$X_t = \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

$$\text{и} \qquad X_{t+k} = \beta_0 Z_{t+k} + \beta_1 Z_{t+k-1} + \ldots + \beta_q Z_{t+k-q}$$

Если $k > q$, тогда $t + k - q > t$. Поэтому последнее слагаемое в X_{t+k} следует за первым слагаемым в X_t, то есть слагаемые в X_t и X_{t+k} не совпадают.

Поэтому X_t и X_{t+k} независимы, и автоковариационная функция равняется нулю.

Решение 12.9

Это может быть сделано, если выразить X_t непосредственно в терминах Z.

Процесс задается как $X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t$. Перегруппируем это определение, получим:

$$Z_t = X_t - \alpha X_{t-1} = X_t - \alpha B X_t = (1 - \alpha B) X_t$$

Преобразуем и разложим в ряд (предполагая, что $|\alpha| < 1$), получим:

$$X_t = (1 - \alpha B)^{-1} Z_t = (1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \ldots) Z_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \ldots$$

Так как Z являются независимыми со средним значением ноль и дисперсией σ^2, то:

$$E(X_t) = E(Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \ldots) = 0$$

$$Var(X_t) = Var(Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \ldots) = (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}$$

Решение 12.10

(a) Из уравнения (1), мы получаем:

$$0.1\gamma_2 = 0.6\gamma_0 - 0.6\gamma_1$$

$$\text{то есть } \gamma_2 = 6\gamma_0 - 6\gamma_1$$

Из уравнения (2) получаем:

$$\gamma_2 = 0.4\gamma_0 + 0.5\gamma_1$$

Исключая γ_2 из этих двух уравнений, получаем $\gamma_1 = \frac{5.6}{6.5}\gamma_0 = \frac{56}{65}\gamma_0$. Подставляя обратно, получаем $\gamma_1 = \frac{54}{65}\gamma_0$. Используя уравнения (3) и (4), мы получим, что:

$$\gamma_3 = 0.6 \times \frac{54}{65}\gamma_0 + 0.4 \times \frac{56}{65}\gamma_0 - 0.1\gamma_0 = \frac{483}{650}\gamma_0$$

$$\sigma^2 = 1.53\gamma_0 - 0.8 \times \frac{56}{65}\gamma_0 - 0.92 \times \frac{54}{65}\gamma_0 + 0.2 \times \frac{483}{650}\gamma_0 = 0.22508\gamma_0$$

Поэтому значения автоковариаций:

$$\gamma_0 = 4.4429\sigma^2$$

$$\gamma_1 = 3.8278\sigma^2$$

$$\gamma_2 = 3.6911\sigma^2$$

$$\gamma_3 = 3.3014\sigma^2$$

(b) Разделим на γ_0, получаем коэффициенты автокорреляциации:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = 0.862$$

$$\rho_2 = 0.831$$

$$\rho_3 = 0.743$$

Решение 12.11

(a) Чисто случайный процесс: АРИСС(0,0,0)

(b) Случайное блуждание: АРИСС(1,0,0) при $\alpha_1 = 1$ или АРИСС(0,1,0)

(c) Процесс скользящего среднего: СС(q) = АРИСС(0,0,q)

(d) Авторегрессивный процесс: АР(p) = АРИСС(p,0,0)

(e) Авторегрессивный процесс скользящего среднего: АРСС(p,q) = АРИСС(p,0,q)

Глава 13

Основы теории. Временные ряды

§1 Временные ряды

1.1 Введение

Временной ряд — это просто набор набдюдений, сделанных друг за другом по прошествии времени. Такой ряд в общем может быть записан:

$$y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_n) \qquad \text{то есть } \{y(t_i) : i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Данные ряда, которые наблюдаются, обычно разделены равными промежутками времени. В этом случае ряд записывается:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \qquad \text{то есть } \{y_t : t = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Тот факт, что наблюдения происходят упорядоченно со временем, имеет важнейшее значение для любой попытки описывать, анализировать и моделировать данные временных рядов. Наблюдения связаны друг с другом и не могут рассматриваться как наблюдения независимых случайных величин. Существует сильная зависимость между членами основной последовательности величин, которую любой анализ должен распознавать и использовать.

Заметим, что наблюдения y_t могут появляться в разных ситуациях — например, шкала времени может быть по сути дискретной (как в случае рядов "заключительного" разделения цен) или ряды могут появляться как выборка рядов наблюдаемых непрерывно по времени (как в случае ежечасных данных из таблицы атмосферных температур), или наблюдения могут представлять результаты составных величин за период времени (как в случае общего дохода кампании по страховым премиям от нового вида коммерческой деятельности за каждый месяц).

Основные цели анализа временных рядов вкратце выглядят так:

i) Описание и моделирование

(a) Всегда сначала изобразите диаграмму данных. Выявите основные свойства ряда (например, направленное, сезонное влияние) и можете обозначить подходящий метод анализа. Можете предложить желательное преобразование (например, анализировать $w_t = \log y_t$ вместо y_t). Можете выявить наличие выбросов — наблюдения, которые не соответствуют общей модели данных.

(b) Найдите простые описательные итоговые характеристики (например, среднее значение дохода за январь, среднее отклонение от ежедневного количества осадков, оценку среднего отклика как функцию времени, скажем, $\mu(t)$). Множество величин, называемых выборочными коэффициентами автокорреляциации, подтверждает большое значение итоговой связи между наблюдениями с фиксированными промежутками времени.

(c) Моделирование: решение, полученное наиболее подходящим способом — простое детерминированное описание основных особенностей или более сложная стохастическая модель и последовательный подбор модели.

ii) Прогнозирование

Прогнозируемые будущие значения — очень важно на практике — много различных методов/критерии использования.

iii) Процесс мониторинга/контроля

Применяя наблюдаемые временные ряды для обнаружения изменений основного процесса (будь это производственный процесс, состояние здоровья пациента, или мера выполнения дела).

iv) Объяснение

В многомерном контексте, используя дисперсию одного временного ряда, чтобы помочь "объяснить"поведение другого ряда.

§2 Простые описательные способы

У некоторых временных рядов дисперсия подчинена очевидным свойствам, и простая детерминированная модель — это, может быть, все, что требуется для адекватного описания.

Такой анализ составляет обычно распадающиеся временные ряды на следующие компоненты:

i) направленная

ii) сезонность (или сезонная компонента/воздействие)

iii) периодическая (или периодические флуктуации)

iv) нерегулярная компонента (остатки)

Направленная: долгосрочное изменение в среднем — плавное колебательное движение. Пример направленности — рост цен во время непрерывной инфляции.

При удалении направленности, ряд называется "лишенным направленности".

Сезонность: дисперсия, которая периодична по характеру определенного метода. Пример сезонности — продажи фотопленок, которые достигают своего максимума в периоды отпусков и Рождества.

При удалении действия сезонности, ряд называется "с устранением сезонных колебаний".

Периодическая: краткосрочное или долгосрочное колебание вокруг направленности, обусловленное различными причинами, которые порождают направленность и предсказуемы до некоторой степени. Пример периодичности — экономические циклы спада и роста.

Нерегулярная компонента: ряд остатков получается после удаления направленности, сезонного воздействия и периодических флуктуаций.

Эти остатки могут составлять "случайный ряд то есть могут рассматриваться как наблюдения независимых, одинаково распределенных случайных величин. Нет схемы или структуры, оставленной для модели. (Они, тем не менее, могут проявлять зависимость.)

Следующие диаграммы показывают множество данных временных рядов как удаленные компоненты. Первая диаграмма показывает полные данные. Она представляет 12 лет ежемесячных данных. Данные показывают в основном увеличение направленности за 12-летний период. Мы видим основные максимумы каждые четыре года, обозначающие четырехгодичные периоды. Вторая диаграмма показывает данные, лишенным направленности. На третьей диаграмме кроме того удалили четырехгодичные периоды. Неосновные максимумы каждого года показывают сезонность. На четвертой диаграмме кроме того удалили сезонность, оставив только нерегулярную компоненту.

Модель временного ряда

Модель временного ряда: лишенная направленности

Модель временного ряда: лишенная направленности и трехгодичных периодов

Модель временного ряда: лишенная направленности, трехгодичных периодов и сезонности

§3 Процессы временного ряда

Временной ряд $\{y_t : t = 1, 2, \ldots, n\}$ может считаться множеством реализованных значений (фактически наблюдаемых значений) множества случайных величин $\{Y_t : t = 1, 2, \ldots, n\}$. Каждая случайная величина Y_t имеет распределение, среднее значение и дисперсию, и Y_t не являются независимыми случайными величинами.

Функция среднего значения (или направленности) процесса есть $\mu(t) = E(Y_t)$.

Y_t и Y_s одинаково коррелированные, и автоковариационная функция процесса определяется следующим образом.

Определение: Автоковариационная функция $\gamma(t, s)$ величин $\{Y_t\}$ задается:

$$\gamma(t, s) = E[\{Y_t - \mu(t)\}\{Y_s - \mu(s)\}]$$

Дисперсия процесса есть $\sigma^2(t) = \gamma(t, t)$

Основная идея изучения процессов временных рядов в стационарности, идея того, что структура/свойства процесса не изменяются с течением времени. Этого достаточно, чтобы утверждать, что (i) среднее значение $\mu(t)$ постоянно для всех значений t (поэтому можно просто обозначить μ), и что (ii) значение автоковариационной функции $\gamma(t, s)$ зависит только от запаздывания k, где $k = |t - s|$, рассматривается интервал времени между двумя величинами.

В данном случае $\gamma(k)$ или γ_k записаны для $\gamma(t, t + k)$, и $\gamma(0)$ или γ_0 для дисперсии процесса.

Полезно установить соотношения автоковариации, чтобы использовать автокорреляционную функцию/коэффициент.

Определение: автокорреляционная функция $\rho(k)$ стационарного процесса временного ряда Y_t задается $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$, где $\gamma(k) = Cov(Y_t, Y_{t+k})$ Обычно записывают $\rho(k)$ для значения функции с запаздыванием k, и ссылаются на него как на коэффициент автокорреляциации с запаздыванием k. Заметим, что $\rho_0 = 1$ и, для $k > 0$, $\rho_{-k} = \rho_k$.

§4 Авторегрессивный процесс (АР), процесс скользящего среднего (СС) и авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС)

В этом разделе рассматриваются два семейства процессов. В каждом случае чисто случайный процесс Z_t составляет важную основу. Z_t независимы друг от друга, со средним значением 0 и дисперсией σ_Z^2. Такой процесс называется "белый шум".

4.1 Авторегрессивный процесс (АР)

Определение: $\{Y_t\}$ является авторегрессивным процессом порядка p, если

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha_p Y_{t-p} + Z_t$$

Обычно записывают "Y_t является АР(p) процессом".

АР процессы обеспечивают вероятностную модель в любой ситуации, где возможно рассмотрение значений временных рядов в зависимости от ближайших прошедших значений плюс текущая шумовая составляющая/случайный вектор ошибок.

4.2 Процесс скользящего среднего (СС)

Определение: $\{Y_t\}$ является процессом скользящего среднего (СС) порядка p, если

$$Y_t = Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

Обычно записывают "Y_t является СС(q) процессом".

СС процессы обеспечивают вероятностную модель в любой ситуации, где возможно рассмотрение значений временных рядов в результате комбинации текущих и ближайших прошедших шумов/случайных векторов ошибок. В данном представлении $\{Y_t\}$ является "сглаженным шумом".

4.3 Авторегрессивный процесс скользящего среднего (АРСС)

Два основных процесса (АР и СС) могут быть соединены вместе для получения авторегрессивного процесса скользящего среднего (АРСС). Определение АРМА(p,q) процесса:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \ldots + \alpha_p Y_{t-p} + Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}$$

Заметим, что АРМА(p,0) есть АР(p); АРМА(0,q) есть СС(q).

§5 Дифференцирование данных временных рядов и АРИСС процессы

Дифференцирование данных временных рядов — один из нескольких доступных методов, часто применяемых для удаления направленной и/или аддитивной сезонной компонент ряда. Разность между парами наблюдений вычисляется с соответствующим интервалом времени, и полученный ряд используется.

Задан ряд $\{y_t : t = 1, 2, \ldots, n\}$, затем дифференцируем с запаздыванием k, получаем преобразованный ряд $\{v_t\}$, где $v_t = y_t - y_{t-k}$

Дифференцируя с запаздыванием 1 (получая "первые разности"), исключаем линейную направленность.

[Пусть $Y_t = m_t + Z_t$, где $m_t = a + bt$. $E(Y_t) = a + bt$.

Тогда $V_t = Y_t - Y_{t-1} = a + bt + Z_t - a - b(t-1) - Z_{t-1} = b + Z_t - Z_{t-1}$ и $E(V_t) = b$(константа)].

[Заметим, что дифференцирование с запаздыванием больше 1 устраняет линейную направленность вместе с сезонными воздействиями]

Например, дифференцирование с запаздыванием в 4 месяца устраняет сезонные воздействия в данных за квартал.

Эти основные действия можно продолжить. Например, квадратичная направленность устраняется дифференцированием с запаздыванием 1 второй раз, то есть дифференцируя уже дифференцируемый ряд. Пусть $v_t = y_t - y_{t-1}$, тогда $w_t = v_t - v_{t-1}$ эквивалентно тому, что $w_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$.

Дифференцирование рядов (с запаздыванием 1, и более одного раза, если необходимо) дает ряд, для которого стационарная модель является основой методологии моделирования и прогнозирования, пропагандируемой Боксом и Дженкинсом, — методологии, котороя широко применяется и имеет огромное значение с начала 1970-х годов.

Используем эти действия для расширения класса АРСС процессов, которые имеют очень широкую область применения. Расширенное семейства процессов — называется АРИСС процессы — дает очень полезные семейства моделей для нестационарных рядов.

"АРИСС процесс"обозначает "авторегрессивный интегрированный процесс скользящего среднего". Термин "интегрированный"обозначает обратную операцию к "дифференцируемый". $\{Y_t\}$ является АРИСС(p,d,q) процессом, если после его дифференцирования d раз, процесс становится АРСС(p,q) процессом. Поэтому АРИСС процесс является нестационарным процессом, и его d-ая разности составляют стационарный АРСС процесс.

Дадаим более лаконичное определение, для этого используем оператор обратного сдвига B, который определяется (его действием) как $BY_t = Y_{t-1}$. Действие оператора B — перемещение назад на одну единицу времени.

Первая разность может быть записана как $V_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-B)Y_t$, вторая разность как $W_t = V_t - V_{t-1} = (1-B)V_t = (1-B)^2 Y_t$, и в общем виде d-ая разность как $(1-B)^d Y_t$.

Определение: $\{Y_t\}$ является АРИСС(p,d,q) процессом, если

$$X_t = (1-B)^d Y_t$$

является стационарным АРСС(p,q) процессом.

§6 Нахождение автокорреляционной функции: пример

Покажите, что автокорреляционная функция АРСС(1,1) процесса

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + Z_t + \beta Z_{t-1}$$

заданной как

$$\rho_1 = \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1+\beta^2+2\alpha\beta}$$

выполняется:

$$\rho_k = \alpha\rho_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Решение

Используя оператор обратного сдвига B, имеем

$$(1-\alpha B)Y_t = (1+\beta B)Z_t$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow Y_t &= \frac{(1+\beta B)}{(1-\alpha B)} Z_t \\
&= (1+\beta B)(1+\alpha B+\alpha^2 B^2+\ldots) Z_t \\
&= \left(1+(\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{j-1}B^j\right) Z_t \\
&= Z_t+(\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{j-1}Z_{t-j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y_t) &= 0 \\
E(Y_t Z_t) &= \sigma_Z^2 \\
E(Y_t Z_{t-1}) &= (\alpha+\beta)\sigma_Z^2 \\
E(Y_t Z_{t+k}) &= 0 \qquad k=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

Используя уравнение, определяющее процесс

$$Y_t^2 = \alpha Y_t Y_{t-1} + Y_t Z_t + \beta Y_t Z_{t-1}$$

Возьмем математическое ожидание, получим

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \alpha\gamma(1) + \sigma_Z^2 + \beta(\alpha+\beta)\sigma_Z^2 \\
&= \alpha\gamma(1) + (1+\alpha\beta+\beta^2)\sigma_Z^2
\end{aligned}$$

Используя уравнение, определяющее процесс

$$Y_t Y_{t-1} = \alpha Y_{t-1}^2 + Z_t Y_{t-1} + \beta Z_{t-1} Y_{t-1}$$

Возьмем математическое ожидание, получим

$$\gamma(1) = \alpha\gamma(0) + 0 + \beta\sigma_Z^2$$

Решая, получаем

$$\gamma(0) = \frac{(1+\beta^2+2\alpha\beta)}{1-\alpha^2}\sigma_Z^2$$

и

$$\gamma(1) = \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}\sigma_Z^2$$

Используя уравнение, определяющее процесс

$$Y_t Y_{t-k} = \alpha Y_{t-1} Y_{t-k} + Z_t Y_{t-k} + \beta Z_{t-1} Y_{t-k}$$

Возьмем математическое ожидание, получим

$$\gamma(k) = \alpha\gamma(k-1) \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Поэтому

$$\rho_1 = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{(1+\beta^2+2\alpha\beta)}$$

и

$$\rho_k = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \alpha\frac{\gamma(k-1)}{\gamma(0)} = \alpha\rho_{k-1} \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Часть VIII

Глава 14

Треугольники развития

Цели главы

К концу данной главы вы будете уметь:

- понимать исковый процесс в страховании общего вида
- описывать концепцию треугольников задержки (или развития)
- описывать и применять основной цепочно-лестничный метод
- описывать и применять метод интервалов

§1 Введение

В следующих двух главах мы рассмотрим некоторые аспекты страхования *общего вида*.

Треугольники развития — важная тема в практической работе актуариев, работающих в общем страховании, которым приходится использовать крупноформатные таблицы и другие комплекты вычислительного оборудования, чтобы спрогнозировать будущие количества и величины исков. В этом разделе мы рассмотрим три стандартных метода проектирования треугольников развития — основной цепочно-лестничный метод, метод урегулирования инфляции и метод интервалов.

Методы, которые будут изучены в этой главе, непосредственно обоснованы в теме G, которая содержит в себе практическое применение данных методов и представляет некоторые другие методы.

Если в этой главе используются термины, непонятные для вас, можете обратиться к словарю.

Основная лекция этой главы знакомит нас с идеей треугольников развития и затем объясняет, как можно вычислить резервы, используя каждый из трех представленных методов. Также для каждого метода здесь даны численные примеры.

§2 Процесс расчета исков

2.1 Типы резервов

Специалисты, занимающиеся общим страхованием, должны уметь оценивать *окончательные* стоимости исков по нескольким причинам. Во-первых, им необходимо знать полную стоимость оплачиваемых исков, чтобы определить будущие ставки премий. Также им нужно обеспечить резервы в счетах страховой компании, чтобы быть уверенными в том, что у них будет достаточно средств для покрытия задолженностей.

Обычные шаги, включаемые в расчет иска общего страхования, показаны на схеме:

Произошло событие иска	$\Rightarrow$	Иск предъявлен	$\Rightarrow$	Осуществлена выплата по иску	$\Rightarrow$	Дело по этому иску закрыто

После того, как произошло событие иска (например, держатель полиса был вовлечен в дорожно-транспортное происшествие или был ограблен), держатель полиса докладывает о несчастном случае страховщику (предъявляет иск).

Дальнейшая процедура состоит в том, что страховщик производит необходимые выплаты (например, выплаты по ремонту автомобиля, компенсация травмированному человеку или возмещение стоимости украденных вещей). По одному иску может быть сделано несколько выплат.

Когда страховщик определяет, что для данного иска не могут потребоваться дополнительные выплаты, дело по этому иску закрывается.

Специалистам общего страхования необходимо планировать резервы, чтобы выполнить их обязательства для будущих выплат по несчастным случаям, которые уже произошли. Эти резервы имеют отношение к искам на различных стадиях процесса расчета. В частности, резервы требуются для *заявленных, но не урегулированных исков* и *ИБНР* исков:

Типы резервов

ИБНР (произносится "И.Б.Н.Р.") резервы исков требуются для убытков, которые *понесены, но не зарегистрированы*, то есть событие иска произошло, но иск еще не был предъявлен страховщику.

Резервы *заявленных, но не урегулированных* (ЗНУ) исков требуются, когда дело касается исков, которые были предъявлены, но еще не закрыты.

Вопрос для самоподготовки 14.1. Определите, где на последнем графике размещен каждый из этих резервов.

2.2 Таблицы треугольников развития

Информация по прошлым искам может быть подытожена в *треугольнике развития* (или *задержки*), показывающем выплаты, произведенные в различные годы:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	?
	1991	400	600	?	?
	1992	500	?	?	?

Каждая строка в треугольнике представляет *исходный* год, который определяет *группу* исков. Этот пример использует группировку по *годам несчастных случаев* (годам событий)[1]. Строка 1989 года содержит иски, относящиеся к несчастным случаям, произошедшим в этом году.

Столбцы представляют годы *развития*, которые показывают, как группа исков, относящаяся к определенному исходному году "развивалась" в дальнейшем. Столбец 0 отображает год, в который произошел несчастный случай. Столбец 1 — год после несчастного случая и т.д.

Каждую запись в таблице можно определить по ее *исходному году* (строка) и *году развития* (столбец). Например, £200000 относится к 1989 исходному году и ко второму году развития; далее мы будем записывать это как 1989/2 или $C_{1989,2}$.

Вопрос для самоподготовки 14.2. Используя треугольник задержки, описанный выше, определить

[1]Из-за того, что большинство статистических теорий в страховании общего вида разработаны в соответствии со страхованием автомобилей, термин "год несчастных случаев" расширяется здесь включением в него ситуаций, где событие иска не является несчастным случаем; например, угон машин, поджог, ограбление

(а) общую величину исков, выплаченных в 1992 году по несчастным случаям, случившимся в 1990 и

(б) общую величину исков, выплаченных за 1992 год.

Заметим, что определенные календарные года представлены на диагоналях треугольника. Например, диагональ (500-600-300-100) показывает все выплаты, произведенные в течение последнего из рассматриваемых лет, то есть 1992. Заметим также, что верхний левый угол представляет "известные" прошлые выплаты, а нижний правый угол (со знаками "?") — "неизвестные" будущие выплаты. Наша задача на протяжении оставшейся части главы — рассмотреть методы оценки этих неизвестных значений, чтобы заполнить правый нижний угол треугольника. Большинство этих ячеек будут содержать задолженности или резервы для неоплаченных исков.

Таблица в примере, описанном ранее, показывала величины оплаченных исков, сгруппированных по годам несчастных случаев. Также могут использоваться разнообразные альтернативные таблицы. Например:

1. Группы могли бы определяться *годом предъявления* ("все иски, предъявленные в год X") или *годом оформления* ("все иски, поданные по полисам, оформленным в год X").

2. Исходные годы могут совпадать с *финансовыми* годами компании (то есть могут считаться с 1-ого апреля по 31-ое марта, например) или могут быть *исходными кварталами* или *месяцами*.

3. Записи в таблице могут показывать *количество* исков или оценивать *окончательную* стоимость или *расходы* на получение страхового возмещения.

Вопрос для самоподготовки 14.3. Если мы спроецируем иски, заданные в треугольнике развития, чтобы заполнить пустые ячейки таблицы, то какие резервы, из описанных в предыдущем разделе, могут быть туда включены, если таблица показывает

(а) величины исковых выплат, сгруппированные по году событий и

(б) величины исковых выплат, сгруппированные по году предъявления?

2.3 Коэффициенты развития

Определить коэффициент развития и показать, как множество предполагаемых коэффициентов развития может использоваться для проектирования будущего развития треугольника задержки. *(n1)*

Шаблон развития иска может быть изучен путем вычисления *коэффициентов развития*:

Коэффициенты развития

Коэффициент развития для исходного года i и года развития j равен:

$$\text{коэффициент развития} = \sum_{t=0}^{j} C_{i,t} / \sum_{t=0}^{j-1} C_{i,t}$$

"Разделить сумму с нарастающим к моменту t итогом на сумму с итогом, нарастающим к моменту $t-1$"

Пример 14.1 Вычислить коэффициент развития для 1990/2 для треугольника из примера.

Решение Коэффициент развития для 1990/2 равен:

$$\frac{C_{1990,0} + C_{1990,1} + C_{1990,2}}{C_{1990,0} + C_{1990,1}} = \frac{500 + 700 + 300}{500 + 700} = \frac{1500}{1200} = 1.25$$

Вопрос для самоподготовки 14.4. Дополните треугольник развития из примера, предполагая, что коэффициенты развития, показанные в следующей таблице, будут применяться в будущие годы развития.

коэффициенты развития		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989				
	1990				1.100
	1991			1.250	1.150
	1992		2.500	1.300	1.100

2.4 Статистическая модель для треугольников развития

Записи в треугольнике развития могут быть смоделированы с использованием равенства:

$$C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j},$$

где

$C_{i,j}$	запись в треугольнике с исходным годом i и годом развития j (например, выплата по иску)
n_i	обозначает "объем" исков, относящихся к исходному году i. Также может отражать число исков (*частоту*) и среднюю стоимость иска в настоящий период времени (*текущая стоимость*)
r_j	коэффициент года развития j, показывающий долю исковых выплат в этот год. Сумма коэффициентов r_j по всем годам развития должна равняться 1.
λ_{i+j}	коэффициент поправки, относящийся к календарным годам (например, коэффициент инфляции)
$e_{i,j}$	случайная статистическая ошибка со средним значением ноль, которая показывает разницу между действительным и ожидаемым результатами.

В методах планирования, которые мы будем изучать в следующем разделе, мы будем основываться на *ожидаемых* величинах иска, то есть мы будем "опускать" элемент $e_{i,j}$.

Вопрос для самоподготовки 14.5. Актуарий, используя данную модель, оценил параметры для треугольника развития следующим образом:

$$\begin{array}{lll} n_{90} = \pounds 1.50m, & r_0 = 0.6, & \lambda_{90} = 1.00 \\ n_{91} = \pounds 1.75m, & r_1 = 0.3, & \lambda_{91} = 1.10 \\ n_{92} = \pounds 1.60m, & r_2 = 0.1, & \lambda_{92} = 1.20 \\ & & \lambda_{93} = 1.25 \\ & & \lambda_{94} = 1.30 \end{array}$$

Используя эти оценки, заполните таблицу и оцените величину неоплаченных исков.

Вопрос для самоподготовки 14.6. Объясните, что будет показывать каждый из параметров n_i, r_j, λ_{i+j}, если мы применим эту модель к треугольнику развития, показывающему количество исковых выплат, сгруппированным по году предъявления.

§3 Методы планирования исков

3.1 Основной цепочно-лестничный метод

Описать и применить основной цепочно-лестничный метод для заполнения треугольника задержки. *(n2)*

Обсудить предположения, лежащие в основе применения методов.

(n3)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ/ФОРМУЛА

Основной цепочно-лестничный метод предполагает модель: $C_{i,j} = n_i r_j + e_{i,j}$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

1. Коэффициенты развития r_j не отличаются по исходному году, то есть коэффициенты развития — r_j, а не $r_{i,j}$.

2. Иски, произошедшие в первый исходный год, предполагаются полностью рассмотренными, то есть в годах развития не будет исков за пределами правого края таблицы. Это означает, что коэффициенты развития (r_j-ые) для лет развития, включенных в таблицу, в сумме дают 1.

3. Влияния инфляции и дополнительные тенденции игнорируются. Коэффициент λ_{i+j} предполагается постоянным и, поэтому, не включается в данную модель.

ЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Следующий пример иллюстрирует интуитивное обоснование, лежащее в основе цепочно-лестничного метода.

Предположим, что вас попросили оценить, какая запись могла бы соответствовать ячейке 1991/2 в следующей таблице:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)</td><td colspan="4">год развития</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="4">год событий</td><td>1989</td><td>300</td><td>500</td><td>200</td><td>100</td></tr>
<tr><td>1990</td><td>500</td><td>700</td><td>300</td><td></td></tr>
<tr><td>1991</td><td>400</td><td>600</td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td>1992</td><td>500</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Естественным подходом могло бы быть сравнение итогов предшествующих исходных лет для двух прямоугольников, отмеченных в этой таблице.

Мы видим, что общая величина исков, оплаченных к концу 1-ого года развития для всех исходных лет, предшествующих 1991 году, была $300 + 500 + 500 + 700 = 2000$, а общие исковые выплаты за 2-ой год развития для этих лет равнялись $200 + 300 = 500$, то есть четверти этого.

Общая величина исков, оплаченных к концу 1-ого года развития, для 1991 исходного года равна $400 + 600 = 1000$. Тогда можно ожидать, что значение ячейки 1991/2 — четверть этого, то есть 250.

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	
	1991	400	600	250?	
	1992	500			

Вот что мы сделали, чтобы это вычислить:

1. Предположили,что шаблон развития одинаковый для каждого исходного года.
2. Объединили всю значимую предшествующую информацию, чтобы найти наилучшую оценку для коэффициента развития.
3. Применили этот коэффициент к более позднему исходному году, чтобы оценить значение ячейки для более позднего года развития

Это точное описание логики, которую использует основной цепочно-лестничный метод.

Вопрос для самоподготовки 14.7. Какое значение мы можем ожидать в ячейке 1990/3?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЫВОД

Интуитивная иллюстрация, которую мы приводили выше, может быть доказана математически, если составить уравнение для *ожидаемых* значений, предположенных в этой модели, с известными значениями имеющихся данных и, затем, использовать ожидаемые параметрические значения, чтобы оценить неизвестные переменные.

Так как вектор ошибок, предположительно, имеет среднее значение 0, *ожидаемые* выплаты для каждого года таковы:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)</td><td colspan="4">год развития</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="4">год событий</td><td>1989</td><td>$n_{89}r_0$</td><td>$n_{89}r_1$</td><td>$n_{89}r_2$</td><td>$n_{89}r_3$</td></tr>
<tr><td>1990</td><td>$n_{90}r_0$</td><td>$n_{90}r_1$</td><td>$n_{90}r_2$</td><td>$n_{90}r_3$</td></tr>
<tr><td>1991</td><td>$n_{91}r_0$</td><td>$n_{91}r_1$</td><td>$n_{91}r_2$</td><td>$n_{91}r_3$</td></tr>
<tr><td>1992</td><td>$n_{92}r_0$</td><td>$n_{92}r_1$</td><td>$n_{92}r_2$</td><td>$n_{92}r_3$</td></tr>
</table>

Сравнение записей в двух выделенных прямоугольниках дает два уравнения:

$$n_{89}r_0 + n_{89}r_1 + n_{90}r_0 + n_{90}r_1 = 300 + 500 + 500 + 700$$

$$n_{89}r_2 + n_{90}r_2 = 200 + 300,$$

которые можно разложить на множители и получить:

$$(n_{89} + n_{90})(r_0 + r_1) = 2000$$

$$(n_{89} + n_{90})r_2 = 500$$

Используя данные для 1991 исходного года, получаем:

$$n_{91}r_0 + n_{91}r_1 = 400 + 600 \qquad \text{то есть } n_{91}(r_0 + r_1) = 1000$$

Можем оценить значение для 1991/2, записав его в виде:

$$n_{91}r_2 = n_{91}(r_0 + r_1) \times \frac{(n_{89} + n_{90})r_2}{(n_{89} + n_{90})(r_0 + r_1)}$$

Используя выведенные равенства, получаем: $1000 \times \frac{500}{2000} = 250$, что совпадает со значением, полученным путем интуитивных вычислений.

ИЗЛОЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Шаг 1 (накапливаем)

Составим таблицу исков *с нарастающим итогом* (совокупных исков), показывающую общие иски к концу каждого года рассмотрения. Это позволит избежать повторных сложений. Накопительная таблица выглядит так:

выплаты по искам с нарастающим итогом(£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	800	1000	1100
	1990	500	1200	1500	?
	1991	400	1000	?	?
	1992	500	?	?	?

<u>Шаг 2</u> (вычисляем коэффициенты)

Вычисляем коэффициент для каждого столбца делением суммы известных данных в этом столбце на сумму соответствующих записей из предыдущего столбца (то есть не включаем нижнюю ячейку). Это дает оценки для коэффициентов будущего развития:

$$\frac{800+1200+1000}{300+500+400} = \frac{3000}{1200} = 2.5$$

$$\frac{1000+1500}{800+1200} = \frac{2500}{2000} = 1.25$$

$$\frac{1100}{1000} = 1.1$$

Коэффициенты развития удобно записать над (или под) столбцами:

			$\times 2.5$	$\times 1.25$	$\times 1.1$
выплаты по искам с нарастающим итогом (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	800	1000	1100
	1990	500	1200	1500	?
	1991	400	1000	?	?
	1992	500	?	?	?

<u>Шаг 3</u> (заполнить ячейки накопительной таблицы)

Теперь заполним неизвестные (накопленные) данные, применяя коэффициенты, находящиеся над столбцами, к предыдущим столбцам. Вычисления будут такими:

$$
\begin{array}{rrr}
 & & 1500 \times 1.1 = 1650 \\
 & 1000 \times 1.25 = 1250, & 1250 \times 1.1 = 1375 \\
500 \times 2.5 = 1250, & 1250 \times 1.25 = 1563, & 1563 \times 1.1 = 1719
\end{array}
$$

и таблица преобразуется так:

$\times 2.5$ $\times 1.25$ $\times 1.1$

выплаты по искам с нарастающим итогом (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	800	1000	1100
	1990	500	1200	1500	1650
	1991	400	1000	1250	1375
	1992	500	1250	1563	1719

<u>Шаг 4</u> (обратное преобразование таблицы)

Осуществим вычитания, чтобы найти оценки для отдельных лет; например, $1250 - 500 = 750$:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	150
	1991	400	600	250	125
	1992	500	750	313	156

<u>Шаг 5</u> (вычисление общей прогнозируемой суммы)

Сложим оценочные данные, чтобы найти величину неоплаченных исков:

$$150 + 250 + 125 + 750 + 313 + 156 = 1744$$

ЗАМЕЧАНИЯ

Основной цепочно-лестничный метод игнорирует инфляцию. Это означает, что в случае инфляции, основной цепочно-лестничный метод будет прогнозировать ее заблаговременно, используя присущий инфляции коэффициент, который является взвешенным средним значением прошлых коэффициентов. Если такое значение не подходит для будущих прогнозов, это может привести к искажениям.

Вопрос для самоподготовки 14.8. Таблица, приведенная ниже, показывает число исков по страхованию частных строений, поданных в каждый год развития. Используя основной цепочно-лестничный метод, оцените общее окончательное число исков, произошедшее с 1-ого января 1989 года по 31-ое декабря 1992 года.

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	17500	5000	2250	750
	1990	21000	6200	2750	
	1991	18800	5500		
	1992	21300			

3.2 Основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию

Показать, как основной цепочно-лестничный метод может быть скорректирован, чтобы точно учитывать инфляцию. *(п3)*

Основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию — это модификация основного цепочно-лестничного метода, которая подробно учитывает инфляцию, чтобы снизить искажения, вызванные колебаниями уровня инфляции.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ/ФОРМУЛА

Основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию предполагает модель: $C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Предположения такие же, как для основного цепочно-лестничного метода, за исключением того, что модель включает коэффициент λ_{i+j}, который является предполагаемым индексом инфляции исков.

ЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Цель основного цепочно-лестничного метода с поправкой на инфляцию — устранить искажающие воздействия инфляции, используя предполагаемый (допустимый) индекс инфляции прошлых исков, чтобы привести все известные данные к значениям, находящимся в приблизительно постоянном денежном выражении. Затем к этим скорректированным данным применяется основной цепочно-лестничный метод, чтобы получить прогнозируемые данные, также находящиеся в приблизительно постоянном денежном выражении. Далее преобразуем прогнозируемые данные в действующие денежные величины с помощью предполагаемого индекса инфляции будущих исков.

ТРЕБОВАНИЯ К ДАННЫМ

Основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию требует тех же данных, что и основной цепочно-лестничный метод, плюс индекс инфляции прошлых и ожидаемых будущих исков.

ИЗЛОЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для применения основного цепочно-лестничного метода с поправкой на инфляцию необходимы следующие шаги:

1. Перемножить величины в исходном треугольнике с индексами инфляции соответствующих календарных лет.

2. Применить основной цепочно-лестничный метод для этих данных также, как было описано выше (используя шаги 1-4), чтобы получить прогнозируемые величины, выраженные в постоянных денежных элементах.

3. Умножить эти величины на индексы инфляции соответствующих календарных лет, чтобы получить действительные прогнозируемые величины.

4. Вычислить сумму этих прогнозируемых данных, чтобы найти общую величину ожидаемых будущих исков.

ПРИМЕР

В качестве иллюстрации повторим предыдущий пример, используя следующие коэффициенты инфляции исковых стоимостей для каждого из последующих календарных лет:

годовой коэффициент инфляции исков (прошлых)	
1989/90	11%
1990/91	10%
1991/92	9%

годовой коэффициент инфляции исков (будущих)	
1992/93	8%
1993/94	7%
1994/95	6%

Мы можем преобразовать исходную таблицу к данным 1992 года. Например, запись 300 изменится так:

$$300 \times 1.11 \times 1.10 \times 1.09 = 399$$

Получаем:

выплаты по искам в денежном выражении 1992 года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	399	600	218	100
	1990	600	763	300	
	1991	436	600		
	1992	500			

Далее складываем эти данные и записываем над столбцами коэффициенты, вычисленные обычным способом. Затем используем эти коэффициенты, чтобы заполнить таблицу совокупных выплат, выражающихся в денежных элементах 1992 года:

$$\times 2.368 \quad \times 1.219 \quad \times 1.082$$

выплаты по искам с нарастающим итогом в денежном выражении 1992 года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	399	999	1217	1317
	1990	600	1363	1663	1799
	1991	436	1036	1263	1367
	1992	500	1184	1443	1561

Осуществим вычитания, чтобы найти величины, выражающиеся в денежных элементах 1992 года, для каждого года:

выплаты по искам в денежном выражении 1992 года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	399	600	218	100
	1990	600	763	300	136
	1991	436	600	227	104
	1992	500	684	259	118

Теперь мы можем использовать коэффициенты будущей инфляции, чтобы спрогнозировать эти величины. Например, запись 259 преобразуется так:

$$259 \times 1.08 \times 1.07 = 299$$

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	147
	1991	400	600	245	120
	1992	500	739	299	145

Оценка общей величины неоплаченных исков — это сумма записей всех выделенных ячеек:

$$147 + 245 + 120 + 739 + 299 + 145 = 1695$$

3.3 Поправка для вспомогательных переменных

Обсудите альтернативные способы выведения коэффициентов развития, которые подойдут для заполнения треугольников задержки.

(n3)

Таблица, данная ниже, показывает (в незакрашенных ячейках) коэффициенты развития прошлых лет для нашего примера:

коэффициенты развития		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	—	2667	1250	1100
	1990	—	2.400	1.250	1.100
	1991	—	2.500	1.250	1.100
	1992	—	2.500	1.250	1.100

Записи в закрашенных ячейках — это предполагаемые будущие коэффициенты развития, определенные с использованием основного цепочно-лестничного метода. Так как основной цепочно-лестничный метод вычисляет их, базируясь на суммах прошлых исков, он достаточно эффективно оценивает коэффициенты развития будущих лет (например, запись 2500) как среднее по всем известным коэффициентам столбца (то есть, 2667, 2400 и 2500), используя объем исков для соответствующего года событий (строку), как весовой коэффициент.

Мы можем использовать множество подобных методов для оценки будущих коэффициентов развития (и, следовательно, вычислить прогнозируемые иски), базируясь на известных данных в столбце.

Например, мы могли бы:

- применить серию нагрузок, основанных на вспомогательных переменных (например, объем исков), отражающую степень значения, которое мы хотим прибавить к записям каждого года событий
- взять "прямое" среднее значение столбца, если нам надо придать одинаковый вес каждому году событий
- задать некоторые годы с нулевой нагрузкой, если мы хотим исключить их из вычислений
- взять наивысшую запись в столбце, если нам необходимо осуществить очень безопасный подход, чтобы избежать недооценки прогнозируемых исков.
- использовать математические методы, чтобы "подогнать" кривую (диаграмму) к записям столбца, если мы хотим отразить тенденции, присущие коэффициентам развития.

3.4 Метод интервалов

Описать и применить метод интервалов для заполнения треугольника задержки. *(n5)*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ/ФОРМУЛА

Метод интервалов предполагает модель: $C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

1. Коэффициенты развития не изменяются по исходным годам (r_j не $r_{i,j}$).

2. Иски по первому исходному году предполагаются полностью рассмотренными, то есть после года развития 3 в нашем примере нет неоплаченных исков (тогда r_j-ые для всех лет развития, включенные в таблицу, в сумме дают 1).

ЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Цель метода интервалов — уменьшить искажающие воздействия, возникающие в результате фоновых колебаний объемов исков в различные годы развития. Это осуществляется с помощью деления на нормирующие множители, которые действуют, как заместитель общего числа исков для каждого исходного года. Такая поправка убирает коэффициенты n_i из этой модели.

Ряд уравнений, содержащих только коэффициенты r_j и λ_{i+j}, затем может быть преобразован приравниванием ожидаемых исков, прогнозируемых моделью, с известными данными. Эти уравнения надо решить, чтобы найти оценки для r_j-ых и λ_{i+j}-ых. Затем из формулы могут быть точно вычислены предполагаемые будущие коэффициенты.

ТРЕБОВАНИЯ К ДАННЫМ

Метод интервалов требует два пункта данных в дополнение к основным исковым данным:

1. Запись для каждого исходного года, которая обеспечивает хорошее отображение ”объема” исков в этот год. Наиболее распространенная мера — это число исков, предъявленных в течении начального года развития (то есть года развития 0). Если частота предъявления исков сходна для каждого года, эта мера дает ясное отражение возможного конечного числа исков.

2. Предполагаемый коэффициент инфляции исков для каждого будущего прогнозируемого года.

Проиллюстрируем применение метода интервалов на тех же исковых данных, используя дополнительную информацию:

число исков, предъявленных в исходный год	
1989	235
1990	390
1991	230
1992	325

годовой коэффициент инфляции исков (будущих)	
1992/93	8%
1993/94	7%
1994/95	6%

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЫВОД/ИЗЛОЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Шаг 1 (деление на нормирующий множитель)

Разделим каждую строку таблицы на нормирующий множитель для этого исходного года, например, для 1991/1:

$$600000/230 = 2609$$

нормированные иски (£)		год развития 0	1	2	3
год событий	1989	1277	2128	851	426
	1990	1282	1795	769	?
	1991	1739	2609	?	?
	1992	1538	?	?	?

Шаг 2 (вычисление r_j-ых и λ_{i+j}-ых)

Теперь нам необходимо определить значения r_j-ых и λ_{i+j}-ых. Опять же, это будет сделано с помощью приравнивания ожидаемых значений к соответственным действительным данным.

ожидаемые значения		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	$r_0\lambda_{89}$	$r_1\lambda_{90}$	$r_2\lambda_{91}$	$r_3\lambda_{92}$
	1990	$r_0\lambda_{90}$	$r_1\lambda_{91}$	$r_2\lambda_{92}$	$r_3\lambda_{93}$
	1991	$r_0\lambda_{91}$	$r_1\lambda_{92}$	$r_2\lambda_{93}$	$r_3\lambda_{94}$
	1992	$r_0\lambda_{92}$	$r_1\lambda_{93}$	$r_2\lambda_{94}$	$r_3\lambda_{95}$

Сумма самой длинной диагонали (которая содержит все λ_{92}-ые) равна:

$$r_0\lambda_{92} + r_1\lambda_{92} + r_2\lambda_{92} + r_3\lambda_{92} = 1538 + 2609 + 769 + 426$$

то есть $$(r_0 + r_1 + r_2 + r_3)\lambda_{92} = 5342$$

Так как мы полагаем, что первая строка полностью рассмотрена, мы знаем, что: $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 1$

Итак: $$\lambda_{92} = 5342$$

Известное значение в последнем столбце (который содержит только r_3) равно:

$$r_3\lambda_{92} = 426$$

Тогда $$r_3 = 426/\lambda_{92} = 426/5342 = 0.0797$$

Сумма следующей по длине диагонали (содержащей все λ_{91}-ые):

$$r_0\lambda_{91} + r_1\lambda_{91} + r_2\lambda_{91} = 1739 + 1795 + 851$$

то есть $$(r_0 + r_1 + r_2)\lambda_{91} = 4385$$

Так как $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 1$, мы знаем, что: $r_0 + r_1 + r_2 = 1 - r_3 = 1 - 0.0797 = 0.9203$

Тогда: $$\lambda_{91} = 4385/0.9203 = 4765$$

Известное значение в предпоследнем столбце (который содержит только r_2) равно:

$$r_2(\lambda_{91} + \lambda_{92}) = 1620$$

Получаем, что $$r_2 = 1620/(\lambda_{91} + \lambda_{92}) = 1620/(4765 + 5342) = 0.1603$$

Продолжая таким образом, поочередно используя сумму диагонали, чтобы найти следующее λ_{i+j}, а затем сумму столбца, чтобы найти следующее r_j, можно оценить все параметры.

Простейший способ изложения этих вычислений состоит в том, чтобы записать каждый найденный параметр в таблицу и сохранить промежуточные суммы (как показано в таблице, приведенной ниже). Для λ_{i+j}-ых начинаем в 0 и добавляем каждое новое значение к сумме. Для r_j-ых начинаем в 1 и вычитаем каждое новое значение. Это освобождает нас от повторных вычислений и обеспечивает проверку того, что r_j-ые в сумме дают 1.

<u>Шаг 3</u> (прогнозирование λ)
Используем предполагаемые будущие коэффициенты инфляции (из таблицы данных), чтобы вычислить "будущие" λ_{i+j}-ые (показанные в таблице, приведенной ниже); например:

$$\lambda_{93} = 1.08 \times \lambda_{92} = 1.08 \times 5432 = 5769$$

		промежуточная сумма
r_0	0.3124	0.0000
r_1	0.4476	0.3124
r_2	0.1603	0.7600
r_3	0.0797	0.9203

		промежуточная сумма
λ_{89}	4088	18682
λ_{90}	4487	14594
λ_{91}	4765	10107
λ_{92}	5342	5342
λ_{93}		
λ_{94}		
λ_{95}		

<u>Шаг 4</u> (вычисление прогнозируемых данных)
Вычислим $n_i r_j \lambda_{i+j}$, чтобы заполнить неизвестные записи; например, для 1991/2:

$$230 \times 0.1603 \times 5769 = 213000$$

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	300	500	200	100
	1990	500	700	300	179
	1991	400	600	213	113
	1992	500	839	322	169

<u>Шаг 5</u> (вычисление прогнозируемых данных)
Сложим оцененные записи, чтобы найти общую сумму неоплаченных исков:

$$179 + 213 + 113 + 839 + 332 + 169 = 1835$$

ЗАМЕЧАНИЯ

Последовательные λ-коэффициенты (представляющие "календарные эффекты") обеспечивают отражение коэффициентов инфляции исков (с середины года по середину года), основываясь на прошлых данных. Например, $\lambda_{92}/\lambda_{91} = 1.121$ говорят нам о том, что средняя стоимость иска между 1991 и 1992 годами выросла на 12.1%, опираясь на предположения метода интервалов.

Вопрос для самоподготовки 14.9. Таблица, приведенная ниже, показывает величины исков, оплаченных в каждый год развития для портфеля исков по страхованию частных строений в предыдущем вопросе для самостоятельного решения. Используя метод интервалов, оценить величину неоплаченных исков, поданных по несчастным случаям, происшедшим между 1-ым января 1989 года и 31-ым декабря 1992 года. Предположить 10%-ую инфляцию для будущих лет.

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	8975	5030	1525	425
	1990	12555	6975	2090	
	1991	12120	6885		
	1992	14790			

Вопрос для самоподготовки 14.10. Основываясь на предположениях, лежащих в основе метода интервалов, определить предполагаемый коэффициент инфляции исков для 1989/90.

§4 Краткое изложение

Важной чертой искового процесса в страховании общего вида является резервирование, то есть оценка компонентов исковых резервов, которые включают в себя заявленные, но не урегулированные иски, ИБНР, возобновленные иски и дополнительные траты по искам.

Треугольники развития (или треугольники задержки) предоставляют метод сведения исковых данных в таблицы и изучению лежащей в их основе статистической модели.

Два метода, используемые для прогнозирования исков — это основной цепочно-лестничный метод и метод интервалов. Эти методы могут быть скорректированы с учетом фоновых колебаний между исходными и календарными годами (например, инфляция исков).

§5 Формулы

Коэффициенты развития

$$\text{коэффициент рассмотрения} = \sum_{t=0}^{j} C_{i,t} / \sum_{t=0}^{j-1} C_{i,t}$$

Статистические модели для треугольников развития

$C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$ (общая модель)

$C_{i,j} = n_i r_j + e_{i,j}$ (основной цепочно-лестничный метод)

$C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$ (основной цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию)

$C_{i,j} = n_i r_j \lambda_{i+j} + e_{i,j}$ (метод интервалов)

Вопросы студентам

В1 Могли бы вы немного побольше рассказать о резервах? Верно ли, что резервы, которые компания, занимающаяся общим страхованием, держит для неоплаченных исков — это только верхушка айсберга в сравнении со всеми остальными резервами, которые она должна иметь?

О1 Компании имеют резервы, чтобы сохранить фонды для выплат, которые они будут обязаны сделать в будущем. В случае контор по страхованию жизни или пенсионных фондов, где премии могут быть получены за услуги, которые, возможно, не будут оплачиваться в ближайшие 40 лет, резервы будут накапливаться в течение очень долгого периода.

Однако, для компаний, занимающихся общим страхованием, где большинство контрактов покрывают период в один год, типично, что резервы будут хранить в течении нескольких лет; до тех пор, пока иски, относящиеся к этому периоду, будут рассматриваться. Итак, в действительности, резервы для неоплаченных исков — это большая часть резервов общего страхования.

Специалисты, занимающиеся общим страхованием, могут также держать другие резервы; например, резервы для *возобновленных* исков (в случае, если становится необходимым возобновить закрытые иски в свете новой информации) или для *катастроф* (чтобы покрыть периоды особо тяжелых исков). Также, ввиду того, что премии обычно платятся заблаговременно, необходимо держать резервы *премий*, состоящие из долей уже полученных премий, относящихся к периодам покрытия, начинающимся после конца текущего года.

В2 Есть ли различие между "треугольником развития" и "треугольником задержки"?

О2 Нет. Это просто разные названия одного и того же. Также, они иногда называются "треугольниками рассмотрения".

В3 Можно ли пропустить Шаг 4 в вычислениях основного цепочно-лестничного метода и найти неоплаченные величины с помощью вычитания записей, находящихся на главной диагонали, из строки итоговых накоплений (последней строки таблицы)?

О3 Как вы уже обратили внимание, конечные данные можно найти прямо из Шага 3. Однако, записи на Шаге 4 обеспечивают полезную проверку вычислений. На этом шаге могут быть выявлены важные ошибки, из-за того, что данные могут явно "выглядеть неправильными". Кроме того, записи Шага 4 показывают, когда, как ожидается, будут произведены выплаты. В случае применения цепочно-лестничного метода с *инфляционной поправкой*, вы должны будете включить этот шаг, чтобы корректно предусмотреть будущую инфляцию.

В4 Могут ли компании использовать только индекс розничных цен RPI (от английского "Retail Price Index") для инфляции исков?

О4 Обычно, нет. Этот индекс отражает рост средней стоимости определенного типа страховых исков. Для других типов исков (например, компенсационных выплат травмированным людям), иски могут расти гораздо быстрее, чем цены товаров народного потребления.

В5 Объясните название метода "интервалов". Что он разлеляет?

О5 Метод интервалов разделяет долговременные влияния, то есть влияния, относящиеся к календарным годам. Как мы уже заметили, цепочно-лестничный метод может дать обманчивые результаты, если прошлые долговременные изменения (например, инфляция) не продолжаются с такими же коэффициентами в будущем.

В6 Базируются ли количества исков в примерах на данных реальных компаний?

О6 Нет. Это выдуманные данные. Однако, они дают яркое отражение для шаблонов некоторых типов страховых исков. Мы использовали округленные числа и различные ячейки каждого года для предположений инфляции, чтобы упростить вычисления для следующих лет.

В7 Используются ли на практике основной цепочно-лестничный метод и метод интервалов?

О7 Основной цепочно-лестничный метод используется довольно широко, особенно для нахождения быстрых первоначальных оценок. Метод интервалов встречается в реальной практике относительно редко.

В8 Существуют только эти методы для прогнозиров страхованииания неоплаченных исков?

О8 Нет. Есть множество различных методов и их разновидностей. Некоторые методы приводятся в Теме G, включая методы определения средней стоимости иска и метод Борнуттера-Фергюсона.

В9 Я слышал от моего друга, работающего в общем страховании, о "нетто-убыточности". Не могли бы вы рассказать, что это такое?

О9 Доля исковых убытков (или нетто-убыточность) и доля затрат (брутто-убыточность) используются, чтобы оценить, как осуществляются дорогостоящие страховые иски и затраты. Эти коэффициенты для данных рассматриваемых лет вычисляются так:

$$\text{Нетто-убыточность} = \frac{\text{Произошедшие иски}}{\text{Полученные премии}} \text{ и}$$

$$\text{Брутто-убыточность} = \frac{\text{Затраты (включая комиссию)}}{\text{Брутто-премии}}$$

"Произошедшие иски" — это оценка общей величины исков, относящихся к событиям, случившимся в течение рассматриваемого года и "полученные премии" — это доля премий, используемая для покрытия выплат в течение этого года. В качестве примерного ориентира "типичных" значений для "типичных" сфер деятельности в "типичные" годы могут быть названы нетто-убыточность — 70% и брутто-убыточность — 30%.

Подсказки для ответов на вопросы

1. Вопросы к этой теме в основном содержат довольно сложную арифметику. Проверяйте, чтобы ваши числа выглядели подходящими на каждой стадии, тогда вам не придется тратить время на возврат и пересчет.

2. Применяйте различные методы, чтобы сделать вычисления быстрее. Это поможет, если проводите вычисления в стандартном виде.

3. Вычисление параметров метода интервалов может быть кратко охарактеризовано фразой: "*Используйте диагональные суммы, чтобы найти λ. Используйте суммы по столбцам, чтобы найти r*".

4. Годы развития иногда обозначаются $1, 2, 3, \ldots$, вместо $0, 1, 2, \ldots$ Первый год развития обычно является годом, совпадающим с исходным годом. Используйте общий подход, чтобы быть уверенными, что интерпретировали информацию корректно.

5. Похожим образом, календарные годы могут обозначаться в относительных величинах, то есть $0, 1, 2, \ldots$, вместо абсолютных значений, то есть $1989, 1990, 1991, \ldots$ Это не играет никакой роли для метода вычислений.

§6 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 14.1

ИБНР-резерв соответствует левой стрелке. Резерв предъявленных, но не оплаченных исков, соответствует средней стрелке.

(Для правой стрелки не будет затребовано никаких резервов, так как все выплаты по этим искам уже были сделаны. Однако, на практике, страховщик должен держать резервы для *возобновленных исков*, чтобы предусмотреть вероятность того, что дело иска было закрыть "слишком быстро" и понадобятся дополнительные выплаты).

Решение 14.2

(а) Выплата в 1990/2 равна £300000.

(б) Общая сумма исков, оплаченных в 1992 году, — это сумма элементов самой длинной диагонали:

$$500000 + 600000 + 300000 + 100000 = \pounds 1500000$$

Решение 14.3

(а) Таблица будет включать в себя все иски, относящиеся к *несчастным случаям, которые произошли* между 1-ым января 1989 года и 31-ым декабря 1992 года. Значит она будет содержать и заявленные, но не урегулированные иски, и ИБНР-иски.

(б) Таблица будет включать в себя все иски, *предъявленные* между 1-ым января 1989 года и 31-ым декабря 1992 года. Поэтому она будет содержать ЗНУ иски, но не будет содержать ИБНР-иски.

Решение 14.4

Простейший способ это сделать — поработать с исками с нарастающим итогом, как показано на таблице ниже. Затем мы можем применить коэффициенты развития, чтобы вычислить выплаты для будущих лет.

Например, совокупная выплата для 1991/2 равна: $1000 \times 1.250 = \pounds 1250$

выплаты по искам с нарастающим итогом (£000)		год развития 0	1	2	3
год событий	1989	300	800	1000	1100
	1990	500	1200	1500	1650
	1991	400	1000	1250	1438
	1992	500	1250	1625	1788

Решение 14.5

В этом примере только 3 исходных года и года развития. Перемножение соответствующих параметров дает следующую таблицу:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития 0	1	2
год событий	1990	900	495	180
	1991	1155	630	219
	1992	1152	600	208

Величина неоплаченных исков равна: $219 + 600 + 208 = 1027$, то есть $\pounds 1027000$.

Решение 14.6

n_i будет показывать общее число исков, заявленных в исходный год i. r_j будет показывать долю исков, выплаты по которым были сделаны в год развития j. λ_{i+j} будет равно 1, так как мы рассматриваем *количество* исков.

Решение 14.7

Основываясь на исходных годах до 1990, коэффициент развития года 3 по отношению к предшествующим годам равен:

$$\frac{100}{300+500+200} = \frac{1}{10}$$

Общая сумма по первым трем годам развития для 1990 года равна: $500 + 700 + 300 = 1500$

Тогда, мы можем ожидать, что запись в ячейке 1990/3 будет такой: $\frac{1}{10} \times 1500 = 150$

Решение 14.8

Когда мы имеем дело с *количеством* исков, основной цепочно-лестничный метод может быть применен точно таким же способом:

Таблица накоплений числа исков выглядит так:

совокупное число исков		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	17500	22500	24750	25500
	1990	21000	27200	29950	30858
	1991	18800	24300	26745	27555
	1992	21300	27508	30275	31193

Прогнозируемое окончательное число исков — это общая сумма последнего столбца:

$$25500 + 30858 + 27555 + 31193 = 115106$$

Решение 14.9

Вам надо использовать первый столбец таблицы из предыдущего примера, как нормирующий множитель для исходных лет.

число исков, предъявленных в исходный год (000)	
1989	17.5
1990	21.0
1991	18.8
1992	21.3

Деление каждой строки на эти коэффициенты дает:

нормированные иски (£)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	513	287	87	24
	1990	598	332	100	
	1991	645	366		
	1992	694			

Суммы по диагоналям и по столбцам для этой таблицы равны:

Диагональ	513	885	1064	1184
Столбец	2450	985	187	24

Таблица, приведенная ниже, показывает вычисленные значения параметров. Подробные вычисления таковы:

$r_3 = 24/1184 = 0.0203 \qquad \lambda_{92} = 1184$
$r_2 = 187/2270 = 0.0824 \qquad \lambda_{91} = 1064/0.9797 = 1086$
$r_1 = 985/3256 = 0.3025 \qquad \lambda_{90} = 885/0.8973 = 986$
$r_0 = 2450/4118 = 0.5949 \qquad \lambda_{89} = 513/0.5948 = 862$

(В этом случае r_j-ые в сумме не дают 1, так как вычисления приближенные.)

Будущие коэффициенты λ:
$\lambda_{93} = 1.10 \times 1184 = 1302$
$\lambda_{94} = 1.10 \times 1302 = 1432$
$\lambda_{95} = 1.10 \times 1432 = 1575$

		промежуточная сумма
r_0	0.5949	0.0000
r_1	0.3025	0.5948
r_2	0.0824	0.8973
r_3	0.0203	0.9797
	1.0001	

		промежуточная сумма
λ_{89}	862	4118
λ_{90}	986	3256
λ_{91}	1086	2270
λ_{92}	1184	1184
λ_{93}	1302	
λ_{94}	1432	
λ_{95}	1575	

Используя эти значения нормирующих множителей, мы можем дополнить таблицу:

выплаты по искам, сделанные в течение года (£000)		год развития			
		0	1	2	3
год событий	1989	8975	5030	1525	425
	1990	12555	6975	2090	555
	1991	12120	6885	2017	547
	1992	14790	8389	2513	681

Величина неоплаченных исков равна: $555 + 2017 + \ldots + 681 = 14702$, то есть £14702.

Решение 14.10

Предполагаемый коэффициент инфляции исков для 1989/90 может быть найден из соотношения между λ:

$$\frac{\lambda_{90}}{\lambda_{89}} = \frac{986}{862} = 1.144, \qquad \text{то есть } 14.4\%$$

Глава 15

Основы теории–Треугольники Развития

АНАЛИЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ РАЗВИТИЯ

§1 Исходные данные

1.1 Истоки треугольников развития

Треугольники развития (задержки) обычно возникают в тех типах страхования (в частности, в страховании, не касающемся жизни), где после ущерба и до того момента, как будет определен полный объем исков, которые необходимо оплатить, должно пройти некоторое время. Важно отметить, что эти иски приписываются тому году, в котором был оформлен полис.

Страховой компании необходимо знать, сколько она обязана выплатить по искам, чтобы можно было вычислить, какой капитал для этого требуется. Однако, до того, как станут известны точные исковые суммы, может пройти много лет. Существует множество причин задержек определения окончательных сумм. Задержка может произойти до уведомления об иске и/или между уведомлением и конечным расчетом.

Очевидно, что, хотя компания не знает точных данных по величине исков для каждого года, она должна попытаться оценить эти данные настолько достоверно и точно, насколько это возможно.

1.2 Представление информации по искам

Существует несколько способов представления исковых данных, которые акцентируют внимание на различных аспектах информации.

Здесь они (данные) будут представлены как треугольник, что является наиболее распространенным методом. Год, в котором дело было зарегистрировано и страховщик взял на себя риск, называется годом событий. Количество лет, прошедших до того, как будет сделана выплата, называется задержкой или периодом развития. Исковые данные делятся по годам событий и годам развития. Следующая таблица является примером взаимосвязи между годом событий и годом развития. В некоторых видах страхования может оказаться необходимым рассмотрение исков по месяцам или сезонам, но основной принцип остается прежним.

Пример 15.1

Выплаты по искам с нарастающим итогом

Год	**Год развития**				
событий	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1992	786	1410	2216	2440	2519
1993	904	1575	2515	2796	
1994	995	1814	2880		
1995	1220	2124			
1996	1182				

Рис.1

Здесь представлены общие суммарные величины, выплаченные к концу каждого года развития. Они были собраны после окончания 1996 года событий. Для этого года заявлены только выплаты с задержкой 0. Для 1995 года — выплаты с задержками 0 и 1, и т.д.

Задача состоит в том, чтобы определить, какие еще суммы должны быть выплачены по указанным годам событий. Для 1996 года это можно осуществить, рассмотрев предыдущие годы событий. Если совокупные выплаты растут сходным образом, то можно сказать, что за 4 года они, вероятно, составят примерно 3788. Это число получено с помощью предположения, что 1996 год событий похож на 1992 по принципу осуществления выплат, и оценки выплат с нарастающим итогом к концу года развития 4:

$$1182 \times \frac{2519}{786} = 3788$$

Это не всегда "лучшая" оценка, но она дает возможность заполнить нижний треугольник рисунка 1, сравнивая представленные данные с прошлым опытом. Этот процесс является главным предметом изучения данной главы.

§2 Прогнозирование с помощью коэффициентов развития

2.1 Принцип развития

Основное предположение, сделанное для оценки неоплаченных исков, относится к принципу развития. Простейшее предположение заключается в том, что выплаты осуществляются сходным образом для каждого года событий. Пропорциональные приросты известных совокупных выплат от одного года развития к другому затем могут использоваться для вычисления ожидаемых совокупных выплат для будущих лет развития.

Однако, как показано в примере, описанном ниже, есть множество вариантов того, как этот коэффициент можно использовать для прогнозирования будущих исков.

Замечание: Коэффициент, применяемый для прогнозирования будущих исков, известен как коэффициент развития.

Пример 15.2

Пропорциональные приросты совокупных выплат

Год событий	**Год развития** 0		**1**		**2**		**3**		**4**
1992	786	*1.794*	1410	*1.572*	2216	*1.101*	2440	*1.032*	2519
1993	904	*1.742*	1575	*1.597*	2515	*1.112*	2796		
1994	995	*1.7823*	1814	*1.588*	2880				
1995	1220	*1.756*	2124						
1996	1182								

Рис.2

Коэффициенты прироста совокупных выплат для каждого года событий с 1992 по 1995 различаются от года развития 0 к году развития 1. Нелегко решить, какой из коэффициентов является "правильным", например, при прогнозировании выплат для года событий 1993. Для безопасной оценки, скорее всего, лучше взять больший коэффициент, то есть 1.823.

Однако, некоторые виды среднего значения коэффициентов могут оказаться более подходящими. Можно использовать простое среднее арифметическое:

$$\frac{1.794 + 1.742 + 1.823 + 1.756}{4} = 1.779$$

Основное неудобство такого усреднения состоит в том, что оно не принимает в расчет тот факт, что те годы, в которые произошло больше исков, дают большую информацию. Поэтому, чем больше величина исков, тем большую значимость она должна иметь в коэффициенте. Это предполагает использование взвешенных средних, и обычно в качестве весов выбираются значения исков с накопительным итогом.

Год событий	Коэффициент	Вес
1992	1.794	786
1993	1.742	904
1994	1.823	995
1995	1.756	1220

$$\frac{1.794 \times 786 + 1.742 \times 904 + 1.823 \times 995 + 1.756 \times 1220}{786 + 904 + 995 + 1220} = 1.777$$

Этот метод оценки коэффициентов, описывающих принцип развития, называется цепочно-лестничный метод. Самый эффективный способ вычисления таких коэффициентов приводится в следующем разделе.

2.2 Техника цепочно-лестничного метода

Этот способ вычисления коэффициентов развития продемонстрирован в следующем примере:

Пример 15.3 Напомним, что коэффициент для года событий 1992 был вычислен так:

$$1.794 = \frac{1410}{786}$$

Коэффициенты для остальных лет событий вычислялись похожим образом. Поэтому, числитель равенства, приведенного в конце раздела 2.1, может быть записан иначе:

$$\frac{1410}{786} \times 786 + \frac{1575}{904} \times 904 + \frac{1814}{995} \times 995 + \frac{2124}{1220} \times 1220 = 1410 + 1575 + 1814 + 2142$$

Поэтому, коэффициент развития может быть вычислен с использованием исков с нарастающим итогом в годы развития 0 и 1:

$$\frac{1410 + 1575 + 1814 + 2142}{786 + 904 + 995 + 1220}$$

Название этого метода, по-видимому, происходит от ступенчатых операций, которые скрепляют по цепочке годы развития. Коэффициенты развития в технике цепочно-лестничного метода для каждого года могут быть найдены сложением соответствующего количества членов. Это проиллюстрировано ниже:

Развитие

Год событий	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1992	786	1410	2216	2440	2519
1993	904	1575	2515	2796	
1994	995	1814	2880		
1995	1220	2124			
1996	1182				

$$\frac{6941}{3905} = 1.777 \qquad \frac{7611}{4799} = 1.586 \qquad \frac{5236}{4731} = 1.107 \qquad \frac{2519}{2440}\ 1.032$$

Рис.3

Для каждого года мы вычислили коэффициенты развития. Теперь можно спрогнозировать будущее развитие для каждого года событий.

Для года событий 1996, прогнозы исков с нарастающим итогом такие:

$$1182 \times 1.777 = 2100$$
$$1182 \times 1.777 \times 1.586 = 3331$$
$$1182 \times 1.777 \times 1.586 \times 1.107 = 3688$$
$$1182 \times 1.777 \times 1.586 \times 1.107 \times 1.032 = 3806$$

Для года событий 1995, начинаем со значения 2142 для года развития 1 и используем только последние 3 звена коэффициентов.

Прогнозируемые выплаты по искам с нарастающим итогом

Год событий	**Развитие 0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1992					
1993					2885
1994				3188	3290
1995			3397	3761	3881
1996		2100	3331	3688	3806

Рис.4

Заметим, что нельзя сделать прогноз для первого года событий, потому что невозможно спрогнозировать, что произойдет после наивысшего года развития.

Резервы, которые необходимо иметь к концу 1996 года — это сумма по всем годам событий, для которых прогноз может быть сделан по разнице между совокупными выплатами к концу года развития 4 и известными значениями в треугольнике развития для этого года событий.

Тогда из рисунков 1 и 4, определим резервы к концу 1996 года:

$$(2885 - 2796) + (3290 - 2880) + (3881 - 2142) + (3806 - 1182) = 4862$$

Заметим, что к выплатам в различные годы не применялся учетный процент.

2.3 Модель проверки

Техника цепочно-лестничного метода главным образом используется для оценки развития выплат по искам с нарастающим итогом. Однако, полезно проверить, будет ли такая оценка в полной мере соответствовать исковым данным, которые уже были получены. Для иллюстрации этой проверки, возьмем данные из рисунка 2.

Чтобы проверить, насколько хорошо выполнена техника цепочно-лестничного метода, в примере, описанном ниже будут рассмотрены иски в 0-ой год развития для лет событий 1992-1995.

Пример 15.4 Пусть реальные иски в год развития 0 равны:

1992	786
1993	904
1994	995
1995	1220

Коэффициенты развития, вычисленные в разделе 2.2 — 1.777, 1.586, 1.107 и 1.032. С их помощью может быть получена оценка выплат по искам с нарастающим итогом для каждого года развития. Наша задача — сравнить эти значения с реальными данными из рисунка 2.

Следующая таблица дает "установленные" значения, полученные с использованием цепочно-лестничного метода:

Установленные выплаты по искам с нарастающим итогом

Год	**Развитие**				
событий	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1992	786	1397	2215	2452	2531
1993	904	1606	2548	2820	
1994	995	1768	2804		
1995	1220	2168			

Рис.5

Теперь можно сравнить рисунки 5 и 1. Однако, предпочтительней будет проверить приросты выплат по искам с нарастающим итогом, рассмотрев модель детально. Это дает более точную проверку.

Приросты совокупных выплат для лет развития (как реальные, так и установленные) приводятся на рисунке 6.

		Развитие				
		0	**1**	**2**	**3**	**4**
1992	Реальные	786	624	806	224	79
	Установленные	786	611	818	237	79
	Ошибка	-	*13*	*-12*	*-13*	*0*
1993	Реальные	904	671	940	281	
	Установленные	904	702	942	272	
	Ошибка	-	*-31*	*-2*	*9*	
1994	Реальные	995	819	1066		
	Установленные	995	773	1036		
	Ошибка	-	*46*	*30*		
1994	Реальные	1220	922			
	Установленные	1220	948			
	Ошибка	-	*-26*			

Рис.6

Настолько серьезных ошибок, чтобы предположить, что данная модель неточная, нет.

Однако, несмотря на эту проверку, вполне вероятно, что полученная оценка может стать недостаточным ориентиром в будущем.

2.4 Другие методы получения коэффициентов развития

В свете дополнительной информации, можно скорректировать вычисленные коэффициенты развития. Этот метод, который использует прошлую информацию, может получать и точное приближение, но, более часто, нуждается в коррекции. Существует множество оснований преобразовывать коэффициенты развития. Например, изменения в методах бухгалтерского учета или в управлении исками могут изменить скорость, с которой регулируются иски. Это могло бы послужить началом для изменения коэффициентов развития и могло бы ощутимо отразиться в оценке будущих исковых выплат. Коэффициенты развития, найденные напрямую из имеющихся данных или установленные с помощью компетентного человека, всегда используются в одном и том же способе оценки неоплаченных исковых выплат.

Кроме того, цепочно-лестничный метод лучше применять для треугольника нетто-убыточности, чем для совокупных выплат, где нетто-убыточность для данного года развития и года событий — это выплаты, накопленные к этому моменту, включая год развития, деленные на общий премиальный доход, соответствующий данному году событий.

2.5 Обсуждение предположений, лежащих в основе цепочно-лестничного метода

Цепочно-лестничный метод базируется на предположении, что выплаты для каждого года событий развиваются одинаково. Иными словами, одинаковые коэффициенты развития используются для прогноза неоплаченных исков по каждому году событий. Преобразования соотношения, в котором возникают иски, может быть объединено под общим названием: "поправка вручную" для коэффициентов развития.

Конечное предположение делается, когда цепочно-лестничный метод используется в соответствии с инфляцией. Предполагается, что будущая инфляция будет равна взвешенному среднему значению инфляции прошлых лет. Считается, что инфляция исков оказывает значительное влияние на формирование коэффициентов прогнозирования. Такое предположение может оказаться нереалистичным, и, чтобы выяснить это, оно будет рассмотрено более детально в следующем разделе. Когда речь идет о инфляции, важно помнить, что имеется ввиду инфляция исков. Поэтому, хотя стандартный способ измерения общей инфляции и может быть использован, уровень инфляции, приходящийся на иски, может отличаться довольно сильно. Например, на размер исковых выплат может повлиять судебное решение. Раздел 3 более детально освещает вопросы, связанные с этим.

§3 Поправка на инфляцию

3.1 Цепочно-лестничный метод с поправкой на инфляцию

Работа с инфляцией прошлых лет

Инфляция исков оказывает влияние на выплаты, описанные в треугольнике развития в соответствии с календарными годами. В рассматриваемой модели предполагается, что инфляция имеет одинаковый годовой уровень для всех исков, касающихся определенного года выплат. Каждый календарный год выплат соотносится с диагональю треугольника. Для иллюстрации, посмотрим снова на рисунок 1.

Когда нам нужна поправка на инфляцию, лучше рассматривать выплаты для каждого календарного года, чем общие накопленные суммы. Для начала надо вычислить возрастающие выплаты из совокупных, выделением их вдоль каждой строки. Та же операция была выполнена в разделе 2.2 и следующий рисунок можно сравнить с рисунком 6.

Пример 15.5 Рисунок 7 показывает возрастающие (но не предусматривающие накопления) исковые выплаты для данных из рисунка 1.

Возрастающие выплаты по искам в денежном выражении

Год	**Год развития**				
событий	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1992	786	624	806	224	79
1993	904	671	940	281	
1994	995	819	1066		
1995	1220	922			
1996	1182				

Рис.7

Предположим, что годовой уровень инфляции исковых величин за 12 месяцев соотносится со стоимостью в середине данного года следующим образом:

1993	5.1%
1994	6.4%
1995	7.3%
1996	5.4%

Для простоты также предполагаем, что выплаты осуществляются в середине каждого календарного года. Теперь можно вычислить индекс, чтобы преобразовать все выплаты к денежным величинам середины 1996 года.

Далее можно скорректировать выплаты, описанные на рисунке 7, с помощью коэффициентов инфляции. рисунок 8 показывает данные по возрастающим выплатам с поправкой на инфляцию.

Возрастающие выплаты по искам в денежных величинах середины 1996 года

Год	Развитие				
событий	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1992	994	751	912	236	79
1993	1088	759	991	281	
1994	1125	863	1066		
1995	1286	922			
1996	1182				

Рис.8

Мы имеем простую форму таблицы выплат по искам с нарастающим итогом с поправкой на инфляцию, к которой может быть применен цепочно-лестничный метод.

Прогнозы выплат по искам с нарастающим итогом в денежных величинах середины 1996 года даны на рисунке 9.

Прогнозы совокупных выплат в денежных величинах середины 1996 года

Год	Год развития			
событий	**1**	**2**	**3**	**4**
1993				3203
1994			3341	3431
1995		3383	3701	3801
1996	2048	3138	3433	3526

Рис.9

Работа с будущей инфляцией

Однако, прогнозы совокупных выплат не принимают в расчет будущую инфляцию. Чтобы предсказать реальные величины, необходим предполагаемый уровень будущей инфляции. Опять же, лучше преобразовывать не предусматривающие накопления данные, а не общие накопленные суммы, корректируя их с учетом будущей инфляции аналогичным предыдущему разделу образом.

Пример 15.6 Применение годового уровня инфляции в 10% (на 30-ое июня) к данным рисунка 9 дает следующие исправленные прогнозы выплат по искам с нарастающим итогом.

Прогнозы совокупных выплат в денежном выражении

Год событий	**Год развития 1**	**2**	**3**	**4**
1993				2888
1994			3196	3305
1995		3435	3820	3953
1996	2135	3454	3847	3983

Рис.10

Резервы, которые необходимо иметь к концу 1996 года, составляют 5129.

§4 Техника метода интервалов

Другая модель, позволяющая учитывать инфляцию, известна как метод интервалов. Для этого метода, возрастающие выплаты по искам в денежном выражении, предположительно, следуют тому же образцу, что и в цепочно-лестничном методе с поправкой на инфляцию, то есть существует постоянная доля исков (в реальном исчислении), выплачиваемая в каждый год развития. Предположив для удобства, что иски оплачиваются полностью к концу года развития 4, общую модель для этого метода можно выразить алгебраически следующим образом:

Год событий	**Год развития** 0	1	2	3	4
1992	$U_0r_0\lambda_0$	$U_0r_1\lambda_1$	$U_0r_2\lambda_2$	$U_0r_3\lambda_3$	$U_0r_4\lambda_4$
1993	$U_1r_0\lambda_1$	$U_1r_1\lambda_2$	$U_1r_2\lambda_3$	$U_1r_3\lambda_4$	
1994	$U_2r_0\lambda_2$	$U_2r_1\lambda_3$	$U_2r_2\lambda_4$		
1995	$U_3r_0\lambda_3$	$U_3r_1\lambda_4$			
1996	$U_4r_0\lambda_4$				

Рис.11

где

λ_{i+j} — коэффициент инфляции, относящийся ко всем выплатам, соответствующим году событий i и году развития j.

r_j — доля общих исковых выплат, соответствующих любому году событий, которая была бы выплачена в год развития j при постоянном индексе инфляции, то есть при ее отсутствии. Это предполагает, что $r_0 + \ldots + r_4 = 1$, так как иски предполагаются полностью оплаченными к концу года развития 4. (то есть это коэффициент развития)

U_i — общая величина исковых выплат, соответствующих году событий i, которая была бы выплачена при постоянном и равном 1 индексе инфляции. (Альтернативное определение: U_i — общая величина исковых выплат, соответствующих году событий i, представленная в денежном выражении года, в котором индекс инфляции равен 1 (на момент 30-ого июня).)

Разумеется, величина, которая должна быть оценена, — это U_i.

Чтобы спрогнозировать данные по будущим выплатам, для выведения λ_{i+j}, r_j и U_i используется прошлая информация (приравниваем значение из каждой ячейки треугольника к алгебраическому выражению для этой ячейки). Очевидно, что это нельзя осуществить, пока неизвестно U_i, так как для того, чтобы исключить U_i из уравнения требуется ее приближенное значение.

Простейший способ — это предположить, что U_i пропорционально количеству исков, соответствующему году событий i (обозначаемому N_i). Иными словами, это подразумевает, что существует параметр c_1, такой что $U_i = c_1 N_i$ для всех i. Конечно, количество исков также будет неизвестно, но, как правило, проще оценить ожидаемое число исков, чем их общую величину.

В сущности, наиболее общий подход, используемый в методе интервалов, состоит в предположении, что окончательное число исков может быть оценено, как постоянная доля числа исков, оплаченных в год развития 0. Другими словами, это подразумевает, что существует параметр c_2, такой что $N_i = c_2 n_i$ для всех i, где n_i — количество исков в год рассмотрения 0 для года событий i.

Объединение этой информации с приближением для суммарных величин исков показывает, что существует параметр c, такой что $U_i = c n_i$ для всех i.

Затем можно разделить все не предусматривающие накопления (возрастающие) величины исков на количество исков, относящихся к году развития 0, и заменить переменные U_i на c, с которым работать гораздо легче, так как оно постоянно.

Алгебраическая модель может быть описана, как показано на рисунке 12.

Год		Год развития			
событий	0	1	2	3	4
1992	$r_0\lambda_0$	$r_1\lambda_1$	$r_2\lambda_2$	$r_3\lambda_3$	$r_4\lambda_4$
1993	$r_0\lambda_1$	$r_1\lambda_2$	$r_2\lambda_3$	$r_3\lambda_4$	
1994	$r_0\lambda_2$	$r_1\lambda_3$	$r_2\lambda_4$		
1995	$r_0\lambda_3$	$r_1\lambda_4$			
1996	$r_0\lambda_4$				

Рис.12

Затем применим технику метода интервалов к суммам по диагоналям и по столбцам.

Суммы по диагоналям:

$r_0\lambda_0$
$(r_0 + r_1)\lambda_1$
$(r_0 + r_1 + r_2)\lambda_2$
$(r_0 + r_1 + r_2 + r_3)\lambda_3$
$(r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4)\lambda_4$

Суммы по столбцам:

$r_0(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$
$r_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$
$r_2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$
$r_3(\lambda_3 + \lambda_4)$
$r_4\lambda_4$

Учитывая тот факт, что $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1$, последняя диагональная сумма равна λ_4. Она может быть оценена известными данными.

Теперь посмотрим на сумму последнего столбца.

λ_4 уже оценено и может использоваться для оценки r_4.

Далее вернемся к предпоследней диагональной сумме.

Так как $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1$,

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = 1 - r_4$$

r_4 уже было оценено, так что эти данные можно использовать для оценки λ_3.

Теперь переходим к сумме по следующему столбцу и оцениваем r_3, и т.д.

Получив оценку параметрических значений, попытаемся спрогнозировать не произведенные выплаты. Иными словами, нам надо получить прогноз для нижнего треугольника. К сожалению, этих оценок параметров недостаточно для такого прогноза. Необходимы значения λ_5, λ_6, λ_7, λ_8.

Модель треугольника не произведенных выплат может быть описана следующим образом:

Год	**Год развития**			
событий	**1**	**2**	**3**	**4**
1993				$r_4\lambda_5$
1994			$r_3\lambda_5$	$r_4\lambda_6$
1995		$r_2\lambda_5$	$r_3\lambda_6$	$r_4\lambda_7$
1996	$r_1\lambda_5$	$r_2\lambda_6$	$r_3\lambda_7$	$r_4\lambda_8$

Рис.13

Если бы можно было получить оценки для будущих исков из внутренних данных, сейчас можно было бы использовать их. В других обстоятельствах, все, что можно сделать, — это обратить внимание на шаблон для λ и попытаться спрогнозировать его. Оценочные значения λ могут быть последовательно преобразованы в данные по инфляции исков, так как, возможно, по ним легче предположить будущие величины.

Полные вычисления описаны в следующем примере.

Пример 15.7 Снова обратимся к данным рисунка 7. Предположим, что число исков, относящихся к году развития 0, для каждого года событий будут следующими:

1992	351
1993	387
1994	405
1995	452
1996	430

Деление данных из рисунка 7 на соответствующие количества исков дает:

Абсолютная оценка прироста величины иска

Год событий	**Развитие**				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
1992	2.239	1.778	2.296	0.638	0.225
1993	2.336	1.734	2.429	0.726	
1994	2.457	2.022	2.632		
1995	2.699	2.040			
1996	2.749				

Рис.14

К этим данным можно применить метод интервалов.

Суммы по диагоналям:

2.239
4.114
6.487
7.788
8.372

Суммы по столбцам:

12.480
7.574
7.357
1.364
0.225

Из последней диагональной суммы:

$$\hat{\lambda}_4 = 8.372$$

Заметим, что значок над λ обозначает оценку.

Из суммы по последнему столбцу:

$$\hat{r}_4 = \frac{0.225}{\hat{\lambda}_4} = 0.027$$

Из предпоследней диагональной суммы:

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{7.788}{1 - \hat{r}_4} = 8.004$$

Из суммы предпоследнего столбца:

$$\hat{r}_3 = \frac{1.364}{8.004 + 8.372} = 0.083$$

и т.д. Вспомним, что $r_0 + r_1 + r_2 = 1 - r_3 - r_4$. Дальнейшие вычисления приводятся ниже:

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{6.487}{1 - 0.083 - 0.027} = 7.289$$

$$\hat{r}_2 = \frac{7.357}{7.289 + 8.004 + 8.372} = 0.311$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{4.114}{1 - 0.311 - 0.083 - 0.027} = 7.105$$

$$\hat{r}_1 = \frac{7.574}{7.105 + 7.289 + 8.004 + 8.372} = 0.246$$

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{2.239}{1 - 0.246 - 0.311 - 0.083 - 0.027} = 6.724$$

$$\hat{r}_0 = \frac{12.480}{6.724 + 7.105 + 7.289 + 8.004 + 8.372} = 0.333$$

Полезно поверить, чтобы $\hat{r}_0 + \hat{r}_1 + \hat{r}_2 + \hat{r}_3 + \hat{r}_4 = 1$

В некоторых случаях сумма не равняется строго 1; это связано с небольшими ошибками округления, которые возникают, если вычисления проводит не компьютер. Полученные значения будут использоваться для оценки неоплаченных исков. И в данном случае, ошибки округления не будут играть значимую роль.

Теперь можно использовать оценки параметров, чтобы получить таблицу "установленных" значений, то есть значений исков, использующих оценочные значения параметров.

Рисунок 15 показывает установленные значения для данной модели до умножения на количества исков.

Абсолютная оценка прироста величины иска

Год	**Развитие**				
событий	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1992	2.239	1.748	2.267	0.664	0.226
1993	2.366	1.793	2.489	0.695	
1994	2.427	1.969	2.604		
1995	2.665	2.060			
1996	2.788				

Рис.15

Можно сравнить рисунки 15 и 14, как было сделано в разделе 2.3, чтобы оценить насколько верно устанавливаются данные с помощью такой модели.

Оценки параметров, выведенные в предыдущем примере:

$$\hat{\lambda}_0 = 6.724$$
$$\hat{\lambda}_1 = 7.105$$
$$\hat{\lambda}_2 = 7.289$$
$$\hat{\lambda}_3 = 8.004$$
$$\hat{\lambda}_4 = 8.372$$

Эти величины можно представить в виде множества годовых коэффициентов инфляции исков и последовательно расширить его, чтобы предсказать оставшиеся члены, до $\hat{\lambda}_8$.

Коэффициенты инфляции могут быть выведены с помощью нахождения последовательных соотношений параметров.

$\hat{\lambda}_0$	6.724	
		1.057
$\hat{\lambda}_1$	7.104	
		1.026
$\hat{\lambda}_2$	7.289	
		1.098
$\hat{\lambda}_3$	8.004	
		1.046
$\hat{\lambda}_4$	8.372	

Таким образом, исковая инфляция варьируется от 2.6% до 9.8%. Предполагаемая будущая инфляция — 5.5%, что приблизительно является средним значением оцененных коэффициентов.

После последовательного умножения на 1.005, получаем прогнозы для требуемых параметров:

$\hat{\lambda}_4$	8.372
$\hat{\lambda}_5$	8.332
$\hat{\lambda}_6$	9.318
$\hat{\lambda}_7$	9.831
$\hat{\lambda}_8$	10.371

Прогнозы для этих параметров могут использоваться для предсказания неоплаченных исков.

Рисунок 13 представляет собой модель неоплаченных исков. Оценки значений параметров:

$$\hat{r}_1 = 0.246$$
$$\hat{r}_2 = 0.311$$
$$\hat{r}_3 = 0.083$$
$$\hat{r}_4 = 0.027$$

Это дает следующие оценки:

Абсолютная оценка прироста величины иска

Год событий	Развитие 1	2	3	4
1993				0.238
1994			0.733	0.252
1995		2.747	0.773	0.265
1996	2.173	2.898	0.816	0.280

Рис.16

Наконец, умножение на количества исков, полученные выше, дает прогнозы для не произведенных выплат:

Возрастающие исковые выплаты в денежном выражении

Год событий	Развитие 1	2	3	4
1993				92
1994			297	102
1995		1242	349	120
1996	934	1246	351	120

Рис.17

Резервы, которые необходимо иметь к концу 1996, равны 4853.

Часть IX

Глава 16

NCD СИСТЕМЫ

Цели главы

Перестрахование

К концу данной главы вы будете уметь:

- описывать, как работает NCD схема
- определять критерии застрахованного лица при подаче исков
- рассчитывать вероятности, относящиеся к движению средств между уровнями
- составлять ожидаемое число застрахованных лиц на каждом уровне по горизонту прогнозирования с конечным и бесконечным временем

§1 Введение

Некоторые классы общего страхования применяют практическую рейтинговую систему, где страховой взнос, уплачиваемый индивидуальным застрахованным лицом, корректируется таким образом, чтобы отразить практику его предыдущих исков по этому полису, т.е. застрахованное лицо, которое оказалось более дорогостоящим для страховщика на конец страхового периода, платит более высокий страховой взнос. Общая обоснованная практика расценок (basic rationale underlying experience rating) такова, что для типов страхования, когда прошлые иски дают хорошее указание на правдоподобную сумму будущих исков (на индивидуальной основе), эту информацию принимают во внимание при определении страхового взноса. Это позволяет страховщику применять более точную ставку страхового взноса для каждого индивидуума.

Существует несколько методов применения ставок с учетом прошлого опыта. Метод, который мы будет изучать в данном курсе, называется система скидок при отсутствии исков, которая широко используется при страховании личного транспорта в Великобритании. Она также применяется в медицинском страховании и в некоторых видах страхования домашнего имущества.

Основная часть начинается с некоторых базовых сведений по NCD-системам, в ней используются матрицы для получения и решения устойчивых решений системы скидок. Затем рассматриваются идеи неоднородности портфеля и нежелание застрахованного лица подать иск, а заканчивается примером, иллюстрирующим идеи.

§2 Как используют NCD системы

2.1 NCD правила

Рассмотрим, как работает простая NCD система. Как говорит за себя само название, система скидок по отсутствию исков в общем случае предоставляет скидки на страховые взносы тем застрахованным лицам, которые не подают иски. Система основана на определенных правилах. Вот пример свода правил для страхования личного автотранспорта в Великобритании

<u>NCD правила</u> (Схема А)

Есть 5 уровней скидок - 0%, 30%, 40%, 50% и 60%. В конце каждого года страхования застрахованные лица меняют уровень по следующим правилам:

1. Застрахованное лицо, не подавшее исков в течении года действия страховки переходит на более высокий уровень скидок (или остается на 60% уровне).

2. Застрахованное лицо, которое подало 1 или более исков за годовую страховку возвращается на уровень скидок 0% (или остается на 0% уровне).

Возможно много вариантов. Например, в правилах можно уточнить, что застрахованное лицо отступает на один или два уровня после подачи иска, или это движение может зависеть от числа поданных исков.

Вопрос для самоподготовки 16.1. Автострахование проводится по NCD системе (Схема B) с уровнями скидок 0 %, 30 % , 40%, 50% и 60%. Правила следующие:

1. В конце годовой страховки, если не подано ни одного иска, застрахованное лицо переходит на следующий уровень (или остается на уровне с максимальной скидкой).
2. Если за годовой период страхования был подан ровно один иск, в конце года застрахованное лицо спускается на два уровня ниже (или на уровень нулевой скидки).
3. Если за период страхования было подано больше одного иска, в конце года застрахованное лицо возвращается на уровень нулевой скидки.

Автомобилист впервые оформил полис автострахования 1 января 1982 г. и подавал иски 15 августа 1983 г., 3 февраля 1987 г., 17 сентября 1987 и 14 ноября 1992 г. Полная страховка на 1993 г. составляет £750. Чему равна цена полиса на 1993 г. для данного автомобилиста?

§3 Иски

3.1 Частота исков

Распределение числа исков, поданных каждым застрахованным лицом можно выразить в терминах частоты исков.

Частота исков Основная частота исков для группы страховых полисов - это среднее число исков на полис.

$$\text{Основная частота исков} = \frac{\text{Число исков}}{\text{Среднее число полисов}}$$

Ожидаемая частота для группы страховых полисов - ожидаемое число исков на полис.

Пример 16.1 За последние 5 лет, обычная страховая компания оплатила 7,000 исков молодых водителей со старыми автомобилями в Лондоне. Среднее число таких водителей, застрахованных в этот период, было 5,000. Вычислите годовую частоту исков для этой категории водителей.

Решение (Основная) частота исков за 5-летний период 7,000/5,000 - 1.4, что соответствует годовой частоте исков 1.4/ 5 = 0.28 что есть 28 % в год.

Число исков, поданных по индивидуальной страховке можно моделировать, используя распределение Пуассона или отрицательное биномиальное распределение.

Вопрос для самоподготовки 16.2. Ожидаемая годовая частота исков для портфеля, содержащем 2 000 годовых страховок автомобилистов равна 0. 15, количества исков, поданных индивидуальным застрахованным лицом независимы и подчиняются распределению Пуассона. Найдите ожидаемое число застрахованных лиц, которые подадут 0,1,2,3 или более исков за данный год.

3.2 Решение, подавать ли иск

Вычислим вероятность, используя простые критерии, что застрахованное лицо подаст иск.

Дополнительное преимущество страховщика, применяющего NCD систему, заключается в том, что они "отговаривают"застрахованное лицо подавать мелкие иски, поскольку при некоторых обстоятельствах застрахованному лицу лучше не подавать иск. Один простой критерий, который можно использовать при решении вопроса, подавать ли иск:

Критерий подачи иска

Застрахованное лицо должно подавать иск, только если ущерб больше, чем увеличение будущего страхового взноса.

Отметим, что при подаче иска возрастают страховые взносы в течение нескольких будущих лет, а не только на один следующий год. Поэтому решение будет зависеть от горизонта прогнозирования застрахованного лица. Применяя этот критерий, вы обычно игнорируете тот факт, что можно получить процент на полученные деньги.

Пример 16.2 Автомобилист, чей страховщик использует NCD систему по схеме A попал в аварию. Если у него в настоящее время нет скидки, и он не собирается подавать иски в течение нескольких последующих лет, то каков должен быть общий ущерб (в процентах от полной страховки), чтобы стоило подавать иск, если автомобилист использует двухлетний горизонт прогнозирования при принятии этого решения?

Решение Вычислим общие издержки по нижеследующей таблице в случаях, если автомобилист подает или не подает иск. Пусть P обозначает общую страховку, а C - сумму ущерба. Если горизонт прогнозирования автомобилиста 2 года, то стоит подавать иск тогда и только тогда, когда

$$P + 0.7P < 0.7P + 0.6P + C \Leftrightarrow C > 0.4P$$

Следовательно, имеет смысл подавать иск, если сумма ущерба превышает 40% полной страховки.

Год	Подавать иск	Не подавать иск
Текущий	0	C
следующий	P	0.7P
последующий	0.7P	0.6P

Вопрос для самоподготовки 16.3. Каков критический уровень ущерба, если горизонт прогнозирования автомобилиста бесконечный?

Некоторые полисы гарантируют страхование эксцедента убытка, что означает, что застрахованный платит первые 100£(например) при подаче каждого иска.

Вопрос для самоподготовки 16.4. Полная страховка составляет 1,000 £. Найдите критические значения суммы ущерба (по схеме А), при которых застрахованному лицу будет выгодно подавать иск при любом уровне скидок, предполагая, что у него бесконечный горизонт прогнозирования и он не собирается подавать иски в последующие несколько лет. Как этот ответ будет отличаться от случая, когда полис гарантируют страхование эксцедента убытка с экцедентом £100.

§4 NCD прогнозирование

4.1 Вероятность перехода

Правила NCD системы можно суммировать в матрице переходов, которая показывает вероятности движений между уровнями. Если p_0 означает вероятность того, что индивидуальное застрахованное лицо не подает иски ни в какой год, то матрица перехода по Схеме А следующая:

		Новый уровень скидок				
		0%	30%	40%	50%	60%
Предыдущий уровень скидок	0 %	$1 - p_0$	p_0	0	0	0
	30%	$1 - p_0$	0	p_0	0	0
	40%	$1 - p_0$	0	0	p_0	0
	50%	$1 - p_0$	0	0	0	p_0
	60%	$1 - p_0$	0	0	0	p_0

Примечание: Сумма вероятностей в каждом ряду равна 1.

Вопрос для самоподготовки 16.5. Если p_0 обозначает вероятность не подавать иски в течение года, а p_1 - вероятность подачи ровно одного иска, составьте матрицу перехода для NCD системы по схеме B.

Вопрос для самоподготовки 16.6. Составьте матрицу перехода для NCD системы по схеме B, если количества исков, поданных индивидуальным застрахованным лицом предполагаются независимыми и подчиняются отрицательному биномиальному распределению со средним 0.2 и стандартным отклонением 0.5.

4.2 Прогнозирование при конечном горизонте прогнозирования

Матрицу перехода можно использовать для решения различного рода задач.

Это прямое вычисление, чтобы найти ожидаемые количества на каждом уровне в последующие годы. Например, $n_3$0, ожидаемое количество на уровне 30% в «следующем» поколении можно посчитать следующим образом

$$n_{30}^{*} = p_{0.30}n_0 + p_{30.30}n_{30} + p_{40.30}n_{40} + p_{50.30}n_{50} + p_{60.30}n_{60}$$

где n_i обозначает ожидаемые количества на уровне скидок i в текущем поколении и $p_{i,j}$ - вероятность перемещения с уровня i на уровень j.

Пример 16.3 Страховщик, применяющий схему A оформил только что 10,000 полисов автострахования лицам с идентичными рисками. При условии что иски подаются независимо и вероятность того, что любое застрахованное лицо подаст иск в любой из данных годов 0,2, найти ожидаемое значение на каждом уровне скидок в конце второго года.

Решение Матрица перехода имеет вид

		Новый уровень скидок				
		0%	30%	40%	50%	60%
Предыдущий уровень скидок	0 %	0.2	0.8	0	0	0
	30%	0.2	0	0.8	0	0
	40%	0.2	0	0	0.8	0
	50%	0.2	0	0	0	0.8
	60%	0.2	0	0	0	0.8

Перемещения в конце первого года:

Год 1

		Новый уровень скидок				
		0%	30%	40%	50%	60%
0 %	10000	2000	8000	0	0	0
30%	0	0	0	0	0	0
40%	0	0	0	0	0	0
50%	0	0	0	0	0	0
60%	0	0	0	0	0	0
Всего	10000	2000	8000	0	0	0

Перемещения в конце второго года:

Год 2

		Новый уровень скидок				
		0%	30%	40%	50%	60%
0 %	2000	400	1600	0	0	0
30%	8000	1600	0	6400	0	0
40%	0	0	0	0	0	0
50%	0	0	0	0	0	0
60%	0	0	0	0	0	0
Всего	10000	2000	1600	6400	0	0

Следовательно, ожидаемые количества на каждом уровне в конце второго года будут равны: 2,000 на 0%, 1,600 на 30% и 6,400 на 40%

Вопрос для самоподготовки 16.7. Найти ожидаемые количества на каждом уровне к концу третьего года.

4.3 Прогнозирование при бесконечном горизонте прогнозирования

Мы будем рассматривать ситуации, когда число застрахованных лиц на каждом уровне в конце концов достигает устойчивого состояния, когда это число на каждом уровне остается постоянным из года в год. В стационарном состоянии число переходящих на каждый уровень равно числу тех, что его покидают. В пропорции к каждому состоянию, равновесие можно найти, записывая и решая системы уравнений, используя тот факт, что пропорции на следующем поколении должны быть теми же, что и на предыдущем.

Пример 16.4 Найти ожидаемые числа на каждом уровне в долгосрочном случае для предыдущего примера.

Решение Если мы обозначим n_0,n_{30},n_{40},n_{50}, и n_{60}, для чисел на каждом уровне в долгосрочном случае, то таблица переходов при достижении устойчивого состояния имеет вид

Год ∞

		Новый уровень скидок				
		0%	30%	40%	50%	60%
0 %	n_0	$0.2n_0$	$0.8n_0$	0	0	0
30%	n_{30}	$0.2n_{30}$	0	$0.8n_{30}$	0	0
40%	n_{40}	$0.2n_{40}$	0	0	$0.8n_{40}$	0
50%	n_{50}	$0.2n_{50}$	0	0	0	$0.8n_{50}$
60%	n_{60}	$0.2n_{60}$	0	0	0	$0.8n_{60}$
Всего	10000	n_0	n_{30}	n_{40}	n_{50}	n_{60}

Поскольку уровни достигли устойчивого состояния, сумма в колонке (количества в конце года) должна быть та же, что в начале года. Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
n_0 &= 0.2n_0 + 0.2n_{30} + 0.2n_{40} + 0.2n_{50} + 0.2n_{60} && ...(1)\\
n_{30} &= 0.8n_0 && ...(2)\\
n_{40} &= 0.8n_{30} && ...(3)\\
n_{50} &= 0.8n_{40} && ...(4)\\
n_{60} &= 0.8n_{50} + 0.8n_{60} && ...(5)
\end{aligned}$$

Эти уравнения можно решить, выражая каждую переменную через одну. Выберем n_{60} и получим из уравнений (5) - (2):

из (5): $n_{50} = 0.2n_{60}/0.8 = 0.25n_{60}$ ...(6)
из (4): $n_{40} = n_{50}/0.8 = 0.3125n_{60}$ ...(7)
из (3): $n_{30} = n_{40}/0.8 = 0.3906n_{60}$ ...(8)
из (2): $n_0 = n_{30}/0.8 = 0.4883n_{60}$ ...(9)

Уравнение (1) не дает больше информации (получаем тождество). Поэтому необходимо использовать другое уравнение. Поскольку известно общее число 10,000, получим :

$$n_0 + n_{30} + n_{40} + n_{50} + n_{60} = 10,000$$

т.е. $0.4883n_{60} + 0.3906n_{60} + 0.3125n_{60} + 0.25n_{60} + n_{60} = 10,000$
Итак: $2.4414n_{60} = 10,000$ и $n_{60} = 10,000/2.4414 = 4,096$
Из уравнений (9) - (6) получаем другие ожидаемые числа.

$$n_0 = l,000 \quad n_{30} = l,600 \quad n_{40} = l,280 \quad n_{50} = l,024$$

Вопрос для самоподготовки 16.8. Найти средний страховой взнос в долговременном случае для этого блока страховок, как процент общей страховки.

§5 Краткое изложение

NCD (скидки на отсутствие исков) системы - метод страхования, широко используемый при страховании личного автотранспорта в Великобритании.

Правила NCD системы можно свести к матрице переходов. Ожидаемое число исков определяется частотой подачи исков.

Возможные претенденты на подачу иска должны решить, выгодно ли подавать иск, с учетом платежей, которые застрахованное лицо будет делать на горизонте прогнозирования, который может быть конечным и бесконечным.

Матрицу переходов можно использовать для прогнозирования ожидаемого числа застрахованных лиц на каждом уровне скидок и для расчета долгосрочных пропорций застрахованных лиц на каждом уровне, когда система достигает устойчивого положения.

§6 Формулы

$$\text{Основная частота исков} = \frac{\text{Число исков}}{\text{Среднее число полисов}}$$

Глава 17

Основы теории–NCD

§1 NCD(скидки на отсутствие исков) системы

1.1 Введение

При выборе размера страхового взноса, который должно уплатить застрахованное лицо, многие страховые компании используют информацию о том, какое число исков подало застрахованное лицо за предшествующие годы, поскольку это лучше всего определяет вероятность того, что застрахованное лицо будет в будущем подавать иски.

Это особенно присуще автострахованию, где NCD система используется большинством, если не всеми, страховыми компаниями. (Некоторые страховщики также используют эту систему в других видах страхования, таких как страхование домашнего имущества или медицинское страхование). NCD система действует следующим образом - застрахованному лицу делается скидка на обычный страховой взнос, которая напрямую зависит от числа лет страхования, в течение которых застрахованное лицо не подавало исков.

Решая, подавать ли иск, застрахованному лицу приходится учитывать, как это повлияет на размер страхового взноса в последующие годы. Одной из причин введения NCD системы является, таким образом то, что это препятствует предъявлению малых исков. Застрахованное лицо не будет подавать иск, если он меньше, чем последующее увеличение страхового взноса. Следовательно, NCD система может уменьшить число малых исков предъявляемых страховой компании. Это уменьшит стоимость исков и компенсирует уменьшение доходов страховой организации от сбора взносов. Более важно то, что это уменьшит расходы на обработку исков. Чем меньше исков нужно рассмотреть, тем ниже расходы (по отношению к страховому взносу) на одно застрахованное лицо Уменьшая число малых исков, компания сокращает число исков, которые стоят непропорционально много в процентах от платежей по иска, подлежащих рассмотрению. Это делает страховые взносы в этой компании более конкурентоспособными.

§2 Определение NCD системы

2.1 Категории скидок

NCD система состоит из двух частей: категории скидок и набор правил, по которым происходит переход из одной категории в другую. Кроме того, для того, чтобы рассмотреть свойства NCD системы, необходимо знать также вероятность того, будет ли застрахованное лицо подавать иски в течение каждого года.

Категории обычно определяются числом лет в периоде, за который не подано ни одного иска. Однако правила перехода между категориями обычно таковы, что они зависят напрямую от числа лет, прошедших после иска. Чтобы не подавать иск, из-за которого застрахованное лицо потеряет скидки совсем, оно обычно переходит в другую категорию с более низким уровнем скидок.

Пример 17.1 Рассмотрим NCD систему с тремя категориями:

категория	Скидка %
0	0
1	25
2	40

В категории 0 застрахованное лицо платит полный страховой взнос, который на практике различен для разных индивидуумов вследствие их личных обстоятельств (например, возраста), для чего вводится индивидуальный рейтинг. Для простоты рассмотрим однородный портфель, состоящий из застрахованных лиц, отличающихся только индивидуальным рейтингом. В этом случае полный страховой взнос будет одинаковым для всех полисов в портфеле.

В категории 1 застрахованное лицо платит 75%, а в категории 2 - 60% полного страхового взноса. Если застрахованное лицо не подает ни одного иска в течение года, он (она) переходит в следующую, более высокую категорию (или остается в категории 2). Если подано один или несколько исков, он (она) переходит в более низкую категорию скидок (или остается в категории 0).

Примечание: На практике бывает 5-6 категорий, а после подачи иска можно спустится ниже более чем на одну категорию.

2.2 Матрица переходов

Чтобы легче анализировать эту систему, используем математическое представление. Ожидаемая пропорция застрахованных лиц в категории i обозначим π_i. Заметим, что $\Sigma\pi_i$=1. Кроме того, пропорции в категориях скидок представляются вектором $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$.

Вероятность того, что застрахованное лицо из категории i переходит в категорию j при переходе из одного года в следующий теперь можно записать.

Простейший путь для этого - матрица вероятностей перехода

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

p_{ij} - вероятность того, что застрахованное лицо переходит из категории i в категорию j.

2.3 Распределение застрахованных лиц

Матрицу переходов можно использовать, чтобы определить сколько застрахованных лиц ожидается в каждой категории в каждый год. Предположим, что застрахованное лицо начинает в первый год в категории 0. Тогда в год 1 ,$\pi_0 = 1$ и пропорции в каждой категории для системы с тремя категориями скидок

$$\vec{\pi}^{(1)} = (1, 0, 0, ..).$$

В год 2, ожидаемые пропорции в каждой категории задаются вектором, получающимся при умножении $\vec{\pi}^{(1)}$ на P.

$$\vec{\pi}^{(2)} = \vec{\pi}^{(1)} P$$

Аналогично $\vec{\pi}^{(n+1)} = \vec{\pi}^{(n)} P$

§3 Анализ устойчивого состояния

3.1 Равномерное распределение

Можно продолжить нахождение $\vec{\pi}^{(n)}$ для больших значений n. При разумных условиях $\vec{\pi}^{(n)}$ стремиться к пределу при $n \longrightarrow \infty$. Когда это случится, система достигнет равновесия, или своего устойчивого состояния. Этот предел обозначим $\vec{\pi}$.

При $n \longrightarrow \infty$ получаем $\vec{\pi} = \vec{\pi} P$

Это система уравнений, которую можно решить, чтобы найти $\vec{\pi}$, имея в виду, что $\sum \pi_i = 1$.

Пример 17.2 Чтобы проиллюстрировать, как определяется устойчивое состояние, рассмотрим пример с тремя категориями скидок, как в разделе 1.1.1 выше. Если вероятность, что застрахованное лицо не подает иск равна 0.9, то $\vec{\pi}$ решение

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$$

т.е. $(0.1\pi_0 + 0.1\pi_1, 0.9\pi_0 + 0.1\pi_2, 0.9\pi_1 + 0.9\pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$.

Это можно записать как систему из трех уравнений:

$$0.1\pi_0 + 0.1\pi_1 = \pi_0 \qquad (1)$$

$$0.9\pi_0 + 0.1\pi_2 = \pi_1 \qquad (2)$$

$$0.9\pi_1 + 0.9\pi_2 = \pi_2 \qquad (3)$$

Поскольку мы имеем три уравнения с тремя неизвестными, уравнения решаются относительно π_0, π_1 и π_2. Проблема в том, что только два из трех уравнений линейно независимы.

Однако, известно, что $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, что используем в качестве третьего уравнения. Решаем, получаем

$$\pi_0 = \frac{1}{91}, \quad \pi_1 = \frac{9}{91}, \quad \pi_2 = \frac{81}{91}$$

3.2 Неоднородность портфеля

Одной из причин, которой объясняют применение NCD системы, является то, что ставка страхового взноса определяется автоматически. Другими словами, застрахованное лицо, которое подает меньше исков, платит меньше того, который подает больше исков. Хотя это очевидно правильно, NCD система более сложна, и вскоре становится ясно, что все не работает так хорошо, как хотелось бы, и страховой взнос, который в конечном счете платит застрахованное лицо, не пропорционален вероятности подачи иска.

Частично это происходит потому, что предлагается малое число категорий скидок и сравнительно низкие уровни скидок. А кроме того, это следствие сравнительно низкой вероятности подачи исков и отсюда высокие вероятности того, что все застрахованные лица достигнут на некоторой стадии максимальный уровень скидок.

Задав вероятности подачи исков для всех застрахованных лиц, можно будет математически, найти NCD систему, для которой после длительного периода, все застрахованные лица будут платить чистый страховой взнос, прямо пропорциональный их вероятности подачи иска. Однако, этой очень сложной системой будет трудно управлять и понимать ее.

Следующий пример рассматривает прямо противоположный случай: есть только два типа застрахованных лиц и только три категории скидок. Однако даже в такой простой ситуации не просто получить систему, в которой было бы соответствие страхового взноса вероятности подачи иска.

Пример 17.3 Предположим, что есть не такое количество вероятностей подачи иска, как число застрахованных лиц, а просто «хорошие» водители и «плохие». Вероятность того, что хороший водитель подаст иск ниже (например, 0.1), чем вероятность того, что плохой водитель подаст иск (например, 0.2). Можно найти пропорции между хорошими и плохими водителями, которые ожидаются в каждой категории после нескольких лет.

Распределение устойчивого состояния для плохих водителей $(\frac{1}{21}, \frac{4}{21}, \frac{16}{21})$

Можно теперь сравнить средние значения страховых взносов, уплачиваемых хорошими и плохими водителями. Поскольку плохие водители подают вдвое больше исков, чем плохие, их чистые страховые взносы (т.е. без учета затрат и коэффициента выгоды) должны быть вдвое выше, чем у хороших водителей (в среднем, предполагая, что распределение размеров исков одинаковое для хороших и плохих водителей). Предположим, что полная страховка с. Средний чистый страховой взнос, который платит хороший водитель,

$$\frac{1}{91} \times c + \frac{9}{91} \times 0.75c + \frac{81}{91} \times 0.6c = 0.619c$$

А средний чистый страховой взнос, который платит плохой водитель,

$$\frac{1}{21} \times c + \frac{4}{21} \times 0.75c + \frac{16}{21} \times 0.6c = 0.648c$$

Таким образом, несмотря на то, что плохие водителя должны подавать иски вдвое чаще, чем хорошие, они должны платить страховой взнос лишь немного больший (в среднем).

(В действительности, в этом простом примере максимально возможная скидка недостаточна для «идеального» удвоенного страхового взноса. Однако можно применить немного алгебры, чтобы определить скидки, чтобы в результате плохие водители платили страховой взнос вдвое больше, чем хорошие.

Для вероятности исков в этом примере, где только три категории, должна быть скидка в категории 2 по крайней мере 98.2%. Ситуация улучшиться, если есть больше категорий, но и сложность возрастет).

§4 Влияние NCD систем на предрасположенность к подаче иска

4.1 Пересмотр вероятностей перехода

До сих пор мы предполагали, что вероятность того, что водитель подаст иск, одинаковая, независимо от того в какой категории он (она) находится. Застрахованное лицо может учитывать возрастание будущего страхового взноса при решении, подавать ли иск. Это можно учесть, сравнивая изменение страхового взноса после подачи иска.

Например, рассмотрим водителя, который платит полный страховой взнос в NCD системе с тремя категориями, как в разделе 1.1.1, и пусть полный взнос £500.

Если в первый (или последующие годы) год не подано исков, будущие взносы будут £375, £300, £300. Однако если иск подан в первый год (но ни в один из последующих), то будущие взносы составят £500, £375, £300. Следовательно, дополнительно будет уплачено £200. Аналогичные суммы можно посчитать для других категорий скидок.

Вероятности того, что застрахованное лицо в каждой категории действительно подаст иск за ущерб, будут различными.

Эти различия рассчитаны с учётом последующего года, когда будет получена максимальная скидка. Возможно, застрахованное лицо не смотрит так далеко в будущее, если он вообще будет еще подавать иск в этот период. (В крайнем случае застрахованное лицо вообще может проигнорировать такие вычисления, думая что он еще будет подавать иски в течение страхового периода) . Количество лет, которые принимаются во внимание, называется горизонтом застрахованного лица. Предрасположение к подаче исков также зависит от этого горизонта.

4.2 Расчет вероятностей перехода

Понятно, что вероятность того, что застрахованное лицо потерпит убытки (попадет в аварию) не та же, что вероятность подачи иска. По факту несчастного случая, застрахованное лицо может потерпеть убытки из-за повреждения автомобиля или имущества и по компенсации потерпевшим. После несчастного случая застрахованное лицо может подать иск (игнорируя эксцедент страховки), чтобы страховщик возместил ущерб. Если известно распределение ущерба, можно рассчитать вероятность подачи иска после несчастного случая.

Например, рассмотрим застрахованное лицо из предыдущего примера, у которого бесконечный горизонт, в настоящее время категория скидок 25%, и он только что попал в аварию. Иск будет подан, если ущерб от аварии больше £275. Если X - случайная переменная, представляющая величину ущерба, то

$$P(\text{подан иск } I) = P(X > \pounds 275)$$

Поскольку предполагается, что распределение известно, вероятность расчитывается.

Пример 17.4 Компания по страхованию автотранспорта применяет NCD систему, описанную в разделе 1.1.1. с уровнями скидок 0%, 25% и 40%. При подаче одного или более исков за год застрахованное лицо переходит в следующем году на следующий, более низкий уровень скидок, или остается на 0 уровне. Если в течение года не подавалось исков, застрахованное лицо переходит в следующем году на следующий более высокий уровень скидок, или остается на 40% уровне. Для хороших водителей вероятность попасть в аварию в году 0.1. Для плохих водителей вероятность попасть в аварию в году 0.2. Вероятность того, что любой водитель попадет в две или более аварий очень мала и принимается за нулевую. Стоимость того, в фунтах, что ремонт после аварии имеет логарифмически нормальное распределение с параметрами $\mu = 5$ и $\sigma = 2$. Годовой страховой взнос у застрахованного лица на 0 уровне скидок £500. Застрахованное лицо подает иск после аварии тогда и только тогда, когда стоимость ремонта выше, чем разница между:

(а) суммой трех страховых взносов за последующие три года годового полиса, если был подан иск на возмещение стоимости ремонта.

(б) суммой трех страховых взносов за последующие три года годового полиса, если не был подан иск на возмещение стоимости ремонта.

В каждом случае застрахованное лицо предполагает, что он (она) не будет попадать в аварию в течение действия этих трех страховых периодов.

(а) На каждом уровне скидок рассчитайте стоимость ремонта, по которому застрахованное лицо не будет подавать иск.

(б) На каждом уровне скидок рассчитайте вероятность, что застрахованное лицо подаст иск после этой аварии (в) Рассчитайте пропорции хороших и плохих водителей на каждом уровне скидок, предполагая что эти пропорции достигли устойчивого состояния.

Решение (а) Три года - это достаточный срок для водителя, чтобы перейти из категории минимальных скидок к категории максимальных скидок. Поэтому стоимость ремонта, при которой застрахованное лицо не подаст иск, равна, как и в разделе 3.1:

Уровень скидок 0%: £200

Уровень скидок 25%: £275

Уровень скидок 40%: £75.

(б) P(Иск | Авария) = P(Стоимость ремонта > x) где сумма, найденная в (i). Пусть X = Стоимость ремонта

** логарифмически нормальный и $\log X \ - N(\mu, \sigma^2)$

Таким образом, требуется

$$P(X > x) = P(logX > logx) = 1 - \Phi(\frac{logx - \mu}{\sigma})$$

Для каждого уровня скидок вероятность подачи иска по случаю аварии 0% скидка

$$1 - \Phi(\frac{log200 - 5}{2}) = 1 - \Phi(0.149) = 0.441$$

25% скидка

$$1 - \Phi(\frac{log275 - 5}{2}) = 1 - \Phi(0.308) = 0.379$$

40% скидка

$$1 - \Phi(\frac{log75 - 5}{2}) = 1 - \Phi(-0.341) = 0.633$$

(в) P(Иск) = P(Иск | Авария) P(Авария)

Матрица перехода для хороших водителей:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0441 & 0.9559 & 0 \\ 0.0379 & 0 & 0.9621 \\ 0 & 0.0633 & 0.9367 \end{bmatrix}$$

Устойчивое состояние - это решение $\vec{\pi} \quad P = \vec{\pi}$

Отсюда получаются следующие уравнения:

$$0.0441\pi_0 + 0.0379\pi_1 = \pi_0 \qquad (1)$$

$$0.9559\pi_0 + 0.0633\pi_2 = \pi_1 \qquad (2)$$

$$0.9621\pi_1 + 0.9367\pi_2 = \pi_2 \qquad (3)$$

Из уравнения (1), $\pi_1 = 25.222\pi_0$

Из уравнения (3), $\pi_2 = 15.199\pi_1 = 383.350\pi_0$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\pi_0 + 25.222\pi_0 + 383.350\pi_0 = 1$$

$$\pi_0 = 0.0024, \qquad \pi_1 = 0.0616, \qquad \pi_2 = 0.9360.$$

Матрица перехода для плохих водителей:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0882 & 0.9118 & 0 \\ 0.0758 & 0 & 0.9242 \\ 0 & 0.1266 & 0.8734 \end{bmatrix}$$

Решая уравнение устойчивого состояния $\vec{\pi} \quad P = \vec{\pi}$, получаем:

$$\pi_0 = 0.0099, \qquad \pi_1 = 0.1193, \qquad \pi_2 = 0.8708$$

§5 Вопросы студентам

В1. Действительно ли NCD правила, используемые на практике, настолько простые, как здесь описано?

О1. В действительности существуют некоторые сложности. Например, некоторые малые иски (такие как замена ветрового стекла) "позволяются т.е. они не считаются исками, снижающими уровень скидок. Также некоторые компании предлагают "защищенную"NCD систему с меньшими штрафными правилами для водителей, которые несколько лет были на максимальном уровне скидок. За это они платят дополнительный страховой взнос. Многие компании также предлагают "начальную"скидки для новых застрахованных лиц (предполагается, что они не попадают в группу высокого риска). Это позволяет этим застрахованным лицам пропустить уровень 0% скидок.

В2. Влияют ли другие факторы на застрахованных лиц при решении подавать иск или нет?

О2. На практике, на застрахованные лица влияет масса факторов, таких как: могут ли они себе позволить оплатить сумму иска сами; насколько вероятно, что им придется предъявлять иски в будущем; будет ли эта авария обеспечена денежным покрытием; нарушили ли они какие-нибудь правила (например, были пьяными за рулем); собираются ли они поменять машину или страховую компанию. Другими словами мы использовали очень простой подход.

В3. Стоит ли применять методы, которые я учил в университете для решения систем уравнений, например правило Крамера (с использованием определителей) или метод исключения Гаусса (с использованием матриц).

О3. Сомнительно, что отличное знание методов поможет на экзамене. Экзаменаторов больше интересует, знание пути решения задачу, а не познания в области численных методов. Поэтому они постараются, чтобы арифметика/алгебра была достаточно простая. Однако, стоит проводить вычисления внимательно и систематически, чтобы избежать "невынужденных"ошибок. Выбирайте кратчайший путь, чтобы сберечь свое время.

В4. Справедлива ли NCD система? Платят ли в среднем вдвое больший страховой взнос люди, которые совершают вдвое больше аварий.

О4. Никакая система, учитывающая прошлый опыт, не может полностью различить застрахованные лица с разными уровнями риска. Другими словами, если Застрахованное лицо А обходится вдвое дороже страховщику, чем Застрахованное лицо В, то Застрахованное лицо А будет платить в среднем на 30-40% больший страховой взнос, чем Застрахованное лицо В.

Дело в том, что всегда есть некоторые случайные помехи, которые нельзя исключить. Хороший водитель может оказаться неудачливым, и попасть в большее число аварий, чем ожидалось. А плохой водитель может оказаться удачливым и не подать никаких исков. Важно, что NCD система страховщика кажется застрахованным лицам справедливой.

5.1 Подсказки для ответов на вопросы

1) Вопросы по этой теме обычно совершенно аналогичные, требуют расчёта сумм или пропорции на каждом уровне скидок.

2) Иногда вопросы включают более чем одну группу застрахованных лиц с различными уровнями рисков (т.е. частотой подачи исков) для каждой группы. Могут быть замечания в комментарии к вопросу с указанием того, что NCD система не делает полных различий между застрахованными лицами с различными уровнями рисков.

3) Всегда проверяйте, чтобы в матрице перехода сумма членов ряда была равна 1.

4) Не путайте частоту исков с вероятностью подачи иска. Частота исков - это ожидаемое число исков на полис. Если можно подавать составные иски, она будет выше вероятности подачи иска.

Если иски подчинены распределению Пуассона, частота исков равна λ, а вероятность подачи иска - $1-e^{-\lambda}$. Для малых значений λ они имеют одинаковые численные значения.

§6 Ответы на вопросы для самоподготовки

Решение 16.1

Застрахованное лицо будет иметь следующие уровни скидок
1982: 0%
1983: 30% (1 иск подан. Возвращается на нулевую скидку)
1984: 0%
1985: 30%
1986: 40%
1987: 50% (2 иска подано. Возвращается на нулевую скидку.)
1988: 0%
1989: 30%
1990: 40%
1991: 50%
1992: 60% (1 иск подан. Возвращается на первый уровень.)
1993: 40%
Поэтому страховой взнос к уплате в 1993 : 750(l -0.40) = 450 (£450pa)

Решение 16.2

Частота иска - это среднее число исков на полис. Значит, вероятности того, что застрахованное лицо подаст N исков за любой год, можно вывести из формулы Пуассона: $**P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ при $\lambda = 0.15$:

$$P(N = 0) = e^{-0.15} = 0.8607$$

$$P(N = l) = 0.15e^{-0.15} = 0.1291$$

$$P(N = 2) = \frac{0.15^2}{2}e^{-0.15} = 0.0097$$

и

$$P(N >= 3) = 1 - P(N = 0) - P(N = l) - P(N = 2) = 0.0005$$

Отсутствующее число можно найти, умножая эти вероятности на 2,000:

0 исков :	2,000 X 0.8607 = 1,721
1 иск :	2,000 X 0.1291 = 258
2 иска :	2,000 X 0.0097 = 19
3 иска :	2,000 X 0.0005 = 1

Решение 16.3

Расширение таблицы дает:

год	подан иск	не поданы иски
сразу	0	c
1	P	0.7P
2	0.7P	0.6P
3	0.6P	0.5P
4	0.5P	0.4P
5	0.4P	0.4P
6	0.4P	0.4P

Начиная с года 5, страховые премии одинаковы в любом случае. Поэтому, если горизонт прогнозирования водителя бесконечный, то стоит подавать иск в том (и только том) случае, если:

$$P + 0.7P + 0.6P + 0.5P < 0.7P + 0.6P + Q.5P + 0.4P + C \Leftrightarrow C > 0.6P$$

Значит, стоит подавать иск, если стоимость ущерба превышает 60% полной страховки.

Решение 16.4

Скидка 0 %: £600
Скидка 30%: £900
Скидка 40%: £1100
Скидка 50%: £1200
Скидка 60%: £12100

Если был £100 избыток, все числа нужно увеличить на £100.

Решение 16.5

Матрица вероятности перехода

		Новый уровень скидок				
		0%	30%	40%	50%	60%
Предыдущий уровень скидок	0 %	$1 - p_0$	p_0	0	0	0
	30%	$1 - p_0$	0	p_0	0	0
	40%	$1 - p_0$	0	0	p_0	0
	50%	$1 - p_0 - p_1$	p_1	0	0	p_0
	60%	$1 - p_0 - p_1$	0	p_1	0	p_0

Решение 16.6

Среднее отрицательного биномиального распределения $\frac{kq}{p}$, дисперсия $\frac{kq}{p^2}$

Теперь можно найти значения p, q и k приравнивая их данным величинам

$$\frac{kq}{p} = 0.20 \quad \frac{kq}{p^2} = 0.50^2 == 0.25P$$

Разделим, чтобы найти p :

$$p = \frac{0.20}{0.25} = 0.80$$

Итак :

$q = 1 - p = 1 - 0.80 = 0.20$ и $k = 0.20X\frac{p}{q} = 0.20X\frac{0.8}{0.2} = 0.80$

Используем формулу для отрицательных биномиальных вероятностей, т.е. $P(N = n) = (\begin{matrix}\text{k+n-1}\\ \text{n}\end{matrix})p^k q^n$:

$$p_0 = P(N = 0) = p^k = 0.8^0.8 = 0.8365$$

$$p_1 = P(N = 1) = kp^k q = 0.8XO.8^0.8XO.2 = 0.1338$$

Итак, матрица вероятности перехода

	Новый уровень скидок					
		0%	30%	40%	50%	60%
Предыдущий уровень скидок	0 %	0.1635	0.8365	0	0	0
	30%	0.1635	0	0.8365	0	0
	40%	0.1635	0	0	0.8365	0
	50%	0.0297	0.1338	0	0	0.8365
	60%	0.0297	0	0.1338	0	0.8365

Решение 16.7

Продолжая прогнозирование на другой год, получим:

Год 3

		Новый уровень скидок				
		0%	30%	40%	50%	60%
0 %	2000	400	1600	0	0	0
30%	1600	320	0	1280	0	0
40%	6400	1280	0	0	5120	0
50%	0	0	0	0	0	0
60%	0	0	0	0	0	0
TOTALS	10000	2000	1600	1280	5120	0

Решение 16.8

Если полная страховка P, то общая сумма страховых взносов от 10,000 застрахованных лиц:

$$(2,000X1.00+1,600X0.70+1,280X0.60+1,024X0.50+4,096X0.40)P == 6,038.4P$$

Значит, средний страховой взнос : $\frac{6038P}{10000} = 0.60384P$ т.е. 60.4% полной страховки.