Arquitetura e Organização de Computadores

UNIDADE DIDÁTICA IV

CONCEITOS DA LÓGICA DIGITAL – PARTE 2

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Operações Básicas da Álgebra Booleana (ou Álgebra de Chaveamento)**
  - Na álgebra Booleana, existem três operações ou funções básicas. São elas, operação **OU**, operação **E** e **complementação**. Todas as funções Booleanas podem ser representadas em termos destas operações básicas.

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Operação OU (Adição Lógica)

- Uma definição para a operação **OU**, que também é denominada adição lógica, **é**:
- <u>A operação **OU** resulta **1** se pelo menos uma das variáveis de entrada vale **1**.</u>
- Um símbolo possível para representar a operação OU é "+", tal como o símbolo da adição algébrica (dos reais). Porém, como estamos trabalhando com variáveis Booleanas, sabemos que não se trata da adição algébrica, mas sim da adição lógica.

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Operação OU (Adição Lógica)

- Listando as possibilidades de combinações entre dois valores Booleanos e os respectivos resultados para a operação OU, tem-se:

$$
\begin{aligned}
0 + 0 &= 0 \\
0 + 1 &= 1 \\
1 + 0 &= 1 \\
1 + 1 &= 1
\end{aligned}
$$

- Note que a operação **OU** só pode ser definida se houver, pelo menos, duas variáveis envolvidas. Ou seja, não é possível realizar a operação sobre somente uma variável. Devido a isso, o operador “+” **(OU)** é dito binário.

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Operação OU (Adição Lógica)

- Listando as possibilidades de combinações entre dois valores Booleanos e os respectivos resultados para a operação OU, tem-se:

$$
\begin{aligned}
0 + 0 &= 0 \\
0 + 1 &= 1 \\
1 + 0 &= 1 \\
1 + 1 &= 1
\end{aligned}
$$

- Note que a operação **OU** só pode ser definida se houver, pelo menos, duas variáveis envolvidas. Ou seja, não é possível realizar a operação sobre somente uma variável. Devido a isso, o operador “+” **(OU)** é dito binário.

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Operação OU (Adição Lógica)

- Nas equações, não costuma-se escrever todas as possibilidades de valores. Apenas adotamos uma letra (ou uma letra com um índice) para designar uma variável Booleana. Com isso, já se sabe que aquela variável pode assumir ou o valor **0** ou o valor **1**. Então, supondo que queiramos demonstra o comportamento da equação A+B (lê-se A ou B), poderíamos fazê-lo utilizando uma tabela verdade, como segue:

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Operação OU (Adição Lógica)

- Da mesma forma, podemos mostrar o comportamento da equação A+B+C (lê-se A ou B ou C) por meio de uma tabela verdade. Como na equação há somente o símbolo "+", trata-se da operação **OU** sobre três variáveis. Logo, pode-se aplicar diretamente a definição da operação **OU**: o resultado será **1** se pelo menos uma das variáveis de entrada valer **1**.

A	B	C	A+B+C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Operação OU (Adição Lógica)

- **Note que os valores das colunas referentes às expressões A+B+C, (A+B)+C e (B+C)+A são os mesmos (na mesma ordem).**

A B C	A+B+C	A+B	(A+B)+C	B+C	(B+C)+A
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	1	0	1	1	1
0 1 0	1	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	0	1
1 0 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Operação E (Multiplicação Lógica)

- A operação E, ou multiplicação lógica, pode ser definida da seguinte forma:
- A operação **E** resulta **0** se pelo menos uma das variáveis de entrada vale **0**.
- Pela definição dada, pode-se deduzir que o resultado da operação **E** será **1** se, e somente se, todas as entradas valerem **1**.
- O símbolo usualmente utilizado na operação **E** é “·”, porém outra notação possível é “∧”. Podemos, também, listar as possibilidades de combinações entre dois valores Booleanos e os respectivos resultados, para a operação **E**:

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Operação E (Multiplicação Lógica)**

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

PORTAS E OPERAÇÕES LÓGICAS

Operação E (Multiplicação Lógica)

- Assim como a operação OU, a operação E só pode ser definida entre, pelo menos duas variáveis. Ou seja, o operador “·” (E) também é binário.
- Para mostrar o comportamento da equação A · B (lê-se A e B), escreve-se uma tabela verdade, como segue:

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Operação E (Multiplicação Lógica)

- De forma semelhante, pode-se determinar o resultado da equação A·B·C (lê-se A e B e C) utilizando diretamente a definição da operação **E**: o resultado será **0** se pelo menos uma das variáveis de entrada valer **0**.

A	B	C	A·B·C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Operação E (Multiplicação Lógica)

- Também para a operação **E** valem as propriedades **associativa** e **comutativa**. Então, a equação A·BC pode ainda ser avaliada tomando-se as variáveis aos pares, em qualquer ordem. Veja a tabela verdade a seguir e compare os resultados.

A B C	A·B·C	A·B	(A·B)·C	B·C	A·(B·C)
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0	0
0 1 0	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1	0
1 0 0	0	0	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0
1 1 0	0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Complementação (ou Negação, ou Inversão)

- A operação complementação dispensa uma definição. É a operação cujo resultado é simplesmente o valor complementar ao que a variável apresenta. Também devido ao fato de uma variável Booleana poder assumir um entre somente dois valores, o valor complementar será **1** se a variável vale **0** e será **0** se a variável vale **1**.

- Os símbolos utilizados para representar a operação complementação sobre uma variável Booleana A são A , ~A e A' (lê-se A negado). Nesta disciplina, adotaremos o primeiro símbolo. O resultado da operação complementação pode ser listado:

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Complementação (ou Negação, ou Inversão)**
  - Os símbolos utilizados para representar a operação complementação sobre uma variável Booleana A são A , ~A e A' (lê-se A negado). Nesta disciplina, adotaremos o primeiro símbolo. O resultado da operação complementação pode ser listado:

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Complementação (ou Negação, ou Inversão)**
  - Diferentemente das operações OU e E, a complementação só é definida sobre uma variável, ou sobre o resultado de uma expressão. Ou seja, o operador complementação é dito unário.
  - E a tabela verdade para $\overline{A}$ é:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Porta E

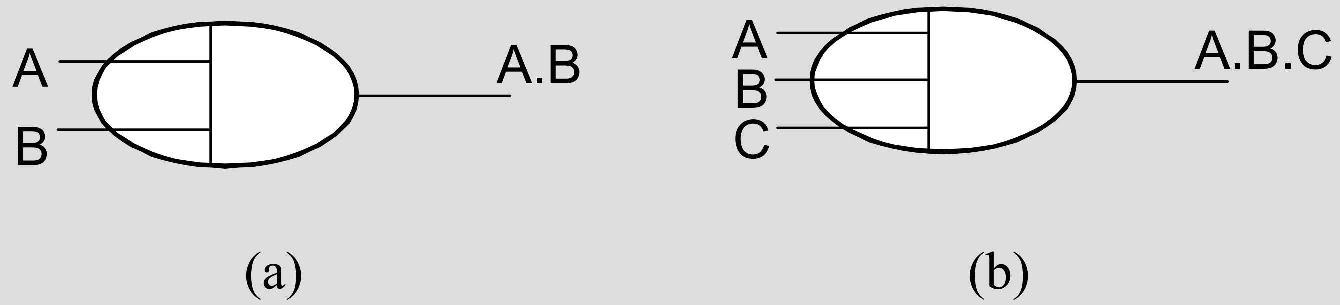
- Diferentemente das operações OU e E, a complementação só é definida sobre uma variável, ou sobre o resultado de uma expressão. Ou seja, o operador complementação é dito unário.
- E a tabela verdade para A é:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Porta E

- O símbolo da porta E é mostrado na Figura abaixo. À esquerda estão dispostas as entradas (no mínimo duas, obviamente) e à direita, a saída (única). As linhas que conduzem as variáveis de entrada e saída podem ser interpretadas como fios que transportam os sinais elétricos associados às variáveis. O comportamento da porta E segue extritamente a definição (e tabela verdade).

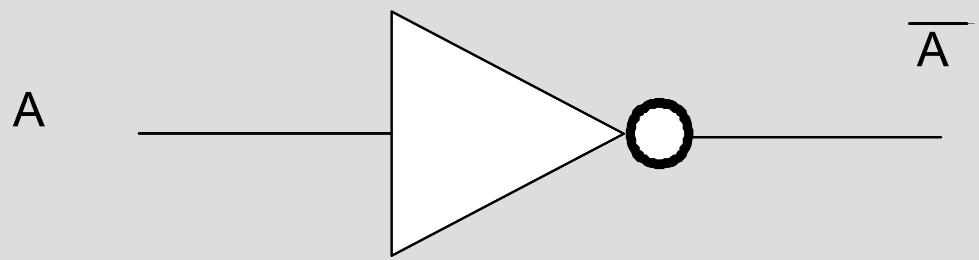


Símbolo da porta lógica **E** com 2 entradas (a) e com 3 entradas (b).

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Inversor (ou Porta Inversora, ou Negador)

- A porta que simboliza a operação complementação é conhecida como inversor (ou porta inversora, ou negador). Como a operação complementação só pode ser realizada sobre uma variável por vez (ou sobre o resultado de uma subexpressão), o inversor só possui uma entrada e, obviamente, uma saída.

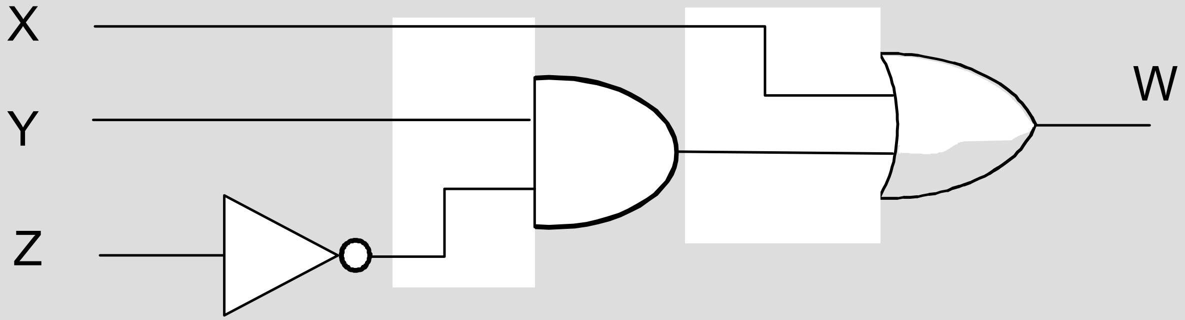


Símbolo do inversor (também conhecido como negador ou porta inversora).

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

Exemplo de Circuito Lógico

- Circuito lógico para a equação W = X + Y · Z



Um circuito lógico.

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Leis Fundamentais e Propriedades da Álgebra Booleana**
  - As leis da álgebra Booleana dizem respeito ao espaço Booleano (isto é., valores que uma variável pode assumir) e operações elementares deste espaço. Já as propriedades podem ser deduzidas a partir das definições das operações.
  - Sejam A e B duas variáveis Booleanas. Então, o espaço Booleano é definido:

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Leis Fundamentais e Propriedades da Álgebra Booleana**
  - Sejam A e B duas variáveis Booleanas. Então, o espaço Booleano é definido:

$$\text{se } A \neq 0, \text{ então } A=1;$$

$$\text{se } A \neq 1, \text{ então } A=0.$$

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Leis Fundamentais e Propriedades da Álgebra Booleana**
  - As operações elementares deste espaço são operação **OU**, operação **E** e **complementação**.

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Leis Fundamentais e Propriedades da Álgebra Booleana**
  - As propriedades da álgebra Booleana são as seguintes.
  - Da adição lógica:

    1) $A + 0 = A$

    2) $A + 1 = 1$

    3) $A + A = A$

    4) $A + \overline{A} = 1$

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Leis Fundamentais e Propriedades da Álgebra Booleana**
  - Da multiplicação lógica:

    5) $A \cdot 0 = 0$

    6) $A \cdot 1 = A$

    7) $A \cdot A = A$

    8) $A \cdot \overline{A} = 0$

ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS LÓGICOS

- **Leis Fundamentais e Propriedades da Álgebra Booleana**
  - Da complementação:

    9) $\overline{A} = 0$

    10) $\overline{A} = 1$

  - Comutatividade:

    11) $A + B = B + A$

    12) $A \cdot B = B \cdot A$