Лабораторная работа $№7 $

Кокляева Мария

Группа: $А-13-22$

Задача 7.1

Найти приближенное решение задачи Коши

$ \left{ \begin{array}{l} y' = -15y+2.5e^{-0.5t}+12e^{-2t}+10, &\ y(0) = 2; \end{array} \right. {T = 4}. $

1.Найти аналитическое решение задачи.

К задаче 7.1.

$$\begin{cases} y'(t) = -15y + 2{,}5e^{-0{,}5t} + 12e^{-2t} + 10 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y' + 15y = 2{,}5e^{-0{,}5t} + 12e^{-2t} + 10$$

Замена $y = uv \quad y' = uv' + u'v$

$$uv' + u'v + 15uv = u'v + u(v' + 15v) = 2{,}5e^{-0{,}5t} + 12e^{-2t} + 10$$

I. $v' + 15v = 0$

$$\frac{dv}{dt} = -15v$$

$$\frac{dv}{v} = -15\,dt$$

$$\ln v = -15t \quad \Rightarrow \quad v = e^{-15t}$$

II. $u' \cdot e^{-15t} = 2{,}5e^{-0{,}5t} + 12e^{-2t} + 10 \quad | \cdot e^{15t}$

$$u' = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{29}{2}t} + 12e^{13t} + 10e^{15t}$$

$$du = \left(2{,}5e^{\frac{29}{2}t} + 12e^{13t} + 10e^{15t}\right)dt$$

$$u = \int 2{,}5e^{\frac{29}{2}t} + 12e^{13t} + 10e^{15t}\,dt$$

$$u = \frac{2}{3}e^{15t} + \frac{5}{29}e^{\frac{29}{2}t} + \frac{12}{13}e^{13t} + C$$

Обратная замена

$$y = \frac{2}{3} + \frac{5}{29}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{12}{13} \cdot e^{-2t} + C \cdot e^{-15t}$$

$$2 = \frac{2}{3} + \frac{5}{29} + \frac{12}{13} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{269}{1131}$$

$$y = \frac{2}{3} + \frac{5}{29}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{12}{13}e^{-2t} + \frac{269}{1131}e^{-15t}$$

1. Составить программу, реализующую вычисление приближенного решения по явному и неявному методам Эйлера с заданной точностью. Оценку погрешности производить по правилу Рунге. Найти решение с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ каждым методом. Определить с каким шагом по времени достигнута заданная точность в каждом случае.

Неявный м. Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

$$y_{i+1} = y_i + h(-15y_{i+1} + 2.5e^{-0,5t_{i+1}} + 12e^{-2t_{i+1}} + 10)$$

$$y_{i+1} + 15hy_{i+1} = y_i + h(2,5e^{-0,5t_{i+1}} + 12e^{-2t_{i+1}} + 10)$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i + h(2,5e^{-0,5t_{i+1}} + 12e^{-2t_{i+1}} + 10)}{1 + 15h}$$

```
import math
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

def f(t,y):
    return -15*y+2.5*math.exp(-0.5*t)+12*math.exp(-2*t)+10

def explicit_Euler(y0, T,f,h):
    n= int(T//h)+1
    t = np.linspace(0,T,n)
    y = np.zeros(n)
    y[0]= y0
    for i in range(n-1):
        y[i+1]=y[i] + h*f(t[i],y[i])
    return y,t

def not_explicit_Euler(y0,T,f,h):
    n= int(T//h)+1
    t = np.linspace(0,T,n)
    y =np.zeros(n)
    y[0] = y0
    for i in range(n-1):
        y[i+1]=(y[i] + h*(f(t[i+1], y[i+1]))) / (1 + 15*h)
    return y, t
```

```
def Runge(met, y0, T, f, h,p):
    n = int(T//h)
    t_n,y_2n = met(y0, T,f,h)
    t_2n,y_n = met(y0, T,f,h/2)
    error = []
    for i in range(n):
        error.append((y_n[2*i+1]-y_2n[i])/(2**p-1))
    return max(error)

def Search(Runge, met,y0,T,f,p,eps):
    n =2
    h = T/n
    er = abs(Runge(met, y0,T,f,h,p))
    while er>eps:
        n +=1
        h = T/n
        er = abs(Runge(met, y0,T,f,h,p))
    return h, n,er

def pprint(h, n, error):
    print(f"Количество точек = {n}")
    print(f"Шаг = {h}")
    print(f"Погрешность по Рунге ={abs(error)}")
    print()

y0 = 2
T = 4
t0 = 0
eps = 10**(-2)

h_E,n_E,er_E = Search(Runge, explicit_Euler,y0,T,f,1,eps)

print("Явный метод Эйлера")
pprint(h_E,n_E, er_E)

eps = 10**(-2)
h_nE,n_nE,er_nE = Search(Runge, not_explicit_Euler,y0,T,f,1,eps)
print("Неявный метод Эйлера")
pprint(h_nE,n_nE, er_nE)
```

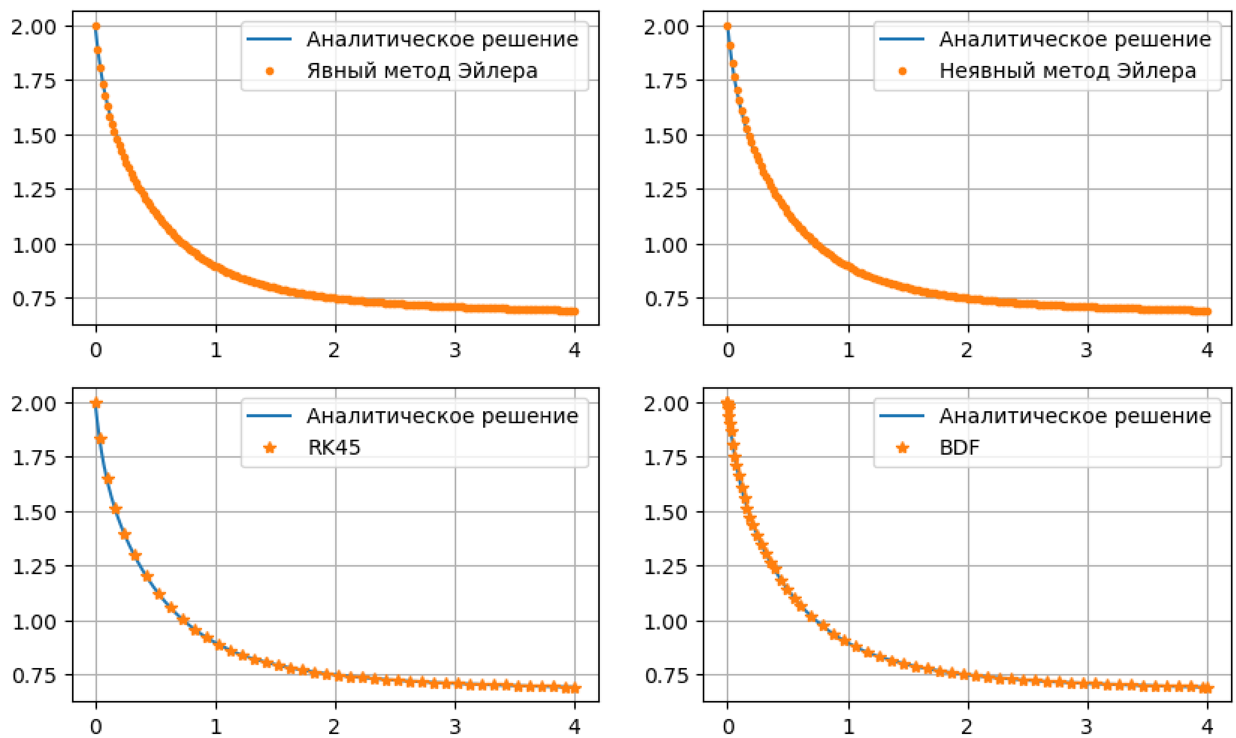
```
Явный метод Эйлера
Количество точек = 201
Шаг = 0.01990049751243781
Погрешность по Рунге =0.009950248756219082

Неявный метод Эйлера
Количество точек = 201
Шаг = 0.01990049751243781
Погрешность по Рунге =0.009950248756219082
```

1. Используя встроенную функцию Python scipy.integrate.solve_ivp, найти решение задачи с точностью $ ε=10^{-4}$, используя методы RK45 и BDF. Прочтите описание методов и разберитесь, к какому типу относятся эти методы. Проанализируйте, как методы распределяли узлы в расчетной области.

```
from scipy.integrate import solve_ivp

# RK45' (по умолчанию): Явный метод Рунге-Кутты порядка 5(4) [1].
Погрешность контролируется с точностью
# четвертого порядка метода,
# но шаги предпринимаются с точностью пятого порядка формула
(производится локальная экстраполяция)

# 'BDF': Неявный многоступенчатый метод порядка переменных (от 1 до 5)
#     на основе О формуле обратной дифференцировки для производной
приближение


solve_RK45 = solve_ivp(f, (0,4), [2], method="RK45", max_step=0.1,
atol = 10**(-4), rtol = 10**(-4))



solve_BDF = solve_ivp(f, (0,4), [2], method="BDF", max_step=0.1, atol
= 10**(-4), rtol = 10**(-4))

def y(t):
    return 2/3 +5/29*math.exp(-0.5*t)+12/13*math.exp(-2*t)
+269/1131*math.exp(-15*t)

# Строим графики
array_analitic_t = np.linspace(t0,T,1000)
array_analitic_y = np.array([y(array_analitic_t[i]) for i in
range(1000)])


y_E,t_E = explicit_Euler(y0, T,f,h_E)
y_nE,t_nE = not_explicit_Euler(y0, T,f,h_nE)


fig,axes =plt.subplots(2,2, figsize = (10,6))
axes[0][0].plot(array_analitic_t,array_analitic_y,label="Аналитическое
решение")
axes[0][0].plot(t_E,y_E,'.',label="Явный метод Эйлера")

axes[0][1].plot(array_analitic_t,array_analitic_y,label="Аналитическое
решение")
axes[0][1].plot(t_nE,y_nE,'.',label="Неявный метод Эйлера")

axes[1][0].plot(array_analitic_t,array_analitic_y,label="Аналитическое
решение")
axes[1][0].plot(solve_RK45.t,solve_RK45.y[0],'*',label="RK45")
```

```
axes[1][1].plot(array_analitic_t,array_analitic_y,label="Аналитическое решение")
axes[1][1].plot(solve_BDF.t,solve_BDF.y[0],'*',label="BDF")

axes[0][0].grid()
axes[0][0].legend()
axes[0][1].grid()
axes[0][1].legend()
axes[1][0].grid()
axes[1][0].legend()
axes[1][1].grid()
axes[1][1].legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x1d8088a2410>
```



Задача 7.2. Задача Коши для ОДУ 1 порядка следующего вида

$ \left{ \begin{array}{l} x' = \frac{(a-x)}{a} *0.5x-γx, &\ x(0) = x_0; \end{array} \right. {t>0}. $

1. Промасштабируем задачу (7.2), вводя новые переменные $ y = \frac{x}{a} , τ= {βt} $. Тогда получим задачу:

$ \left{ \begin{array}{l} y' = y(1-y)-py, &\ y(0) = 0.1; \end{array} \right.. $

где p = $\frac{γ}{β} , y_0 = \frac{x_0}{a} $

$ β = 0.5 ; γ = [0,1] ; y_0 = 0.1 $

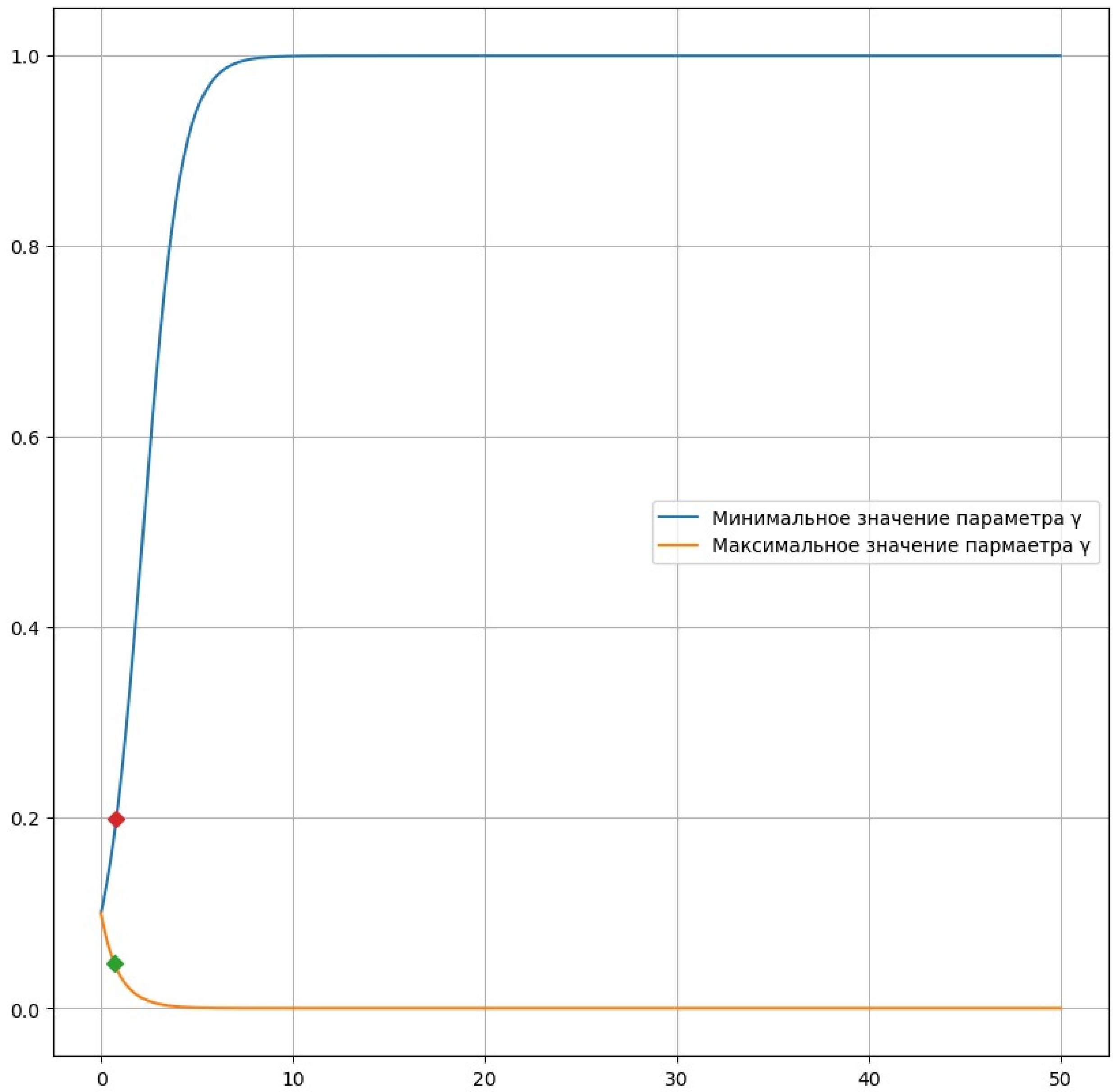
Метод решения задачи Коши - Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка

Метод вычисления интеграла - Центральных прямоугольников с уточнением по Рунге

1. (А) Требуется решить задачу Коши (7.3) с помощью встроенной функции Python на отрезке по времени при минимальном и максимальном значениях параметра из указанного в задании диапазона. Приближенно определить по графику момент времени, при котором численность популяции становится вдвое больше (меньше) начальной, а также момент времени, начиная с которого численность стабилизируется.

```
def f_min(t,y):
    return y*(1-y)-p_min*y
def f_max(t,y):
    return y*(1-y)-p_max*y


u = [0,1]
b = 0.5
# Для минимального γ
min_u = min(u)
p_min = min_u/b

solve_min = solve_ivp(f_min, (0,50), [0.1], method="RK45",
max_step=0.1, atol = 10**(-4), rtol = 10**(-4))

max_u = max(u)
p_max = max_u/b

solve_max = solve_ivp(f_max, (0,50), [0.1], method="RK45",
max_step=0.1, atol = 10**(-4), rtol = 10**(-4))

fig,axes =plt.subplots(1,figsize = (10,10))
axes.plot(solve_min.t,solve_min.y[0],label="Минимальное значение
параметра γ")
axes.plot(solve_max.t,solve_max.y[0],label="Максимальное значение
пармаетра γ")
axes.plot(solve_max.t[7],solve_max.y[0][7], marker='D')
axes.plot(solve_min.t[8],solve_min.y[0][8], marker='D')


axes.grid()
axes.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x1d808f88f50>
```



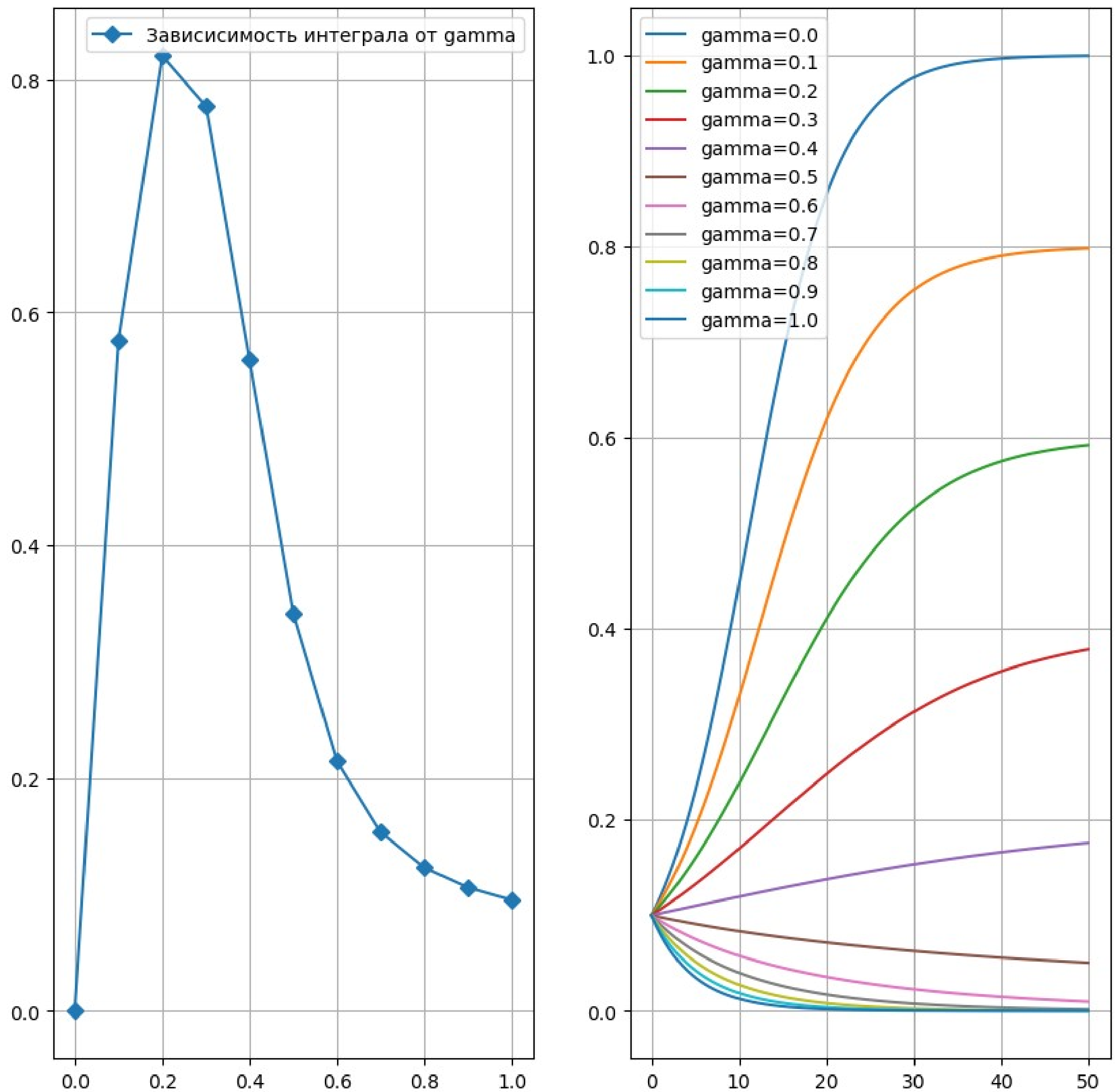
(B) Задать множество значений параметра γ , изменяя его на заданном отрезке с шагом 0.1. Для каждого значения параметра найти приближенное решение задачи Коши (7.3) методом , Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка, на отрезке [0,50] по времени с шагом h=0.1.

```
def f_bio(t,y,p):
    return y * (1-y) -p * y

def four_ADAMS(f_bio, y0, p, t):
    h = 0.1
    n = len(t)
    y1 = np.zeros(len(t))
    y1[0] = y0
```

```
    for i in range(3):
        k1 = h * f_bio(t[i], y1[i],p)
        k2 = h * f_bio(t[i] + h/2, y1[i] + k1/2,p)
        k3 = h * f_bio(t[i] + h/2, y1[i] + k2/2,p)
        k4 = h * f_bio(t[i] + h, y1[i] + k3,p)
        y1[i+1] = y1[i] + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6

    for i in range(3, n-1):
        y1[i+1] = y1[i] + h/24 * (55 * f_bio(t[i], y1[i],p) - 59 *
f_bio(t[i-1], y1[i-1],p) + 37 * f_bio(t[i-2], y1[i-2],p) - 9 *
f_bio(t[i-3], y1[i-3],p))

    return y1

T = 50
h = 0.1
beta = 0.5
gamma_mass = [0,1]
gamma_values = np.arange(gamma_mass[0], gamma_mass[1] + h, h)

t_values = np.linspace(0,T,100)
V_values = []
y0 = 0.1
y_bio = []
for i in range(len(gamma_values)):
    p = gamma_values[i]/ beta
    y_bio.append(four_ADAMS(f_bio, y0, gamma_values[i]/ beta,
t_values))
    V = gamma_values[i] * (h/3) * (y_bio[i][0] + 4 * np.sum(y_bio[i]
[1:-1:2]) + 2 * np.sum(y_bio[i][2:-2:2]) + y_bio[i][-1]) #считаем
интеграл
    V_values.append(V)

max_V = max(V_values)
optimal_gamma = gamma_values[np.argmax(V_values)]

print("Значения интеграла V :")
for i in range(len(gamma_values)):
    print(f"gamma={gamma_values[i]}, V={ V_values[i]:.4}")

print(f"\nОптимальное значение gamma: {optimal_gamma:.2f} с
V={max_V:.4f}")

fig,axes =plt.subplots(1,2,figsize = (10,10))
axes[0].plot(gamma_values, V_values,marker='D',label='Зависисимость
интеграла от gamma')
axes[0].grid()
axes[0].legend()
#Изменение относительной биомассы y(t) методом Адамса 4 порядка
for i in range(len(y_bio)):
```

```
    axes[1].plot(t_values, y_bio[i],
label=f'gamma={gamma_values[i]:.1f}')
axes[1].grid()
axes[1].legend()
```

```
Значения интеграла V :
gamma=0.0, V=0.0
gamma=0.1, V=0.5763
gamma=0.2, V=0.8204
gamma=0.30000000000000004, V=0.7775
gamma=0.4, V=0.5595
gamma=0.5, V=0.3415
gamma=0.6000000000000001, V=0.2144
gamma=0.7000000000000001, V=0.1534
gamma=0.8, V=0.123
gamma=0.9, V=0.106
gamma=1.0, V=0.09531

Оптимальное значение gamma: 0.20 с V=0.8204

<matplotlib.legend.Legend at 0x1d80903f7d0>
```



Зависисимость интеграла от gamma
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
gamma=0.0
gamma=0.1
gamma=0.2
gamma=0.3
gamma=0.4
gamma=0.5
gamma=0.6
gamma=0.7
gamma=0.8
gamma=0.9
gamma=1.0
0
10
20
30
40
50