# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 7

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Теоретический материал** к данной теме содержится в [1, глава 15].

**Отчет** по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: **1)** постановка задачи; **2)** необходимый теоретический материал; **3)** тестовый пример и результаты вычислительного эксперимента по тесту (если необходимо); **4)** решение поставленной задачи; **5)** анализ полученных результатов; **6)** графический материал (если необходимо); **7)** тексты программ.

**Задача 7.1.** Найти приближенное решение задачи Коши

(7.1)

на отрезке [0,T] с точностью.

**ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:**

1.Найти аналитическое решение задачи.

2. Составить программу, реализующую вычисление приближенного решения по явному и неявному методам Эйлера с заданной точностью. Оценку погрешности производить по правилу Рунге. Найти решение с точностью каждым методом. Определить с каким шагом по времени достигнута заданная точность в каждом случае.

3. Используя встроенную функцию Python scipy.integrate.solve\_ivp, найти решение задачи с точностью , используя методы RK45 и BDF. Прочтите описание методов и разберитесь, к какому типу относятся эти методы. Проанализируйте, как методы распределяли узлы в расчетной области.

4. Построить графики аналитического решения и найденных приближенных решений задачи.

5. Сравнить полученные результаты п. 2 и 3.

**Задача 7.2.** Задача Коши для ОДУ 1 порядка следующего вида

,  (7.2)

 .

описывает изменение биомассы  любого промыслового вида рыбы в океане. Здесь  - плотность насыщения,  - удельная скорость роста биомассы при ,  - постоянная, характеризующая интенсивность промысла.

A) Промоделировать процесс изменения биомассы в зависимости от интенсивности промысла.

B) Определить, при какой интенсивности количество выловленной за время  рыбы  является наибольшим. Определить диапазон хищнического лова (т.е. значения интенсивности промысла, при которых вид полностью исчезает).

**ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ**:

1. Промасштабируем задачу (7.2), вводя новые переменные , . Тогда получим задачу:

 (7.3)

,

где , .

2. (A) Требуется решить задачу Коши (7.3) с помощью встроенной функции Python на отрезке по времени  при минимальном и максимальном значениях параметра  из указанного в задании диапазона. Приближенно определить по графику момент времени, при котором численность популяции становится вдвое больше (меньше) начальной, а также момент времени, начиная с которого численность стабилизируется.

3. (B) Задать множество значений параметра , изменяя его на заданном отрезке с шагом 0.1. Для каждого значения параметра найти приближенное решение задачи Коши (7.3) методом[[1]](#footnote-1), указанным в индивидуальном варианте, на отрезке по времени  с шагом *h*=0.1.

4. Для каждого полученного решения вычислить интеграл  и определить оптимальное значение параметра , соответствующее максимальному значению интеграла.

5. Построить графики найденных решений при разных значениях параметра . Определить визуально, при каких значениях параметра происходит исчезновение популяции.

**Таблица к задаче 7.1**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | *f(t,y)* | Y0  T | *N* | *F(t,y)* | Y0  T |
| 7.1.1 |  | 2  4 | 7.1.26 |  | 4  4 |
| 7.1.2 |  | 5  6 | 7.2.27 |  | 3  3 |
| 7. 1.3 |  | 2  4 | 7.1.28 |  | 2  4 |
| 7.1.4 |  | 4  5 | 7.1.29 |  | 6  4 |
| 7.1.5 |  | 3  4 | 7.1.30 |  | 2  4 |
| 7.1.6 |  | 5  4 | 7.1.31 |  | 2  5 |
| 7.1.7 |  | 2  4 | 7.1.32 |  | 6  4 |
| 7.1.8 |  | 5  6 | 7.1.33 |  | 2  4 |
| 7.1.9 |  | 2  4 | 7.1.34 |  | 5  6 |
| 7.1.10 |  | 4  5 | 7.1.35 |  | 2  4 |
| 7.1.11 |  | 3  4 | 7.1.36 |  | 4  5 |
| 7.1.12 |  | 5  4 | 7.1.37 |  | 3  4 |
| 7.1.13 |  | 2  4 | 7.1.38 |  | 5  4 |
| 7.1.14 |  | 5  6 | 7.1.39 |  | 2  4 |
| 7.1.15 |  | 2  4 | 7.1.40 |  | 5  6 |
| 7.1.16 |  | 4  5 | 7.1.41 |  | 2  4 |
| 7.1.17 |  | 3  4 | 7.1.42 |  | 4  5 |
| 7.1.18 |  | 5  4 | 7.1.43 |  | 3  4 |
| 7.1.19 |  | 1  3 | 7.1.44 |  | 5  4 |
| .1.20 |  | 2  4 | 7.1.45 |  | 2  4 |
| 7.1.21 |  | 5  3 | 7.1.46 |  | 5  6 |
| 7.1.22 |  | 2  4 | 7.1.47 |  | 2  4 |
| 7.1.23 |  | 4  5 | 7.1.48 |  | 4  5 |
| 7.1.24 |  | 3  4 | 7.1.49 |  | 3  4 |
| 7.1.25 |  | 5  4 | 7.1.50 |  | 5  4 |

## Таблица к задаче 7.2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N |  |  |  | Метод решения задачи Коши | Метод вычисления интеграла |
| 7.2.1 и 31 | 0.8 | [0.4, 1.4] | 0.1 | Эйлера-Коши | Трапеций |
| 7.2.2 и 32 | 0.4 | [0, 1] | 0.5 | Усовершенствованный Эйлера | Центральных прямоугольников |
| 7.2.3 и 33 | 0.6 | [0, 1] | 1.5 | Рунге-Кутты 3 порядка I | Симпсона |
| 7.2.4 и 34 | 1 | [0.1, 1.1] | 0.1 | Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка | Левых прямоугольников с уточнением по Рунге |
| 7.2.5 и 35 | 1.7 | [1, 2] | 0.1 | Метод разложения по Тейлору 2 порядка | Правых прямоугольников с уточнением по Рунге |
| 7.2.6 и 36 | 0.6 | [0.2, 1.2] | 1.2 | Рунге-Кутты 3 порядка III | Левых прямоугольников |
| 7.2.7 и 37 | 0.5 | [0, 1] | 0.1 | Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка | Центральных прямоугольников с уточнением по Рунге |
| 7.2.8 и 38 | 0.7 | [0, 1] | 0.9 | Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка | Правых прямоугольников |
| 7.2.9 и 39 | 0.9 | [0.1, 1.1] | 0.7 | Рунге-Кутты 3 порядка II | Трапеций |
| 7.2.10 и 40 | 0.4 | [0.2, 1.2] | 0.8 | Метод разложения по Тейлору 3 порядка | Центральных прямоугольников |
| 7.2.11 и 41 | 0.3 | [0, 1] | 0.1 | Эйлера-Коши | Симпсона |
| 7.2.12 и 42 | 1.2 | [0.4, 1.4] | 0.5 | Усовершенствованный Эйлера | Левых прямоугольников с уточнением по Рунге |
| 7.2.13 и 43 | 1.3 | [0.4, 1.4] | 0.9 | Рунге-Кутты 3 порядка I | Правых прямоугольников с уточнением по Рунге |
| 7.2.14 и 44 | 1.5 | [0.4, 1.4] | 1 | Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка | Трапеций |
| 7.2.15 и 45 | 1.5 | [1, 2] | 0.2 | Метод разложения по Тейлору 2 порядка | Симпсона |
| 7.2.16 и 46 | 0.4 | [0.1, 1.1] | 0.2 | Рунге-Кутты 3 порядка III | Центральных прямоугольни-ков с уточнением по Рунге |
| 7.2.17 и 47 | 1.5 | [0.6, 1.6] | 0.4 | Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка | Центральных прямоугольников |
| 7.2.18 и 48 | 1.8 | [0.6, 1.6] | 1 | Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка | Правых прямоугольников с уточнением по Рунге |
| 7.2.19 и 49 | 0.9 | [0.1, 1.1] | 1.2 | Рунге-Кутты 3 порядка II | Правых прямоугольников с уточнением по Рунге |
| 7.2.20 и 50 | 1 | [0.6, 1.6] | 0.7 | Метод разложения по Тейлору 3 порядка | Правых прямоугольников |
| 7.2.21 | 1.1 | [0.5, 1.5] | 0.4 | Эйлера-Коши | Левых прямоугольников с уточнением по Рунге |
| 7.2.22 | 0.5 | [0.1, 1.5] | 0.8 | Усовершенствованный Эйлера | Трапеций |
| 7.2.23 | 1.6 | [0.5, 1.5] | 0.6 | Рунге-Кутты 3 порядка I | Центральных прямоугольни-ков с уточнением по Рунге |
| 7.2.24 | 1.2 | [0.2, 1.2] | 0.7 | Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка | Симпсона |
| 7.2.25 | 0.8 | [0.8, 1.8] | 0.8 | Метод разложения по Тейлору 2 порядка | Трапеций |
| 7.2.26 | 0.5 | [0.2, 1.2] | 1.1 | Рунге-Кутты 3 порядка III | Центральных прямоугольников |
| 7.2.27 | 1.4 | [0.5, 1.5] | 0.6 | Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка | Левых прямоугольников |
| 7.2.28 | 0.9 | [0.2, 1.2] | 0.3 | Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка | Симпсона |
| 7.2.29 | 1.8 | [0.5, 1.5] | 0.4 | Рунге-Кутты 3 порядка II | Правых прямоугольников |
| 7.2.30 | 0.6 | [0.5, 1.5] | 0.3 | Метод разложения по Тейлору 3 порядка | Левых прямоугольников |

***ПРИЛОЖЕНИЕ 7.B***

**I. *Правило Рунге практической оценки погрешности* решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка (правило двойного пересчета):**

 где    — порядок метода

**II. Расчетные формулы методов решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка:**

1. Метод разложения по формуле Тейлора:

**2-го порядка: **

**3-го порядка: **

в этих формулах значения функции  и её частных производных берутся в точке 

2. Модифицированный метод Эйлера 2-го порядка (метод Эйлера-Коши):

 

3. Усовершенствованный метод Эйлера 2 порядка:



4. Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I):  где

  

5. Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант II):  где

  

6. Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант III):  где

  

7. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка:  где

   

8. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка:



9. Экстраполяционный метод Адамса 3-го порядка:



10. Экстраполяционный метод Адамса 4-го порядка:



11. Интерполяционный метод Адамса 2-го порядка:

****

12. Интерполяционный метод Адамса 3-го порядка:

****

13. Метод Гира 2-го порядка:

****

14. Метод Гира 3-го порядка:



ЛИТЕРАТУРА

**1.** Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.

1. [↑](#footnote-ref-1)