2016 IMO 第一階段選訓營

【獨立研究一】2016 年 3 月 26 日 8:30~10:20

1. 設函數 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$，滿足:

   (1) $\forall x,y\ge 0$，有 $f(x)f(y)\le y^2 f(\frac{x}{2})+x^2 f(\frac{y}{2})$;

   (2) $\forall 0\le x\le 1$， $f(x)\le 2016$。

   證明: $f(x)\le x^2$，對所有 $x\ge 0$ 都成立。

   Suppose function $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ satisfies:

   (1) $\forall x,y\ge 0$, we have $f(x)f(y)\le y^2 f(\frac{x}{2})+x^2 f(\frac{y}{2})$;

   (2) $\forall 0\le x\le 1$, $f(x)\le 2016$.

   Prove that $f(x)\le x^2$ for all $x\ge 0$.

2. 設兩圓 O_1,O_2 交於 B、C 兩點，其中 BC 為圓 O_1 的直徑。自 C 作圓 O_1 的切線，交圓 O_2 於點 A。設直線 AB 交 O_1 於點 E，直線 CE 交圓 O_2 於點 F，自線段 AF 上任取一點 H，直線 HE 交圓 O_1 於點 G，且直線 BG 與直線 AC 交於點 D。

   證明: $\dfrac{AH}{HF}=\dfrac{AC}{CD}$。

   Circles O_1 and O_2 intersect at two points B and C, and BC is the diameter of circle O_1. Construct a tangent line of circle O_1 at C and intersecting circle O_2 at another point A. We join AB to intersect O_1 at point E, then join CE and extend it to intersect circle O_2 at point F. Assume that H is an arbitrary point on the line segment AF. We join HE and extend it to intersect circle O_1 at point G, and join BG and extend it to intersect the extended line of AC at point D.

   Prove that $\dfrac{AH}{HF}=\dfrac{AC}{CD}$.

【獨立研究二】2016 年 3 月 26 日 16:10~18:00

1. 桌面上有 n 張牌排成一圈，每張牌都有一面是黑的，另一面是白的，定義一次操作為:選擇一張黑面朝上的牌，將它和與它相鄰的兩張牌同時翻面。假設一開始時，只有 1 張黑面朝上的牌，試回答並證明:

   (a) 若 $n=2015$，是否能透過有限次操作使所有牌都白面朝上?

   (b) 若 $n=2016$，是否能透過有限次操作使所有牌都白面朝上?

   Let n cards are placed in a circle. Each card has a white side and a black side. On each move, you pick one card with black side up, flip it over, and also flip over the two neighboring cards. Suppose initially, there are only one black-side-up card.

   (a) If $n=2015$, can you make all cards white-side-up through a finite number of moves?

   (b) If $n=2016$, can you make all cards white-side-up through a finite number of moves?

2. 試求所有滿足 $(a-b)^{ab}=a^b\cdot b^a$ 且 $a>b$ 的正整數數對 (a,b)。

   Find all ordered pairs (a,b) of positive integers that satisfy $a>b$ and the equation $(a-b)^{ab}=a^b\cdot b^a$.

【獨立研究三】2016 年 3 月 27 日 8:30~10:20

1. 給定正整數 M，定義數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 如後: $a_0 = \frac{2M+1}{2}$，且對所有的 $k = 0,1,2,\ldots$，令 $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$。找出所有的正整數 M，使得上述定義的數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 中，至少有一項是整數。

   (註: $\lfloor x \rfloor$ 表示不超過實數 x 的最大整數。)

   Determine all positive integers M for which the sequence $a_0, a_1, a_2, \ldots$, defined by $a_0 = \frac{2M+1}{2}$ and $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ for $k = 0,1,2,\ldots$, contains at least one integer term.

   (*Remark*. For a real number *x*, $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer that does not exceed *x*)

2. 令 a,b,c 為非負實數，滿足 $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$。試求

$$(a+b+c)^{2016}\left(\frac{1}{a^{2016}+b^{2016}}+\frac{1}{b^{2016}+c^{2016}}+\frac{1}{c^{2016}+a^{2016}}\right)$$

   的最小值。

   Let a,b,c be nonnegative real numbers such that $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$. Find the minimum of

$$(a+b+c)^{2016}\left(\frac{1}{a^{2016}+b^{2016}}+\frac{1}{b^{2016}+c^{2016}}+\frac{1}{c^{2016}+a^{2016}}\right).$$

【模擬競賽 Day 1】2016 年 3 月 28 日 8:30~13:00

1. 設 AB 為圓 O 上的弦，M 為 AB 劣弧的中點。由圓 O 外一點 C 向圓 O 引切線，設切點分別為 S、T，令線段 MS 與線段 AB 的交點為 E，線段 MT 與線段 AB 的交點為 F，由 E 點作 AB 線段的垂線，交 OS 於 X 點；由 F 點作 AB 線段的垂線，交 OT 於 Y 點。另外再由 C 向圓 O 引一割線，設兩交點分別為 P、Q，設線段 MP 與線段 AB 交於 R 點，令三角形 PQR 的外心為 Z 點。
   證明:X、Y、Z 三點共線。
   Let AB be a chord on a circle O, M be the midpoint of the smaller arc AB. From a point C outside the circle O draws two tangents to the circle O at the points S and T. Suppose MS intersects with AB at the point E, MT intersects with AB at the point F. From E,F draw a line perpendicular to AB that intersects with OS,OT at the points X,Y, respectively. Draw another line from C which intersects with the circle O at the points P and Q. Let R be the intersection point of MP and AB. Finally, let Z be the circumcenter of triangle PQR.
   Prove that X,Y and Z are collinear.
2. 令 n 為一正整數，求
$$\sum_{1\le r<s\le 2n}(s-r-n)x_r x_s$$
   的最大值，其中 $-1\le x_i \le 1, i=1,2,3,...,2n$。
   Let n be a fixed positive integer. Find the maximum possible value of
$$\sum_{1\le r<s\le 2n}(s-r-n)x_r x_s$$
   where $-1\le x_i\le 1$ for all $i=1,2,3,...,2n$.
3. 令 $\mathbb{Z}^+$ 代表所有正整數所成的集合，試求所有滿足下列條件的映成函數 $f:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$:對任意 $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$，下列三條件均成立:
   (i) $f(a,b)\le a+b$
   (ii) $f(a,f(b,c))=f(f(a,b),c)$
   (iii) $\binom{f(a,b)}{a}$ 與 $\binom{f(a,b)}{b}$ 都是奇數。(其中 $\binom{n}{k}$ 為二項式係數 C_k^n)
   Let $\mathbb{Z}^+$ denote the set of all positive integers. Find all surjective functions $f:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ that satisfy all of the following conditions: for all $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$,
   (i) $f(a,b)\le a+b$;
   (ii) $f(a,f(b,c))=f(f(a,b),c)$
   (iii) Both $\binom{f(a,b)}{a}$ and $\binom{f(a,b)}{b}$ are odd numbers (where $\binom{n}{k}$ denotes the binomial coefficients C_k^n)

【模擬競賽 Day 2】2016 年 3 月 29 日 8:30~13:00

4. 令所有整數所成的集合為$\mathbb{Z}$，求所有函數$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$滿足:
$$f(x-f(y))=f(f(x))-f(y)-1$$
對所有整數x,y都成立。
Let $\mathbb{Z}$ be the set of all integers. Determine all function $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ such that
$$f(x-f(y))=f(f(x))-f(y)-1$$
holds for all $x,y\in\mathbb{Z}$.

5. 設三角形 *ABC* 為銳角三角形，點 *M* 為 *AC* 的中點，一圓ω通過 *B*、*M* 兩點，並與 *AB*、*BC* 兩邊分別再交於 *P*、*Q* 兩點。令點 *T* 是讓 *BPTQ* 形成平行四邊形的一點，當 *T* 落在三角形 *ABC* 的外接圓上時，試決定BT/BM的所有可能值。
Let *ABC* be an acute triangle, and let *M* be the midpoint of *AC*. A circle ω passing through *B* and *M* meets the sides *AB* and *BC* again at *P* and *Q*, respectively. Let *T* be the point such that the quadrilateral *BPTQ* is a parallelogram. Suppose that *T* lies on the circumcircle of the triangle *ABC*. Determine all possible values of BT/BM.

6. 令 *S* 為所有正整數的一個非空子集，一個正整數 *n* 被稱為**乾淨的**，若且唯若它可以被表示成 *S* 的奇數個相異元素的和，且這個表示法是唯一的。試證:存在無窮多個不乾淨的正整數。
Let *S* be a nonempty set of positive integers. We say that a positive integer *n* is *clean* if it has a unique representation as a sum of an odd number of distinct element from *S*. Prove that there exist infinite many positive integers that are not clean.

2016 IMO 第一階段選訓營

【獨立研究一】2016 年 3 月 26 日 8:30~10:20

1. 設函數 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$，滿足:

   (1) $\forall x,y\ge 0$，有 $f(x)f(y)\le y^2 f(\frac{x}{2})+x^2 f(\frac{y}{2})$;

   (2) $\forall 0\le x\le 1$，$f(x)\le 2016$。

   證明: $f(x)\le x^2$，對所有 $x\ge 0$ 都成立。

   Suppose function $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ satisfies:

   (1) $\forall x,y\ge 0$, we have $f(x)f(y)\le y^2 f(\frac{x}{2})+x^2 f(\frac{y}{2})$;

   (2) $\forall 0\le x\le 1$, $f(x)\le 2016$.

   Prove that $f(x)\le x^2$ for all $x\ge 0$.

2. 設兩圓 O_1,O_2 交於 B、C 兩點，其中 BC 為圓 O_1 的直徑。自 C 作圓 O_1 的切線，交圓 O_2 於點 A。設直線 AB 交 O_1 於點 E，直線 CE 交圓 O_2 於點 F，自線段 AF 上任取一點 H，直線 HE 交圓 O_1 於點 G，且直線 BG 與直線 AC 交於點 D。

   證明: $\dfrac{AH}{HF}=\dfrac{AC}{CD}$。

   Circles O_1 and O_2 intersect at two points B and C, and BC is the diameter of circle O_1. Construct a tangent line of circle O_1 at C and intersecting circle O_2 at another point A. We join AB to intersect O_1 at point E, then join CE and extend it to intersect circle O_2 at point F. Assume that H is an arbitrary point on the line segment AF. We join HE and extend it to intersect circle O_1 at point G, and join BG and extend it to intersect the extended line of AC at point D.

   Prove that $\dfrac{AH}{HF}=\dfrac{AC}{CD}$.

【獨立研究二】2016 年 3 月 26 日 16:10~18:00

1. 桌面上有 n 張牌排成一圈，每張牌都有一面是黑的，另一面是白的，定義一次操作為:選擇一張黑面朝上的牌，將它和與它相鄰的兩張牌同時翻面。假設一開始時，只有 1 張黑面朝上的牌，試回答並證明:

   (a) 若 $n=2015$ ，是否能透過有限次操作使所有牌都白面朝上?

   (b) 若 $n=2016$ ，是否能透過有限次操作使所有牌都白面朝上?

   Let n cards are placed in a circle. Each card has a white side and a black side. On each move, you pick one card with black side up, flip it over, and also flip over the two neighboring cards. Suppose initially, there are only one black-side-up card.

   (a) If $n=2015$, can you make all cards white-side-up through a finite number of moves?

   (b) If $n=2016$, can you make all cards white-side-up through a finite number of moves?

2. 試求所有滿足 $(a-b)^{ab}=a^b\cdot b^a$ 且 $a>b$ 的正整數數對 (a,b) 。

   Find all ordered pairs (a,b) of positive integers that satisfy $a>b$ and the equation $(a-b)^{ab}=a^b\cdot b^a$.

【獨立研究三】2016 年 3 月 27 日 8:30~10:20

1. 給定正整數 M，定義數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 如後: $a_0 = \frac{2M+1}{2}$，且對所有的 $k = 0,1,2,\ldots$，令 $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$。找出所有的正整數 M，使得上述定義的數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 中，至少有一項是整數。

   (註: $\lfloor x \rfloor$ 表示不超過實數 x 的最大整數。)

   Determine all positive integers M for which the sequence $a_0, a_1, a_2, \ldots$, defined by $a_0 = \frac{2M+1}{2}$ and $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ for $k = 0,1,2,\ldots$, contains at least one integer term.

   (*Remark*. For a real number x, $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer that does not exceed x)

2. 令 a,b,c 為非負實數，滿足 $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$。試求

$$(a+b+c)^{2016}\left(\frac{1}{a^{2016}+b^{2016}}+\frac{1}{b^{2016}+c^{2016}}+\frac{1}{c^{2016}+a^{2016}}\right)$$

   的最小值。

   Let a,b,c be nonnegative real numbers such that $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$. Find the minimum of

$$(a+b+c)^{2016}\left(\frac{1}{a^{2016}+b^{2016}}+\frac{1}{b^{2016}+c^{2016}}+\frac{1}{c^{2016}+a^{2016}}\right).$$

【模擬競賽 Day 1】2016 年 3 月 28 日 8:30~13:00

1. 設 AB 為圓 O 上的弦，M 為 AB 劣弧的中點。由圓 O 外一點 C 向圓 O 引切線，設切點分別為 S、T，令線段 MS 與線段 AB 的交點為 E，線段 MT 與線段 AB 的交點為 F，由 E 點作 AB 線段的垂線，交 OS 於 X 點；由 F 點作 AB 線段的垂線，交 OT 於 Y 點。另外再由 C 向圓 O 引一割線，設兩交點分別為 P、Q，設線段 MP 與線段 AB 交於 R 點，令三角形 PQR 的外心為 Z 點。

   證明:X、Y、Z 三點共線。

   Let AB be a chord on a circle O, M be the midpoint of the smaller arc AB. From a point C outside the circle O draws two tangents to the circle O at the points S and T. Suppose MS intersects with AB at the point E, MT intersects with AB at the point F. From E,F draw a line perpendicular to AB that intersects with OS,OT at the points X,Y, respectively. Draw another line from C which intersects with the circle O at the points P and Q. Let R be the intersection point of MP and AB. Finally, let Z be the circumcenter of triangle PQR.

   Prove that X,Y and Z are collinear.

2. 令 n 為一正整數，求

$$\sum_{1\le r<s\le 2n}(s-r-n)x_r x_s$$

   的最大值，其中 $-1\le x_i\le 1, i=1,2,3,...,2n$ 。

   Let n be a fixed positive integer. Find the maximum possible value of

$$\sum_{1\le r<s\le 2n}(s-r-n)x_r x_s$$

   where $-1\le x_i\le 1$ for all $i=1,2,3,...,2n$.

3. 令 $\mathbb{Z}^+$ 代表所有正整數所成的集合，試求所有滿足下列條件的映成函數 $f:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$:對任意 $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ ，下列三條件均成立:

   (i) $f(a,b)\le a+b$

   (ii) $f(a,f(b,c))=f(f(a,b),c)$

   (iii) $\binom{f(a,b)}{a}$ 與 $\binom{f(a,b)}{b}$ 都是奇數。(其中 $\binom{n}{k}$ 為二項式係數 C_k^n)

   Let $\mathbb{Z}^+$ denote the set of all positive integers. Find all surjective functions $f:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ that satisfy all of the following conditions: for all $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$,

   (i) $f(a,b)\le a+b$;

   (ii) $f(a,f(b,c))=f(f(a,b),c)$

   (iii) Both $\binom{f(a,b)}{a}$ and $\binom{f(a,b)}{b}$ are odd numbers (where $\binom{n}{k}$ denotes the binomial coefficients C_k^n)

【模擬競賽 Day 2】2016 年 3 月 29 日 8:30~13:00

4. 令所有整數所成的集合為 $\mathbb{Z}$ ，求所有函數 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 滿足:

$$f(x-f(y))=f(f(x))-f(y)-1$$

對所有整數 x,y 都成立。

Let $\mathbb{Z}$ be the set of all integers. Determine all function $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ such that

$$f(x-f(y))=f(f(x))-f(y)-1$$

holds for all $x,y\in\mathbb{Z}$.

5. 設三角形 ABC 為銳角三角形，點 M 為 AC 的中點，一圓 ω 通過 B、M 兩點，並與 AB、BC 兩邊分別再交於 P、Q 兩點。令點 T 是讓 $BPTQ$ 形成平行四邊形的一點，當 T 落在三角形 ABC 的外接圓上時，試決定 BT/BM 的所有可能值。

Let ABC be an acute triangle, and let M be the midpoint of AC. A circle ω passing through B and M meets the sides AB and BC again at P and Q, respectively. Let T be the point such that the quadrilateral $BPTQ$ is a parallelogram. Suppose that T lies on the circumcircle of the triangle ABC. Determine all possible values of BT/BM.

6. 令 S 為所有正整數的一個非空子集，一個正整數 n 被稱為**乾淨的**，若且唯若它可以被表示成 S 的奇數個相異元素的和，且這個表示法是唯一的。試證:存在無窮多個不乾淨的正整數。

Let S be a nonempty set of positive integers. We say that a positive integer n is *clean* if it has a unique representation as a sum of an odd number of distinct element from S. Prove that there exist infinite many positive integers that are not clean.