一、填充題（每題 5 分，共計 40 分）

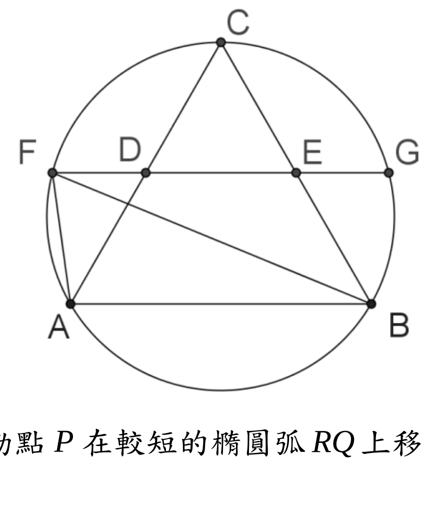
1. 求 $2^{2015} \div 104$ 的餘數。

2. 將大小形狀相同的 8 個藍球、8 個紅球、8 個綠球全分給甲、乙兩人，要求兩人的總球數要一樣，問有幾種分法？

3. ΔABC 中，三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上分別有一點 D、E、F，滿足 $\overline{AF}:\overline{FB}=\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{CE}:\overline{EA}=2:1$，又 $\overline{AD}$ 與 $\overline{EF}$ 交於 G，求 $\dfrac{\overline{FG}}{\overline{GE}}$。

4. 方程組 $\begin{cases} \dfrac{x}{1^2+2^2}+\dfrac{y}{1^2+4^2}+\dfrac{z}{1^2+6^2}=1 \\ \dfrac{x}{3^2+2^2}+\dfrac{y}{3^2+4^2}+\dfrac{z}{3^2+6^2}=1 \\ \dfrac{x}{5^2+2^2}+\dfrac{y}{5^2+4^2}+\dfrac{z}{5^2+6^2}=1 \end{cases}$ 的解 $(x, y, z)=(\alpha, \beta, \gamma)$，求 $\alpha+\beta+\gamma=$ 。

5. 如圖，ABC 為正三角形，D、E 分別是 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 中點，直線 $\overleftrightarrow{DE}$ 與 ΔABC 的外接圓交於 F、G 兩點，試求 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$ 之值。



6. 給定橢圓 $\Gamma: 4x^2+y^2-8x-4y+7=0$ 上的兩個點 $Q(1, 1)$ 和 $R(\frac{1}{2}, 2)$，O 為橢圓中心。若動點 P 在較短的橢圓弧 RQ 上移動，則四邊形 $ORPQ$ 的最大面積為何？

7. 在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，$\overline{CH}$ 為 $\overline{AB}$ 上的高，若 ΔBCH 的內切圓半徑是 ΔACH 的內切圓半徑的 3 倍，且 $\overline{AB}=10$，求 $\overline{AC}$ 長？

8. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(x)+f(1-2x)=3x-1$，$f(1)=1$，求 $f(\dfrac{2^{2015}+1}{3})$。

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 12 分，共計 60 分）

1. 設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的頂點座標為 $(-1,0)$，且對任意實數 x，不等式 $x\le f(x)\le \frac{1}{2}(x^2+1)$ 恆成立，則 a 之值為何？

2. 在圓心為 O、一條直徑為 $\overline{AB}$ 的半圓上有兩點 C、D，ΔOCD 的外接圓與 $\overline{AB}$ 交於 O、E 兩相異點。若直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 與直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於 F 點，求證：ΔDEF 的外接圓與 $\overline{OD}$ 切於 D 點。

3. 編號 1 ~ 20 的椅子依編號序順時針排在圓桌旁，10 男 10 女每個人各坐定於一張椅子上。求證：
(1) 若從編號 k 的椅子開始，依順時針方向的連續 4 張椅子上有 a_k 個女生，則 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=40$。
(2) 必然有相鄰的 4 個人，其男女各半。

4. 求所有有序正整數組(n, a, b, c)，使得 $3^n = a!+b!+c!$ 且 $a\ge b\ge c$。(註：$k! = 1\times2\times\cdots\times k$，$k\in\mathbf{N}$)

5. 三正數 a, b, c 滿足 $a^2+b^2+c^2=1$。證明：$a^2bc+ab^2c+abc^2\le\frac{1}{3}$。

班級______座號____姓名__________

一、填充題（每題 5 分，共計 40 分）

1.	2.
3.	4.
5.	6.
7.	8.

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 12 分，共計 60 分）

1.
2.

班級______座號____姓名___________

3.
4.
5.

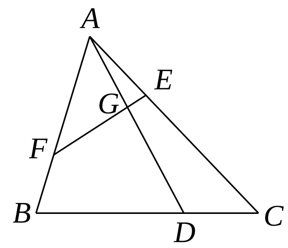
班級______座號____姓名___________

一、填充題（每題 5 分，共計 40 分）

1.	2.
72	61
3.	4.
4	91
5.	6.
$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
7.	8.
$\sqrt{10}$	$3-2^{2015}$

1. 由費馬小定理，$2^{12}\equiv 1 \pmod{13}$，所以 $2^{2015}\equiv (2^{12})^{7}\times 2^{11}\equiv 2048\equiv 7 \pmod{13}$，令 $2^{2015}=13t+7,\ t\in\mathbf{N}\Rightarrow 13t+7\equiv 0 \pmod 8$
$\Rightarrow 13t\equiv -7 \pmod 8 \Rightarrow -3t\equiv -7 \pmod 8 \Rightarrow 3t\equiv 7 \pmod 8\Rightarrow 9t\equiv 21 \pmod 8 \Rightarrow t\equiv 5 \pmod 8$，令 $t=8k+5,\ k\in\mathbf{N}$，則
$2^{2015}=13(8k+5)+7=104k+72$，即 2^{2015} 除以 104 餘 72。

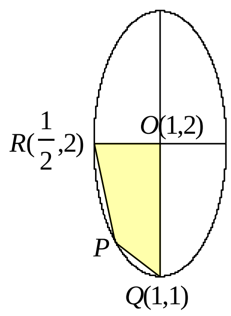
2. 設甲分得 x 個藍球、y 個紅球、z 個綠球，則乙分得 $8-x$ 個藍球、$8-y$ 個紅球、$8-z$ 個綠球，
令 $S=\{(x,y,z)\mid x+y+z=12$，x,y,z 為非負整數$\}$，$S_1=\{(x,y,z)\mid x+y+z=12$，$x,y,z$ 為非負整數，$x\ge 9\}$，
$S_2=\{(x,y,z)\mid x+y+z=12$，$x,y,z$ 為非負整數，$y\ge 9\}$，$S_3=\{(x,y,z)\mid x+y+z=12$，$x,y,z$ 為非負整數，$z\ge 9\}$，
則由取捨原理知所求為 $n(S)-n(S_1\cup S_2\cup S_3)=C^{14}_{2}-C^{3}_{1}C^{5}_{2}=61$。



3. 法一：由向量的分點公式知
$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overrightarrow{AG}=t\,\overrightarrow{AD}=\frac{t}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2t}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{t}{3}(\frac{3}{2}\overrightarrow{AF})+\frac{2t}{3}(3\overrightarrow{AE})=\frac{t}{2}\overrightarrow{AF}+2t\,\overrightarrow{AE}$
$\Rightarrow \dfrac{\overline{FG}}{\overline{GE}}=\dfrac{2t}{\frac{t}{2}}=4$。

4. 依題意 $\begin{cases}\dfrac{\alpha}{1^2+2^2}+\dfrac{\beta}{1^2+4^2}+\dfrac{\gamma}{1^2+6^2}=1\\ \dfrac{\alpha}{3^2+2^2}+\dfrac{\beta}{3^2+4^2}+\dfrac{\gamma}{3^2+6^2}=1\\ \dfrac{a}{5^2+2^2}+\dfrac{\beta}{5^2+4^2}+\dfrac{\gamma}{5^2+6^2}=1\end{cases}$，故 A 的方程式 $\dfrac{\alpha}{A+2^2}+\dfrac{\beta}{A+4^2}+\dfrac{\gamma}{A+6^2}=1$ 有根 $1^2,3^2,5^2$，同乘以分母在移項得
$(A+2^2)(A+4^2)(A+6^2)-\alpha(A+4^2)(A+6^2)-\beta(A+2^2)(A+6^2)-\gamma(A+2^2)(A+4^2)=0$，
整理得 $A^3+(2^2+4^2+6^2-\alpha-\beta-\gamma)A^2+pA+q=0$，其中 p,q 為常數。而其三根為 $1^2,3^2,5^2$，故由根與係數關係得
$1^2+3^2+5^2=-(2^2+4^2+6^2-\alpha-\beta-\gamma)\Rightarrow \alpha-\beta-\gamma=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=\dfrac{6\cdot(6+1)\cdot(2\cdot 6+1)}{6}=91$。

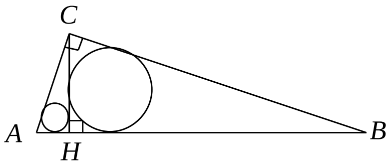
5. 不妨令ΔABC 的邊長為 2，再設 $\overline{EG}=\overline{DF}=x$，因為 $\overline{ED}=\overline{EC}=\overline{EB}=\frac{1}{2}\overline{BC}=1$，由圓冪定理知 $\overline{FE}\times\overline{EG}=\overline{CE}\times\overline{EB}$
$\Rightarrow (1+x)x=1\times 1\Rightarrow x^2+x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$(負不合)。又$\angle FEB=120°,\ \angle FDA=60°$，由餘弦定理知
$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1^2-2x\cos 60°}}{\sqrt{(1+x)^2+1^2-2(1+x)\cos 120°}}=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+3x+3}}=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 。



6. 整理得Γ：$\dfrac{(x-1)^2}{(\frac{1}{2})^2}+\dfrac{(y-2)^2}{1^2}=1$，略圖如右，可知 Q 與 R 分別為長軸與短軸上的一個頂點，
令 P 點坐標參數式 $P(1+\frac{1}{2}\cos\theta,\ 2+\sin\theta)$，則 $(ORPQ$ 面積$)=(\Delta OPR$ 面積$)+(\Delta OPQ$ 面積$)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\cos\theta=\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin(\theta+45^\circ)\le\frac{\sqrt{2}}{4}$，故當 $\theta=45^\circ$ 時，$ORPQ$ 面積有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$。

7. 由於 $\Delta BCH\sim\Delta CAH$，又其內切圓半徑比為 3：1，故兩三角形的相似比亦為 3：1
$\Rightarrow\overline{BH}=3\overline{CH}=9\overline{AH}$，而 $10=\overline{AB}=\overline{BH}+\overline{AH}=10\overline{AH}\Rightarrow\overline{AH}=1\Rightarrow\overline{CH}=3$
$\Rightarrow\overline{AC}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$。



8. 令 $a_1=1$，$a_n=1-2a_{n-1}, n\ge2$，則 $a_n-\frac{1}{3}=-2(a_{n-1}-\frac{1}{3})\Rightarrow a_n-\frac{1}{3}=(-2)^{n-1}(a_1-\frac{1}{3})\Rightarrow a_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$ ……(*)

$n\ge2$ 時，以 $x=a_{n-1}$ 代入題目的方程式得 $f(a_{n-1})+f(1-2a_{n-1})=3a_{n-1}-1\Rightarrow f(a_{n-1})+f(a_n)=-(-2)^{n-1}$，再同除以 $(-1)^n$

$$\Rightarrow-\frac{f(a_{n-1})}{(-1)^{n-1}}+\frac{f(a_n)}{(-1)^n}=2^{n-1}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{f(a_{n-1})}{(-1)^{n-1}}+\frac{f(a_n)}{(-1)^n}=2^{n-1}\\-\frac{f(a_{n-2})}{(-1)^{n-2}}+\frac{f(a_{n-1})}{(-1)^{n-1}}=2^{n-2}\\\vdots\\-\frac{f(a_1)}{(-1)^1}+\frac{f(a_2)}{(-1)^2}=2^1\end{cases}$$
，相加得 $-\frac{f(a_1)}{(-1)^1}+\frac{f(a_n)}{(-1)^n}=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^1=2^n-2$

$$\Rightarrow\frac{f(a_n)}{(-1)^n}=2^n-3\Rightarrow f(a_n)=(-1)^n\cdot(2^n-3)$$

最後 n 以 2015 代入得 $f(a_{2015})=(-1)^{2015}\cdot(2^{2015}-3)$，即 $f(\frac{1+2^{2015}}{3})=3-2^{2015}$。

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 12 分，共計 60 分）

1.

答：$a=\frac{1}{4}$。

因為頂點在$(-1, 0)$，所以 $f(x)=a(x+1)^2=ax^2+2ax+a$。(2 分)

依題意，$\begin{cases}f(x)\ge x\\f(x)\le\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\end{cases},\forall x\in\mathbf{R}$，

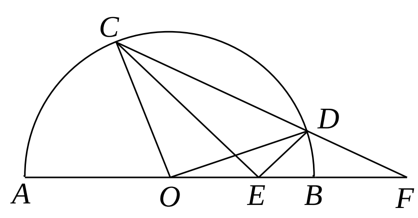
$$\Rightarrow\begin{cases}ax^2+(2a-1)x+a\ge0\\(2a-1)x^2+4ax+(2a-1)\le0\end{cases},\forall x\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a>0\wedge(2a-1)^2-4a^2\ge0\\2a-1<0\wedge(4a)^2-4(2a-1)^2\le0\end{cases},\forall x\in\mathbf{R}\text{ (5 分)}$$

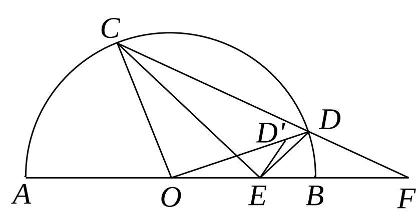
$$\Rightarrow\begin{cases}a>0\wedge a\ge\frac{1}{4}\\a<\frac{1}{2}\wedge a\le\frac{1}{4}\end{cases},\forall x\in\mathbf{R}\ \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$
。(5 分) (只寫 $a=\frac{1}{4}$ 給 2 分)

2.

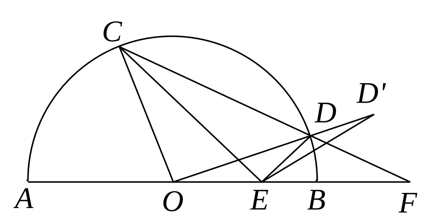
法一：由於 O, C, D, E 共圓且 $\overline{OC}=\overline{OD}$，所以$\angle DEF=\angle OCD=\angle ODC$，
$\Rightarrow\angle OFD=\angle ODC-\angle FOD=\angle DEF-\angle EOD=\angle ODE$，
即$\angle OFD=\angle ODE$，又$\angle FOD=\angle DOE$，所以$\Delta OFD\sim\Delta ODE$ (AA 相似)
$\Rightarrow\overline{OF}:\overline{OD}=\overline{OD}:\overline{OE}\Rightarrow\overline{OD}^2=\overline{OF}\times\overline{OE}$
$\Rightarrow\overline{OD}$ 為ΔDEF 外接圓的切線段(圓冪逆定理)，得證。



法二：令半圓半徑為 r，由共圓知 $\overline{FE}\times\overline{FO}=\overline{FC}\times\overline{FD}=\overline{FA}\times\overline{FB}$
$\Rightarrow(\overline{OF}-\overline{OE})\times\overline{OF}=(\overline{OF}+r)\times(\overline{OF}-r)\Rightarrow\overline{OE}\times\overline{OF}=r^2=\overline{OD}^2$
$\Rightarrow\overline{OD}$ 為ΔDEF 外接圓的切線段(圓冪逆定理)，得證。



法三：反設ΔDEF 外接圓與 $\overleftrightarrow{OD}$ 交於 D, D'兩相異點，(如右中與右下圖)
則陸續由 O, C, D, E 共圓、$\overline{OC}=\overline{OD}$ 且 D, D', E, F 共圓得
$\angle DEF=\angle OCD=\angle ODC=\angle D'EF$
$\Rightarrow D=D'$，矛盾，假設錯誤，故得證原命題。



班級______座號____姓名___________

3.

(1) 坐在編號 n 椅子上的女生會恰在考慮 $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ 時被計算一次，共算了 4 次 (其中 n 為 1 到 20 的正整數，$a_{-2} = a_{18}, a_{-1} = a_{19}, a_0 = a_{20}$)。所以對於總和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 而言，所有女生(共 10 位)共被計算了 $10 \times 4 = 40$ 次，即 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 40$。

(2) 對於 a_n 與 a_{n+1} 來說，共同計算了編號 $n + 1, n + 2, n + 3$ 椅子上的女生人數(其中 n 為 1 到 20 的正整數，$a_{21} = a_1$，編號 21, 22, 23, 24 的椅子依序指編號 1, 2, 3, 4 的椅子)。故若編號 n 與編號 $n + 4$ 椅子上的人性別相同，則 $a_n = a_{n+1}$；若編號 n 與編號 $n + 4$ 椅子上的人性別不同，則$|a_n - a_{n+1}| = 1$，也就是說相鄰 a_n 與 a_{n+1} 最多相差 1。……(*)

今反設不存在 $a_n = 2, n = 1, 2, \cdots, 20$。

① 當 $a_1 = 0$ 或 1 時，由結論(*)與上述假設知 $a_2 = 0$ 或 1，同理可得 $a_3 = 0$ 或 $1, a_4 = 0$ 或 $1\cdots, a_{20} = 0$ 或 1。但這樣有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} \le 20$，此與(1)的結果矛盾。

② 當 $a_1 = 3$ 或 4 時，由結論(*)與上述假設知 $a_2 = 3$ 或 4，同理可得 $a_3 = 3$ 或 $4, a_4 = 3$ 或 $4\cdots, a_{20} = 3$ 或 4。但這樣有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} \ge 60$，此與(1)的結果矛盾。

綜合①,②知假設錯誤，故必然存在 $n \in \{1, 2, \cdots, 20\}$，使得 $a_n = 2$，如此編號 $n, n + 1, n + 2, n + 3$ 連續四張椅子上的人恰為兩男兩女(其中編號 21, 22, 23 的椅子依序指編號 1, 2, 3 的椅子)，證畢。

4.

答：$(n, a, b, c) = (1, 1, 1, 1), (2, 3, 2, 1), (3, 4, 2, 1)$。

若 $c \ge 2$，則 $a!, b!, c!$ 皆為偶數，得 $a! + b! + c!$ 為偶數，即 3^n 為偶數，這不可能，故 $c = 1$。

① 若 $b = 1$，則 $a! = 3^n - 2$ 為奇數，所以 $a = 1 \Rightarrow n = 1$。

② 若 $b = 2$，則 $a! = 3^n - 3 \cdots(*) \Rightarrow n \ge 2$。此時若 $a \ge 6$，則 $a!$ 為 9 的倍數，但 $3^n - 3 = 3(3^{n-1} - 1)$ 不為 9 的倍數，不合，故有 $a \le 5$。將 $a = 5, 4, 3, 2$ 分別代入(*)式得符合題意的 $(n, a) = (2, 3), (3, 4)$。

③ 若 $b \ge 3$，則 $a!, b!$ 皆為 3 的倍數，得 $a! + b! + c! = a! + b! + 1$ 被 3 除餘 1，但 3^n 為 3 的倍數，不合。

綜合①,②,③得所有解 $(n, a, b, c) = (1, 1, 1, 1), (2, 3, 2, 1), (3, 4, 2, 1)$。

5.

由算幾不等式，$\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \ge \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \le \dfrac{1}{\sqrt{27}}$ ……①

再由柯西不等式，$(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \ge (a + b + c)^2 \Rightarrow a + b + c \le \sqrt{3}$ ……②

①,②兩式相乘得 $abc(a + b + c) \le \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} \Rightarrow a^2bc + ab^2c + abc^2 \le \dfrac{1}{3}$，得證。