二〇〇七 亞太數學奧林匹亞研習營, 獨立研究

2007 年 2 月 10 日

時間限制: 計三小時 (08:30 – 11:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫

答案不得以修正液 (帶) 修正

不得使用電子計算器

每題七分

1. 試決定最小的兩個正整數 n 使得集合 $S = \{1, 2, \cdots, 3n-1, 3n\}$ 可被分割成 n 個彼此互不相交的集合 $\{x, y, z\}$ 其中 $x + y = 3z$.

2. 求出所有的四位數 $abcd$, 其中 a, b, c, d 分別爲千位數, 百位數, 十位數, 個位數, 使得此四位數數恰等於
$$a^a + b^b + c^c + d^d.$$

3. 令 a, b, c 表示三角形的三邊長。試證
$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

4. 給定三角形 ΔABC 及其外接圓, D 是弧 BC 的中點 (取不包含 A 點的弧), E 是弧 AC 的中點 (取不包含 B 點的弧), F 是弧 AB 的中點 (取不包含 C 點的弧), DE 與 BC, AC 分別交於 G, H. DF 與 BC, AB 分別交於 I, J. 又令 M, N 分別是 GH, IJ 的中點, AD 與 EF 交於 P 點。

   (i) 試將 ΔDMN 的三個內角用 $\angle A, \angle B, \angle C$ 表示。

   (ii) 證明 ΔDMN 的外接圓圓心落在 ΔPMN 的外接圓上。

二〇〇七 亞太數學奧林匹亞研習營, 獨立研究參考解答

2007 年 2 月 10 日

時間限制: 計三小時 (08:30 – 11:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫

答案不得以修正液 (帶) 修正

不得使用電子計算器

每題七分

問題一: 試決定最小的兩個正整數 n 使得集合 $S = \{1, 2, \cdots, 3n-1, 3n\}$ 可被分割成 n 個不相交的集合 $\{x, y, z\}$ 其中 $x + y = 3z$.

解: 假設此 n 個不相交的集合爲 $\{x_k, y_k, z_k\}$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 則

$$\sum_{i=1}^{3n} i = \sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k + z_k) = 4\sum_{k=1}^{n} z_k \quad (\text{因} \quad x_k + y_k = 3z_k)$$

所以 4 必定整除 $\frac{1}{2}3n(3n+1)$, 或者 $3n(3n+1)$ 是 8 的倍數。故

$$n \equiv 0 \;\; \text{或} \;\; n \equiv 5 \pmod{8}.$$

(i) 當 $n = 5$, 此 n 個彼此互不相交的集合可爲

$$\{1,11,4\},\ \{2,13,5\},\ \{3,15,6\},\ \{9,12,7\},\ \{10,14,8\}$$
$$\{1,14,5\},\ \{2,10,4\},\ \{3,15,6\},\ \{9,12,7\},\ \{11,13,8\}$$
$$\{1,8,3\},\ \{2,13,5\},\ \{12,15,9\},\ \{4,14,6\},\ \{10,11,7\}$$
$$\{1,11,4\},\ \{2,7,3\},\ \{5,13,6\},\ \{10,14,8\},\ \{12,15,9\}$$
$$\{1,8,3\},\ \{2,13,5\},\ \{4,14,6\},\ \{10,11,7\},\ \{12,15,9\}$$

(ii) 當 $n = 8$, 此 n 個不相交的集合可爲

$$\{1,5,2\},\ \{3,9,4\},\ \{6,18,8\},\ \{7,23,10\},$$
$$\{14,19,11\},\ \{16,20,12\},\ \{17,22,13\},\ \{21,24,15\}.$$

問題二: 求出所有的四位數 $abcd$, 其中 a, b, c, d 分別爲千位數, 百位數, 十位數, 個位數, 使得此四位數數恰等於

$$a^a + b^b + c^c + d^d.$$

解: 3435 爲唯一的解。

首先, 定 $0^0 = 1$. 令 $m = abcd$, $s = a^a + b^b + c^c + d^d$ 且假設 $m = s$. 顯然地, $10^3 \le m < 10^4$. 若對所有的 $x \in \{a, b, c, d\}$ 且 $x \ge 6$, 則 $s \ge 6^6 > 10^4$ 此爲矛盾。所以 $a, b, c, d \le 5$.

若對所有的 $x \in \{a, b, c, d\})$ 且 $x < 5$, 則 $s \le 4 \times 4^4 = 1024$ 且 $a = b = c = d$ 是唯一的組合使得 $s \ge 10^3$. 然而, 在此情況下, $s = 1024 \ne 4444 = m$. 因此 $x = 5$ 對某些 $x \in \{a, b, c, d\}$. 不能有兩個 x 的值等於 5 或者 $s \ge 2 \times 5^5$ (否則 m 的某些爲數會超過 6), 因此只有一個 x 的值爲 5.

因 $s > 5^5 = 3125$ 且 $s \le 5^5 + 3 \times 4^4 = 3893 < 4000$, 必有 $a = 3$. 因此

$$s = 5^5 + 3^3 + x^x + y^y = 3152 + x^x + y^y, \quad \text{此處 } x, y \in \{a, b, c, d\}.$$

不失其一般性, 假設 $0 \le y \le x \le 4$.

若 $x = 0$ 則 $y = 0$ 且 $s = 3154 \ne 3^3 + 1^1 + 5^5 + 4^4 = 3409$

若 $x = 1$ 則 $y = 0, 1$ 且 $s = 3154 \ne 3^3 + 1^1 + 5^5 + 4^4 = 3409$

若 $x = 2$ 則

$$s = 3156 + y^y = \begin{cases} 3157, & y = 0 \quad (\text{不合}) \\ 3157, & y = 1 \quad (\text{不合}) \\ 3160, & y = 2 \quad (\text{不合}) \end{cases}$$

若 $x = 3$ 則

$$s = 3179 + y^y \begin{cases} 3180, & y = 0 \quad (\text{不合}) \\ 3180, & y = 1 \quad (\text{不合}) \\ 3183, & y = 2 \quad (\text{不合}) \\ 3206, & y = 3 \quad (\text{不合}) \end{cases}$$

若 $x = 4$ 則

$$s = 3408 + y^y \begin{cases} 3409, & y = 0 \quad (\text{不合}) \\ 3409, & y = 1 \quad (\text{不合}) \\ 3412, & y = 2 \quad (\text{不合}) \\ 3435, & y = 3 \quad (\text{合}) \\ 3664, & y = 4 \quad (\text{不合}) \end{cases}$$

綜合上述, $m = 3435$ 是唯一的解。

問題三: 令 a, b, c 表示三角形的三邊長。試證

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \ge \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

解: 令

$$x = \frac{a}{b},\, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}.$$

則 $xyz = 1$ 且原不等式可改寫成

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \ge 0,$$

上式等價於

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + xy^2 + yz^2 + zx^2 - 3 \ge 0 \tag{1}$$

利用算幾不等式可得

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \ge \sqrt[3]{xyz}(x+y+z) = x+y+z \tag{2}$$

且

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 \ge 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3. \tag{3}$$

將 (2) 式與 (3) 式相加即得 (1) 式且當 $x = y = z$ 時等號成立。故原不等式成立且當 $a = b = c$ 時等號成立。

問題四: 給定三角形 ΔABC 及其外接圓, D 是弧 BC 的中點 (取不包含 A 點的弧), E 是弧 AC 的中點 (取不包含 B 點的弧), F 是弧 AB 的中點 (取不包含 C 點的弧), DE 與 BC, AC 分別交於 G, H. DF 與 BC, AB 分別交於 I, J. 又令 M, N 分別是 GH, IJ 的中點, AD 與 EF 交於 P 點。

(i) 試將 ΔDMN 的三個內角用 $\angle A, \angle B, \angle C$ 表示。

(ii) 證明 ΔDMN 的外接圓圓心落在 ΔPMN 的外接圓上。

解: (i) 答: $\angle D = \frac{\angle B+\angle C}{2}$, $\angle M = \frac{\angle A+\angle B}{2}$, $\angle N = \frac{\angle A+\angle C}{2}$.

因$\angle BFD = \angle A/2, \angle FBC = \angle B + \angle FBA = \angle B + \angle C/2$, 所以

$$\angle BIJ = 180^\circ - \angle A/2 - (\angle B + \angle C/2) = \angle A/2 + \angle C/2.$$

同理, $\angle BJI = \angle A/2 + \angle C/2$. 所以 ΔBIJ 是等腰三角形。故 BN 是 $\angle B$ 的角平分線。同理,CM 是 $\angle C$ 的角平分線。因此它們與 AD ($\angle A$ 的角平分線) 相交於 ΔABC 的內心 Q 點。因爲 $NI = NJ, MC = MQ$, 因此 $\angle DNQ = \angle DMQ = 90^\circ$, 所以 $DMNQ$ 四點共圓, 且 DQ 是 ΔDMN 的外接圓的直徑。因此

$$\angle DNM = \angle DQM = 90^\circ - \angle QDM = 90^\circ - \angle B/2 = \angle A/2 + \angle C/2.$$

同理, $\angle DMN = \angle A/2 + \angle B/2$. 故 $\angle MDN = \angle B/2 + \angle C/2$.

(ii) 令 O 是線段 DQ 的中點。所以 O 是 ΔDMN 的外接圓圓心。我們要證明 O 落在 ΔPMN 的外接圓上。

由第一小題可知 Q 是 ΔDEF 的垂心。現在考慮 ΔDEF 及 垂心 Q. 由已知結果 (九點圓定理): 垂心 Q 到三頂點 D, E, F 的連線線段中點, 會落在垂足三角形 ΔPMN (orthic triangle) 的外接圓上 (此圓即九點圓)。今 O 是線段 DQ 的中點, 故得證。