一、填充題（每題 10 分，共計 80 分）

1. 在南北朝《張丘建算經》中有一個很有名的百雞問題，題目是這樣：公雞 5 元錢 1 隻，母雞 3 元錢 1 隻，小雞 3 隻 1 元錢，現在用 100 元錢買 100 隻雞，分別可以買 a 隻公雞、b 隻母雞及 c 隻小雞？求整數組(a, b, c)。(答案不只一組)

2. 若 $x=\sqrt{\dfrac{8}{3+\sqrt{5}}}$ ，試求 $\log_{\frac{1}{4}}(2x^4+5x^3-7x^2-6x+6)$ 之值

3. 求 7^8+4^5 的正因數個數。

4. 立方體中，任選兩組頂點所形成的兩條線段為相互歪斜線段，共有幾對？

5. 數列 $1, 2, 3, \cdots, 2010$ 中，扣除與 2010 不互質的數後，第 500 個數是多少？

6. 找出方程式 $x^3+2\sqrt{2}x^2+2x+\sqrt{2}+1=0$ 的所有解。

7. A, B, C 為橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上三點，且 ΔABC 的重心恰為原點，已知 $A(1,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$，求 $\overline{BC}$ 之長。

8. 設 a, b 為正實數，求 $2a+b+\dfrac{2}{a}+\dfrac{18}{ab}$ 的最小值。

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 20 分，共計 100 分）

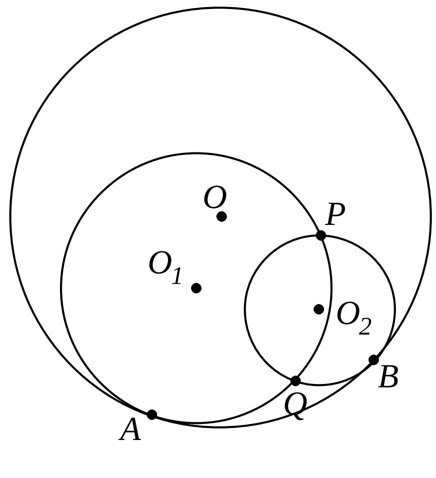
1. 容器內裝有濃度為 10%的溶液 100 公克，注入濃度為 40%的溶液 25 公克，均勻攪拌後，再倒出混合液 25 克，如此反覆下去。設 $a_0\% = 10\%$表示溶液的初始濃度，$a_n\%$代表稀釋 n 次後的溶液濃度($n\in\mathbf{N}$)，試求：
(1) $a_1 = ?$ (4 分) (2) 列出 a_n 與 a_{n+1} 的關係式。(6 分) (3) 求出 a_n 的一般式。(10 分)

2. 證明：任意四邊形 $ABCD$ 的四邊長、兩條對角線長及對角線中點連線長有如下的關係：

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4\overline{MN}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$(其中 M,N 分別是對角線 $\overline{BD},\overline{AC}$ 的中點)

3. 某比賽共有 n 人參加 ($n\ge 2$)，採單循環制(即任兩人都需要比賽一場)，每場比賽沒有和局。若有某甲滿足〝對於任何其他選手乙，必有甲勝乙或是甲間接勝乙(即甲勝某丙而丙勝乙)〞則稱甲為優秀選手。證明：
(1)必存在優秀選手。(10 分) (2) 若這樣的優秀選手只有一個，則此選手在此次比賽期間全勝。(10 分)

4. 如圖，圓 O 與圓 O_1 內切於 A，圓 O 與圓 O_2 內切於 B，而圓 O_1 與圓 O_2 相交於 P, Q 兩點，試證明：若 A, Q, B 三點共線，則$\angle OPQ$ 為直角。



5. 三實數 $a<b<c$ 滿足 $a+b+c=6$，$ab+bc+ca=9$。試證：$0<a<1<b<3<c<4$。

班級______座號____姓名__________

一、填充題（每題 10 分，共計 80 分）

1.	2.
3.	4.
5.	6.
7.	8.

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 20 分，共計 100 分）

1.
2.

班級______座號____姓名___________

3.
4.
5.

一、填充題（每題 10 分，共計 80 分）

1.	2.
(0, 25, 75), (4, 18, 78), (8, 11, 81), (12, 4, 84)	$-\frac{1}{2}$
3.	4.
24	174
5.	6.
1901	$\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}+1}\,i}{2}$ 或 $-\sqrt{2}-1$
7.	8.
$\frac{3\sqrt{7}}{2}$	11

1. 在南北朝《張丘建算經》中有一個很有名的百雞問題，題目是這樣：公雞 5 元錢 1 隻，母雞 3 元錢 1 隻，小雞 3 隻 1 元錢，現在用 100 元錢買 100 隻雞，分別可以買 a 隻公雞、b 隻母雞及 c 隻小雞？求整數組(a, b, c)。(答案不只一組)

解：依題意 $\begin{cases} a+b+c=100 & \cdots\cdots(1) \\ 5a+3b+\frac{1}{3}c=100 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$，(2)×3 − (1)得 $14a + 8b = 200$，即 $7a + 4b = 100$，易得 4 整除 a，

令 $a = 4t$, 其中 t 為非負整數，代回得 $b = 25 - 7t$，$c = 75 + 3t$，再由 $b \ge 0$ 得 $t \le \frac{25}{7}$，也就是 $t = 0, 1, 2, 3$。

代回便能得到(a, b, c)的所有解(0, 25, 75), (4, 18, 78), (8, 11, 81), (12, 4, 84)。

2. 若 $x=\sqrt{\frac{8}{3+\sqrt{5}}}$，試求 $\log_{\frac{1}{4}}(2x^4+5x^3-7x^2-6x+6)$ 之值。

解：由於 $x=\sqrt{\frac{8}{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{8(3-\sqrt{5})}{3^2-\sqrt{5}^2}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$，故$(x+1)^2=\sqrt{5}^2$，得 $x^2+2x-4=0$，

所以 $2x^4+5x^3-7x^2-6x+6=(x^2+2x-4)(2x^2+x-1)+2=2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}(2x^4+5x^3-7x^2-6x+6)=\log_{\frac{1}{4}}2=-\frac{1}{2}$。

3. 求 7^8+4^5 的正因數個數。

解：$7^8+4^5 = 7^8+2\times7^4\times2^5+2^{10}-2\times7^4\times2^5$
$= (7^4+2^5)^2-(7^2\times2^3)^2$　　(利用加減項後，變成平方差)
$= (7^4+2^5+7^2\times2^3)(7^4+2^5-7^2\times2^3)$　　(變成較小的數字之後，再分解比較好做)
$= 2825\times2041 = 5^2\times113\times13\times157$，所以有(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 24 個正因數。

4. 立方體中，任選兩組頂點所形成的兩條線段為相互歪斜線段，共有幾對？

解：設立方體邊長為 l，任選兩組頂點所形成的線段分長度 l、$\sqrt{2}\,l$、$\sqrt{3}\,l$ 各 12、12、4 條，共 28 條，

其中互相平行者：長度 l 有三個方向各 4 條，有 $3\times C_2^4$；長度 $\sqrt{2}\,l$ 共 12 條，每兩個一對，有 $\frac{12}{2}$ 對；長度 $\sqrt{3}\,l$ 不平行。

而相交於一點者：交於頂點類，有 8 個頂點，每個頂點有 7 條線段通過，有 $8\times C_2^7$ 對；交於各面中點類，各面一對，共 6 對；交於立方體中心者，有 4 條，共 C_2^4 對。

故所求為 $C_2^{28}-(3\times C_2^4+\frac{12}{2})-(8\times C_2^7+6+C_2^4)=174$ 對。

5. 數列 $1, 2, 3,\cdots, 2010$ 中，扣除與 2010 不互質的數後，第 500 個數是多少？

解：由於 $2010 = 2\times3\times5\times67$，此數列共有 $2010\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{67}\right)=528$ 個數，故所求為倒數第 29 個數。

又 $1, 2,\cdots, 30$ 中有 $30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=8$ 個數與 30 互質，所以 $1981, 1982,\cdots, 2010$ 中有 8 個數與 2010 互質，
$1951, 1952,\cdots, 1980$ 中有 8 個數與 2010 互質，$1921, 1922,\cdots, 1950$ 中有 7 個數與 2010 互質(去除 $67\times29=1943$)，
$1891, 1892,\cdots, 1920$ 中有 8 個數與 2010 互質，故為 $1891, 1892,\cdots, 1920$ 中第三個與 2010 互質的數，即 1901。

6. 找出方程式 $x^3+2\sqrt{2}x^2+2x+\sqrt{2}+1=0$ 的所有解。

解：令 $t=\sqrt{2}$，原式成為 $x^3+2tx^2+t^2x+t+1=0$ 得 $xt^2+(2x^2+1)t+(x^3+1)=0$ 十字交乘得 $[xt+(x^2-x+1)][t+(x+1)]=0$，

t 還原得 $x^2+(\sqrt{2}-1)x+1=0$ 或 $x+\sqrt{2}+1=0$，故 $x=\dfrac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}+1}\,i}{2}$ 或 $-\sqrt{2}-1$。

7. A, B, C 為橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上三點，且 ΔABC 的重心恰為原點，已知 $A(1,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$，求 $\overline{BC}$ 之長。

解：設 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$，$x_1\ge x_2$，由重心原點易得 $x_1+x_2=-1, y_1+y_2=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，如此 $\overline{BC}$ 中點 M 為 $(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{4})$，

又 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{9}=1$ 且 $\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{9}=1$，相減得 $\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{9}=0$，化簡得 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率為 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 過 $\overline{BC}$ 中點 $M(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{4})$，所以 $\overleftrightarrow{BC}$ ：$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{3}$，

代入橢圓方程式，解得 $x=1$ 或 -2，故 $B(1,-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}), C(-2, 0)$，故 $\overline{BC}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$。

8. 設 a, b 為正實數，求 $2a+b+\dfrac{2}{a}+\dfrac{18}{ab}$ 的最小值。

解：令 $2a+b+\dfrac{2}{a}+\dfrac{18}{ab}=[ka+b+\dfrac{18}{ab}]+[(2-k)a+\dfrac{2}{a}]$，欲使兩中括號內各利用算幾不等式找出最小值，並使兩者等號成立條件相同，必須有 $ka=b=\dfrac{18}{ab}$ 且 $(2-k)a=\dfrac{2}{a}$，解得 $k=\dfrac{3}{2}, a=2, b=3$。

故 $2a+b+\dfrac{2}{a}+\dfrac{18}{ab}=[\dfrac{3a}{2}+b+\dfrac{18}{ab}]+[\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}]\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{3a}{2}\cdot b\cdot\dfrac{18}{ab}}+2\sqrt{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{2}{a}}=11$，等號會在 $a=2, b=3$ 時成立，得最小值 11。

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 20 分，共計 100 分）

1.

容器內裝有濃度為 10%的溶液 100 公克，注入濃度為 40%的溶液 25 公克，均勻攪拌後，再倒出混合液 25 克，如此反覆下去。設 $a_0\%=10\%$ 表示溶液的初始濃度，$a_n\%$ 代表稀釋 n 次後的溶液濃度($n\in\mathbf{N}$)，試求：

(1) $a_1=$？(4 分)　(2) 列出 a_n 與 a_{n+1} 的關係式。(6 分)　(3) 求出 a_n 的一般式。(10 分)

解：(1) $a_1=\dfrac{10\times100+40\times25}{100+25}=16$。

(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n\times100+40\times25}{100+25}$，即 $a_{n+1}=\dfrac{4}{5}a_n+8$。

(3) 由於 $a_{n+1}-40=\dfrac{4}{5}(a_n-40)$，所以 $a_n-40=(\dfrac{4}{5})(a_{n-1}-40)=(\dfrac{4}{5})^2(a_{n-2}-40)=\cdots=(\dfrac{4}{5})^n(a_0-40)=-30(\dfrac{4}{5})^n$，

得 $a_n=40-30(\dfrac{4}{5})^n$。

答：(1) $a_1=16$, (2) $a_{n+1}=\dfrac{4}{5}a_n+8$, (3) $a_n=40-30(\dfrac{4}{5})^n$

2.

證明：任意四邊形 $ABCD$ 的四邊長、兩條對角線長及對角線中點連線長有如下的關係：

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4\overline{MN}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$（其中 M,N 分別是對角線 $\overline{BD},\overline{AC}$ 的中點）

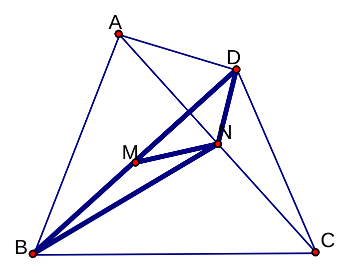
解：連 $\overline{BN},\overline{ND}$ 利用中線定理可知：$2(\overline{DN}^2+\overline{NB}^2)=4\overline{MN}^2+\overline{BD}^2\cdots\cdots(1)$

同理 $2(\overline{CD}^2+\overline{DA}^2)=4\overline{DN}^2+\overline{AC}^2\cdots\cdots(2)$

$2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)=4\overline{BN}^2+\overline{AC}^2\cdots\cdots(3)$

(1)式$+\dfrac{1}{2}\times$(2)式$+\dfrac{1}{2}\times$(3)式後可消去題目中沒有的 $\overline{BN},\overline{ND}$，

得 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4\overline{MN}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$



3.

某比賽共有 n 人參加 $(n \ge 2)$，採單循環制(即任兩人都需要比賽一場)，每場比賽沒有和局。若有某甲滿足〝對於任何其他選手乙，必有甲勝乙或是甲間接勝乙(即甲勝某丙而丙勝乙)〞則稱甲為優秀選手。證明：

(1) 必存在優秀選手。(10 分)　　(2) 若這樣的優秀選手只有一個，則此選手在此次比賽期間全勝。(10 分)

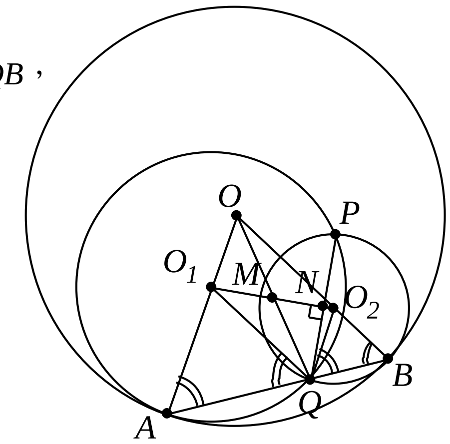
解：

(1) 假設甲為勝利最多場的其中一人，令 A 為甲所勝的所有人形成之集合，B 為勝了甲的所有人形成之集合，顯然除了甲以外的人必在 A 或 B 中。
若 B 中有某乙沒被 A 中的任何人打敗，於是乙勝過 A 中所有人及甲，故乙的勝場數超過甲，此與假設矛盾！
所以 B 中所有人都分別被 A 中的某人打敗，則甲可以間接勝過 B 中所有人，故甲為優秀選手。得證！

(2) 不妨設唯一的優秀選手為甲，令 A 為甲所勝的所有人形成之集合，B 為勝了甲的所有人形成之集合，
若 B 非空集合，由(1)知 B 中有相對於 B 的優秀選手乙，即乙勝過或間接勝過 B 中其他所有人，然而 B 勝甲且 B 透過甲間接勝過 A 中所有人，如此得乙為優秀選手，此與優秀選手的唯一性互相矛盾。
所以 B 為空集合，即甲勝過所有人。得證！

4.

如圖，圓 O 與圓 O_1 內切於 A，圓 O 與圓 O_2 內切於 B，而圓 O_1 與圓 O_2 相交於 P, Q 兩點，試證明：
若 A, Q, B 三點共線，則 $\angle OPQ$ 為直角。



解：設圓 O, O_1, O_2 的半徑分別為 R, r_1, r_2，
由於 $\overline{O_1A} = \overline{O_1Q}$、$\overline{O_2B} = \overline{O_2Q}$、$\overline{OA} = \overline{OB}$，故 $\angle O_1QA = \angle O_1AQ = \angle O_2BQ = \angle O_2QB$，
又 A, Q, B 三點共線，故得 $\overline{OA} // \overline{O_2Q}$ 且 $\overline{OB} // \overline{O_1Q}$，即 OO_1QO_2 為平行四邊形。
如圖，設 $\overline{OQ}$ 與 $\overline{PQ}$ 分別交 $\overline{O_1O_2}$ 於 M, N，則 $\overline{OM} = \overline{MQ}$，$\overline{PN} = \overline{NQ}$。
如此得 $\overline{MN}$ 為 ΔQOP 中點連線，故 $\overline{MN} // \overline{OP}$，又 $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$，得 $\overline{OP} \perp \overline{PQ}$，
即 $\angle OPQ$ 為直角。

5.

三實數 $a < b < c$ 滿足 $a + b + c = 6$，$ab + bc + ca = 9$。試證：$0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$。

解：首先 $ab = 9 - bc - ca = 9 - c(b + a) = 9 - c(6 - c) = (3 - c)^2 \ge 0$，同理 $bc \ge 0, ca \ge 0$，得 $0 \le a < b < c$。
若 $a = 0$，由上一行前面等式知 $c = 3$，再和為 6 得 $b = 3$，此與 $b < c$ 矛盾，故 $0 < a < b < c$。
接著便得 $a = \dfrac{3a}{3} < \dfrac{a+b+c}{3} = 2$，模仿第一行得 $bc = (3 - a)^2$，
再由算幾不等式得 $abc = a(3 - a)^2 = \dfrac{1}{2}2a(3 - a)(3 - a) \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a+(3-a)+(3-a)}{3}\right)^3 = 4$，
等號成立時，$a = 1$，解得 $b = 1, c = 4$，此與 $a < b$ 矛盾，所以等號不會成立，得 $0 < abc < 4$。
然後令 $f(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = x^3 - 6x^2 + 9x - abc$，
而 $f(0) = f(3) = -abc < 0$，$f(1) = f(4) = 4 - abc > 0$，由勘根定理得 $f(x) = 0$ 在 0~1、1~3 及 3~4 間各有一實根，
最後由根與係數關係知 a, b, c 為 $f(x) = 0$ 的三根，配合 $a < b < c$ 即得 $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$。