

一、填充題（每題 5 分，共計 40 分）

1. 將 2012^2 個正數排成一個正方形，每行每列皆 2012 個數，已知每一列都是等差數列，每一行都是等比數列，且所有公比皆相同，若將第 m 行第 n 列的數記為 $a_{m,n}$ ，且 $a_{2,2} = 16$ ， $a_{3,3} = 11$ ， $a_{4,4} = 7$ ，求 $a_{5,5}$ 。
2. 設 $f(x) = \frac{3^{x+1}}{3^x + 3}$ ，試求 $f(\frac{1}{2012}) + f(\frac{2}{2012}) + \cdots + f(\frac{4023}{2012})$ 的值。
3. 若 $[a]$ 為不超過 a 的最大整數，試求方程式 $[x^2 - 7x] = 3x - 23$ 的所有實數解。
4. x, y, z 是三個不全為 0 的實數，試求 $\frac{3xy + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值。
5. $\triangle ABC$ 三邊 \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} 上分別有一點 D, E, F ，已知 \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} 相交於同一點 P ，並滿足 $\overline{PB} = 5$, $\overline{PC} = 6$, $\overline{PD} = 2$, $\overline{PE} = 3$, $\overline{PF} = 4$ ，求 \overline{PA} 長。
6. 方程式 $\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{7} + \frac{z}{8} = 99 \\ \frac{x}{9} + \frac{y}{10} + \frac{z}{11} = 99 \\ \frac{x}{12} + \frac{y}{13} + \frac{z}{14} = 99 \end{cases}$ 的解為 (a, b, c) ，求 $a + b + c$ 之值。
7. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\cos A : \cos B : \cos C = 12 : 9 : 2$ ，求 $\sin A : \sin B : \sin C$ 。
8. 求使 $2^m + 3^n$ 為完全平方數的所有整數對 (m, n) 。

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 12 分，共計 60 分）

1. 哪些連續正整數(至少兩個)的和為 2012？求出所有的解。

2. 若 \overline{AB} 為一單位圓的直徑， M, N 為此圓上異於 A, B 的兩點，使 \overline{AM} 交 \overline{BN} 於 P 點，證明 $\overline{AP} \cdot \overline{AM} + \overline{BP} \cdot \overline{BN}$ 為定值，與 M, N 的選取無關，並求出此定值。

3. 拋物線 $\Gamma: y^2 = kx$ 上有三點 A, B, C ($k \neq 0$)，設 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 的斜率分別為 m_1, m_2, m_3 ，若 $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3}$ ，試證明 B 為原點。

4. 若 n 為大於 1 的自然數， $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為 n 個不同的實數。試證：

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{f_k(a_k)} = 0$$

其中 $f_k(x)(x - a_k) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$ 。

5. 某市共有 a 所高中職以下的學校教師參與一個大型的教育論壇，每所學校推派的教師代表不超過 20 人，而所有教師代表共有 2012 人參加。若會場坐位每一橫排皆有 101 個坐位，且要求每所學校的教師代表要坐在同一橫排。已知：

(1) 會場只要有 n 個橫排，必能保證全部教師代表都能坐。

(2) 若會場只有 $(n-1)$ 個橫排，則無法保證全部教師代表都能坐。

試求出正整數 n 的值並證明之。(證明(1),(2)兩部份各占 6 分)

一、填充題（每題 5 分，共計 40 分）

1.	2.
3.	4.
5.	6.
7.	8.

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 12 分，共計 60 分）

1.
2.

班級_____座號_____姓名_____

3.
4.
5.