第十六屆亞太數學(APMO) 模擬競試

2004 年二月十四日

時間限制: 計三小時 (8:30 – 11:30)

不得使用電子計算器

每題七分

問題一: 令 f 爲從實數映到實數的函數且滿足

$$f(x^3+y^3)=(x+y)((f(x))^2-f(x)f(y)+(f(y))^2),$$

其中 x 與 y 是任意實數。試證: 對任意實數 x, $f(2004x)=2004f(x)$。

證明: (i) 取 $x=y=0$, 則 $f(0)=0$。

(ii) 取 $y=0$ 則 $f(x^3)=x((f(x))^2$, 即 $f(x)=\sqrt[3]{x}(f(\sqrt[3]{x}))^2$。由此可得: x 與 $f(x)$ 具有相同的符號。

令集合 $S=\{k\in\Re|f(kx)=kf(x)\}$, 此處 $\Re$ 表示實數所成的集合。由 S 的定義知: $1\in S$。今假設 $k\in S$, 則

$$kx(f(x))^2=kf(x^3)=f(kx^3)=f((\sqrt[3]{k}x)^3)=\sqrt[3]{k}x(f(\sqrt[3]{k}x))^2,$$

由上式可得 $(\sqrt[3]{k}f(x))^2=(f(\sqrt[3]{k}x))^2$。根據上述: x 與 $f(x)$ 具有相同的符號, 可知 $\sqrt[3]{k}f(x)=f(\sqrt[3]{k}x)$, 所以 $\sqrt[3]{k}\in S$。底下證明 : 若 h, $k\in S$ 則 $h+k\in S$。考慮

$$\begin{aligned}
f((h+k)x) &= f((\sqrt[3]{hx})^3+(\sqrt[3]{kx})^3)\\
&= (\sqrt[3]{hx}+\sqrt[3]{kx})((f(\sqrt[3]{hx})^2-f(\sqrt[3]{hx})f(\sqrt[3]{kx})+(f(\sqrt[3]{kx}))^2)\\
&= (\sqrt[3]{h}+\sqrt[3]{k})\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{h^2}-\sqrt[3]{hk}+\sqrt[3]{k^2})(f(\sqrt[3]{x}))^2\\
&= (h+k)f(x)
\end{aligned}$$

因 $1\in S$, $1+1=2\in S$, 所以集合 S 包含了所有的正整數。由此可知: $1996\in S$。故本題得證。

問題二: 在一圓的圓周上有 24 個點且此 24 個點將圓周分成 24 個長度爲 1 的圓弧。今欲從此 24 個點選出 8 個點使得任意兩個點所構成的圓弧長不爲 3 或 8。試問: 符合上述的取法有多少種?

解: 將此 24 個點以循環次序 0 至 23 表示且安排此 24 個循環次序於 3×8 的陣列中, 如下所示:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 \\ 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 & 2 & 5 \\ 16 & 19 & 22 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \end{array}$$

上述陣列中具有兩個性質: (i) 在相同的列中, 相鄰兩個元素 (第一個元素與最後一個元素亦視爲相鄰兩個元素) 的差爲 3; (ii) 在相同的行中, 相鄰兩個元素 (最頂端的元素與最底端的元素亦視爲相鄰兩個元素) 的差爲 8。因此, 原問題可視爲由上述的陣列中選取 8 個互不相鄰的元素。令 x_n 表示從 $3 \times n$ 的陣列中有效選取的個數, 此處 $n \geq 2$, 則 $x_n + x_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$, $n \geq 3$ 且 $x_2 = 6$ (因爲在第一行中有 3 種選法, 隨後的行中有 2 種選法。另外, 有可能發生在第一行的元素與最後一行的元素是相鄰的。當此情形發生時, 我們必須去掉最後一行, 即考慮從 $3 \times (n-1)$ 的陣列中做有效的選取)。因此

$$\begin{aligned} x_8 &= (x_8 + x_7) - (x_7 + x_6) + (x_6 + x_5) - (x_5 + x_4) + (x_4 + x_3) - (x_3 + x_2) + x_2 \\ &= 3(2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2) \\ &= 258 \end{aligned}$$

故本題有 258 種取法。

問題三: 令 $a, b, c, b+c-a, c+a-b, a+b-c$ 與 $a+b+c$ 爲 7 個相異的質數且滿足 $a+b=800$。若 M 與 m 分別表示此 7 個數的最大値與最小値, 則 $M-m$ 之値爲何?

解: 不妨假設 $a<b$。由 $a+b=800$ 可得 $a+b \equiv 2 \pmod 3$。底下我們分三種情形討論:

(1) $a \equiv 0 \pmod 3$ 且 $b \equiv 2 \pmod 3$。由此可得 $a=3$ 且 $c \not\equiv 0 \pmod 3$。

(i) 若 $c \equiv 1 \pmod 3$, 則 $a+b+c \equiv 0 \pmod 3$。因 $a+b+c$ 與 a 互異, 所以 $a+b+c$ 是一合成數。(矛盾)

(ii) 若 $c \equiv 2 \pmod 3$, 則 $a+b-c \equiv 0 \pmod 3$。因 $a+b-c$ 與 a 互異, 所以 $a+b-c$ 是一合成數。(矛盾)

綜合 (i) 與 (ii), 可知 (1) 不可能發生。

(2) $a \equiv 2 \pmod 3$ 且 $b \equiv 0 \pmod 3$。仿照 (1) 的討論, 亦知 (2) 不可能發生。

所以, (3) $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$ 成立。接著我們討論在 (3) 成立之下, c 的幾種狀況:

(i) 若 $c \equiv 1 \pmod 3$, 則 $a+b+c \equiv 0 \pmod 3$。因 $a+b+c$ 是此 7 個質數的最大數, 所以 $a+b+c \neq 3$。(矛盾)

(ii) 若 $c \equiv 0 \pmod 3$, 則 $c=3$ 且 $c+a-b \equiv 0 \pmod 3$。因 $c+a-b$ 與 c 互異, 所以 $c+a-b$ 是一合成數。(矛盾)

綜合 (i) 與 (ii), 可知 $c \equiv 2 \pmod 3$。因此, $a+b-c \equiv 0 \pmod 3$ 但由題意知: $a+b-c$ 是質數, 故 $a+b-c=3$ 且 $a+b-c$ 是此 7 個相異質數的最小值。由此可得: $c=800-3=797$, $M-m=(a+b+c)-(a+b-c)=2c=1594$。(註: $a=7$ 且 $b=793$ 得到此 7 個相異質數爲: 3,7,11,793,797,1571,1597。)

問題四: 已知一圓與菱形 ABCD 相切, 令其在 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 與 $\overline{DA}$ 之切點分別爲 E, F, G 與 H。假設點 M, N, P 與 Q 分別爲 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 與 $\overline{DA}$ 上的點 且 $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ 分別與弧 EF, 弧 GH 相切。試證明: $\overline{MQ}$ 與 $\overline{NP}$ 互相平行。

證明: 令 O 點爲此圓的圓心且 L 爲 $\overline{MN}$ 與弧 EF 相切之切點。因

$$\angle AOE = \angle COF,\ \angle EOM = \angle MOL,$$

且

$$\angle LON = \angle FON,\ 2\angle AOE + 2\angle EOM + 2\angle FON = 180^\circ.$$

所以 $\angle FON = 90^\circ - \angle AOE - \angle EOM = \angle BOM$。由此可得

$$\angle AMO = \angle ABO + \angle BOM = \angle COF + \angle FON = \angle CON.$$

同理可得: $\angle MAO = \angle OCN$, 因此, $\triangle MAO \sim \triangle OCN$。即得

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CN}} \text{ 或 } \overline{AM} \cdot \overline{CN} = \overline{AO} \cdot \overline{CO}.$$

同理可證: $\overline{AQ} \cdot \overline{CP} = \overline{AO} \cdot \overline{CO}$, 所以

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CN}}.$$

另一方面, 我們亦可證: $\angle MAQ = \angle PCN$, $\triangle MAQ \sim \triangle PCN$。即得證: $\overline{MQ}$ 與 $\overline{NP}$ 互相平行。