二〇〇六 亞太數學奧林匹亞研習營, 獨立研究

2006 年 2 月 13 日

時間限制: 計三小時 (8:30–11:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫

答案不得以修正液 (帶) 修正

不得使用電子計算器

每題七分

1. 等腰三角形 ΔABC, $AC = BC$. 令O 為外心, I 為內心, 且 O 在線段 CI 上. 若已知點 D 在 BC 邊上, 且直線 $OD \perp BI$. 證明 ID 與 AC 平行.

2. 令 R^+ 表示所有正實數所成的集合. 試求所有的函數 $f:\ R^+ \to R^+$ 使得

$$\text{對任意的正實數 } x, y, \quad x^2\Big((f(x) + f(y)\Big) = (x+y)f(yf(x)) \ \text{ 成立.}$$

3. 對任一給定之正整數n, 證明 $5n-1$, $13n-1$, $34n-1$ 不可能都是整數的平方.

4. 在一個有 n 個隊伍的比賽中, 每一支隊伍只和其他隊伍交手一次. 若 對於任意兩個隊 A, B, 恰存在 t 個隊使得 A, B 兩隊皆贏此 t 個隊, 試證:

$$n = 4t + 3.$$

二〇〇六 亞太數學奧林匹亞研習營, 獨立研究參考解答

2006 年 2 月 13 日

時間限制: 計三小時 (8:30–11:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫

答案不得以修正液 (帶) 修正

不得使用電子計算器

每題七分

問題一: 等腰三角形 ΔABC, $AC = BC$. 令O 爲外心, I 爲內心, 且 O 在線段 CI 上. 若已知點 D 在 BC 邊上, 且直線 $OD \perp BI$. 證明 ID 與 AC 平行.

解: 作底邊的高 CE, 則因

$$\angle EIB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC, \quad \angle ODB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC,$$

因此

$$\angle OIB + \angle ODB = 180^\circ,$$

故 B, I, O, D 四點共圓. 因此 $\angle IDB = \angle IOB$. 又 $\angle IOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$, 故 $\angle IDB = \angle ACB$, 所以 ID 與 AC 平行.

註:“O 在線段CI上” 的限制是爲了讓問題簡單化. 這個條件是是多餘的, 去掉後原題仍然成立.

問題二: 令 R^+ 表示所有正實數所成的集合. 試求所有的函數 $f:\ R^+ \to R^+$ 使得

對任意的正實數 $x, y,\quad x^2\Big((f(x)+f(y)\Big) = (x+y)f(yf(x))$ 成立.

解: 令 $f(1)=p$, 則 $p>0$. 取 $x=y=1$, 則經簡單計算可得

$$f(p)=p. \tag{1}$$

取 $x=p, y=1$ 則 $p^2(f(p)+p)=(p+1)f(f(p))$, 由 (1) 可得

$$2p^3=p(p+1).$$

解上式得 p 的値爲: $-1/2, 0, 1$. 但 $p>0$, 所以 $p=1$, 即

$$f(1)=1. \tag{2}$$

令 t 爲任意正實數. 取 $x=1, y=t$, 再由 (2) 可得

$$1+f(t)=(1+t)f(t).$$

解上式得

$$f(t)=\frac{1}{t}. \tag{3}$$

經驗算 $f(t)=1/t$ 滿足題意.

問題三: 對任一給定之正整數n, 證明 $5n-1$, $13n-1$, $34n-1$ 不可能都是整數的平方.

解: 反證. 設 $5n-1$, $13n-1$, $34n-1$ 都是平方數. 則

$$5n-1=k_1^2$$

$$13n-1=k_2^2$$

$$34n-1=k_3^2,$$

其中 k_1,k_2,k_3 都是正整數. 由第三式知 k_3 為奇數, 設 $k_3=2m-1$ 代入得 $17n=2m^2-2m+1$, 故 n 也是奇數.

第二式減第一式得

$$8n=k_2^2-k_1^2.$$

又本來由第一式第二式可知 k_1,k_2 是偶數. 故可設 $k_2=2p, k_1=2q$, 代入上式得 $2n=p^2-q^2=(p+q)(p-q)$

由於 $p^2-q^2=2n$ 是偶數, 因此 p,q 同奇同偶, 故 $(p+q)$, $(p-q)$ 都是偶數. 所以 $2n$ 是 4 的倍數, 故 n 是偶數. 這和剛剛導出的 n 是奇數矛盾.

問題四: 在一個有 n 個隊伍的比賽中, 每一支隊伍只和其他隊伍交手一次. 若 對於任意兩個隊 A, B, 恰存在 t 個隊使得 A, B 兩隊皆贏此 t 個隊, 試證:

$$n = 4t + 3.$$

解: 考慮任意一支隊伍 A, 且假設 A 恰贏 r 個隊伍. 則 $r = 2t + 1$.

考慮序對 (X, Y, A) 使得 A 與 Y 皆贏 X, 滿足此條件的序對個數爲

$$rt = \binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2} \Rightarrow r = 2t + 1.$$

今考慮序對 (X, Y, Z) 使得 X 與 Y 皆贏 Z, 滿足此條件的序對個數爲

$$t\binom{n}{2} = n\binom{2t+1}{2} \Rightarrow n = 4t + 3.$$