一、填充題（每題 12 分，共計 72 分）

1. 假設 $m<n$ 且 m, n 都是正整數，滿足 $(2-\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n})^2=28-2\sqrt[3]{6}$。試求數對$(m, n)$。

2. 在 4×4 的方格中，每個方格中填入一數，使得對於其中任意一個方格，與其相鄰(有公共的邊)的所有方格中的數之和皆為 4，求這 16 個數的總和。

3. 以正十二邊形頂點作為頂點的所有三角形中，鈍角三角形共有幾個？

4. 求最小的自然數 n，使得 n^2 的末四位為 9876。

5. 求 $\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{2009}}{3}\right]=?$ 其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。

6. 設 a, b, c 為正實數，滿足 $\sqrt[2005]{a}\cdot\sqrt[2008]{b}\cdot\sqrt[2011]{c}=\sqrt[2006]{a}\cdot\sqrt[2009]{b}\cdot\sqrt[2012]{c}=\sqrt[2007]{a}\cdot\sqrt[2010]{b}\cdot\sqrt[2013]{c}=98$，試求 $\log_{98}(abc)$之值。

二、計算證明題（每題 18 分，共計 108 分）

1. 在一條很長且筆直的路上，有甲乙丙丁四輛車子，各自以相同的速率行駛。已知在今天中午 12 點之前，甲乙丙三車往相同方向行駛，而且甲車在乙車後面；乙車在丙車後面，丁車自遠方向這三輛車駛來。中午 12 點時，甲車追上乙車；下午 2 點時，甲車追上丙車；下午 5 點時，甲車第一個遇到丁車；下午 6 點時，乙車遇到丁車；下午 6 點 30 分，丙車遇到丁車。問：乙車何時追上丙車？

2. 找出所有滿足下列條件的函數 f ：對於不為 0 或 1 的任意實數，都有 $f(x)+f(1-\frac{1}{x})=x+1+\frac{1}{x-1}$ 。

3. 凸四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$ ，證明：此四邊形 $ABCD$ 對角線互相垂直。

4. 三角形 ABC 中，$\angle BAC=60°$，$\angle ABC=80°$，$\angle BAC$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D；$\angle ABC$ 的平分線交 $\overline{AC}$ 於 E。試證：$\overline{AB}+\overline{BD} = \overline{AE}+\overline{BE}$ 。

5. 兩圓 C_1, C_2 之圓心分別為 O_1, O_2，且交於相異兩點 A, B，若射線 $\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_2B}$ 分別交圓 C_2, C_1 於 D, E。證明：A, O_1, O_2, E, D 五點共圓。

6. 設 x, y, z 為正實數，試證明：$\frac{x}{5x+3y+3z}+\frac{y}{3x+5y+3z}+\frac{z}{3x+3y+5z}\le\frac{3}{11}$ 。

班級______座號____姓名__________

一、填充題（每題 12 分，共計 72 分）

1.	2.	3.
4.	5.	6.

二、計算證明題（每題 18 分，共計 108 分）

1.
2.
3.

班級______座號____姓名___________

4.
5.
6.

一、填充題（每題 12 分，共計 72 分）

1.	2.	3.
(36, 48)	24	120
4.	5.	6.
374	$\dfrac{2^{2010}-1}{3}-1005$	6027

1. 假設 $m<n$ 且 m,n 都是正整數，滿足 $(2-\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n})^2=28-2\sqrt[3]{6}$ 。試求數對(m,n)。

解：顯然 m 和 n 都不是立方數，而 $(2-\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n})^2=4+\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{n^2}-4\sqrt[3]{m}-4\sqrt[3]{n}+2\sqrt[3]{mn}$ ，

唯一可能成為立方數的只有 mn，也就是 $mn=12^3=1728$；而且被消去的根式可能為 $\sqrt[3]{m^2}=4\sqrt[3]{n}$ 或 $\sqrt[3]{n^2}=4\sqrt[3]{m}$ ，

得 $(m,n)=(48,36)$ 不合，以及 $(m,n)=(36,48)$ 。

2. 在 4×4 的方格中，每個方格中填入一數，使得對於其中任意一個方格，與其相鄰(有公共的邊)的所有方格中的數之和皆為 4，求這 16 個數的總和。

解：將這 16 個數給代號(如圖)，有 $A_1+A_3+A_6=4$，$A_2+A_4+A_7=4$，$A_5+A_{10}+A_{13}=4$，$A_8+A_{11}+A_{16}=4$，$A_9+A_{14}=4$，$A_{12}+A_{15}=4$

六式相加即得這 16 個數的總和為 24，例如後圖是一組解。

A_1	A_2	A_3	A_4
A_5	A_6	A_7	A_8
A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}

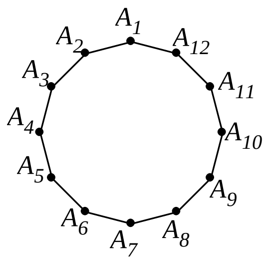
0	4	4	0
0	0	0	0
4	0	0	4
4	0	0	4

3. 以正十二邊形頂點作為頂點的所有三角形中，鈍角三角形共有幾個？

解：如右下圖，以正十二邊形 $A_1A_2\cdots A_{12}$ 頂點作為頂點的所有鈍角三角形中，

令 $A_{k+12}=A_k,\ k=1,2,\cdots,5$，考慮鈍角對邊為 $\overline{A_rA_{r+t}}$ 時，(其中 $r=1,2,\cdots,12$，$t=2,3,4,5$)

鈍角頂點可能為 $A_{r+1},A_{r+2},\cdots,A_{r+t-1}$，共 $t-1$ 種。故總數為 $12\times\sum_{t=2}^{5}(t-1)=120$。



4. 求最小的自然數 n，使得 n^2 的末四位為 9876。

解：最末位為 4 或 6，

若為 4，$(10X+4)^2=100X^2+80X+16$，也就是

$8X+1=7(\text{mod}10)$ 得 X＝2 或 7；$(100X+24)^2=10000X^2+4800X+576$，

$8X+5=8(\text{mod}10)$ ，X 無解；$(100X+74)^2=10000X^2+14800X+5476$，

$8X+4=8(\text{mod}10)$ ，X＝3 或 8，$374^2=139876$符合；

若為 6，$(10X+6)^2=100X^2+120X+36$，

$2X+3=7(\text{mod}10)$ ，X＝2 或 7；$(100X+26)^2=10000X^2+5200X+676$，

$2X+6=8(\text{mod}10)$ ，X＝1 或 6；$(1000X+126)^2=1000000X^2+252000X+15876$，

$2X+5=9(\text{mod}10)$ ，X＝2 或 7，都比 374 來的大。

$(100X+76)^2=10000X^2+15200X+5776$，$2X+7=8(\text{mod}10)$ ，X 無解。

故最小為 374。

5. 求 $\left[\dfrac{1}{3}\right]+\left[\dfrac{2}{3}\right]+\left[\dfrac{4}{3}\right]+\left[\dfrac{8}{3}\right]+\cdots+\left[\dfrac{2^{2009}}{3}\right]=?$ 其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。

解：因為 2＝3－1，所以若 n 為奇數，$\left[\dfrac{2^n}{3}\right]=\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{2}{3}$；若 n 為偶數，$\left[\dfrac{2^n}{3}\right]=\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{1}{3}$ ，

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{2009}}{3}\right]=\frac{1+2+4+\cdots+2^{2009}}{3}-\frac{2010}{2}=\frac{2^{2010}-1}{3}-1005 。$$

6. 設 a,b,c 為正實數，滿足 $\sqrt[2005]{a}\cdot\sqrt[2008]{b}\cdot\sqrt[2011]{c}=\sqrt[2006]{a}\cdot\sqrt[2009]{b}\cdot\sqrt[2012]{c}=\sqrt[2007]{a}\cdot\sqrt[2010]{b}\cdot\sqrt[2013]{c}=98$，試求 $\log_{98}(abc)$之值。

解：$\sqrt[2005]{a}\cdot\sqrt[2008]{b}\cdot\sqrt[2011]{c}=\sqrt[2006]{a}\cdot\sqrt[2009]{b}\cdot\sqrt[2012]{c}=\sqrt[2007]{a}\cdot\sqrt[2010]{b}\cdot\sqrt[2013]{c}=98$，試求 $\log_{98}(abc)$

原式同取以 98 為底之對數得 $\dfrac{\log_{98}a}{2005}+\dfrac{\log_{98}b}{2008}+\dfrac{\log_{98}c}{2011}=\dfrac{\log_{98}a}{2006}+\dfrac{\log_{98}b}{2009}+\dfrac{\log_{98}c}{2012}=\dfrac{\log_{98}a}{2007}+\dfrac{\log_{98}b}{2010}+\dfrac{\log_{98}c}{2013}=1$，

這表示 x 的方程式 $\dfrac{\log_{98}a}{x-3}+\dfrac{\log_{98}b}{x}+\dfrac{\log_{98}c}{x+3}=1$……① 有根 2008, 2009, 2010。

①式乘以 $x(x-3)(x+3)$再移項化簡得

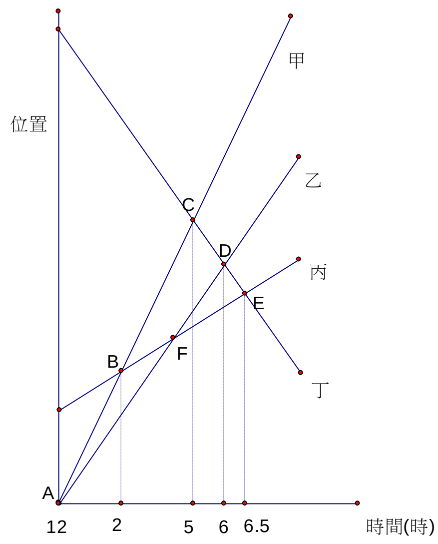
$x^3-(\log_{98}a+\log_{98}b+\log_{98}c)x^2+(x$ 的一次項及常數項$)=0$ 有根 2008, 2009, 2010，

由根與係數關係得 $2008+2009+2010=\log_{98}a+\log_{98}b+\log_{98}c=\log_{98}(abc)$，即 $\log_{98}(abc)=6027$。

二、計算證明題（每題 18 分，共計 108 分）

1.

在一條很長且筆直的路上，有甲乙丙丁四輛車子，各自以相同的速率行駛。已知在今天中午 12 點之前，甲乙丙三車往相同方向行駛，而且甲車在乙車後面；乙車在丙車後面，丁車自遠方向這三輛車駛來。中午 12 點時，甲車追上乙車；下午 2 點時，甲車追上丙車；下午 5 點時，甲車第一個遇到丁車；下午 6 點時，乙車遇到丁車；下午 6 點 30 分，丙車遇到丁車。問：乙車何時追上丙車？



解：作位置對時間圖，如圖，有

$$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}，\frac{CD}{DE}=\frac{1}{0.5}=\frac{2}{1}。$$

對ΔACE 以 BFE 為截線用孟氏定理得

$$\frac{AB}{BC}\times\frac{CE}{ED}\times\frac{DF}{FA}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{1}\times\frac{DF}{FA}=1$$

得到 $\frac{DF}{FA}=\frac{1}{2}$

又 A 與 D 差距 6 小時，故 F 點為下午 4 時。

2.

找出所有滿足下列條件的函數 f ：對於不為 0 或 1 的任意實數，都有 $f(x)+f(1-\frac{1}{x})=x+1+\frac{1}{x-1}$ 。

解：已知 $f(x)+f(1-\frac{1}{x})=x+1+\frac{1}{x-1}$ ………①

在①式中，將 x 以$(1-\frac{1}{x})$代入得

$$f(1-\frac{1}{x})+f(-\frac{1}{x-1})=(1-\frac{1}{x})+1-x \quad ………②$$

在①式中，將 x 以$(-\frac{1}{x-1})$代入得

$$f(-\frac{1}{x-1})+f(x)=-\frac{1}{x-1}+1-\frac{x-1}{x} \quad ………③$$

(①+②+③)÷ 2 得

$$f(x)=x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}。$$

3.

凸四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$，證明：此四邊形 $ABCD$ 對角線互相垂直。

解：依題意，有

$$|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{DC}|^2$$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC})$$

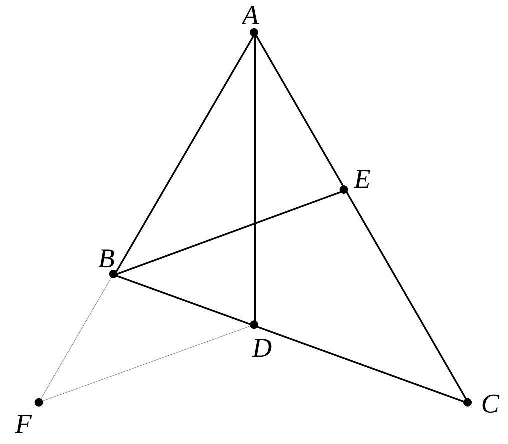
$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC})=0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot(2\overrightarrow{DB})=0$$

故此四邊形 $ABCD$ 對角線 $\overleftrightarrow{AC}$ 與 $\overleftrightarrow{BD}$ 互相垂直。

4.

三角形 ABC 中，$\angle BAC=60^\circ$，$\angle ABC=80^\circ$，$\angle BAC$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D；$\angle ABC$ 的平分線交 $\overline{AC}$ 於 E。試證：$\overline{AB}+\overline{BD} = \overline{AE}+\overline{BE}$。



解：如圖，延長 $\overrightarrow{AB}$ 到 F，使得 $\overline{BF}=\overline{BD}$ 且 $\angle BFD=40^\circ$，故

$\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{BF}=\overline{AF}$ ………①

又 $\angle C=\angle CBE=40^\circ$，$\therefore \overline{EC}=\overline{BE}$，得

$\overline{AE}+\overline{BE}=\overline{AE}+\overline{EC}=\overline{AC}$ ………②

而 $\angle DAF=\angle DAC,\ \angle AFD=40^\circ=\angle ACD,\ \overline{AD}=\overline{AD}$，得

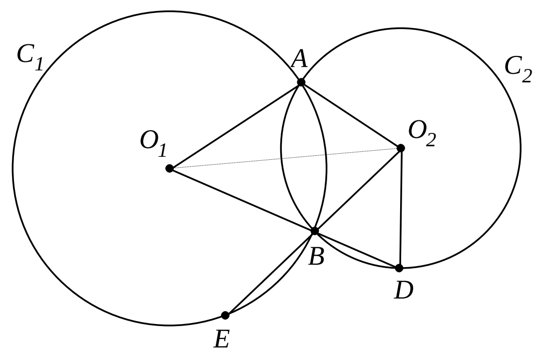
$\Delta ADF\cong\Delta ADC$ (AAS) $\Rightarrow\ \overline{AF}=\overline{AC}$ ………③

由①,②,③知

$\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AF}=\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{BE}$，得證。

5.

兩圓 C_1, C_2 之圓心分別為 O_1, O_2，且交於相異兩點 A, B，若射線 $\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_2B}$ 分別交圓 C_2, C_1 於 D, E。證明：A, O_1, O_2, E, D 五點共圓。



解：如圖，因為 $\overline{O_1A}=\overline{O_1B},\ \overline{O_2A}=\overline{O_2B}, \overline{O_1O_2}=\overline{O_1O_2}$，

故 $\Delta O_1AO_2\cong\Delta O_1BO_2$，得 $\angle O_1AO_2=\angle O_1BO_2$ ………①

又 $\overline{O_2B}=\overline{O_2D}$，所以 $\angle O_2BD=\angle O_2DB$ ………②

由①,②得

$\angle O_1AO_2+\angle O_2DB=\angle O_1BO_2+\angle O_2BD=180^\circ$，

所以 A, O_1, D, O_2 四點共圓，

同理 A, O_1, E, O_2 四點共圓，

得證 A, O_1, E, D, O_2 五點共圓。

6.

設 x, y, z 為正實數，試證明：$\dfrac{x}{5x+3y+3z}+\dfrac{y}{3x+5y+3z}+\dfrac{z}{3x+3y+5z}\le\dfrac{3}{11}$。

解：因為 $\dfrac{x}{5x+3y+3z}+\dfrac{y}{3x+5y+3z}+\dfrac{z}{3x+3y+5z}\le\dfrac{3}{11}$

$$\Leftrightarrow (1-\frac{2x}{5x+3y+3z})+(1-\frac{2y}{3x+5y+3z})+(1-\frac{2z}{3x+3y+5z})\ge 3-2\times\frac{3}{11}$$

$$\Leftrightarrow (3x+3y+3z)(\frac{1}{5x+3y+3z}+\frac{1}{3x+5y+3z}+\frac{1}{3x+3y+5z})\ge\frac{27}{11}$$

$$\Leftrightarrow (11x+11y+11z)(\frac{1}{5x+3y+3z}+\frac{1}{3x+5y+3z}+\frac{1}{3x+3y+5z})\ge 9$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x+3y+3z}^2+\sqrt{3x+5y+3z}^2+\sqrt{3x+3y+5z}^2)(\sqrt{\frac{1}{5x+3y+3z}}^2+\sqrt{\frac{1}{3x+5y+3z}}^2+\sqrt{\frac{1}{3x+3y+5z}}^2)\ge(1+1+1)^2$$

而最後一式由柯西不等式知成立，故得證原式成立。