

2015 亞太數學研習營試題

- 一、試證對於任意正整數 $n \geq 3$ ， $(2n)! < n^{2n}$ 成立。
- 二、由圓 O 外的一點 P 作圓 O 的兩條切線，切點分別為 A 、 B ，在劣弧 AB 上取一點 C ，過 C 作圓 O 的切線，分別交 PA 、 PB 於點 D 、 E ，再過 C 作 CF 垂直 AB ，垂足為 F ，試證： $\angle CFD = \angle CFE$ 。
- 三、令 n 為正整數， A 為 $2n$ 位數且每個數字皆為 4， B 為 n 位數且每個數字皆為 8，試證 $A + 2B + 4$ 是完全平方數。
- 四、有一種語言：艾倫語：係利用 4 個字母來組成各種長度的字串。但對於正整數 $k \geq 2$ ，都有 2 條長度是 k 的「髒話」。字串中有任何一段是「髒話」的，就不合法。
- 證明：艾倫語中可以有任意長度的，不含任何「髒話」的合法字串。
- 五、三角形 ABC 中，點 M 、 N 、 P 分別在邊 BC 、 CA 、 AB 上，已知 $\triangle CNM$ 、 $\triangle APN$ 、 $\triangle BMP$ 都是銳角三角形，且它們的垂心分別是 H_C 、 H_A 、 H_B 。設 AH_A 、 BH_B 、 CH_C 三線共點，證明 MH_A 、 NH_B 、 PH_C 三線也共點。