一、填充題（直接寫答案即可，每題 13 分，共計 8 題 104 分）

1. 設 $f(x)$是一個98次的多項式,使得 $f(k)=\dfrac{1}{k}, k=1,2,\cdots,99$.求 $f(101)$的值 = ________

2. 已知對於所有正整數 k ，恆有$1^2+2^2+3^2+....+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 。

   試求能使$1^2+2^2+3^2+....+k^2$為 200 的倍數之最小正整數 k =_______________ 。

3. 點 $A(0,0)$ 、 $B(0,4)$ 均在圓 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$ 上，M 為圓上之動點，過 $\overline{BM}$ 之中點作 $\overleftrightarrow{AM}$ 的垂線，垂足為 P，求 P 點之軌跡方程式______________________________？

4. $b\in R$的所有可能值使得方程組$\begin{cases}\sqrt{xy}=b^b\\ \log_b(x^{\log_b y})+\log_b(y^{\log_b x})=4b^4\end{cases}$有實數解$(x,y)$。求 b 的範圍?___________________

5. 有五種不同的禮物，每種各有相同之 2 件，全部分給甲、乙、丙、丁、戊 5 人，
   每人得不同種之 2 件且任意 2 人的禮物不能完全相同，問分法有_____________種

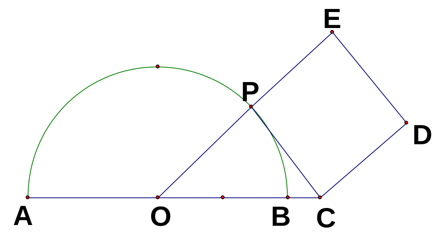
6. 已知一橢圓長短軸均平行座標軸，且與直線 $2x+y=11$ 相切於點 P(4，3)，它又經過點 Q(0，-1) ，點 R(1，1+$\sqrt{10}$)

   求此橢圓方程式=______________ 。

7. arg(z)是 z 的主幅角，方程組 $\begin{cases}\arg(z^2-4)=\dfrac{5}{6}\pi\\ \arg(z^2+4)=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$,則$\arg z$ =______________ 。

8. 如右圖，P 為以 $\overline{AB}=4$ 為直徑半圓周上一點，A 、B 、C 共線且 $\overline{BC}=1$，

   $PCDE$ 為正方形，ΔOPC 之面積與正方形 $PCDE$ 之面積和為 S ，求 S 之最大值 =____________________?



二、計算證明題: （需列出合理過程，共計 5 題 76 分）

1. .設 p 與 q 為兩個互質的正整數，$\dfrac{p}{q}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+.....-\dfrac{1}{1318}+\dfrac{1}{1319}$ ，

   試證 p 可被 1979 整除。(12 分）

2. 設函數 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 滿足下列三個條件：(其中 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\{(x,y)\,|\,x,y$ 為自然數$\}$ 且 $\mathbb{R}$ 代表所有實數所成的集合）

   (1) $f(x,x)=x$
   (2) $f(x,y)=f(y,x)$
   (3) $f(x,y)\cdot(x+y)=f(x,x+y)\cdot y$　　求 $f(16,54)$ 之值。(12 分）

3. 證明 ： $C_1^n C_2^n .....C_n^n \le \dfrac{2^{n(n-1)}}{n!}$　　$\forall \in N$　　(12 分）

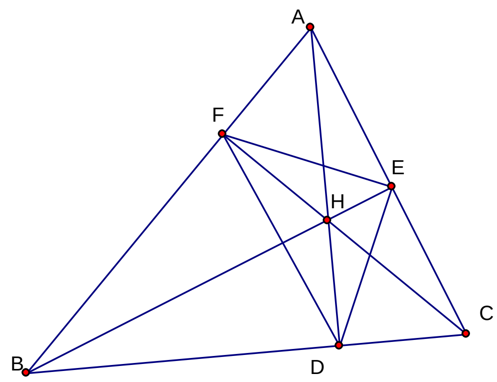
4.一袋中有 2 紅球 1 白球,每次取球,取後放回,取球 n 次,求至少連續抽出 2 白球的機率? （15 分）

5. 三角形的垂心 H,在三邊的射影組成的三角形 DEF,簡稱垂足三角形
   設ΔABC 的半周長 p，外接圓半徑 R，內切圓半徑 r，垂足ΔDEF 的半周長 p_1，外接圓半徑 R_1，內切圓半徑 r_1

   試證：(1) $p_1=\dfrac{r}{R}p$ （8 分）

   (2) $\dfrac{\Delta DEF}{\Delta ABC}=2\cos A\cos B\cos C$ （10 分）

   (3) $R_1=\dfrac{1}{2}R$ （7 分）



班級　　座號　　姓名　　得分

一、填充題（每題 13 分，共計 8 題 104 分）

1. 1	2. 112	3. $x^2+y^2-2x-4y=0$	4. $0<b\le\frac{1}{\sqrt{2}}$
5. 1440	6. $\frac{(x-2)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{12}=1$	7. $\frac{\pi}{3}\ or\ \frac{4\pi}{3}$	8. $13+3\sqrt{17}$

二、計算證明題（需列出合理過程，共計 5 題 76 分）

1. (12 分) 1. $\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$

$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.........+\frac{1}{1319})-2\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+.......+\frac{1}{1318})$

$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.........+\frac{1}{1319})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..........+\frac{1}{659})$

$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+................+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$

$=\frac{1979}{660\times1319}+\frac{1979}{661\times1318}+.................+\frac{1979}{989\times990}$

$\therefore$ p 可被 1979 整除

一、2. (12 分) 【解】

By (3), $x+y=z$

$zf(x,z-x)=(z-x)f(x,z)$

$\therefore\ f(x,z)=\frac{z}{z-x}f(x,z-x)$

$f(16,54)=\frac{54}{38}f(16,38)$

$=\frac{54}{38}\cdot\frac{38}{22}f(16,22)$

$=\frac{54}{22}\cdot\frac{22}{6}f(16,6)$

$=9f(6,16)=9\cdot\frac{16}{10}f(6,10)$

$=9\cdot\frac{16}{10}\cdot\frac{10}{4}f(6,4)$

$=9\cdot4\cdot f(4,6)$

$=9\cdot4\cdot\frac{6}{2}f(4,2)$

$=9\cdot12f(2,4)=9\cdot12\cdot\frac{4}{2}f(2,2)$

$=108\cdot2\cdot2=432$

3. (12 分) $\because\ kC_k^n = k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\cdot C_{k-1}^{n-1}$

$\therefore\ n!(C_1^nC_2^n\ldots\ldots\ldots C_n^n) = n^n(C_0^{n-1}C_1^{n-1}\ldots\ldots C_{n-1}^{n-1})$

由算幾不等式

$$\frac{C_0^{n-1}+C_1^{n-1}+\ldots\ldots+C_{n-1}^{n-1}}{n}\ge\sqrt[n]{C_0^{n-1}C_1^{n-1}\ldots\ldots C_{n-1}^{n-1}}$$

$$\therefore\ \left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)^n\ge C_0^nC_1^n\ldots\ldots C_{n-1}^{n-1}$$

$$\Rightarrow\ 2^{n(n-1)}\ge n^n(C_0^{n-1}C_1^{n-1}\ldots\ldots C_{n-1}^{n-1}) = n!(C_1^nC_2^n\ldots\ldots C_n^n)$$

$$\therefore\ C_1^nC_2^n\ldots\ldots C_n^n\le\frac{2^{n(n-1)}}{n!}\qquad\forall\in N$$

4. (15 分) 解 a_n表示n次取球中,不連續出現2白球的機率 $a_1=1$ $a_2=\frac{8}{9}$

$a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}\frac{2}{3}a_{n-2}$ 特徵方程式 $9x^2-6x-2=0$ $\qquad x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}$

$a_n=p(\frac{1+\sqrt{3}}{3})^n+q(\frac{1-\sqrt{3}}{3})^n$ $\qquad a_1=1$ $a_2=\frac{8}{9}$

$p=\frac{4+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}},q=\frac{2\sqrt{3}-4}{4\sqrt{3}}$

$$\therefore a_n=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[(\frac{1+\sqrt{3}}{3})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{3}}{3})^{n+2}\right]$$

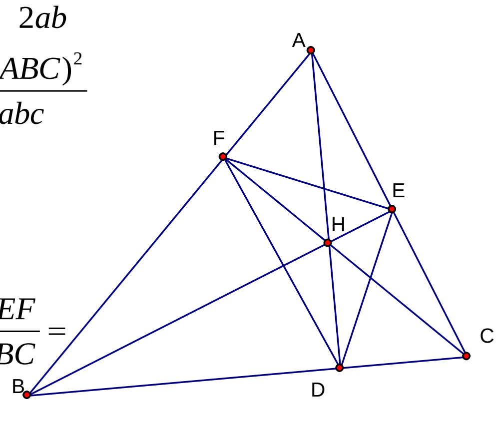
n次取球中,至少 連續出現2白球的機率=1-$\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[(\frac{1+\sqrt{3}}{3})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{3}}{3})^{n+2}\right]$

5. (25 分)(1) $\Delta ABC\sim\Delta AEF$ $\quad EF=\frac{AF}{AC}\bullet a=a\cos A$ 同理 $FD=b\cos B$ $\quad ED=c\cos C$

$$\frac{p_1}{2}=EF+FD+DE=a\cos A+b\cos B+c\cos C=a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+c\cdot\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2c^2b^2+2a^2c^2}{2abc}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}{2abc}=\frac{16(\Delta ABC)^2}{2abc}$$

$$=\frac{16(\Delta ABC)^2}{2\cdot 4R\cdot\Delta ABC}=\frac{2\Delta ABC}{R}=\frac{(a+b+c)r}{R}=\frac{pr}{2R}\qquad\therefore p_1=\frac{r}{R}p$$



(2) $\frac{\Delta AEF}{\Delta ABC}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin A}{\frac{1}{2}bc\cdot\sin A}=\frac{c\cos A\cdot b\cos A}{bc}=\cos^2 A,\frac{\Delta BDF}{\Delta ABC}=\cos^2 B,\frac{\Delta CED}{\Delta ABC}=\cos^2 C,\frac{\Delta DEF}{\Delta ABC}=$

$$\frac{\Delta ABC-(\Delta AEF+\Delta BDF+\Delta DEF)}{\Delta ABC}=1-(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)=2\cos A\cos B\cos C$$

(3) $2\cos A\cos B\cos=\frac{\Delta AEF}{\Delta ABC}=\frac{a'b'c'/4R_1}{abc/4R}=\frac{R\cdot a'b'c'}{R_1\cdot abc}=\frac{R\cdot abc\cos A\cos B\cos C}{R_1\cdot abc}=\frac{R\cdot\cos A\cos B\cos C}{R_1}$

$\therefore\quad R_1=\frac{1}{2}R$