一、填充題（每題 5 分，共計 40 分）

1. 兩圓分別為 C_1：$(x-1)^2+(y-4)^2=1$ 及 C_2：$(x-8)^2+(y-20)^2=4$，若在圓 C_1 上找一點 P，在 C_2 上找一點 Q，在 x 軸上找一點 R，$\overline{PR}+\overline{RQ}$ 之最小值=________。

2. 設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，已知 $\angle A=30°$，$\overline{BC}=3$，則 $\overline{AH}=$________。

3. 求方程組 $\begin{cases} 3x+3y-7\sqrt{x+y+1}=177 \\ x^2+y^2=4000 \end{cases}$ 符合 $x \ge y$ 的實數解 $(x,y)=$________。

4. 有大小形狀相同的 4 個紅球、4 個白球，將這 8 個球任意排成一列，並從左而右依序編號 1 ~ 8，則紅球編號之和超過白球編號之和的排法共有________種。

5. 兩數列 $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases}$, $a_0=0$, $b_0=2$，求 a_{2016} 的個位數為________。

6. 用紅、藍兩色任意塗在某正 9 邊形的 9 個頂點，問存在三個同色頂點能構成銳角三角形的機率為________。

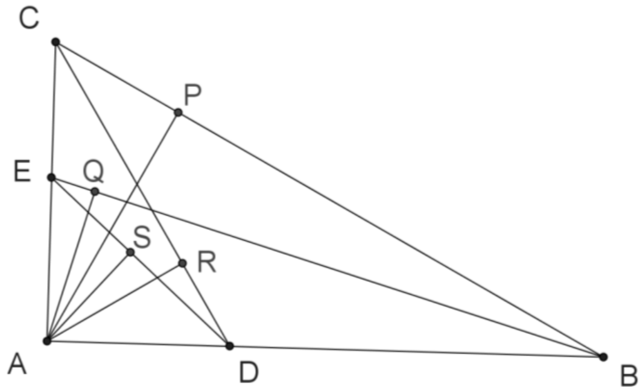
7. a, b, c 為阿拉伯數字, $a \neq 0$，則滿足 $100a+10b+c=(a+5)(b+5)(c+5)$ 的所有可能的三位數〝abc〞=________。

8. 若正方形 $ABCD$ 的邊長為 3，$A_1, A_2, \cdots, A_8$ 為各邊的三等分點，從 $A_1, A_2, \cdots, A_8$ 中任取三點構成三角形，問所有可能的三角形面積之和為 ________。

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 12 分，共計 60 分）

1. 設 $f:N\to R,\ f(1)=\dfrac{3}{2},\forall x\in N,\ f(x+1)=(1+\dfrac{1}{x+1})f(x)+(1+\dfrac{x}{2})f(1)+x^2+2x$，求 $f(100)=$ ________。

2. 如圖，三角形 ABC 中，$\angle A=90^\circ$，D、E 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，P、Q、R、S 分別為 A 在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 上的垂足，試證：P、Q、R、S 四點共圓。



3. 求最大的常數 c，使得對於滿足 $x^2+y^2=1$ 的正實數 x, y，恆有 $x^6+y^6\ge cxy$。

4. 求 $y^2=x^4+x^3+x^2+x+1$ 的所有整數解 (x, y)。

5. S 為 $\{1, 2,\cdots, 105\}$ 的子集合，且 S 中沒有一個元素是另一個元素的 3 倍，設 S 的元素個數為 m，找出 m 的最大值，並證明你的結論。

班級______座號____姓名__________

一、填充題（每題 5 分，共計 40 分）

1.	2.
3.	4.
5.	6.
7.	8.

二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 12 分，共計 60 分）

1.
2.

班級______座號____姓名___________

3.

4.

5.

班級______座號____姓名___________

一、填充題（每題 5 分，共計 40 分）

1.	2.
22	$3\sqrt{3}$
3.	4.
(60, 20)	31
5.	6.
8	$\dfrac{247}{256}$
7.	8.
210, 450, 780	96

1. 作 P 對 x 軸的對稱點 P'，則 P' 在 C_1'：$(x-1)^2+(y+4)^2=1$ 上，
$\Rightarrow \overline{PR}+\overline{RQ}=\overline{P'R}+\overline{RQ}\geq\overline{P'Q}\geq$ 圓 C_1' 與 C_2 圓心距 − 兩圓半徑和 $=\sqrt{(1-8)^2+(-4-20)^2}-(1+2)=22$。

2. 做平行四邊形 $AHCD$，則由 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 知 $\overline{DC}\perp\overline{BC}$，同理有 $\overline{DA}\perp\overline{AB}$，故 A, B, C, D 共圓 $\Rightarrow \angle BDC=\angle BAC=30°$
$\Rightarrow\ \overline{AH}=\overline{DC}=\overline{BC}\cot 30°=3\sqrt{3}$。

3. 令 $t=\sqrt{x+y+1}>0$，則條件第一式$\Rightarrow 3(t^2-1)-7t=177\Rightarrow t=9\vee-\dfrac{20}{3}$ (負不合) $\Rightarrow x+y=80$ (由 $x\geq y$ 知 $x\geq 40$)，
以 $y=80-x$ 代入條件第二式得 $x^2+(80-x)^2=4000\Rightarrow x=60\vee 20$ (20 不合) $\Rightarrow (x, y)=(60, 20)$。

4. 考慮紅白球編號和相同時，紅球編號 $x>y>z>w$ 且 $x+y+z+w=\dfrac{1}{2}(1+2+\cdots+8)=18$

$\Rightarrow$

x	8	8	8	8	7	7	7	6
y	7	6	5	5	6	6	5	5
z	2	3	4	3	4	3	4	4
w	1	1	1	2	1	2	2	3

共 8 種，而任意排列有 $\dfrac{8!}{4!4!}=70$ 種，故紅球編號和超過或不到白球編號和的種類數應該相同，故皆為 $\dfrac{1}{2}(70-8)=31$ 種。

5. 由第一式得 $b_n=a_{n+1}-2a_n$ 與 $b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$ 代入第二式得 $a_{n+2}-2a_{n+1}=a_n+(a_{n+1}-2a_n)$，整理得 $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$，又 $a_0=0$, $b_0=2\Rightarrow a_1=2a_0+b_0=2$，列表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
a_n的個位數	0	2	6	6	2	0	8	4	4	8	0	2	$\cdots$

，又每項由前兩項決定，a_0, a_1 的個位數已與 a_{10}, a_{11} 的個位數對應重複，故知個位數 10 個一循環，a_{2016} 的個位數為 a_6 的個位數 = 8。

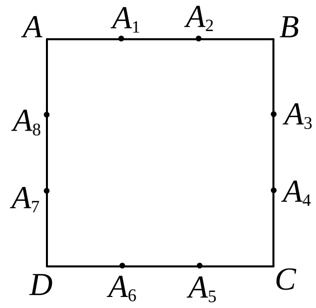
6. 令此正九邊形 $A_1A_2\cdots A_9$，根據鴿籠原理，必有一種顏色塗了 5 個點以上(不妨設為藍色)，而這些點在九個頂點的封閉路徑 $A_1A_5A_9A_4A_8A_3A_7A_2A_6A_1$ 上，必有連續兩點塗藍色(不妨設為 A_1, A_5)，易知若 A_6, A_7, A_8, A_9 中有任一點塗藍色，則會與 A_1, A_5 構成銳角三角形的藍色頂點，如此可推論，若不存在三色頂點構成三角形，只可能讓 A_6, A_7, A_8, A_9 全塗紅色，這樣 A_2, A_3, A_4 須塗藍色，即為 5 個連續點塗一色，另 4 個連續點塗另一色，顏色有 2 種而位置有 9 種，共有 18 種塗法，故所求為 $1-\dfrac{18}{2^9}=\dfrac{247}{256}$。

7. 模 5 可得 $c\equiv abc\ (\text{mod }5)\Rightarrow 5\mid c$ 或 $ab\equiv 1(\text{mod }5)$，原式整理得 $\dfrac{100a+10b-5}{(a+5)(b+5)-1}=c+5$，由於分子為奇數，所以分母必須為奇數，得 a, b 至少有一數為奇數，且 c 為偶數。
若 $5\mid c$，則 $c=0$，代入整理得$(15-b)(a+3)=70\Rightarrow (a, b)=(2, 1), (4, 5), (7, 8)$。否則 $ab\equiv 1(\text{mod }5)$，列表如下

a	1	1	6	2	7	7	3	3	8	4	9	9
b	1	6	1	3	3	8	2	7	7	9	9	4
$\dfrac{100a+10b-5}{(a+5)(b+5)-1}$	3	$\dfrac{31}{13}$	$\dfrac{121}{13}$	$\dfrac{45}{11}$	$\dfrac{145}{19}$	5	$\dfrac{63}{11}$	$\dfrac{73}{19}$	$\dfrac{173}{31}$	$\dfrac{97}{25}$	$\dfrac{197}{39}$	$\dfrac{158}{25}$

，符合的只有$(a, b, c)=(7, 8, 0)$。
故得所有解〝abc〞= 210, 450, 780。

8. 設正方形周邊上各點順序依次為 $A, A_1, A_2, B, A_3, A_4, C, A_5, A_6, D, A_7, A_8$，則 56 種三角形($C_3^8$)中，分為七類(每類 8 個)，依序為$\Delta A_1A_2A_3$, $\Delta A_1A_2A_4$, $\Delta A_1A_2A_5$, $\Delta A_1A_3A_5$, $\Delta A_1A_3A_6$, $\Delta A_1A_4A_5$, $\Delta A_1A_6A_7$，面積總和為 $8\times\frac{1}{2}\times(1\times1+1\times2+1\times3+\sqrt{5}\times\sqrt{5}+3\times2+\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+3\times1)=96$。



二、計算證明題（沒有過程不予計分，部份過程給部份分數，每題 12 分，共計 60 分）

1.

答：507525。

原式同除以 $x+2$，得 $\frac{f(x+1)}{x+2}=\frac{f(x)}{x+1}+\frac{f(1)}{2}+x\Rightarrow$

$$\begin{cases}\frac{f(x)}{x+1}=\frac{f(x-1)}{x}+\frac{f(1)}{2}+x-1\\ \frac{f(x-1)}{x}=\frac{f(x-2)}{x-1}+\frac{f(1)}{2}+x-2\\ \qquad\vdots\\ +)\ \frac{f(2)}{3}=\frac{f(1)}{2}+\frac{f(1)}{2}+1\end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{x+1}=x\frac{f(1)}{2}+\frac{x(x-1)}{2}$$

，即 $f(x)=\frac{x(x+1)(2x+1)}{4}$，

故 $f(100)=\frac{100\times101\times201}{4}=507525$。

2.

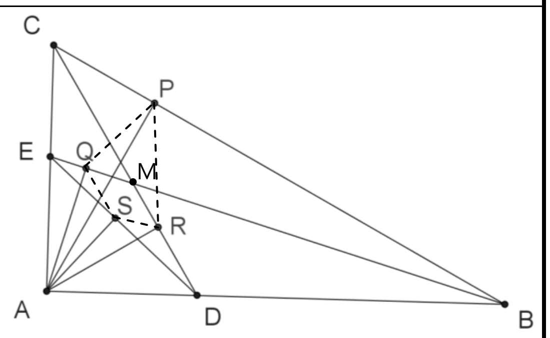
設由垂直條件可知 E, Q, S, A 四點共圓、D, R, S, A 四點共圓，故

$\angle QSR=\angle QEA+\angle RDA$ ⋯①，

同理，A, Q, P, B 四點共圓、A, R, P, C 四點共圓、A, Q, M, R 四點共圓，故

$\angle QPC+\angle RPB=\angle QAB+\angle RAC=90^\circ+\angle QAR=90^\circ+180^\circ-\angle QMR$

$=\angle QEA+\angle RDA\overset{\text{由①}}{=}\angle QSR$，即 $180^\circ-\angle QPR=\angle QSR$，得證。



3.

由算幾不等式，$xy=\sqrt{x^2y^2}\le\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{1}{2}$，又 $x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)=1-3x^2y^2$，

故 $x^6+y^6\ge cxy$ 等價於 $1-3x^2y^2\ge cxy\Leftrightarrow\frac{1-3(xy)^2}{xy}\ge c$，

而 $\frac{1-3(xy)^2}{xy}$ 為 xy 的遞減函數且 $xy\le\frac{1}{2}$，所以當 $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 時，$\frac{1-3(xy)^2}{xy}$ 有最小值 $\frac{1}{2}$，故 c 的最大值為 $\frac{1}{2}$。

4.

答：$(0, 1), (0, -1), (3, 11), (3, -11), (-1, 1), (-1, -1)$。

$x=0$ 時，$y=\pm1$。以下討論 $x\ne0$ 的情形，

$(2y)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=(2x^2+x+2)^2-5x^2<(2x^2+x+2)^2$，

又 $(2y)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=(2x^2+x)^2+3x^2+4x+4>(2x^2+x)^2$ (因為 $3x^2+4x+4$ 恆正)，

故 $(2y)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=(2x^2+x+1)^2$，解得 $x=3, -1$，對應 $y=\pm11, \pm1$。

5.

答：79 個。

給定任意正整數，皆能唯一表示為 $a\cdot3^k$，其中 $(a, 3)=1$, $a\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，

定義 $S_a=\{a\cdot3^0, a\cdot3^1,\cdots, a\cdot3^{k_a}\}$，其中 $a\cdot3^{k_a}\le105<a\cdot3^{k_a+1}$，即 $\frac{105}{3^{k_a}}<a\le\frac{105}{3^{k_a+1}}$。由前述知，這些 S_a 彼此互斥，且聯集為 $\{1, 2,\cdots, 105\}$。而由於 $3^{k_a}\le105$，有 $k_a\le4$，考慮 S 中的元素在 S_a 的分布：

當 k_a 為偶數時，S 最多只能有 S_a 中 $\frac{k_a+2}{2}$ 數(即 $a\cdot3^0, a\cdot3^2,\cdots, a\cdot3^{k_a}$)，否則 S 中會有兩數 $a\cdot3^{t+1}$ 是 $a\cdot3^t$ 的 3 倍，不合；

當 k_a 為奇數時，同理 S 最多只能有 S_a 中 $\frac{k_a+1}{2}$ 數($a\cdot3^1, a\cdot3^3,\cdots, a\cdot3^{k_a}$ 為其中一種可能)。

① $k_a=0$ 時，$35<a\le105$，$(a, 3)=1$，這樣的 a 有 46 個，S 最多只能有 S_a 中 1 個數；

② $k_a=1$ 時，$11<a\le35$，$(a, 3)=1$，這樣的 a 有 16 個，S 最多只能有 S_a 中 1 個數；

③ $k_a=2$ 時，$3<a\le11$，$(a, 3)=1$，這樣的 a 有 6 個，S 最多只能有 S_a 中 2 個數；

④ $k_a=3$ 時，$1<a\le3$，$(a, 3)=1$，這樣的 a 有 1 個，S 最多只能有 S_a 中 2 個數；

⑤ $k_a=4$ 時，$a=1$，這樣的 a 有 1 個，S 最多只能有 S_a 中 3 個數。

綜合①~⑤知，S 中最多只有 $46\times1+16\times1+6\times2+1\times2+1\times3=79$ 個元素，而 $\{1, 4, 5,\cdots,11, 36, 37\cdots, 105\}$ 為其中一解。