2016 亞太數學研習營

1. 求最大的正實數λ，使得對一切正整數 n 及正實數a_i $(i=1,2,...,n)$ 均有

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{a_k}^2}\ge\lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\sum_{s=1}^{k}a_s\right)^2}\right]$$

2. 已知圓Γ是ΔABC的外接圓，D 是 CB 延長線上一點，圓Γ'與Γ切於點 S，與 AD、BD 分別切於點 N、M，MS 的延長線與圓Γ交於點 T，MN 的延長線與 TA 的延長線交於點I_a，證明:
   (1) N,S,A,I_a四點共圓
   (2) $TI_a=TB$。
3. 令x,y,z為正實數，試證

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}\right)>\frac{5}{2}$$

4. 設正整數a,b,c兩兩互質，且$a^3+b^3+c^3$能同時被a^2b,b^2c,c^2a整除，
   (1) 證明$a^2b^2c^2\,\big|\,a^3+b^3+c^3$
   (2) 若$a\ge b\ge c$，求a,b,c之值。
5. 黑板上寫了 2016 個正整數，選取黑板上的兩個數字，把它們擦掉後，再寫上這兩個數的最大公因數與最小公倍數。這整個過程稱為一次「操作」。
   證明:經過有限次操作後，任何後續的操作，都不會改變黑板上的數字。