

九十六學年度師大附中數學競賽決賽題目卷

一、填充題：(直接寫答案即可，每題 15 分)

1. 已知 $1+i$ 與 $2+i$ 是方程式 $10x^8 - 78x^7 + 273x^6 - 546x^5 + 676x^4 - 546x^3 + 273x^2 - 78x + 10 = 0$ 的兩根，請寫出其他六根 _____。
2. 已知 $0 \leq x < 2\pi$, $y = f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$ ，當 $x = a$ 時， y 有最大值 b ，求 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ $b = \underline{\hspace{1cm}}$ 。
3. 直線 $y = 2x + m$ 和圓 $x^2 + y^2 = 1$ 交於 A 、 B 兩點，以 x 軸正方向為始邊， OA 為終邊的角為 α ， OB 為終邊的角為 β ，則 $\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。
4. 若 $a \in N$ ，設 $f(a)$ 為 a 中各位數字中非零數之倒數和，ex: $f(12) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$; $f(2007) = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ 。
又 $n \in N$ ，令 $S_n = \sum_{a=1}^{10^n} f(a)$ ，求使 S_n 為整數之最小 n 值為 _____。

二、計算證明題：(需列出合理過程)

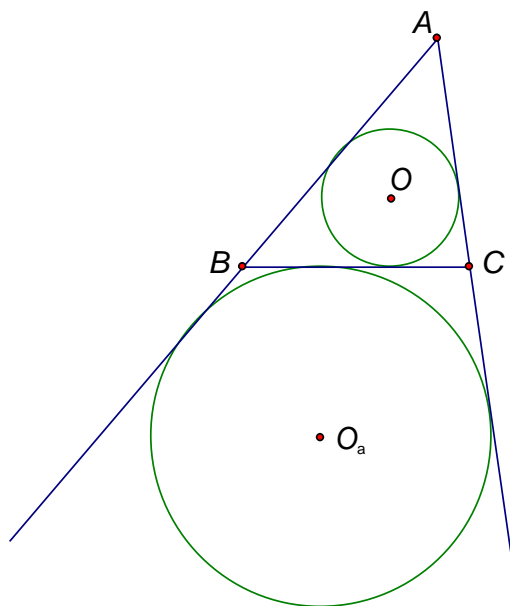
5. 數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{7}, a_2 = \frac{1}{25}$ ，且當 $n \geq 3$ 時， $a_{n-1}a_{n-2} = 7a_n a_{n-2} + 12a_n a_{n-1}$ 。求 a_n 的一般式。(15 分)
6. 有一個拋物線，與 $x+3y=4$ 切於 $(4,0)$ ，且與 $5x+3y=-16$ 切於 $(4,-12)$ 。求此拋物線方程式。(15 分)
7. 複數 z 滿足條件 $z+4$ 的主幅角為 $\frac{\pi}{4}$ ，設 $u = \frac{1}{|z+6|+|z-3i|}$ ，當 $z = z_0$ 時， u 有最大值，求 z_0 。(15 分)
8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 2\angle B$ ；在 $\angle BAC$ 內部一點 P ，滿足 $PB = PC$ 且 $AP = AC$ 。試證： $\angle BAP = \frac{1}{3}\angle BAC$ 。
(20 分)

9. 已知 $\triangle ABC$ 中，內切圓 O ， $\angle A$ 含的旁切圓為 O_a ，如右圖。

- (1) 圓 O 、 O_a 半徑分別為 2、5， $\overline{BC} = 4$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積。(10 分)

- (2) 若 $\angle B$ 、 $\angle C$ 含的旁切圓分別為 O_b 、 O_c ，圓 O 、 O_a 、 O_b 、 O_c 的半徑分別為 r 、 r_a 、 r_b 、 r_c

試證： $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ (15 分)



10. 以下 4 小題中，後小題可利用前小題的結果證明，前小題不能使用後小題結果

- (1) 平面上 4 個點，兩兩連線，最長線段長 L ，最短線段長 l ，試證： $\frac{L}{l} \geq \sqrt{2}$ 。(8 分)
- (2) 平面上 6 個點，用 13 條線段連結，求證：必存在 4 個點，它們兩兩之間都有線段相連。(6 分)
- (3) 平面上 6 個點中，兩兩間最大距離為 2，求距離超過 $\sqrt{2}$ 的點對至多有幾對？並證明之。(10 分)
- (4) 請說明如何作出 6 個點使符合(3)的對數。(6 分)

九十六學年度師大附中數學競賽決賽答案卷

班級 座號 姓名 得分

一、填充題

題號	答 案	
1	$1-i, 2-i, \frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, \frac{2+i}{5}, \frac{2-i}{5}$	
2	$a = \sin^{-1} \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ or } 2\pi - \sin^{-1} \frac{\sqrt{6}}{3}$	$b = \frac{2\sqrt{3}}{9}$
3	$-\frac{4}{5}$	
4	63	

二、計算證明題

5 $a_n = \frac{1}{3^n + 4^n}$
6 $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y = 0$
7 $z_0 = -2 + 2i$

8
略

9
(1) $\frac{40}{3}$
(2) 略

10
略