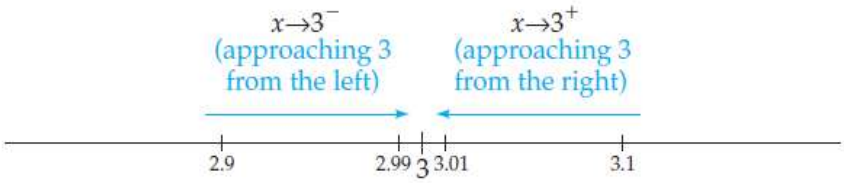
2. ลิมิตและความต่อเนื่อง

2.1 ลิมิตของฟังก์ชันและความหมาย

กำหนดสัญลักษณ์ $x \rightarrow a$ (อ่านว่า x เข้าใกล้ a โดยที่ x ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ a)

พิจารณา $x \rightarrow 3$ จากตัวอย่างต่อไปนี้

In practice, the two simplest ways we can approach 3 are *from the left* or *from the right*. For example, the numbers 2.9, 2.99, 2.999, ... approach 3 *from the left*, which we denote by $x \rightarrow 3^-$, and the numbers 3.1, 3.01, 3.001, ... approach 3 *from the right*, denoted by $x \rightarrow 3^+$. Such limits are called *one-sided limits*.



ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ จะเห็นว่า $f(2) = 4$ ถ้าเราสนใจค่าของ x ที่มีค่าเข้าใกล้ 2 มากๆ ไม่ว่าค่านั้นจะมากกว่าหรือน้อยกว่า 2 ก็ตาม ซึ่งสามารถพิจารณาได้ดังนี้

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x) = x^2$	3.61	3.9601	3.996001	3.999600001	?	4.000040001	4.004001	4.0401	4.41

จากตารางจะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 (จากค่า x ที่มากกว่าและน้อยกว่า 2) จะได้ว่า $f(x)$ มีแนวโน้มเข้าใกล้ 4 หรือค่าของ $f(x)$ มีค่าใกล้เคียงกับ 4 นั่นคือจะกล่าวว่า x^2 มีค่าเข้าใกล้ 4 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2

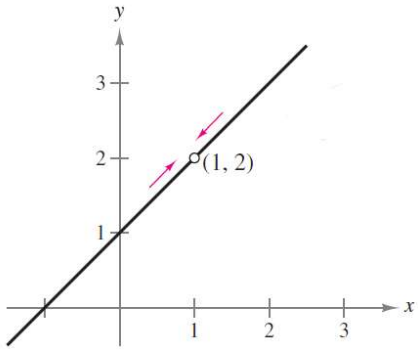
ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ จะเห็นว่า f ไม่นิยามที่ $x = 1$ แต่ถ้าเราสนใจค่าของ x ที่มีค่าเข้าใกล้ 1 มากๆ ไม่ว่าค่านั้นจะมากกว่าหรือน้อยกว่า 1 ก็ตามจะสามารถพิจารณาได้ดังนี้

x approaches 1. *x* approaches 1.

x	0.900	0.990	0.999	1.000	1.001	1.010	1.100
$f(x)$	1.900	1.990	1.999	?	2.001	2.010	2.100

f(*x*) approaches 2. *f*(*x*) approaches 2.

จากตารางจะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 (จากค่า x ที่มากกว่าและน้อยกว่า 1) จะได้ว่า $f(x)$ มีแนวโน้มเข้าใกล้ 2 หรือค่าของ $f(x)$ มีค่าใกล้เคียงกับ 2 นั่นคือจะกล่าวว่า $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ มีค่าเข้าใกล้ 2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1



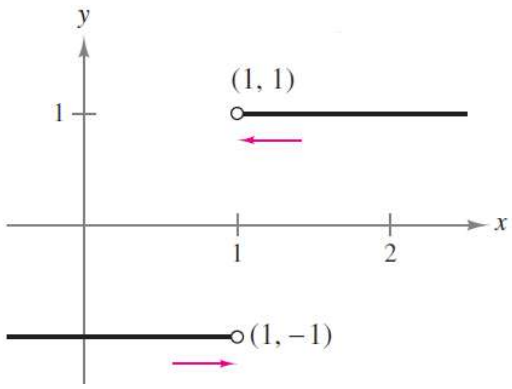
ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ จะเห็นว่า f ไม่นิยามที่ $x=1$ แต่ถ้าเราสนใจค่าของ x ที่มีค่าเข้าใกล้ 1 มากๆ ไม่ว่าค่านั้นจะมากกว่าหรือน้อยกว่า 1 ก็ตามจะสามารถพิจารณาได้ดังนี้

x approaches 1. *x* approaches 1.

x	0.900	0.990	0.999	1.000	1.001	1.010	1.100
$f(x)$	−1.000	−1.000	−1.000	?	1.000	1.000	1.000

$f(x)$ approaches −1. $f(x)$ approaches 1.

จากตารางจะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 จากค่า x ที่<u>น้อยกว่า</u> 1 จะได้ว่า $f(x)$ มีแนวโน้มเข้าใกล้ –1 และ x มีค่าเข้าใกล้ 1 จากค่า x ที่<u>มากกว่า</u> 1 จะได้ว่า $f(x)$ มีแนวโน้มเข้าใกล้ 1



จากสองตัวอย่างแรกจะเห็นว่าฟังก์ชัน f มีค่าเข้าใกล้ค่าหนึ่งขณะที่ค่า x มีค่าเข้าใกล้ค่าที่เราสนใจ เราเรียกค่าของฟังก์ชันที่เข้าใกล้ค่าหนึ่งขณะที่ค่า x มีค่าเข้าใกล้ค่าที่เราสนใจว่า *ลิมิตของฟังก์ชัน (limit of function)*

บทนิยาม $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a} f(x) = L$ หรือ $f(x) \to L$ เมื่อ $x \to a$ และเรียก L ว่าค่า*ลิมิตของฟังก์ชัน*

จากตัวอย่างที่ 1 สรุปได้ว่า $\lim_{x\to 2} x^2 =$ ..... และจากตัวอย่างที่ 2 สรุปได้ว่า

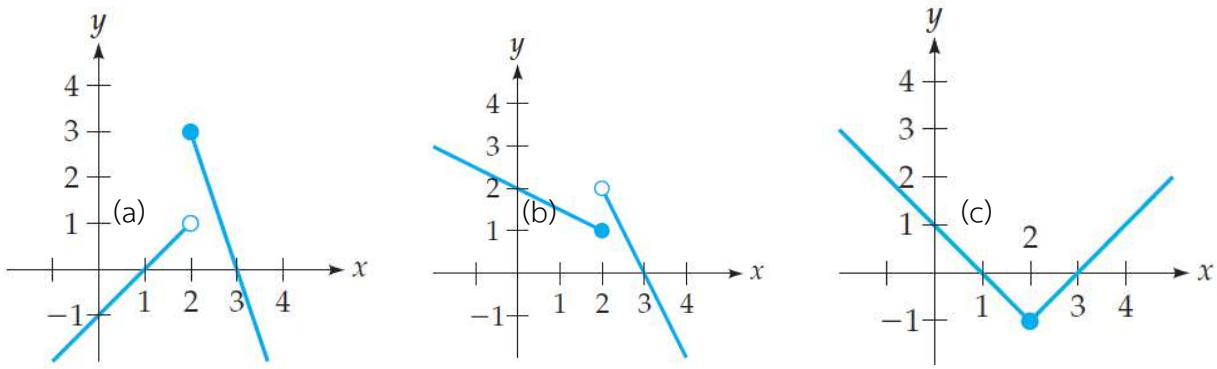
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-1} = \text{.....}$$

จากตัวอย่างที่ 1 ถ้าเราพิจารณาเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 จากทางด้านซ้าย (x น้อยกว่า 2) จะได้ว่า $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$ และในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณา x มีค่าเข้าใกล้ 2 จากทางด้านขวา (x มากกว่า 2) จะได้ว่า $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$ เราเรียกการหาลิมิตเช่นนี้ว่า*ลิมิตด้านเดียว (one sided limit)* โดยที่ $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ เป็นลิมิตทางซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ $x<2$ และ $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ เป็นลิมิตทางขวาของ $f(x)$ เมื่อ $x>2$

ทฤษฎีบท $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (L เป็นจำนวนจริง) ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

จากตัวอย่างที่ 3 จะเห็นว่า $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ ....., $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ .....

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ และ $\lim_{x\to 2} f(x)$ ของฟังก์ชัน f ที่มีกราฟแสดงดังนี้



2.2 การหาค่าลิมิต

กำหนดให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)$ และ $\lim_{x\to a} g(x)$ หาค่าได้แล้ว

1. $\lim_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\lim_{x\to a} x = a$
4. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
6. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
7. $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทข้างต้นเป็นจริงสำหรับกรณีของการหาค่าลิมิตเมื่อ $x \to a^-$ และ $x \to a^+$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim_{x\to 2}(x+4)$ (2) $\lim_{x\to 1} 2x^4$ (3) $\lim_{x\to 3}(x^2+2x-3)$

วิธีทำ (1) $\lim_{x\to 2}(x+4) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 4 = 2+4 = 6$

(2) $\lim_{x\to 1} 2x^4 = 2\lim_{x\to 1} x^4 = 2(\lim_{x\to 1} x)^4 = 2(1)^4 = 2$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(x^2+2x-3) &= \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 2x - \lim_{x\to 3} 3\\ &= (\lim_{x\to 3} x)^2 + 2\lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 3\\ &= 3^2 + 2(3) - 3\\ &= 9+6-3 = 12\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{x^2-x+2}$

วิธีทำ
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2-x+2} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^3+1)}{\lim_{x\to 1}(x^2-x+2)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1} x^3 + \lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1} x^2 - \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 2}$$

$$= \frac{(\lim_{x\to 1} x)^3 + \lim_{x\to 1} 1}{(\lim_{x\to 1} x)^2 - \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 2} = 1$$

ทฤษฎีบท ถ้า $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดังนั้น $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$

ตัวอย่างที่ 6

(1) $\lim_{x\to 1}(x^2 + 2x + 2) = 1^2 + 2(1) + 2 = 5$

(2) $\lim_{x\to 3}(x^3 + 2x^2 + 4x - 9) = 3^3 - 2(3^2) + 4(3) - 9 = 27 - 18 + 12 - 9 = 12$

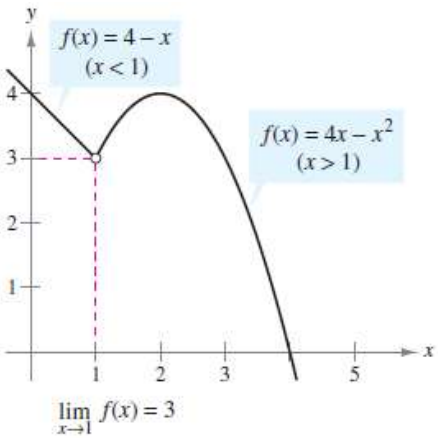
ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x < 1 \\ 4x - x^2, & x > 1 \end{cases}$$

จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ และ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

วิธีทำ ถ้า $x < 1$ จะได้ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(4 - x) = 3$ และถ้า $x > 1$ จะได้

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(4x - x^2) = 3$ เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$



ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x - 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1} f(x)$

ทฤษฎีบท ถ้า $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$

โดยที่ $Q(a)\neq 0$

ตัวอย่างที่ 9

(1) $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+1}{x+4}=\frac{2(-2)^2+1}{-2+4}=\frac{2(4)+1}{2}=\frac{9}{2}$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{4x^3+x^2+x-7}{x^2+1}=\frac{4(2)^3+(2)^2+2-7}{2^2+1}=\frac{4(8)+4+2-7}{4+1}=\frac{31}{5}$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(2) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2+3x}$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$

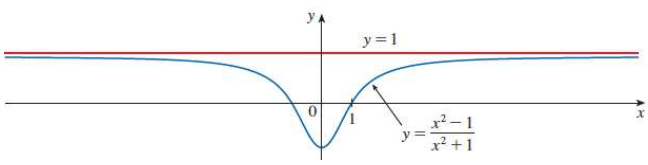
(4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+4}-2}$

2.2 ลิมิตที่อนันต์

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตและ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

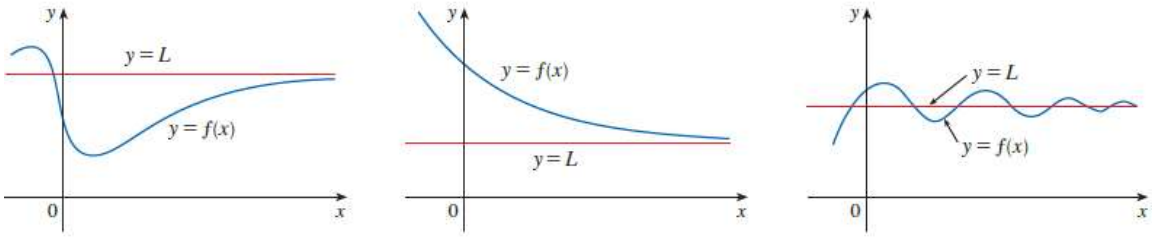


จากตารางและกราฟจะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น $f(x)$ จะมีค่าประมาณ 1 และเมื่อ x มีค่าลดลง $f(x)$ จะมีค่าประมาณ 1 ด้วยเช่นกัน

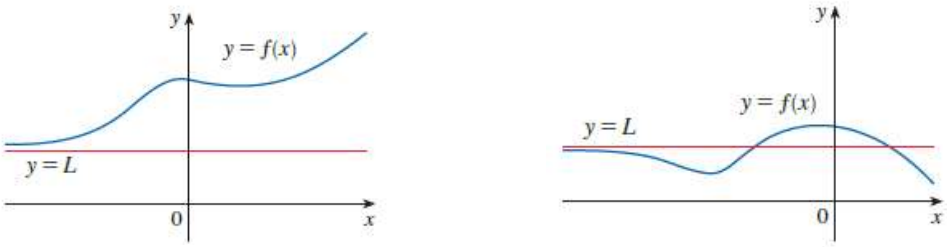
เราสามารถเขียน $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1$ เราเรียกการหาลิมิตนี้ว่า*ลิมิตที่อนันต์*

บทนิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันและ L เป็นจำนวนจริง

1. $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$
2. $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$



$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

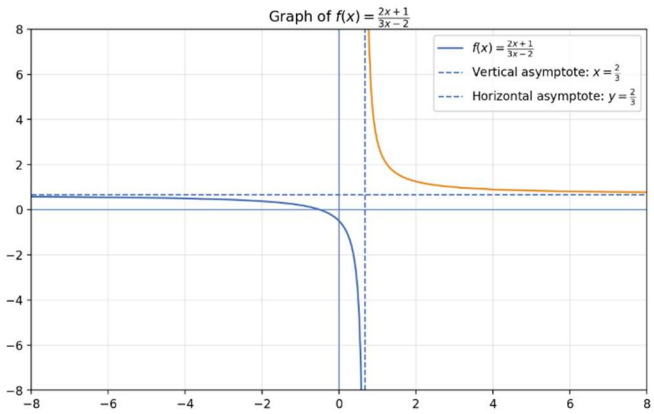


$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

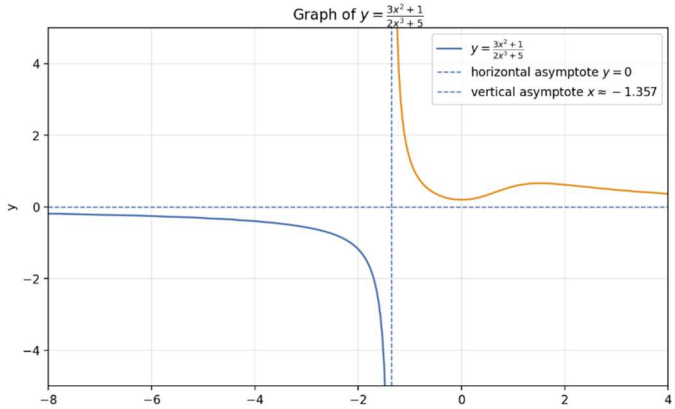
ทฤษฎีบท ถ้า r และ c เป็นจำนวนจริงจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{c}{x^r}=0$ และ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x^r}=0$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x-2}$



(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x^3+5}$



จะเห็นว่าการหาลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะขึ้นอยู่กับพจน์ที่มีกำลังสูงที่สุดที่ปรากฏของเศษและส่วน ดังนั้นจะได้ว่า

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

จากตัวอย่างที่ 11 จะได้ว่า

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x-2}=$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x^3+5}=$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{2x^2+1}=$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-x+1}{4x^2+5}=$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{40}(4x+1)^5}{(2x+3)^{45}}=$

ตัวอย่างที่ 12

Acquisition of Language The percentage $p(t)$ of children who can speak in at least single words by the age of t months can be approximated by the equation[15]

$$p(t) = 100\left(1 - \frac{12{,}200}{t^{4.48}}\right) \qquad (t \geq 8.5)$$

Calculate $\lim_{t\to+\infty} p(t)$ and interpret the result.

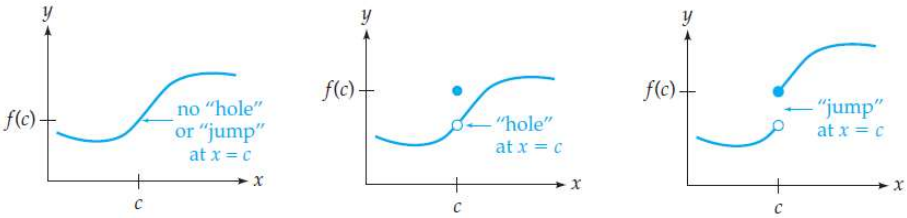
[15] The model is the authors' and is based on data presented in the article *The Emergence of Intelligence* by William H. Calvin, *Scientific American*, October, 1994, pp. 101–107.

ตัวอย่างที่ 13

ความแม่นยำ $P(n)$ ของโมเดลปัญญาประดิษฐ์ในการจำแนกรูปภาพ หลังจากฝึกด้วยข้อมูลจำนวน n ภาพ สามารถประมาณได้ด้วยสมการ $P(n) = 98\left(1 - \frac{5000}{n^{0.8}}\right), \quad n \geq 10{,}000$ จงหาว่าเมื่อจำนวนข้อมูลฝึกมีมากขึ้นเรื่อย ๆ ความแม่นยำของโมเดล AI จะเป็นอย่างไร

3. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

พิจารณากราฟของฟังก์ชันที่จุด $x = c$ ต่อไปนี้



Continuous at c | Discontinuous at c | Discontinuous at c

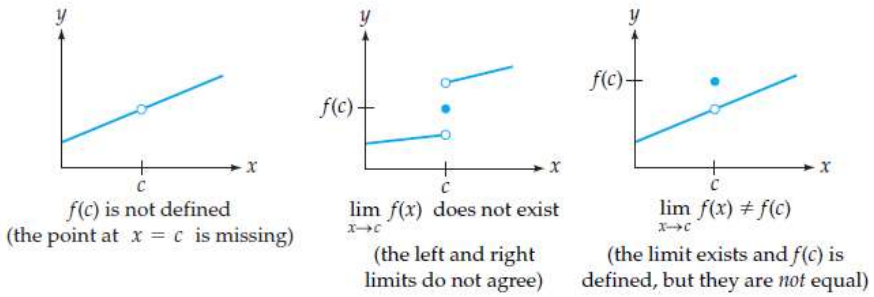
จะเห็นว่าการพิจารณาความต่อเนื่องที่ง่ายที่สุดคือการพิจารณาจากกราฟ ซึ่งเมื่อวาดกราฟแล้ว กราฟจะไม่ขาดตอน ณ จุดที่เราสนใจ อย่างไรก็ตามการวาดกราฟของบางฟังก์ชันอาจทำได้ยาก ดังนั้นเราจะใช้นิยามต่อไปนี้ในการตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีต่อเนื่องที่จุด $x = c$ ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $f(c)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ หาค่าได้ (นั่นคือ $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$)
3. $f(c) = \lim\limits_{x\to c} f(x)$

FINDING DISCONTINUITIES FROM A GRAPH

Each function below is *discontinuous at c* for the indicated reason.



$f(c)$ is not defined (the point at $x = c$ is missing) | $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ does not exist (the left and right limits do not agree) | $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ (the limit exists and $f(c)$ is defined, but they are *not* equal)

ตัวอย่างที่ 14 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 1 \\ 3x - 1, & x \neq 1 \end{cases}$$

ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

ตัวอย่างที่ 15 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2\\ 3 & , \quad x=2\end{cases}$$

ต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2}{x-3}, & x\neq 3\\ k & , \ x=3\end{cases}$$

จงหาค่า k ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=3$

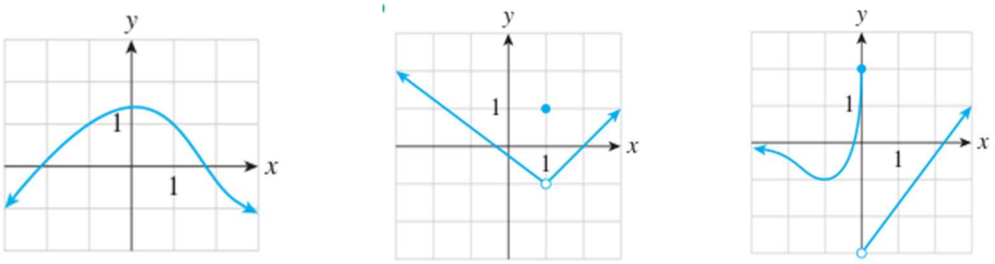
.

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$f(x)=\begin{cases} kx-2x^2, & x\le 2 \\ x-3k, & x>2 \end{cases}$$

จงหาค่า k ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$

ตัวอย่างที่ 18 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดต่อเนื่อง และถ้าไม่ต่อเนื่อง จงบอกเหตุผล



(a) (b) (c)