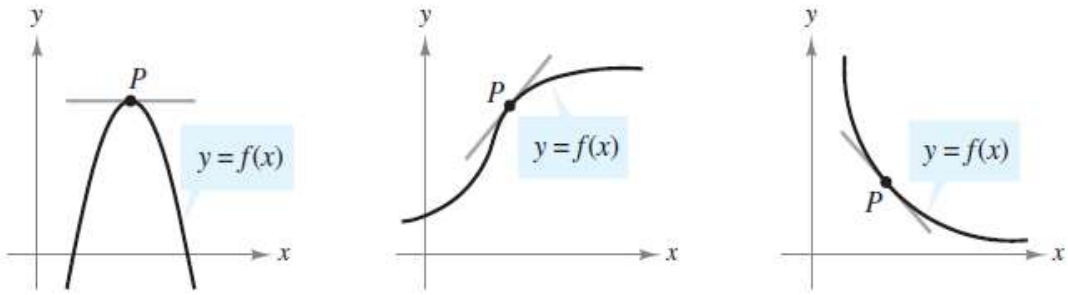
4. การประยุกต์อนุพันธ์

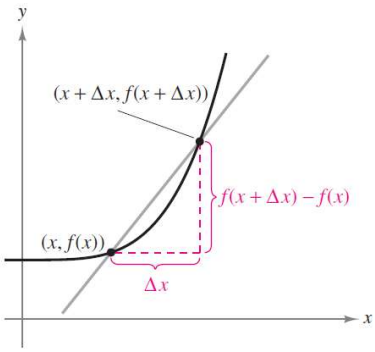
4.1 ความชันเส้นสัมผัส

พิจารณาเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด P



Tangent Line to a Graph at a Point

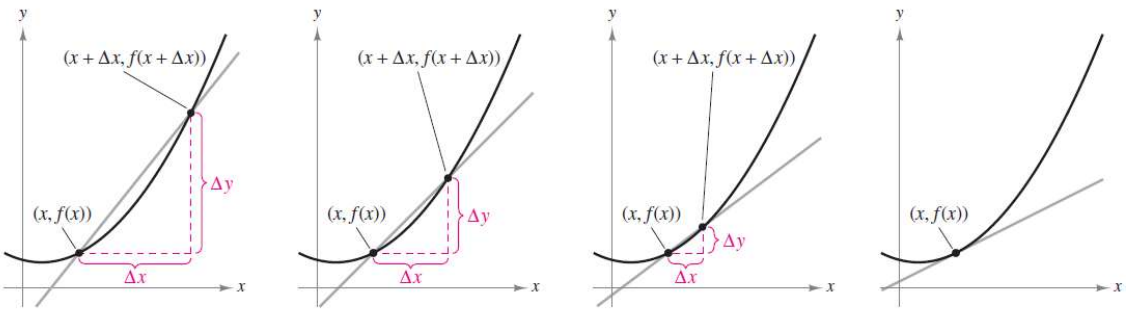
กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและกำหนดจุดสองจุดบนกราฟซึ่งมีพิกัดคือ $P(x, f(x))$ และ $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ ดังรูป



จากรูปจะได้ว่าความชันของเส้นตัดโค้งที่จุด P และ Q คือ

$$m_{\sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

และเมื่อ Δx มีค่าน้อยมาก ๆจะได้รูปดังต่อไปนี้



As Δx approaches 0, the secant lines approach the tangent line.

ถ้า Δx มีน้อยลงมาก ๆ (เข้าใกล้ศูนย์) จะได้ว่า $x+\Delta x$ จะเข้าใกล้ x และ $f(x+\Delta x)$ จะเข้าใกล้ $f(x)$ ส่งผลให้เส้นตรง PQ เข้าใกล้เส้นสัมผัสโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด P ดังนั้นจะกล่าวได้ว่า *ความชันของเส้นสัมผัสโค้ง (slope of tangent line)* $y=f(x)$ ที่จุด P คือ

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

บทนิยาม กำหนดให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง *สมการเส้นสัมผัสโค้งโค้ง* $y=f(x)$ ที่จุด $P(a,f(a))$ คือ $y-f(a)=m(x-a)$ เมื่อ m คือความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่จุด $P(a,f(a))$

หมายเหตุ จากความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ว่าความชันเส้นสัมผัสโค้ง f ที่จุด $x=a$ คือค่าของอนุพันธ์ของ f ที่จุด $x=a$ นั่นคือ

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

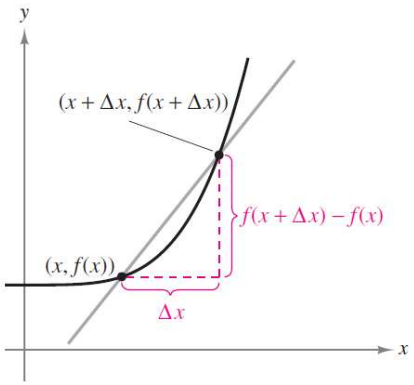
ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการเส้นสัมผัสโค้ง $y=x-2x^2$ ที่จุด $(1,-1)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการเส้นสัมผัสโค้ง $y=e^{-x^2}-x+2$ ที่จุด $(0,3)$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการเส้นสัมผัสโค้ง $y=2x^3-x^2+4x-3$ ที่จุด $(1,3)$

4.2 อัตราการเปลี่ยนแปลง

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = a$ และ $x = a + \Delta x$ ดังรูป



จากรูปเราเรียก Δx ว่า*ส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปร* x และเรียก $f(x + \Delta x) - f(x)$ *ส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน* ดังนั้น*อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (Average rate of change)* ของ f ในช่วง x ถึง $x + \Delta x$ นิยามโดย

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

และถ้า $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ หาค่าได้ เราเรียกค่านี้ว่าว่า *อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ (instantaneous rate of change)* ของ f ที่ x หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่ x และจากความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ หาค่าได้แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

ดังนั้นจากนิยามเราสามารถสรุปได้ว่า

$f'(x)$ มีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่ x

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $f(x) = x^2 - 3x + 2$ จงหา

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f จาก 1 ถึง 4

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่ x ใด ๆ

3) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่ $x = 3$

วิธีทำ

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f จาก 1 ถึง 4 คือ $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{6-0}{3}=2$

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่ x ใด ๆ คือ $f'(x) = 2x - 3$

3) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่ $x=3$ คือ $f'(3) = 2(3) - 3 = 3$

ตัวอย่างที่ 5

Thiriet Claudius/Peter Arnold Inc.

An average Holstein calf weighs about 90 pounds at birth.

The weights w (in pounds) for a Holstein calf during the first 12 months of its life are shown in the table, where t is the time (in months) since birth.

t	0	1	2	4	6	12
w	96	118	161	272	396	714

The calf's weight can be modeled by

$$w = 0.48t^2 + 47.3t + 80, \quad 0 \le t \le 12.$$

a. Find the average rate of change of the calf's weight during the first 12 months of its life.

b. Find the rate of change of the calf's weight when $t = 4$.

อีกหนึ่งการประยุกต์ที่น่าสนใจของอัตราการเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย คือ ปัญหาการเคลื่อนที่ เช่น ความเร็วของวัตถุหรืออนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ โดยจะพบว่าตำแหน่งของวัตถุที่เคลื่อนที่จะเปลี่ยนไป เมื่อเวลาเปลี่ยนไป ซึ่งระยะทางของการเคลื่อนที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

ถ้าให้ s แทนระยะทางการเคลื่อนที่และ t แทนเวลา จะได้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ที่เวลา t ใด ๆ คือ $s = f(t)$

ระยะขจัด (displacement) ของวัตถุจากช่วงเวลา t ไป Δt คือ $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$

ความเร็วเฉลี่ย (average velocity) ของวัตถุจาก t ไป Δt คือ $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

ในการหาความเร็วในช่วงเวลาหนึ่ง เราสามารถทำได้โดยหาลิมิตของความเร็วเฉลี่ยจากช่วงเวลา t ไป Δt ขณะที่ $\Delta t \to 0$ ซึ่งค่าลิมิตนี้ก็คืออนุพันธ์ของ s เทียบกับ t นอกจากนี้ความเร่งหาได้โดยหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลา

กำหนดให้ $s = f(t)$ คือระยะทางวัตถุที่เคลื่อนที่ที่เวลา t ใด ๆ

$1.$ *ความเร็ว (velocity)* คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางเทียบกับเวลานั่นคือ

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$2.$ *ความเร่ง (acceleration)* คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลานั่นคือ

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

ตัวอย่างที่ 6 ในการเคลื่อนที่เชิงเส้นของวัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s(t) = t^2 + 4t$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา

1) ความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ 1 ถึงวินาทีที่ 4

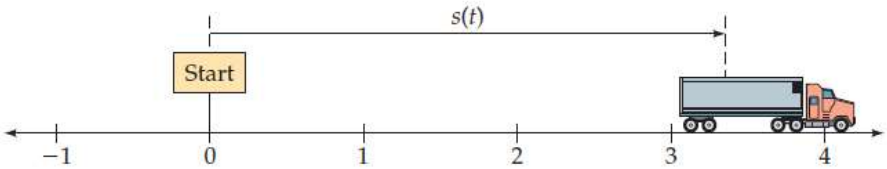
2) ความเร็วเมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาที

3) ความเร่งเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

ตัวอย่างที่ 7

A delivery truck is driving along a straight road, and after t hours its distance (in miles) east of its starting point is

$$s(t) = 24t^2 - 4t^3 \qquad \text{for } 0 \le t \le 6$$



a. Find the velocity of the truck after 2 hours.

b. Find the velocity of the truck after 5 hours.

c. Find the acceleration of the truck after 1 hour.

ตัวอย่างที่ 8

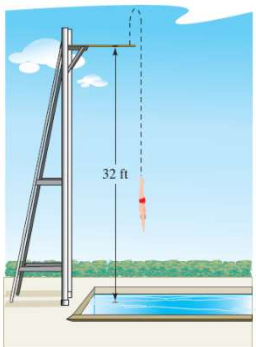
Finding the Velocity of a Diver

At time $t = 0$, a diver jumps from a diving board that is 32 feet high, as shown in Figure. Because the diver's initial velocity is 16 feet per second, his position function is

$$h = -16t^2 + 16t + 32.$$

a. When does the diver hit the water?

b. What is the diver's velocity at impact?



4.3 ปัญหาอัตราสัมพัทธ์

อัตราสัมพัทธ์ คือ โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณหรือตัวแปรตามตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไปซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา และตัวแปรแต่ละตัวนั้นสามารถเขียนสูตรแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรได้ การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

<u>ขั้น 1</u> : อ่านปัญหาของโจทย์แล้ววิเคราะห์ว่าโจทย์ต้องการอะไร (อาจจะเขียนแผนภาพประกอบ)

<u>ขั้น 2</u> : กำหนดสูตรหรือตัวแปรที่ใช้แทนปริมาณต่างๆ ซึ่งในที่นี้ตัวแปรแต่ละตัวเป็นฟังก์ชันของเวลา

<u>ขั้น 3</u> : เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เช่น ค่าตัวแปรต่างๆและอัตราการเปลี่ยนของตัวแปรต่างๆ

<u>ขั้น 4</u> : หาอนุพันธ์ของสูตรที่กำหนดโดยใช่การหาอนุพันธ์แบบฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับเวลา

<u>ขั้น 5</u> : แทนค่าสิ่งต่างๆจากข้อ แล้วหาอัตราหรือปริมาณที่โจทย์ต้องการ

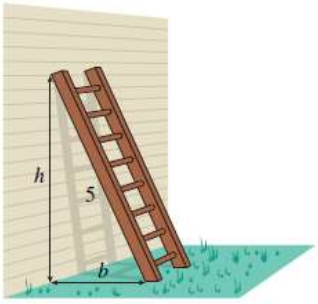
<u>หมายเหตุ</u> อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นบวก หมายความว่า เมื่อเวลาผ่านไปปริมาณมีค่าเพิ่มขึ้นอัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นลบ หมายความว่า เมื่อเวลาผ่านไปปริมาณมีค่าลดลง

ตัวอย่างที่ 9 บันไดอันหนึ่งยาว 5 เมตร วางพาดกับกำแพงดังรูป ปรากฏว่าปลายส่วนบนค่อยๆ เคลื่อนที่ลงด้วยอัตรา 3 เมตรต่อนาที ทำให้ปลายส่วนล่างที่วางอยู่บนพื้นเคลื่อนที่ออกจากกำแพง จงหาว่าปลายส่วนล่างจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเท่าใด เมื่อปลายส่วนล่างอยู่ห่างจากกำแพง 4 เมตร

วิธีทำ ให้ h แทนระยะ (เมตร) จากปลายส่วนบนของบันไดถึงพื้นเมื่อเวลาผ่านไป t นาที

และ b แทนระยะ (เมตร) จากปลายส่วนล่างของบันไดถึงกำแพงเมื่อเวลาผ่านไป t นาที

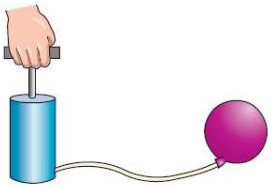
จากโจทย์จะได้รูปดังนี้



ตัวอย่างที่ 10 กล่องพลาสติกสี่เหลี่ยมฐานจัตุรัสใบหนึ่งบรรจุน้ำ 250 ลูกบาศก์นิ้ว โดยมีระดับน้ำสูงอยู่ที่ 10 นิ้ว ถ้าความยาวของฐานกล่องเปลี่ยนแปลง โดยที่ความยาวลดลงด้วยอัตรา 2 นิ้วต่อนาที จงหาว่าส่วนสูงของระดับน้ำจะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงอย่างไร

ตัวอย่างที่ 11 ปล่อยน้ำออกจากถังรูปทรงกระบอกกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 8 ฟุต สูง 10 ฟุต ด้วยอัตรา 5 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที อยากทราบว่าระดับน้ำจะลดลงด้วยอัตราเท่าใดเมื่อน้ำในถังสูง 6 ฟุต

ตัวอย่างที่ 12 สูบลมเข้าไปในลูกโป่งทรงกลมด้วยอัตรา 4 ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที จงหาว่าอัตราการเปลี่ยนของรัศมีจะเป็นอย่างไร เมื่อรัศมียาว 2 นิ้ว

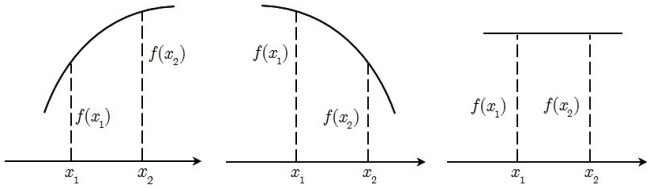


ตัวอย่างที่ 13 เรือบรรทุกน้ำมันลำหนึ่งหยุดนิ่งกลางทะเลมีน้ำมันรั่วไหลออกเป็นคลื่นที่มีลักษณะเป็นวงกลม โดยรัศมีของคลื่นเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 3 เมตรต่อนาที จงหาว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงพื้นที่คลื่นวงกลม เมื่อรัศมีของคลื่นวงกลมยาว 8 เมตร

4.4 ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน

บทนิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I ซึ่งมี x_1, x_2 เป็นจุดที่อยู่ในช่วง I

1. f เรียกว่า*ฟังก์ชันเพิ่ม*บนช่วง I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
2. f เรียกว่า*ฟังก์ชันลด*บนช่วง I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$
3. f เรียกว่า*ฟังก์ชันคงที่*บนช่วง I ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ x_1, x_2

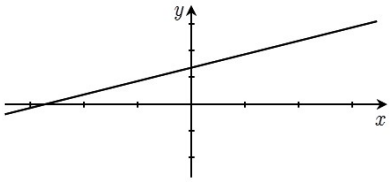


$f(x_1) < f(x_2)$ ถ้า $x_1 < x_2$ $\quad$ $f(x_1) > f(x_2)$ ถ้า $x_1 < x_2$ $\quad$ $f(x_1) = f(x_2)$ ทุกๆ x_1, x_2

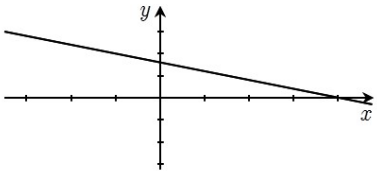
ทฤษฎีบท กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b)

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (a,b)
2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (a,b)
3. ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงที่บนช่วง (a,b)

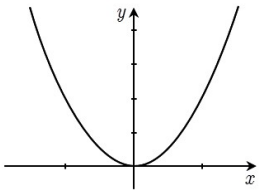
ตัวอย่างที่ 14 ฟังก์ชัน $f(x) = 3x + 8$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, \infty)$ เพราะว่า $f'(x) = 3 > 0$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$



ตัวอย่างที่ 15 ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1-2x}{5}$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, \infty)$ เพราะว่า $f'(x) = -\dfrac{2}{5} < 0$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$

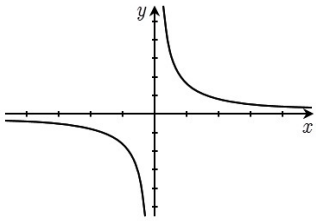


ตัวอย่างที่ 16 ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 0)$ และเพิ่มบนช่วง $(0, \infty)$ เพราะว่า $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-\infty, 0)$ และ $f'(x) > 0$ บนช่วง $(0, \infty)$



ตัวอย่างที่ 17 ฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ เพราะว่า

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ ทุก ๆ $x\neq 0$



บทนิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันและ $c\in D_f$ จะกล่าวว่า c เป็น*จุดวิกฤต (critical point)* ของ f ก็ต่อเมื่อ $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

หมายเหตุ จุด c ที่ทำให้ $f'(c)=0$ เรียกว่า*จุดหยุดนิ่ง (**stationary point**)* และจุด c ที่ทำให้ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้เรียกว่า*จุดเอกฐาน (**singular point**)*

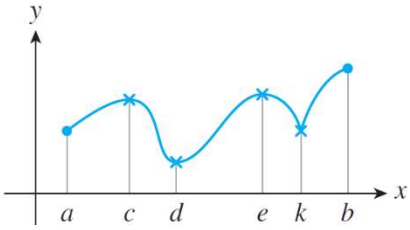
ตัวอย่างที่ 18 จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+x-2$

ตัวอย่างที่ 19 จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)=x^3-12x-5$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2$

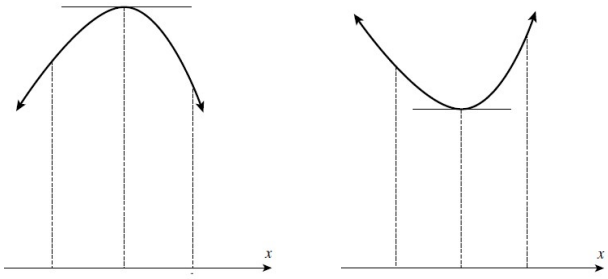
บทนิยาม ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (Relative extreme values)

1. f มี*ค่าสูงสุดสัมพัทธ์*ที่ $x = c$ ถ้า $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x บนช่วงที่มี c เป็นจุดในช่วงและเรียก $f(c)$ ว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. f มี*ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์*ที่ $x = c$ ถ้า $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุกๆ x บนช่วงที่มี c เป็นจุดในช่วงและเรียก $f(c)$ ว่าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

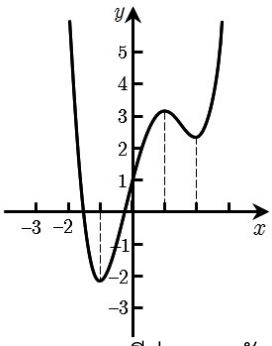


ทฤษฎีบท ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทดังกล่าวสามารถกล่าวได้ว่าค่าสุดขีดสัมพัทธ์จะเกิดขึ้นที่จุดวิกฤตของฟังก์ชันนั้นเสมอ



ตัวอย่างที่ 21 พิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์จากกราฟ f ต่อไปนี้



จะเห็นว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1, 2$ และมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$

ทฤษฎีบท การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง (Second derivative test)

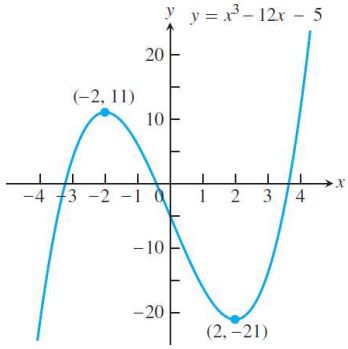
กำหนดให้ f หาอนุพันธ์อันดับสองได้ที่จุด $x = c$ และ $f'(c) = 0$

1. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
3. ถ้า $f''(c) = 0$ แล้วสรุปไม่ได้ว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$

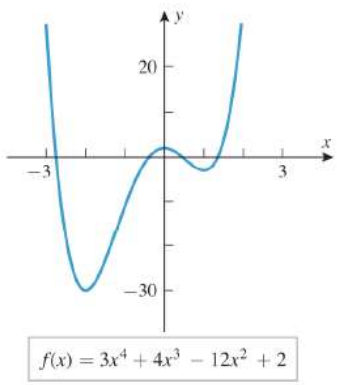
ตัวอย่างที่ 22 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = x^2 + x - 2$

2) $f(x) = x^3 - 12x - 5$



3) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$



4.5 รูปแบบไม่กำหนดและกฎของโลปิตาล

การหาค่าลิมิตในรูปแบบ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ที่ผ่านมานั้น เราจะแก้ปัญหาโดยใช้วิธีแยกตัวประกอบเพื่อตัดตัวร่วมหรือการใช้สังยุคเพื่อทำให้พจน์ที่แทนค่าแล้วเป็นศูนย์ตัดกันได้ อย่างไรก็ตามการหาลิมิตในรูปแบบดังกล่าว อาจหาได้ไม่ง่ายนักในบางกรณี กล่าวคือ รูปแบบ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้หรือไม่สามารถใช้สังยุคมาช่วยได้ เช่น

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} \qquad \text{เป็นลิมิตในรูป } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x},\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^3}{e^x} \qquad \text{เป็นลิมิตในรูป } \frac{\infty}{\infty}$$

เราเรียกรูปแบบการหาลิมิตในรูป $\dfrac{0}{0}$ และ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ว่า *รูปแบบไม่กำหนด (indeterminate form)*

นอกจากนี้ยังมีรูปแบบยังไม่กำหนดอื่น คือ $0\cdot\infty, \infty-\infty, \infty^0,\ 0^0$ และ 1^∞

ในการหาค่าลิมิตในรูปแบบไม่กำหนดนี้ จะใช้*กฎของโลปิตาล (L' Hopital rule)* ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่ช่วยในการหาค่าลิมิตในรูปแบบต่างๆได้ง่ายและสะดวกมากขึ้น

- **รูปแบบไม่กำหนดในรูป $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$**

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = a$ และ $g'(a) \neq 0$ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (หรือ $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$) จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

หมายเหตุ กฎของโลปิตาลเป็นจริงสำหรับกรณีของลิมิต $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$ และ $x \to \infty$

ตัวอย่างที่ 23 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2x - \cos x}{x^2}$

ตัวอย่างที่ 25 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(2x+1)}{\ln(4x+1)}$