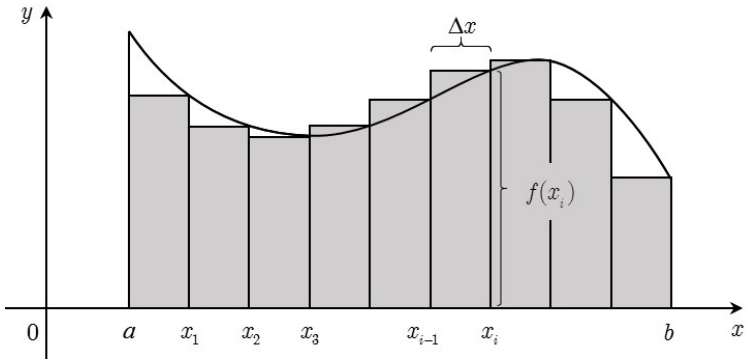
2. อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์

2.1 อินทิกรัลจำกัดเขต

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ พิจารณาการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ ดังรูป



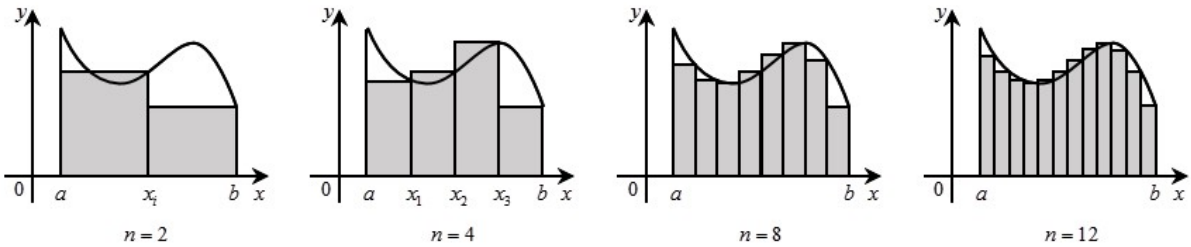
กำหนดให้ A เป็นพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ เราจะเริ่มหา A โดยเริ่มจากการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ส่วนย่อย ๆที่เท่ากัน นั่นคือ

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$$

โดยกำหนดให้แต่ละช่วงมีความยาว $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ จากนั้นสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนช่วงย่อยบรรจุลงในพื้นที่ A จะเห็นว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ละรูปมีความสูงคือ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_i)$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$ และมีความกว้างคือ Δx ดังนั้นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแต่ละรูปคือ $f(x_1)\Delta x, f(x_2)\Delta x, \ldots, f(x_i)\Delta x$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$ ถ้าให้ A_n แทนผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมดจะได้ว่า

$$A_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

รูปต่อไปนี้แสดงพื้นที่ A_2, A_4, A_8 และ A_{12} ตามลำดับ



จะเห็นว่าพื้นที่ A_n จะมีค่าใกล้เคียงกับ A เมื่อ n มีค่าเพิ่มมากขึ้น ดังนั้นพื้นที่ใต้กราฟเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ คือ $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

เราเรียกผลบวกดังกล่าวว่า *ผลบวกของรีมานน์ (Riemann sum)*

ตัวอย่างที่ 35 จงหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$

SOLUTION Let $f(x) = x^2$ on the interval [0, 1]. Then $\Delta x = \frac{1-0}{N} = \frac{1}{N}$ and $a = 0$. Hence,

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(0 + j\Delta x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} j^2 \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N^3}\left(\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}$$

and

$$\lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

ตัวอย่างที่ 36 จงหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = x^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 5$

SOLUTION Let $f(x) = x^2$ on the interval $[-1, 5]$. Then $\Delta x = \frac{5-(-1)}{N} = \frac{6}{N}$ and $a = -1$. Hence,

$$\begin{aligned} R_N &= \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(-1 + j\Delta x) = \frac{6}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(-1 + \frac{6j}{N}\right)^2 \\ &= \frac{6}{N}\sum_{j=1}^{N} 1 - \frac{72}{N^2}\sum_{j=1}^{N} j + \frac{216}{N^3}\sum_{j=1}^{N} j^2 \\ &= \frac{6}{N}(N) - \frac{72}{N^2}\left(\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}\right) + \frac{216}{N^3}\left(\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}\right) \\ &= 42 + \frac{72}{N} + \frac{36}{N^2} \end{aligned}$$

and

$$\lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty}\left(42 + \frac{72}{N} + \frac{36}{N^2}\right) = 42.$$

บทนิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ *อินทิกรัลจำกัดเขต*ของ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$ นิยามโดย

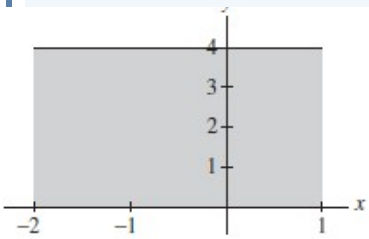
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้และเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บนช่วง $[a,b]$

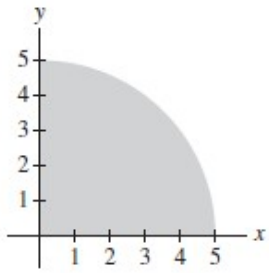
ทฤษฎีบท กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ *พื้นที่ใต้กราฟ* f จาก $x = a$ ถึง $x = b$ เหนือแกน x หาได้จาก $A = \int_a^b f(x)dx$

หมายเหตุ ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx$ คือพื้นที่ใต้กราฟ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$ และถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx$ คือจำนวนลบของพื้นที่ใต้กราฟ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$

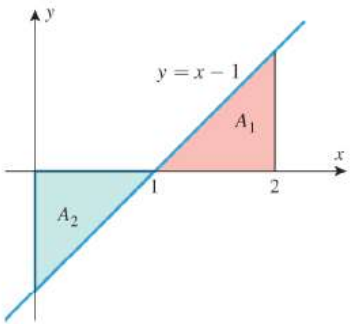
ตัวอย่างที่ 37 จงหาค่าของ $\int_{-2}^{1} 4dx$



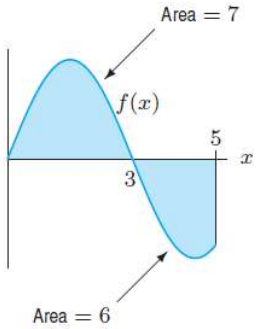
ตัวอย่างที่ 38 จงหาค่าของ $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx$



ตัวอย่างที่ 39 จงหาค่าของ $\int_0^1 (x-1)dx$ และ $\int_0^2 (x-1)dx$



ตัวอย่างที่ 40 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,5]$ ดังรูป



จงหา

(1) $\int_0^3 f(x)dx$

(2) $\int_3^5 f(x)dx$

คุณสมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต

กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บนช่วง $[a,b]$

(1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

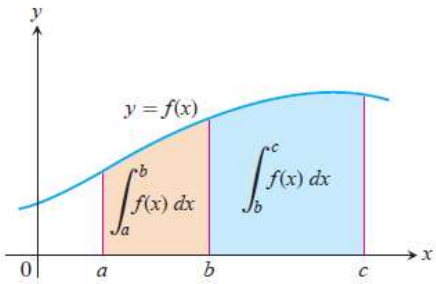
(2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ k คือค่าคงที่ใดๆ

(4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$

(5) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ เมื่อ $c \in (a,b)$



The Fundamental theorem of calculus

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ *อินทิกรัลจำกัดเขต*ของ f บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

เมื่อ F คือปฏิยานุพันธ์ของ f

ตัวอย่างที่ 41 จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

(1) Find $\int_1^2 x^2\,dx.$

Solution

Because x^2 is continuous on $[1, 2]$, we can use the Fundamental Theorem.

$$\int_1^2 x^2 dx = \underbrace{\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2}_{\substack{\text{Integrating}\\ x^2}} = \underbrace{\frac{1}{3}2^3}_{\substack{\text{Evaluating}\\ \frac{1}{3}x^3 \text{ at } x=2}} - \underbrace{\frac{1}{3}1^3}_{\substack{\text{and at}\\ x=1}} = \underbrace{\frac{8}{3}-\frac{1}{3}}_{\text{Subtracting}} = \frac{7}{3}$$

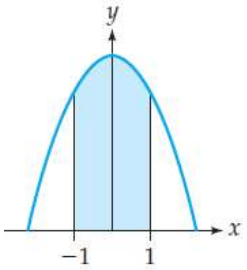
(2) $\int_1^4 x\sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{5}(4^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}) = \frac{62}{5}$

(3) $\int_1^2 \frac{4}{x^2}\,dx = -\frac{4}{x}\Big|_1^2 = -\frac{4}{2} + \frac{4}{1} = 2$

(4) $\int_0^2 (3x^2 + 2x + 1)\,dx$

(5) $\int_{-1}^2 (x^2 - x + 1)\,dx$

ตัวอย่างที่ 42



$y = 24 - 6x^2$ is nonnegative on $[-1, 1]$

Find the area under $y = 24 - 6x^2$ from -1 to 1.

Solution

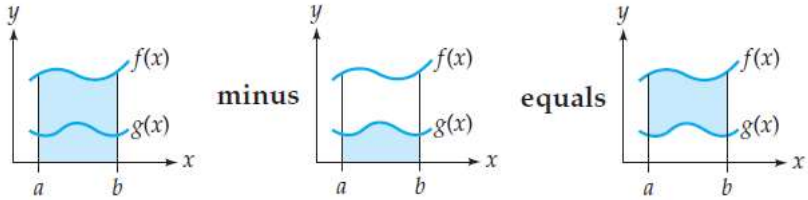
$$\int_{-1}^{1} (24 - 6x^2)\,dx = \left(24x - 6\cdot\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= (24 - 2) - (-24 + 2)$$
$$= 44$$

Therefore, the area is 44 square units.

ตัวอย่างที่ 43 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^2$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 3$

2.2 การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

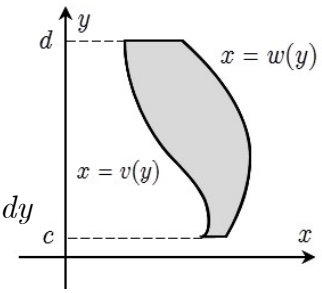
กำหนดให้ $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ดังรูป



In terms of integrals:

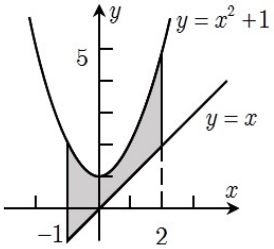
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad - \quad \int_a^b g(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b [\underset{\text{Upper curve}}{f(x)} - \underset{\text{Lower curve}}{g(x)}]\,dx$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $x = w(y)$ และ $x = v(y)$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $w(y) \geq v(y)$ สำหรับทุก $y \in [c, d]$ จะได้ว่าพื้นที่ (A) ระหว่างเส้นโค้ง $x = w(y)$ และ $x = v(y)$ ตั้งแต่ $y = c$ ถึง $y = d$ ดังรูป



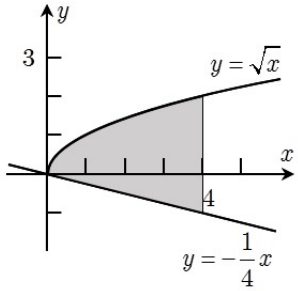
สามารถหาได้จาก $A = \int_c^d [w(y) - v(y)]\,dy$

ตัวอย่างที่ 44 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ และเส้นตรง $y = x$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 2$ ดังรูป

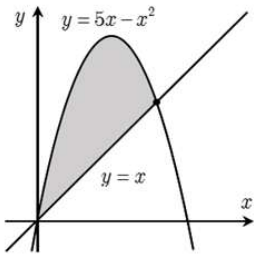


ในที่นี้จะหาอินทิกรัลเทียบกับ x เพราะฉะนั้นพื้นที่ที่แรเงาคือ

ตัวอย่างที่ 45 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $y = -\frac{1}{4}x$ เมื่อ $0 \le x \le 4$ ดังรูป



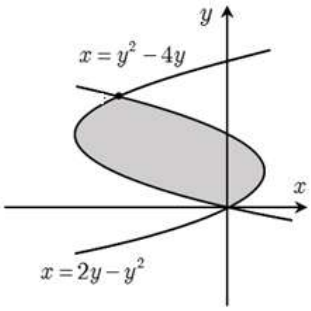
ตัวอย่างที่ 46 กำหนดให้ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = 5x - x^2$ และ $y = x$ ดังรูป



1) จงหาจุดตัดกราฟ

2) จงเขียนอินทิกรัลที่ใช้หาพื้นที่บริเวณ R (ไม่ต้องคำนวณหาค่าอินทิกรัล)

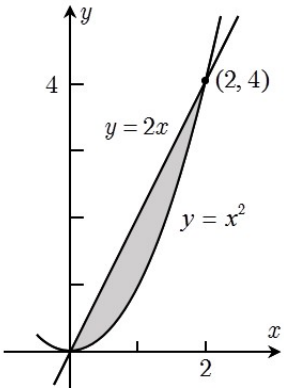
ตัวอย่างที่ 47 กำหนดให้ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $x = y^2 - 4y$ และ $x = 2y - y^2$ ดังรูป



1) จงหาจุดตัดกราฟ

2) จงเขียนอินทิกรัลที่ใช้หาพื้นที่บริเวณ R (ไม่ต้องคำนวณหาค่าอินทิกรัล)

ตัวอย่างที่ 48 กำหนดให้ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = 2x$ ดังรูป



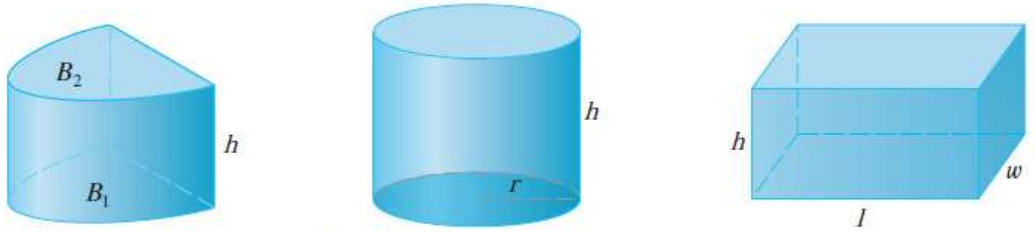
1) จงเขียนอินทิกรัลที่ใช้หาพื้นที่บริเวณ R โดยการอินทิเกรตเทียบกับ x (ไม่ต้องคำนวณหาค่าอินทิกรัล)

2) จงเขียนอินทิกรัลที่ใช้หาพื้นที่บริเวณ R โดยการอินทิเกรตเทียบกับ y (ไม่ต้องคำนวณหาค่าอินทิกรัล)

2.3 การหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุน

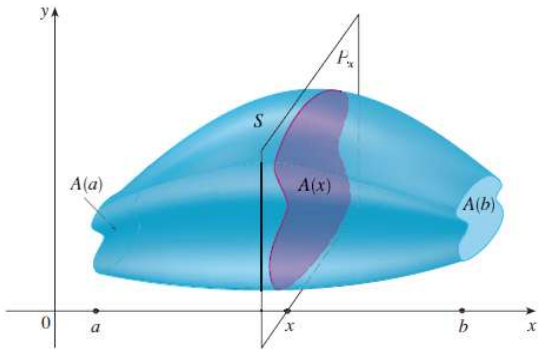
2.3.1 ปริมาตร

จากสูตรปริมาตรของทรงกระบอก $V = Ah =$ พื้นที่ฐานคูณด้วยความสูง

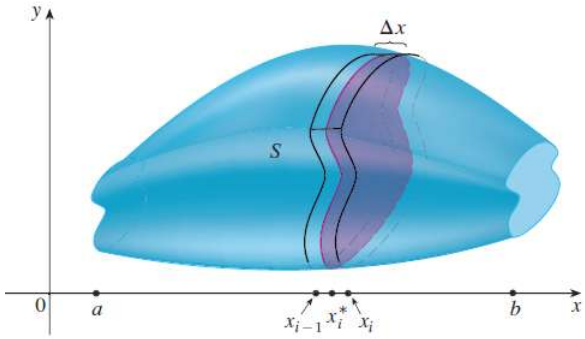


(a) Cylinder $V = Ah$ (b) Circular cylinder $V = \pi r^2 h$ (c) Rectangular box $V = lwh$

พิจารณาการหาปริมาตรทรงตัน S จาก $x = a$ ถึง $x = b$ ดังรูป



เราจะหาปริมาตรทรงตัน S โดยเริ่มจากการเฉือนรูปทรงตัน S ตั้งฉากกับแกน x ออกเป็น n ส่วนเท่าๆกัน



กำหนดจุดในแต่ละช่วงย่อย คือ $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ จะได้พื้นที่หน้าตัดที่เกิดจากการเฉือน คือ $A(x_i)$ และความหนาคือ Δx ดังนั้นปริมาตรของรูปที่ถูกเฉือนคือ

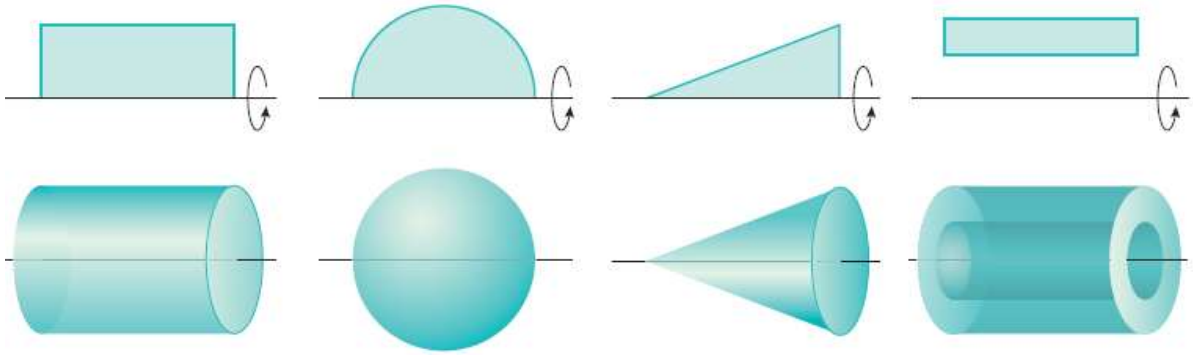
$$V_i = \text{พื้นที่หน้าตัดคูณด้วยความหนา} = A(x_i)\Delta x$$

จากผลบวกรีมานน์จะได้ว่าปริมาตรทรงตัน S คือ $V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเฉือนรูปทรงตัน S จาก $y = c$ ถึง $y = d$ โดยตัดตั้งฉากกับแกน y จะได้พื้นที่หน้าตัด คือ $A(y)$ เพราะฉะนั้น $V = \int_c^d A(y)dy$

ต่อไปจะพิจารณาทรงตันที่เกิดจากการหมุนและจะกล่าวถึงตัวอย่างของทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกนหมุนดังนี้

ตัวอย่างที่ 49



(a) (b) (c) (d)

จากรูปจะเห็นว่า

รูป (a) ทรงกระบอกกลมเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารอบแกนหมุน

รูป (b) ทรงกลมเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณของรูปครึ่งวงกลมรอบแกนหมุน

รูป (c) กรวยกลมเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรอบแกนหมุน

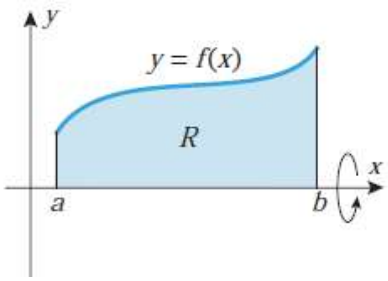
รูป (d) เปลือกทรงกระบอกเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารอบแกนหมุน

ในที่นี้จะพิจารณาหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนซึ่งสามารถหาได้ 2 วิธีนั่นคือ วิธีจาน (disk method) และวิธีเปลือกทรงกระบอก (shell method)

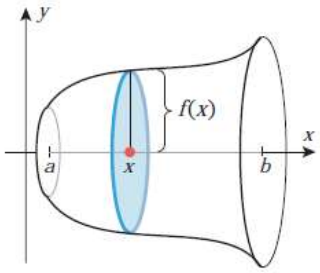
2.3.2 การหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีจาน

ในการหาปริมาตรโดยใช้วิธีนี้ เราจะแบ่งพื้นที่ของการหมุนให้ตั้งฉากกับแกนหมุนซึ่งจะทำให้ได้ภาคตัดขวางของทรงตันเป็นวงกลมหรือวงแหวน

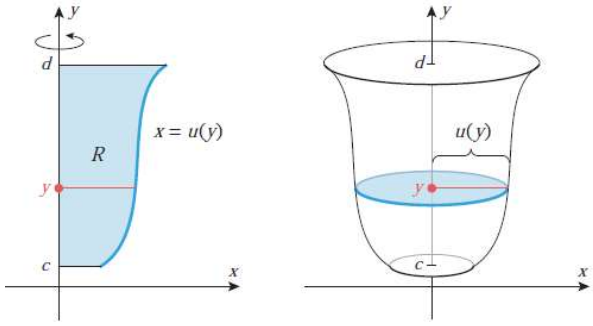
กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนช่วง $[a,b]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน x จาก $x = a$ ถึง $x = b$ ดังรูป



ถ้าหมุนบริเวณ R รอบแกน x จะได้ปริมาตรทรงตันดังรูป



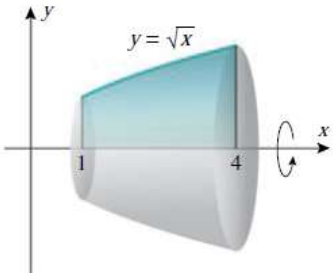
ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด คือ $A(x) = \pi\left[f(x)\right]^2$ ถ้าให้ V เป็นปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณ R รอบแกน x แล้ว $V = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$ ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนช่วง $[c,d]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = u(y)$ และแกน y จาก $y = c$ ถึง $y = d$ ดังรูป



จะได้ว่าปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน y คือ $V = \int_c^d \pi\left[u(y)\right]^2 dy$

ตัวอย่างที่ 50 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = \sqrt{x}, 1 \le x \le 4$ รอบแกน x

วิธีทำ บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงดังรูป



เพราะฉะนั้นปริมาตรทรงตันคือ

$$V = \int_1^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx$$

$$= \int_1^4 \pi x \, dx$$

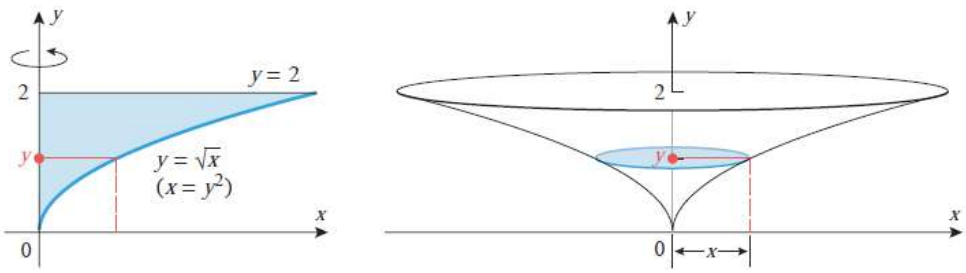
$$= \left.\frac{\pi x^2}{2}\right|_1^4$$

$$= \frac{\pi}{2}(4^2 - 1^2)$$

$$= \frac{15\pi}{2} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

ตัวอย่างที่ 51 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$ รอบแกน y

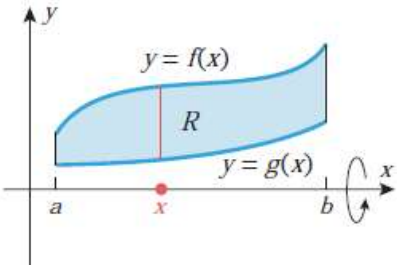
วิธีทำ บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงดังรูป



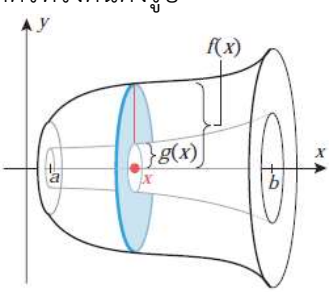
เพราะฉะนั้นปริมาตรทรงตันคือ

ต่อไปจะกล่าวถึงปริมาตรทรงตันที่เกิดจาการหมุนพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งรอบแกน x

กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ดังรูป



ถ้าหมุนบริเวณ R รอบแกน x จะได้ปริมาตรทรงตันดังรูป



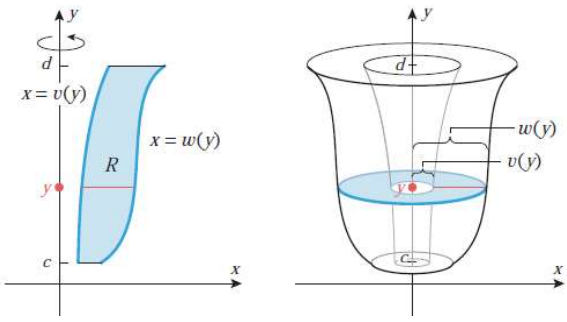
จะเห็นว่าหน้าตัดเป็นวงแหวนซึ่งมีรัศมีคือ $\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2$ ดังนั้นพื้นที่หน้าตัดของหน้าตัดคือ

$$A(x) = \pi\left(\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right)$$

ถ้าให้ V เป็นปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณ R รอบแกน x แล้ว

$$V = \int_a^b \pi\left(\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right)dx$$

ในทำนองเดียวกันถ้า R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = w(y)$, $x = v(y)$ จาก $y = c$ ถึง $y = d$ ดังรูป

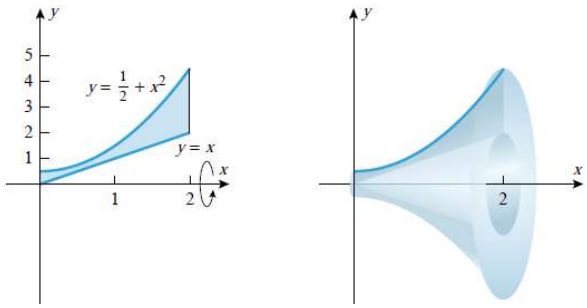


จะได้ว่าปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน y คือ

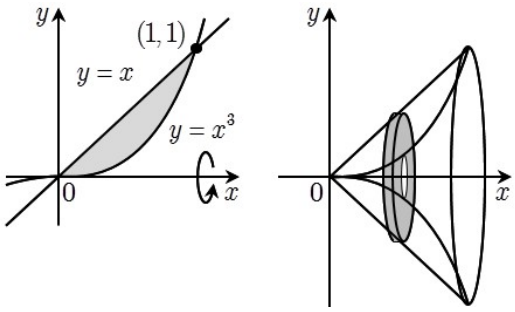
$$V = \int_c^d \pi\left(\left[w(y)\right]^2 - \left[v(y)\right]^2\right)dy$$

ตัวอย่างที่ 52 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = \dfrac{1}{2} + x^2$ และเส้นตรง $y = x$ เมื่อ $0 \le x \le 2$ รอบแกน x

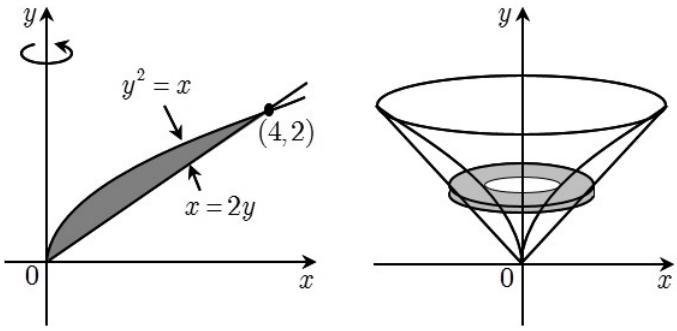
วิธีทำ บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงดังรูป



ตัวอย่างที่ 53 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = x^3$ และเส้นตรง $y = x$ ในจตุภาคที่หนึ่งรอบแกน x ดังรูป



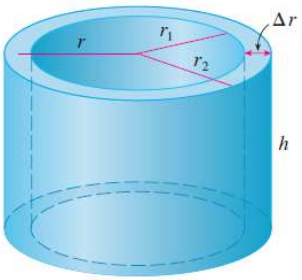
ตัวอย่างที่ 54 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y^2 = x$ และเส้นตรง $x = 2y$ รอบแกน y ดังรูป



2.3.3 การหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

ในการหาปริมาตรโดยใช้วิธีนี้ เราจะแบ่งพื้นที่ของการหมุนให้ขนานกับแกนหมุนซึ่งจะทำให้ได้เปลือกทรงกระบอก

พิจารณารูปทรงเปลือกทรงกระบอกที่มีรัศมีวงนอกและรัศมีวงในคือ r_2 และ r_1 ตามลำดับดังรูป

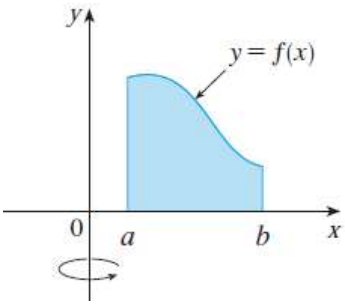


ดังนั้นปริมาตรของเปลือกทรงกระบอก (V) มีค่าเท่ากับปริมาตรทรงกระบอกภายนอก (V_2) ลบด้วยปริมาตรทรงกระบอกภายใน (V_1) นั่นคือ

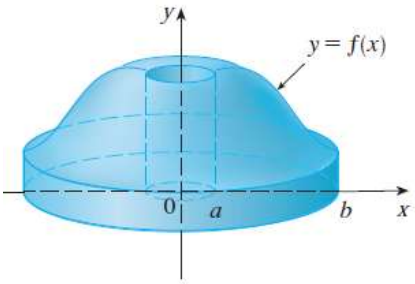
$$
\begin{aligned}
V &= V_2 - V_1 \\
&= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \\
&= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\
&= \pi(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)h \\
&= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h(r_2 - r_1)
\end{aligned}
$$

ถ้าให้ $\Delta r = r_2 - r_1$ (ความหนาของเปลือทรงกระบอก) และ $r = \dfrac{r_2 + r_1}{2}$ (r คือรัศมีเฉลี่ยของเปลือกทรงกระบอก) ดังนั้น $V = 2\pi rh\Delta r$

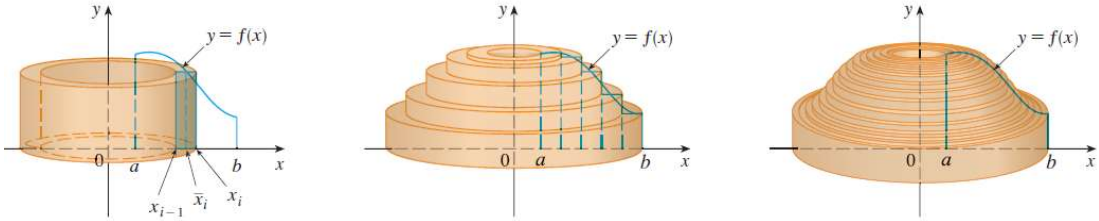
กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนช่วง $[a,b]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และเส้นตรง $x = a, x = b$ ดังรูป



ถ้าหมุนบริเวณ R รอบแกน y จะได้ปริมาตรทรงตันดังรูป

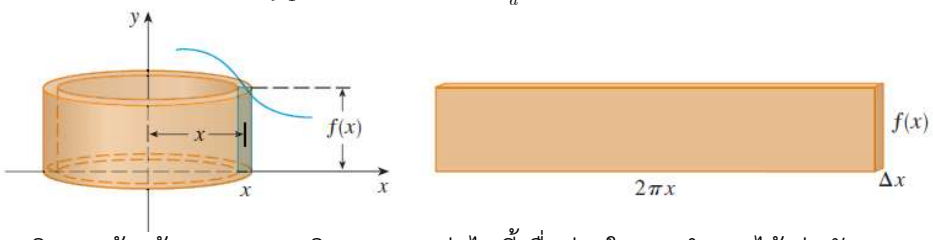


เราแบ่งช่วง $[a,b]$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า n ช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ จะได้ความกว้างของช่วงย่อยแต่ละช่วงคือ Δx กำหนดให้ $\overline{x}_i$ เป็นจุดกึ่งกลางของช่วงย่อยที่ i ดังนั้นเปลือกทรงกระบอกที่มีรัศมีเฉลี่ยคือ $\overline{x}_i$ มีความสูงคือ $f(\overline{x}_i)$ และมีความหนาเป็น Δx จะมีปริมาตรคือ $V_i = 2\pi\overline{x}_i f(\overline{x}_i)\Delta x$



จากผลบวกรีมานน์จะได้ว่าปริมาตรทรงตันคือ

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi \overline{x}_i f(\overline{x}_i)\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

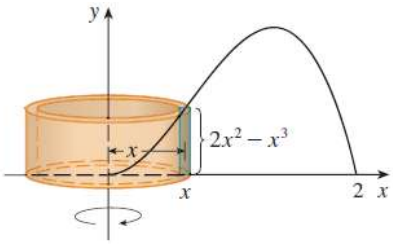


จากสูตรการหาปริมาตรข้างต้น เราอาจจะพิจารณารูปต่อไปนี้เพื่อช่วยในการจำสูตรได้เช่นกัน

นั่นคือ $V = \int_a^b$ ความยาวเส้นรอบ x ความสูง x ความหนา $= \int_a^b 2\pi x f(x)dx$

ตัวอย่างที่ 55 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = 2x^2 - x^3$ และแกน x รอบแกน y

วิธีทำ บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงดังรูป



นอกจากนี้ เราสามารถขยายแนวคิดของการหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งไปสู่การหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ระหว่างโค้งได้ดังนี้

กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ถ้า R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$, $y = g(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ แล้วปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณ R รอบแกน y คือ

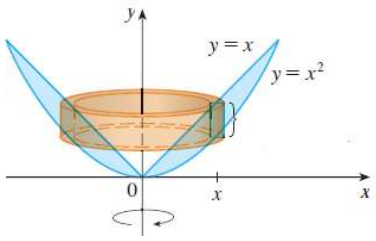
$$V = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx$$

และในทำนองเดียวกันถ้า R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = w(y)$, $x = v(y)$ จาก $y = c$ ถึง $y = d$ แล้วปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณ R รอบแกน x คือ

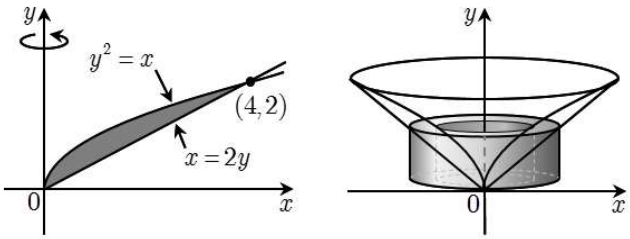
$$V = \int_c^d 2\pi y[w(y) - v(y)]\,dy$$

ตัวอย่างที่ 56 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และเส้นตรง $y = 0$ รอบแกน y

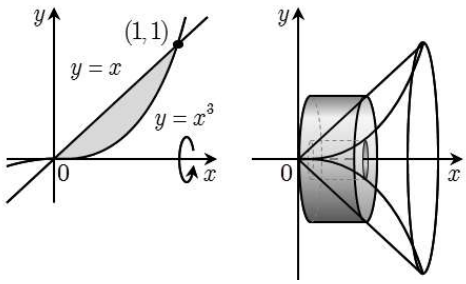
วิธีทำ บริเวณที่ต้องการหาปริมาตรแสดงดังรูป

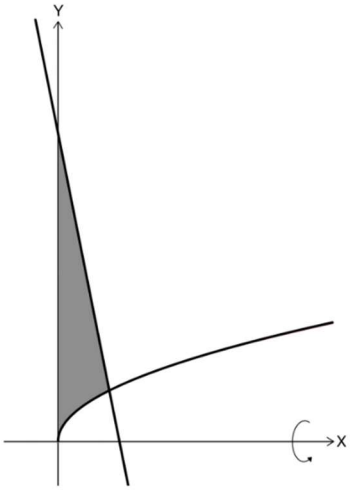


ตัวอย่างที่ 57 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y^2 = x$ และเส้นตรง $x = 2y$ รอบแกน y ดังรูป



ตัวอย่างที่ 58 จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = x^3$ และเส้นตรง $y = x$ ในจตุภาคที่หนึ่งรอบแกน x ดังรูป



ตัวอย่างที่ 59

จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = \sqrt{x}, y = 6 - 5x$ และ $x = 0$ ดังรูป รอบแกน x พร้อมทั้งหาจุดตัดของกราฟ