

## Оптимизация плана перевозок продукта от поставщиков к потребителям по критерию минимизации транспортных издержек

**Цель работы.** Оптимизация плана перевозок продукта от поставщиков к его потребителям по критерию минимизации транспортных издержек.

### Постановка транспортной задачи (ТЗ)

Пусть имеются пункты производства  $A_1, A_2, \dots, A_m$  с объемами производства некоторого однородного продукта, равными соответственно  $a_1, a_2, \dots, a_m$  и пункты потребления  $B_1, B_2, \dots, B_n$  с объемами потребления, равными  $b_1, b_2, \dots, b_n$  соответственно.

Однородный продукт – это продукт одного и того же назначения и качества.

Предположим, что из каждого пункта производства возможна транспортировка продукта в любой пункт потребления.

В базовой (закрытой) модели ТЗ предполагается, что производство и потребление сбалансированы, т. е. сумма объемов производства в пунктах производства равна сумме объемов потребления, т. е.:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (\text{условие баланса})$$

где  $i$  – индекс пункта производства;

$j$  – индекс пункта потребления.

Известны затраты  $c_{ij}$  (транспортные издержки) на перевозку единицы продукта из каждого пункта производства  $i$  в каждый пункт потребления  $j$ .

Необходимо найти такой план перевозки продукта (т. е. какое количество продукта и по каким маршрутам следует направить), при котором:

- весь продукт из пунктов производства будет вывезен полностью (без остатков),
- в каждый пункт потребления будет доставлено требуемое число единиц продукта (запросы потребителей будут полностью удовлетворены),
- при этом общие (суммарные) затраты на перевозку продукта будут минимальными.

### Математическая модель ТЗ

1. Обозначим через  $x_{ij}$  – количество продукта, перевозимого из пункта  $i$  в пункт  $j$ .

2. Целевая функция. Обозначим через  $f$  – суммарные затраты на перевозку продукта.

Тогда ЦФ примет следующий вид:

$$\text{найти } \min f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot x_{ij} \quad (*)$$

3. Система ограничений на значения управляемых переменных:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (**) \quad (\text{условия полного вывоза})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (***) \quad (\text{условия полного удовлетворения спроса})$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n} \quad (****) \text{ (требование неотрицательности перемен-}$$

ных).

Данная модель представляет собой каноническую задачу линейного программирования (ЛП) с  $m \cdot n$  переменными и  $(m+n)$  ограничений типа равенств.

**Пример.** Составить оптимальный план прикрепления потребителей продукции к её поставщикам, обеспечивающий минимальные затраты на перевозку при следующих исходных данных:

а) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	300	550	750

б) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4
Потребности потребителей (b <sub>j</sub> )	350	250	600	400

в) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщики (i)	Потребители (j)			
	1	2	3	4
1	7	2	4	1
2	4	1	6	9
3	2	8	3	5

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (1–4) не более 150 т., а (1–2) – не более 200 т.

При расчетах использовать программу «Lindo».

### Построение математической модели:

Приведенная транспортная задача является закрытой, так как выполняется условие баланса:

$$300 + 550 + 750 = 350 + 250 + 600 + 400.$$

1. Управляемые переменные -  $x_{ij}$  – количество продукции (в тоннах), перевозимой от i-го поставщика j-му потребителю ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$ ).
2. Целевая функция – минимум суммарных транспортных издержек на перевозку продукции:

$$\text{найти } \min (7x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + x_{14} + 4x_{21} + x_{22} + 6x_{23} + 9x_{24} + 2x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33} + 5x_{34}).$$

3. Система ограничений.

Ограничения, обеспечивающие выполнение условий полного вывоза продукции от каждого поставщика:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=300$  - для 1-го поставщика,

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=550$  - для 2-го поставщика,

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=750$  - для 3-го поставщика.

Ограничения, обеспечивающие выполнение условий полного удовлетворения спроса для каждого потребителя:

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=350$  - для 1-го потребителя,

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=250$  - для 2-го потребителя,

$x_{13}+x_{23}+x_{33}=600$  - для 3-го потребителя,

$x_{14}+x_{24}+x_{34}=400$  - для 4-го потребителя.

Неотрицательность переменных:

$x_{11} \geq 0$

$x_{12} \geq 0$

$x_{13} \geq 0$

$x_{14} \geq 0$

$x_{21} \geq 0$

$x_{22} \geq 0$

$x_{23} \geq 0$

$x_{24} \geq 0$

$x_{31} \geq 0$

$x_{32} \geq 0$

$x_{33} \geq 0$

$x_{34} \geq 0$ .

Запись математической модели транспортной задачи в соответствии с требованиями программы Lindo имеет вид:

!Транспортная задача

!Целевая функция

min  $7x_{11}+2x_{12}+4x_{13}+x_{14}+4x_{21}+x_{22}+6x_{23}+9x_{24}+2x_{31}+8x_{32}+3x_{33}+5x_{34}$

Subject to

!Система ограничений

!Условия полного вывоза продукции

1)  $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=300$

2)  $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=550$

3)  $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=750$

!Условия полного удовлетворения спроса

4)  $x_{11}+x_{21}+x_{31}=350$

5)  $x_{12}+x_{22}+x_{32}=250$

6)  $x_{13}+x_{23}+x_{33}=600$

7)  $x_{14}+x_{24}+x_{34}=400$

!Условия неотрицательности переменных

8)  $x_{11} \geq 0$

9)  $x_{12} \geq 0$

10)  $x_{13} \geq 0$

11)  $x_{14} \geq 0$

12)  $x_{21} \geq 0$

13)  $x_{22} \geq 0$

14)  $x_{23} \geq 0$

15)  $x_{24} \geq 0$   
 16)  $x_{31} \geq 0$   
 17)  $x_{32} \geq 0$   
 18)  $x_{33} \geq 0$   
 19)  $x_{34} \geq 0$   
 END

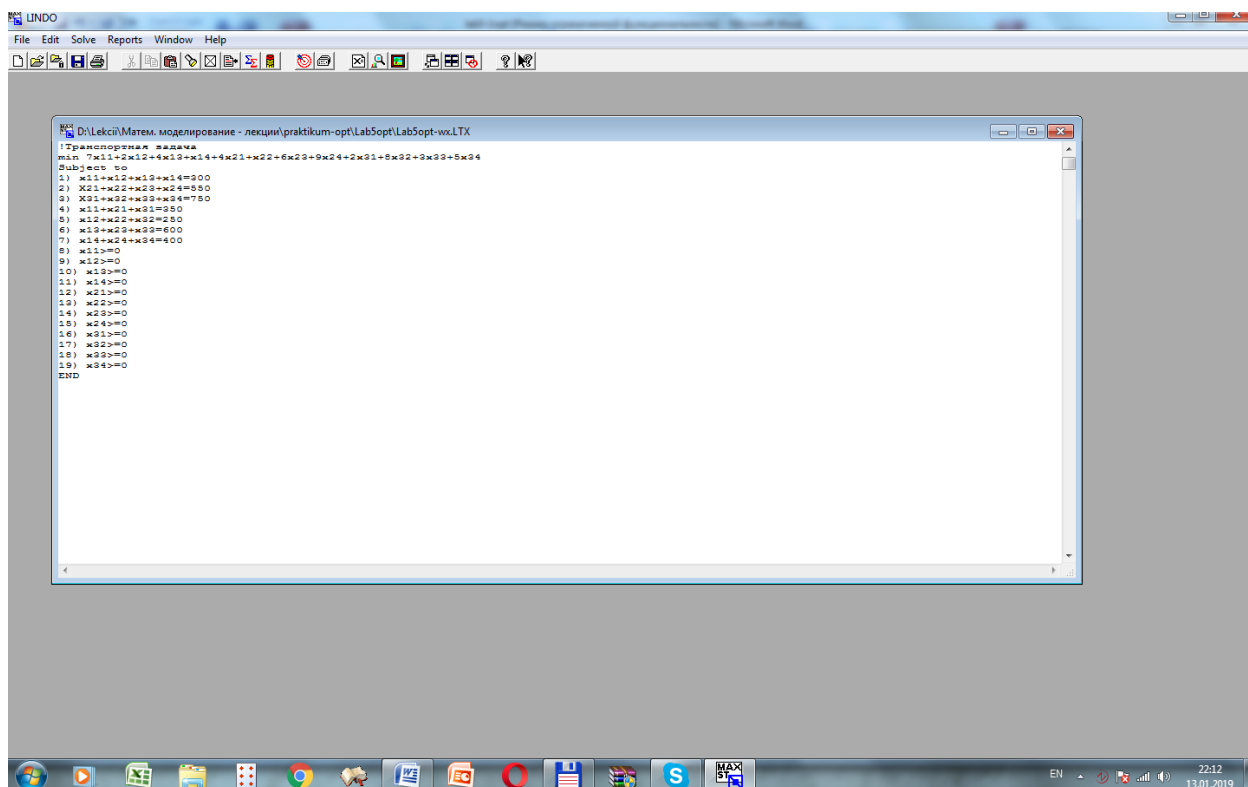


Рисунок 1 – Вид диалогового окна с записью математической модели ТЗ

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 6

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4150.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	0.000000	9.000000
X12	0.000000	7.000000
X13	0.000000	5.000000
X14	200.000000	0.000000
X21	200.000000	0.000000
X22	250.000000	0.000000
X23	0.000000	1.000000
X24	0.000000	2.000000
X31	50.000000	0.000000
X32	0.000000	9.000000
X33	600.000000	0.000000
X34	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
1)	0.000000	6.000000
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	0.000000	-4.000000
5)	0.000000	-1.000000
6)	0.000000	-5.000000
7)	0.000000	-7.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	0.000000	0.000000
11)	300.000000	0.000000
12)	200.000000	0.000000
13)	250.000000	0.000000
14)	0.000000	0.000000
15)	0.000000	0.000000
16)	50.000000	0.000000
17)	0.000000	0.000000
18)	600.000000	0.000000
19)	100.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 6

Рисунок 2 – Вид диалогового окна с результатами решения ТЗ

Минимальные суммарные транспортные издержки составляют 4150 тыс.руб.

Оптимальный план перевозок продукта:

Объем перевозки продукта от 1-го поставщика:

- 4-му потребителю – 300 т.;

Объем перевозки продукта от 2-го поставщика:

- 1-му потребителю – 300 т.;
- 2-му потребителю – 250 т.

Объем перевозки продукта от 3-го поставщика:

- 1-му потребителю – 50 т.;
- 3-му потребителю – 600т.
- 4-му потребителю – 100т.

Для учета ограничений на объемы перевозок, необходимо ввести в систему ограничений два дополнительных условия:

$$X_{14} \leq 150$$

$$X_{12} \leq 200.$$

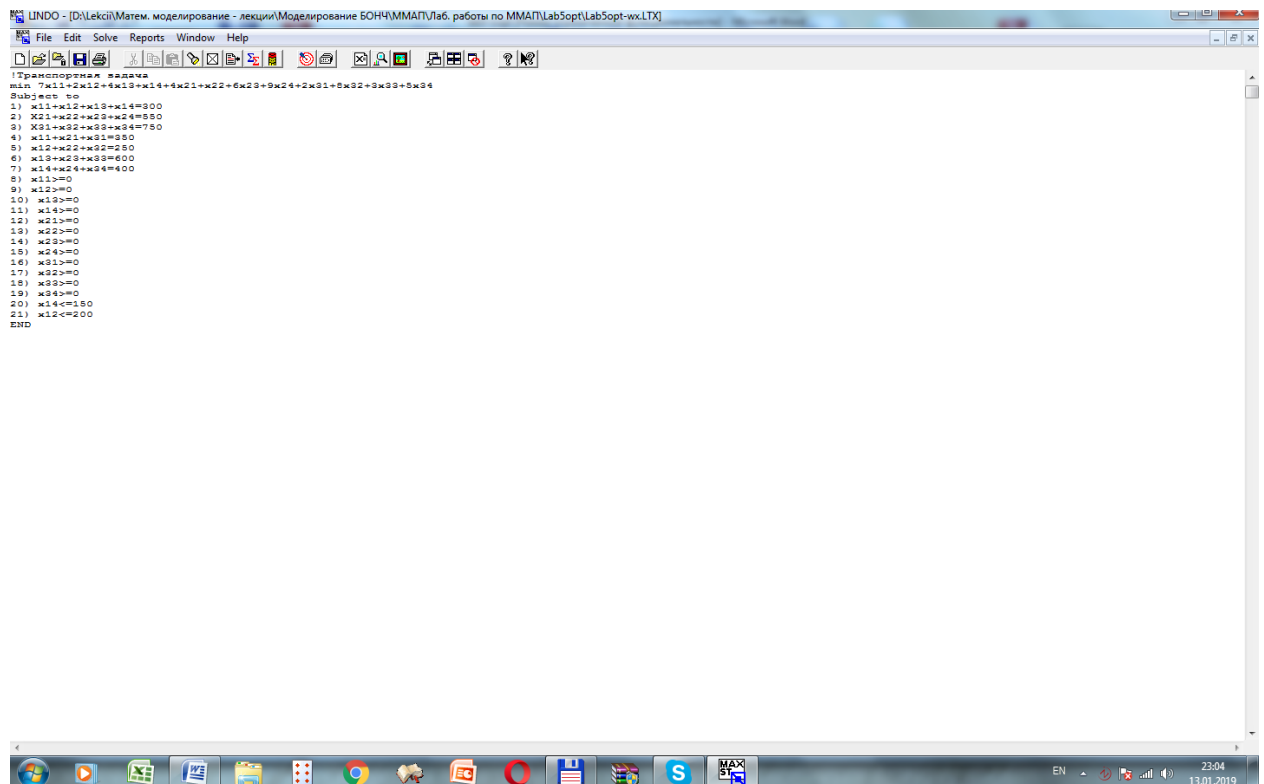


Рисунок 3 – Вид диалогового окна с записью математической модели ТЗ с дополнительными ограничениями

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 7

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4900.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	0.000000	4.000000
X12	0.000000	2.000000
X13	150.000000	0.000000
X14	150.000000	0.000000
X21	300.000000	0.000000
X22	250.000000	0.000000
X23	0.000000	1.000000
X24	0.000000	2.000000
X31	80.000000	0.000000
X32	0.000000	8.000000
X33	480.000000	0.000000
X34	270.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
1)	0.000000	1.000000
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	0.000000	-4.000000
5)	0.000000	-7.000000
6)	0.000000	-5.000000
7)	0.000000	-7.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	150.000000	0.000000
11)	150.000000	0.000000
12)	300.000000	0.000000
13)	250.000000	0.000000
14)	0.000000	0.000000
15)	0.000000	0.000000
16)	60.000000	0.000000
17)	0.000000	0.000000
18)	480.000000	0.000000
19)	250.000000	0.000000
20)	0.000000	8.000000
21)	200.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 7

Рисунок 4 – Вид диалогового окна с результатами решения ТЗ с дополнительными ограничениями

Минимальные суммарные транспортные издержки составляют 4900 тыс.руб.

Оптимальный план перевозок продукта:

Объем перевозки продукта от 1-го поставщика:

- 3-му потребителю – 150 т;

- 4-му потребителю – 150 т.

Объем перевозки продукта от 2-го поставщика:

- 1-му потребителю – 300 т;
- 2-му потребителю – 250 т.

Объем перевозки продукта от 3-го поставщика:

- 1-му потребителю – 50 т.;
- 3-му потребителю – 450 т.;
- 4-му потребителю – 250 т.

### Индивидуальные варианты задания

Номер варианта задания определяется последней цифрой студенческого билета

Рассчитать оптимальный план перевозки продукции при условии, что затраты на перевозку единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю, возможности поставщика и потребности потребителей принимают значение соответственно номеру варианта.

Вариант 1

- а) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	200	150	400

- б) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4	5
Потребности потребителей (b <sub>j</sub> )	100	180	100	200	170

- с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)				
	1	2	3	4	5
1	4	2	4	5	1
2	4	5	6	9	3
3	2	8	4	5	3

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (3–4) не более 150 т., а (1–2) - не более 50 т.

Вариант 2

- а) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3	4
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	300	500	750	140

- b) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4
Потребности потребителей (bj)	350	490	250	600

- с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)			
	1	2	3	4
1	3	2	6	5
2	6	7	6	8
3	3	2	4	5
4	3	4	5	6

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (1–4) не более 250 т., а (3–2) - не более 100 т.

Вариант 3

- a) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3
Возможности поставщика (ai)	460	280	700

- b) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4	5
Потребности потребителей (bj)	300	150	500	350	140

- с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)				
	1	2	3	4	5
1	5	2	4	3	4
2	4	3	6	9	2
3	6	8	2	5	6

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (3–1) не более 150 т., а (3–3) - не более 200 т.

Вариант 4

- a) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1



Поставщики (i)	1	2	3	4
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	125	140	220	200

b) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4
Потребности потребителей (b <sub>j</sub> )	210	50	300	125

с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)			
	1	2	3	4
1	7	8	4	4
2	3	4	6	9
3	7	8	4	5
4	1	6	3	6

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (1–4) не более 100 т., (3–3) - не более 200 т. и (4-1) - не более 50 т.

Вариант 5

a) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	80	100	120

b) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4	5
Потребности потребителей (b <sub>j</sub> )	20	75	100	45	60

с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)				
	1	2	3	4	5
1	3	4	6	5	4
2	9	7	3	9	2
3	1	8	4	5	4

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (1–2) не более 25 т., а (2–5) - не более 50 т.

Вариант 6

а) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3	4
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	200	450	600	180

б) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4
Потребности потребителей (b <sub>j</sub> )	400	230	500	300

с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)			
	1	2	3	4
1	3	2	4	6
2	4	6	6	9
3	2	8	3	5
4	7	2	1	8

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (2–1) не более 150 т., (3-3) - не более 100 т. и (3-4) - не более 180 т.

Вариант 7

а) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	300	600	850

б) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4	5
Потребности потребителей (b <sub>j</sub> )	350	500	250	400	250

с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)				
	1	2	3	4	5
1	7	6	2	7	1
2	3	7	6	9	8
3	2	3	3	5	6

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (2–1) не более 200 т., (3-2) - не более 250 т. и (3-4) - не более 300 т.

а) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3	4
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	220	640	300	440

б) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4
Потребности потребителей (b <sub>j</sub> )	550	280	400	370

с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)			
	1	2	3	4
1	2	5	3	8
2	7	8	6	9
3	2	4	6	5
4	9	2	1	4

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (1–1) не более 100 т., (2–4) - не более 300 т. и (4-2) - не более 220 т.

а) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	360	570	910

б) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4	5
Потребности потребителей (b <sub>j</sub> )	450	200	620	350	220

с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)				
	1	2	3	4	5
1	6	3	4	9	7
2	3	9	6	7	3
3	1	8	3	5	9

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (1–2) не более 150 т., (3–3) - не более 300 т., и (3-4) - не более 250 т.

Вариант 0

а) возможности поставщиков (в тоннах):

Таблица 1

Поставщики (i)	1	2	3	4
Возможности поставщика (a <sub>i</sub> )	400	350	420	370

б) потребности потребителей (в тоннах):

Таблица 2

Потребители (j)	1	2	3	4
Потребности потребителей (b <sub>j</sub> )	300	350	350	540

с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от i-го поставщика к j-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщик (i)	Потребитель (j)			
	1	2	3	4
1	2	4	2	6
2	4	3	5	9
3	2	8	3	5
4	6	4	1	3

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность коммуникаций (1–3) не более 200 т., (2–2) - не более 250 т. и (4-4) - не более 250 т.