## 3.4. Принятие решений на основе применения модели транспортной задачи

Транспортная задача (ТЗ) - одна из важнейших задач ЛП. На основе модели ТЗ решаются разнообразные задачи оптимизации систем связи и компьютерных систем, перевозки грузов, загрузки производственного оборудования и другие.

**Постановка задачи.** Пусть имеются пункты производства $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с объемами производства некоторого однородного продукта, равными соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и пункты потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$ с объемами потребления, равными $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответственно.

Однородный продукт – это продукт одного того же назначения и качества.

Предположим, что из каждого пункта производства возможна транспортировка продукта в любой пункт потребления.

В базовой (закрытой) модели ТЗ предполагается, что производство и потребление сбалансированы, т. е. сумма объемов производства в пунктах производства равна сумме объемов потребления, т. е.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad \text{(условие баланса)}$$

где i – индекс пункта производства;

j – индекс пункта потребления.

Известны транспортные издержки) $\mathbf{c_{ij}}$ на перевозку единицы продукта из каждого пункта производства i в каждый пункт потребления j.

Необходимо найти такой план перевозки продукта (т. е. какое количество продукта и по каким маршрутам следует направить), при котором:

- весь продукт из пунктов производства будет вывезен полностью (без остатков),
- в каждый пункт потребления будет доставлено требуемое число единиц продукта (запросы потребителей будут полностью удовлетворены),
- при этом суммарные затраты на перевозку продукта будут минимальными.

На рис. 3.1. изображена схема, характеризующая существо проблемы, рассматриваемой в ТЗ.

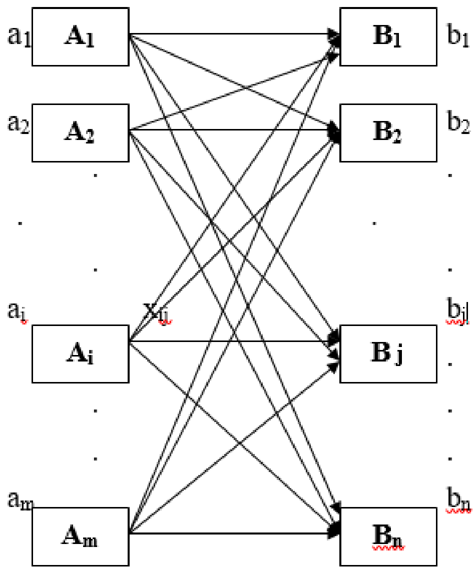


Рис. 3.1. Схема возможных поставок продукции

**Математическая модель ТЗ**

I. Управляемые переменные. Обозначим через $\mathbf{x_{ij}}$ – количество продукта, перевозимого из пункта **i** в пункт **j**.

II. Целевая функция. Обозначим через **f** – суммарные затраты на перевозку продукта. Тогда ЦФ примет следующий вид:

Найти $$\min f = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \qquad (*)$$

III. Система ограничений имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}$$ (**) (условия полного вывоза)

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n}$$ (***) (условия полного удовлетворения спроса)

$X_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}$ . (****) (требование неотрицательности переменных).

Данная модель представляет собой каноническую задачу ЛП с $m \cdot n$ переменными и (m+n) ограничений типа равенств.

Первая группа ограничений (первые m уравнений) соответствует условию вывоза продукта из каждого пункта производства во все пункты потребления в количестве, равном запасу продукта в данном пункте производства.

Вторая группа ограничений соответствует условию полного удовлетворения спроса на продукт в каждом пункте потребления.

Поставленная задача (*) – (****) относится к классу задач ЛП и может быть решена симплекс – методом. Следует отметить, для решения ТЗ разработаны более эффективные, специальные методы, например, метод потенциалов.

Замечание 1. В зависимости от того, сбалансированы ли между собой суммарный спрос на продукт и суммарное предложение, математические модели ТЗ будут различными:

а) если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ , т. е. спрос и предложение сбалансированы (равны), то имеем закрытую модель ТЗ;

б) если предложение превышает спрос, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ , то имеем открытую ТЗ с избыточным запасом.

В этом случае для приведения открытой ТЗ к закрытой проводится искусственная балансировка путем введения фиктивного (n+1) - го потребителя с фиктивной заявкой, равной:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Вводятся дополнительные переменные $\{x_{i,\, n+1}\}$, $(i = \overline{1, m},)$, где $x_{i,\, n+1}$ – невостребованное количество продукта у каждого i-го поставщика.

Таким образом, представляется возможным определить оптимальную структуру остатков продукта в пунктах производства по критерию минимума суммарных транспортных издержек.

Величины затрат на перевозку $c_{i,\, n+1}$ $(i = \overline{1, m})$ принимаются равными нулю, т.е. $c_{i,\, n+1} = 0$, $i=\overline{1,m}$.

Размерность задачи увеличивается на m штук неотрицательных переменных $X_{i,\, n+1}$ и на одно дополнительное условие:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В итоге получаем оптимизационную модель вида:

найти $\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij}$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, j = \overline{1, n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n+1}.$$

в) если суммарный спрос превышает суммарное предложение, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то имеем открытую ТЗ с недостатком запасов.

Проводится искусственная балансировка путем введения фиктивного (m+1)-го поставщика с фиктивным производством продукта в объеме

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Вводятся дополнительные переменные $\{x_{m+1,j}\}$, $j = \overline{1, n}$, где $x_{m+1,j}$ – недопоставка продукта каждому j-му потребителю.

С помощью этих переменных представляется возможным определить оптимальную структуру недопоставок продукта потребителям по критерию минимума суммарных транспортных издержек.

Коэффициенты $c_{m+1, j}$ при дополнительных переменных $x_{m+1,j}$ в целевой функции принимаются равными нулю, т. е. $c_{m+1, j} = 0$, т. к. фактически этих затрат нет.

Размерность задачи увеличивается на n неотрицательных переменных $x_{m+1,j}$ и на одно условие вида:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{m+1,j} = a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

В итоге получаем оптимизационную модель вида:

найти $\min \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m+1}$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1, m+1}, \; j = \overline{1, n}.$$

Замечание 2. Иногда накладываются ограничения на пропускные способности коммуникаций, т. е. ограничения сверху на объемы перевозок $x_{ij}$:

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij},$$

где $d_{ij}$ – ограничение сверху на объем перевозок продукта по коммуникации (ij).

Замечание 3. Запрет некоторых перевозок. Пусть между поставщиками и потребителями не существует некоторых маршрутов (связей) или же ими нельзя пользоваться. Например, примем, что между некоторыми пунктами i и j поставоку производить нельзя. Это можно учесть, если принять заведомо величину перевозок, равной нулю ($x_{ij} = 0$), или же назначить стоимость перевозок $c_{ij}$, намного превышающую стоимость остальных перевозок ($C_{ij} = \infty$).