

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»
(СПбГУТ)**

**Факультет Информационных систем и технологий
Кафедра Автоматизации предприятий связи**

Системный анализ и принятие решений

Отчет по лабораторной работе №3

Вариант 1

**«Оптимизация плана перевозок продукта от поставщиков к потребителям
по критерию минимизации транспортных издержек»**

Выполнил:

Студент гр. ИСТ-641

Иванов И.И.

Проверил:

ассистент Банцер Е.А.

Санкт-Петербург

2019

Цель выполнения работы

Цель выполнения лабораторной работы – расчет оптимального плана перевозок продукции от поставщиков к потребителям, который бы минимизировал суммарные затраты на транспортировку товара.

Постановка транспортной задачи

Пусть имеются пункты производства A_1, A_2, \dots, A_m с объемами производства некоторого однородного продукта, равными соответственно a_1, a_2, \dots, a_m и пункты потребления B_1, B_2, \dots, B_n с объемами потребления, равными b_1, b_2, \dots, b_n соответственно. Предполагается, что из каждого пункта производства возможна транспортировка продукта в любой пункт потребления. Известны затраты c_{ij} (транспортные издержки) на перевозку единицы продукта из каждого пункта производства i в каждый пункт потребления j .

Требуется найти такой план перевозки продукта, при котором:

- весь продукт из пунктов производства будет вывезен полностью (без остатков);
- в каждый пункт потребления будет доставлено требуемое число единиц продукта (запросы потребителей будут полностью удовлетворены);
- при этом общие (суммарные) затраты на перевозку продукта будут минимальными.

Описание системы

Рассматривается система уровня «Крупная логистическая компания».

- Основные элементы системы: элемент типа «Предприятие-поставщик», элемент типа «Предприятие-потребитель».
- Параметры, которыми характеризуется элемент типа «Предприятие-поставщик»: «Возможности поставщика».
- Параметры, которыми характеризуется элемент типа «Предприятие-потребитель»: «Потребности потребителя».
- Параметры, которыми характеризуется связка элементов «Предприятие-Поставщик»-«Предприятие-потребитель»: «Затраты на перевозку единицы продукции».
- Цель системы – минимизировать суммарные транспортные издержки на перевозку продукции.
- Управляемые переменные – «Количество перевозимой продукции от поставщика к потребителю».
- Ограничивающие требования: «Полный вывоз продукции от каждого поставщика», «Полное удовлетворение спроса каждого потребителя».

Математическая модель транспортной задачи

В базовой (закрытой) модели транспортной задачи предполагается, что производство и потребление сбалансированы, т.е. сумма объемов производства в пунктах производства равна сумме объемов потребления:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \text{ - условие баланса.}$$

где i – индекс пункта производства;

j – индекс пункта потребления.

1. Управляемые переменные: x_{ij} – количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j .
2. Целевая функция: f – суммарные затраты на перевозку продукта во все пункты потребления.

$$\min f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} .$$

3. Система ограничений на значения управляемых переменных:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} - \text{условия полного вывоза продукции;}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} - \text{условия полного удовлетворения спроса;}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} - \text{требование неотрицательности переменных.}$$

Данная модель представляет собой каноническую задачу линейного программирования с $m \cdot n$ переменными и $(m+n)$ ограничениями типа равенств.

Первая группа ограничений соответствует условию вывоза продукта из каждого пункта производства во все пункты потребления в количестве, равном запасу продукта в данном пункте производства. Вторая группа ограничений соответствует условию полного удовлетворения спроса на продукт в каждом пункте потребления.

Функциональные возможности программы Lindo

Пакет прикладных программ Lindo обеспечивает решение задач линейного программирования (ЛП) и частично-целочисленного программирования (ЧЦП), в которых часть переменных являются целочисленными переменными. Рабочая версия программы Lindo позволяет решать задачи, содержащие до 200 тыс. переменных (в том числе до 20 тысяч целочисленных) и до 32 тысяч ограничений. В число ограничений входят ограничения на переменные целого типа.

Для решения задачи ЛП в пакете Lindo используется модифицированный симплекс-метод с мультипликативным представлением обратной матрицы, а для решения задачи ЧЦП - метод "ветвей и границ" (метод Лэнда и Дойга). При решении задачи ЧЦП на каждом шаге процесса ветвления используется модифицированный симплекс-метод. Программа при решении задач ЧЦП требует задания верхних и нижних границ для всех целочисленных переменных.

Результаты расчетов могут быть выведены на принтер или помещены в выходной файл на диске. При работе программы используются два основных диалоговых окна. В первое окно заносятся исходные данные: целевая функция, переменные, ограничения. Во второе окно выводятся результаты вычислений: полученное значение целевой функции и переменных, двойственные оценки, количество итераций и другие данные.

Задачи ЛП и ЧЦП могут быть введены в том виде, в котором они формулируются, т.е. без приведения к какой-либо стандартной форме. Возможно решение задач как минимизации, так и максимизации целевой функции (ЦФ). Ограничения могут быть любого типа: ">", "<," ">=", "<=" или "=". Исходные данные (значения коэффициентов матрицы задач ЛП или ЧЦП) могут быть введены как с помощью клавиатуры, используя экранный редактор, так и из предварительно созданного файла в MPS – формате.

Пример (вариант 1)

Описание деловой ситуации

Составить оптимальный план прикрепления потребителей продукции к её поставщикам, обеспечивающий минимальные затраты на перевозку продукции при следующих исходных данных:

а) возможности поставщиков (в тоннах) приведены в таблице 1:

Таблица 1

Поставщики (<i>i</i>)	1	2	3
Возможности поставщика (<i>a_i</i>)	300	550	750

б) потребности потребителей (в тоннах) приведены в таблице 2:

Таблица 2

Потребители (<i>j</i>)	1	2	3	4
Потребности потребителей (<i>b_j</i>)	350	250	600	400

с) затраты на перевозку единицы продукции (тонны) от *i*-го поставщика к *j*-му потребителю (в тыс.руб. на единицу продукции):

Таблица 3

Поставщики (<i>i</i>)	Потребители (<i>j</i>)			
	1	2	3	4
1	7	2	4	1
2	4	1	6	9
3	2	8	3	5

Сравнить результат решения поставленной задачи с результатами её решения при условии, что пропускная способность маршрута (1–4) не более 150 т., а маршрута (1–2) не более 200 т.

Построение математической модели:

Рассматриваемая транспортная задача является закрытой, так как выполняется условие баланса спроса и предложения:

$$300 + 550 + 750 = 350 + 250 + 600 + 400.$$

1. Пусть управляемые переменные:

x_{ij} - количество продукции (в тоннах), перевозимой от *i*-го поставщика к *j*-му потребителю ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$).

2. Целевая функция задачи – минимизация суммарных транспортных издержек на перевозку продукции:

$$7x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + x_{14} + 4x_{21} + x_{22} + 6x_{23} + 9x_{24} + 2x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33} + 5x_{34} \rightarrow \min$$

3. Система ограничений:

- Ограничения, обеспечивающие выполнение условий полного вывоза продукции от каждого поставщика:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300 \text{ - для 1-го поставщика,}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 550 \text{ - для 2-го поставщика,}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 750 \text{ - для 3-го поставщика.}$$

- Ограничения, обеспечивающие выполнение условий полного удовлетворения спроса для каждого потребителя:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 350 \text{ - для 1-го потребителя,}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 250 \text{ - для 2-го потребителя,}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 600 \text{ - для 3-го потребителя,}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 400 \text{ - для 4-го потребителя.}$$

- Неотрицательность переменных:

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}.$$

Анализ результатов решения задачи

Исходная целевая функция и система ограничений поставленной транспортной задачи задается в соответствии с требованиями программы Lindo, как показано на рисунке 1.

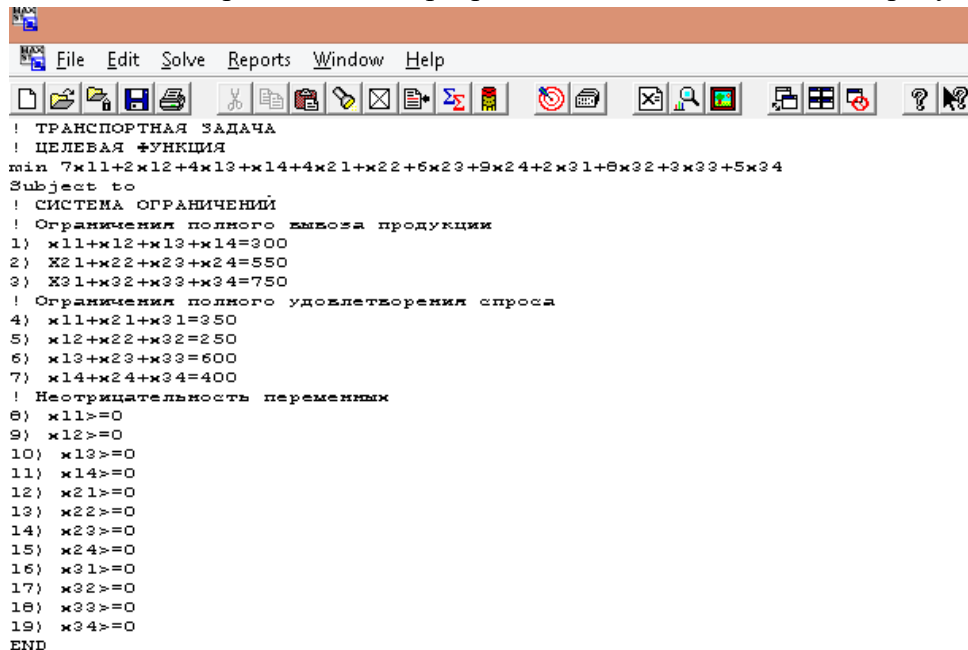


Рисунок 1 – Вид диалогового окна с записью математической модели транспортной задачи в соответствии с требованиями программы Lindo

Результат решения задачи поиска оптимального плана прикрепления потребителей продукции к ее поставщикам представлен на рисунке 2.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 6		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	4150.000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	0.000000	9.000000
X12	0.000000	7.000000
X13	0.000000	5.000000
X14	300.000000	0.000000
X21	300.000000	0.000000
X22	250.000000	0.000000
X23	0.000000	1.000000
X24	0.000000	2.000000
X31	50.000000	0.000000
X32	0.000000	9.000000
X33	600.000000	0.000000
X34	100.000000	0.000000

Рисунок 2 – Вид диалогового окна с результатами решения транспортной задачи

Objective function value – значение целевой функции, тыс.руб.

$x_{11} - x_{34}$ – количество продукции, перевозимое от поставщика к потребителю, т.

Минимальные суммарные транспортные издержки составляют 4150 тыс.руб. Оптимальный план перевозок продукции составит:

- 1) Объемы перевозок продукта от первого поставщика:
 - к 4-му потребителю – 300 т.;
- 2) Объемы перевозок продукта от второго поставщика:
 - к 1-му потребителю – 300 т.;

- к 2-му потребителю – 250 т.

3) Объемы перевозок продукта от третьего поставщика:

- к 1-му потребителю – 50 т.;

- к 3-му потребителю – 600 т.;

- к 4-му потребителю – 100 т.

Для учета ограничений пропускной способности маршрутов (1-4) и (1-2), необходимо в исходную систему ограничений ввести два дополнительных условия:

$$x_{14} \leq 150;$$

$$x_{12} \leq 200.$$

Задается исходная целевая функция и система ограничений поставленной задачи с учетом дополнительных условий по ограничению пропускной способности:

```
! ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА
! ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ
min 7*x11+2*x12+4*x13+x14+4*x21+x22+6*x23+9*x24+2*x31+8*x32+3*x33+5*x34
Subject to
! СИСТЕМА ОГРАНИЧЕНИЙ
! Ограничения полного вывоза продукции
1) x11+x12+x13+x14=300
2) x21+x22+x23+x24=550
3) x31+x32+x33+x34=750
! Ограничения полного удовлетворения спроса
4) x11+x21+x31=350
5) x12+x22+x32=250
6) x13+x23+x33=600
7) x14+x24+x34=400
! Неотрицательность переменных
8) x11>=0
9) x12>=0
10) x13>=0
11) x14>=0
12) x21>=0
13) x22>=0
14) x23>=0
15) x24>=0
16) x31>=0
17) x32>=0
18) x33>=0
19) x34>=0
! Ограничения на объемы перевозок
20) x14<=150
21) x12<=200
END
```

Рисунок 3 – Вид диалогового окна с записью математической модели транспортной задачи с дополнительными ограничениями

Результат решения задачи поиска оптимального плана прикрепления потребителей продукции к ее поставщикам с учетом дополнительных ограничений пропускной способности маршрутов представлен на рисунке 4.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 7

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4900.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	0.000000	4.000000
X12	0.000000	2.000000
X13	150.000000	0.000000
X14	150.000000	0.000000
X21	300.000000	0.000000
X22	250.000000	0.000000
X23	0.000000	1.000000
X24	0.000000	2.000000
X31	50.000000	0.000000
X32	0.000000	9.000000
X33	450.000000	0.000000
X34	250.000000	0.000000

Рисунок 4 – Вид диалогового окна с результатами решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями

С учетом дополнительных ограничений на пропускные способности маршрутов, минимальные суммарные транспортные издержки составляют 4900 тыс.руб. Оптимальный план перевозок продукта составит:

- 1) Объемы перевозок продукта от первого поставщика:
 - к 3-му потребителю – 150 т.;
 - к 4-му потребителю – 150 т.
- 2) Объемы перевозок продукта от второго поставщика:
 - к 1-му потребителю – 300 т.;
 - к 2-му потребителю – 250 т.
- 3) Объемы перевозок продукта от третьего поставщика:
 - к 1-му потребителю – 50 т.;
 - к 3-му потребителю – 450 т.;
 - к 4-му потребителю – 250 т.

Заключение

При выполнении лабораторной работы с помощью программы LINDO была решена закрытая транспортная задача по минимизации затрат на перевозку продукта от поставщиков к потребителям при заданных ограничениях на возможности поставщиков и спроса потребителей. В результате решения транспортной задачи был получен оптимальный план перевозок продукта, при котором минимальные суммарные транспортные издержки составили 4150 тыс.руб. После пересчета оптимизационной задачи с учетом дополнительных ограничений на пропускную способность маршрутов (1-4) и (1-2) минимальные транспортные издержки увеличились на 750 тыс.руб. и составили 4900 тыс.руб., а также были перераспределены объемы перевозки продукции от первого и третьего поставщиков.