Пономарев А., Б05-029.

№1.

∅, $A(a,b)$, проективная пл-ть. $T(a,b)=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$ — м-ца паралл. переноса на в-р $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ (будем работать с умн-ием на м-цу слева). $R(\varphi)=$
$=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ — м-ца поворота вокруг $(0,0)$ на угол φ.

$$M=T(a,b)R(\varphi)T(-a,-b)=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-a\\0&1&-b\\0&0&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&a\\\sin\varphi&\cos\varphi&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-a\\0&1&-b\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&(-a\cos\varphi+b\sin\varphi+a)\\\sin\varphi&\cos\varphi&(-a\cos\varphi-b\sin\varphi+b)\\0&0&1\end{pmatrix}$$ —

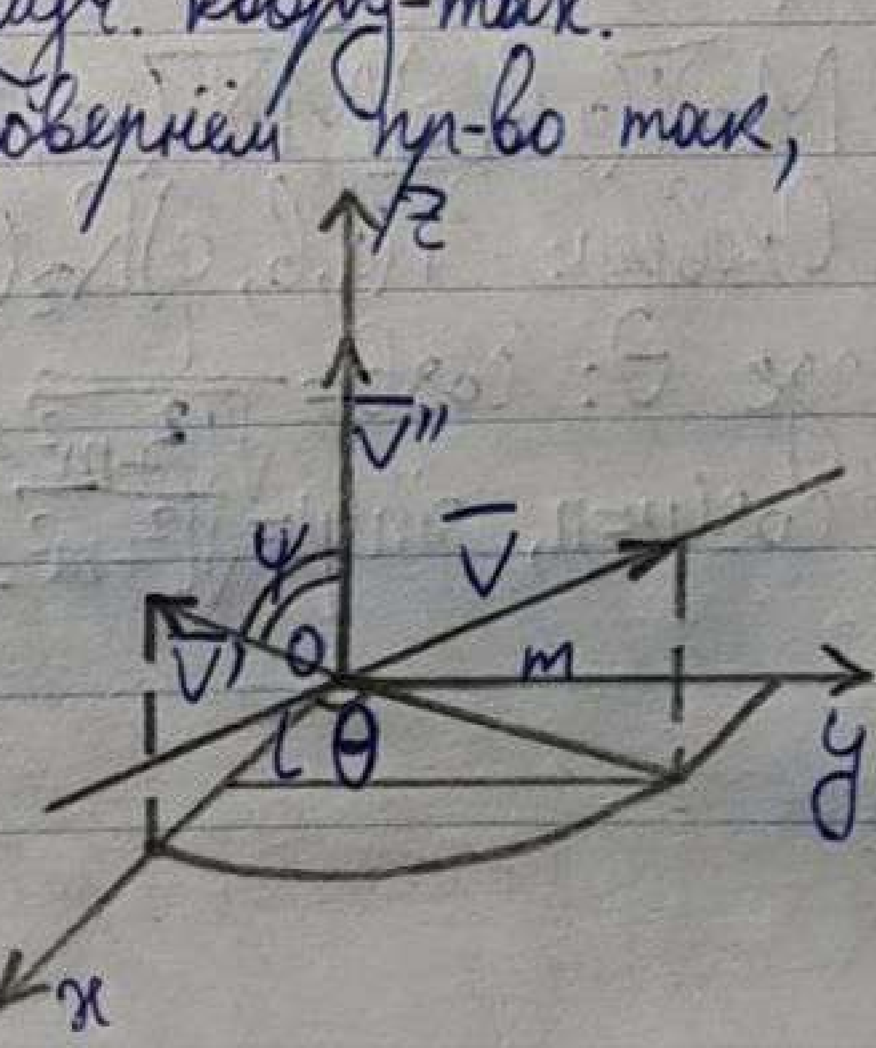
Ответ: $\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&(-a\cos\varphi+b\sin\varphi+a)\\\sin\varphi&\cos\varphi&(-a\cos\varphi-b\sin\varphi+b)\\0&0&1\end{pmatrix}$ искомая м-ца.

№2.

∅, прямая L: $A(a,b,c)$, $\overline{v}=\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}$, $|\overline{v}|=\sqrt{l^2+m^2+n^2}=1$.

Переведём A в O паралл. переносом $\left(T(-a,-b,-c)=\begin{pmatrix}1&0&0&-a\\&1&0&-b\\&&1&-c\\&O&&1\end{pmatrix}\right)$ и будем работать в получ. коорд-тах.

Пусть $l^2+m^2>0$. Повернём пр-во так, чтобы в-р $\overline{v}$ стал сонаправлен оси Oz.



$\cos\theta=\dfrac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}$; $\sin\theta=\dfrac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}$;

применим $R_z(-\theta)$.

$\cos\psi=\dfrac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=n$; $\sin\psi=\sqrt{l^2+m^2}$.

$$\widetilde{R}=R_y(-\psi)R_z(-\theta)=\begin{pmatrix}\cos(-\psi) & 0 & \sin(-\psi) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin(-\psi) & 0 & \cos(-\psi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 & 0\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta & -\sin\psi & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ \cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{R}^{-1}=R_z(\theta)R_y(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & 0\\ \cos\psi\sin\theta & \cos\theta & \sin\psi\sin\theta & 0\\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\widetilde{R}^T$$

$$\widetilde{M}=\widetilde{R}^{-1}R_z(\varphi)\widetilde{R}=\widetilde{R}^{-1}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{R}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi & -\cos\psi\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\psi & 0\\ \cos\psi\sin\theta\cos\varphi+\sin\varphi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta & 0\\ -\sin\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\varphi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{R}=$$

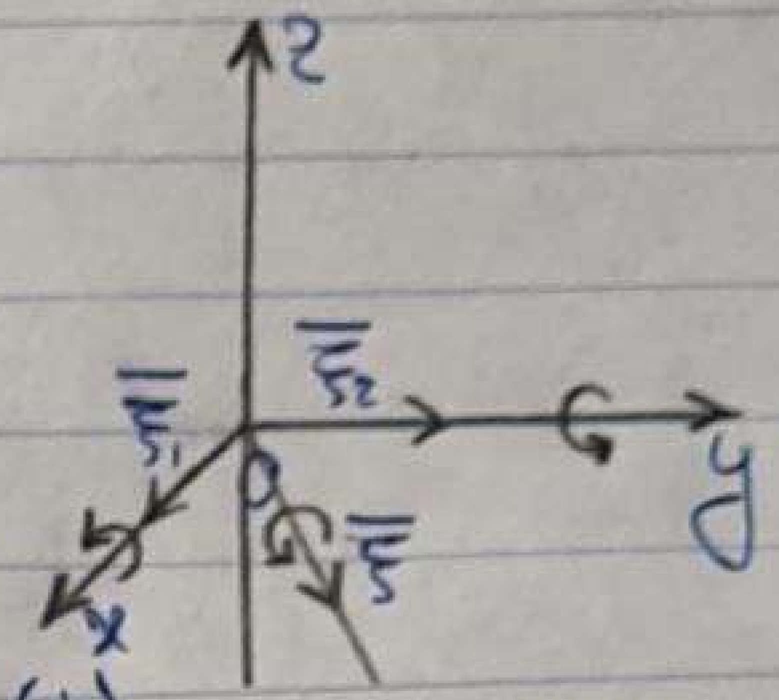
$$=\begin{pmatrix}l^2+\cos\varphi\left(\frac{n^2 l^2+m^2}{l^2+m^2}\right) & \cdots & \text{очень} \\ \vdots & \ddots & \text{длинно}\end{pmatrix}$$

$$M=T(a,b,c)\widetilde{M}\,T(-a,-b,-c)$$

Ответ: $T(a,b,c)R_z(\theta)R_y(\psi)R_z(\varphi)R_y(-\psi)R_z(-\theta)T(-a,-b,-c)$,
где θ: $\cos\theta=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}$, $\sin\theta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}$ (при $l^2+m^2=0$ $\theta=0$); ψ:
$\cos\psi=n$, $\sin\psi=\sqrt{l^2+m^2}$.

№3.

$\overline{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \theta_1=\frac{\pi}{2};\ \overline{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \theta_2=\frac{\pi}{2}.$



$Q_1=\cos\frac{\theta_1}{2}+\overline{\xi}_1\sin\frac{\theta_1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$Q_2=\cos\frac{\theta_2}{2}+\overline{\xi}_2\sin\frac{\theta_2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j$

$Q=Q_2Q_1=\frac{1}{2}(1+j)(1+i)=\frac{1}{2}(1+i+j+ji)=$

$=\frac{1}{2}(1+i+j-k)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\Longrightarrow\theta=\frac{2\pi}{3},\ \overline{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Ответ: результир. поворот вокруг прямой с направл. в-ром $\overline{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ на угол $\theta=\frac{2\pi}{3}$.