

# Брюсселятор

Пономарев Андрей

18 мая 2023 г.

## 1 Введение

Брюсселятор:

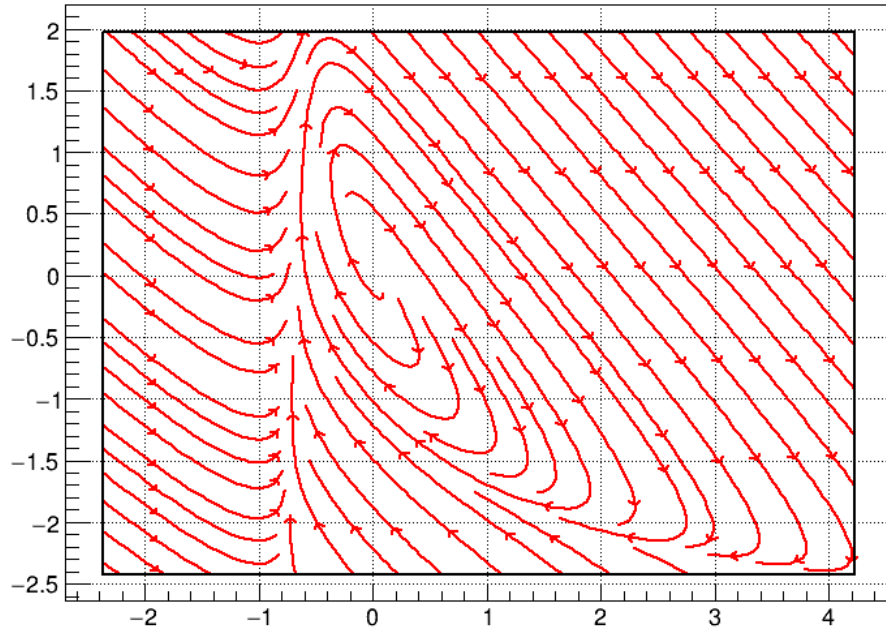
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = a - (b + 1)x + x^2y \\ \dot{y} = g(x, y) = bx - x^2y \end{cases} \quad (1)$$

Остановимся на частном случае  $a = 1$ ,  $b = 3$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 4x + x^2y \\ \dot{y} = 3x - x^2y \end{cases} \quad (2)$$

Единственная особая точка —  $(1, 3)$ . Сразу проведем замену  $x = x_{old} - 1$ ,  $y = y_{old} - 3$ . Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = 2x + y + x^2y + 3x^2 + 2xy \\ \dot{y} = g(x, y) = -3x - y - x^2y - 3x^2 - 2xy \end{cases} \quad (3)$$

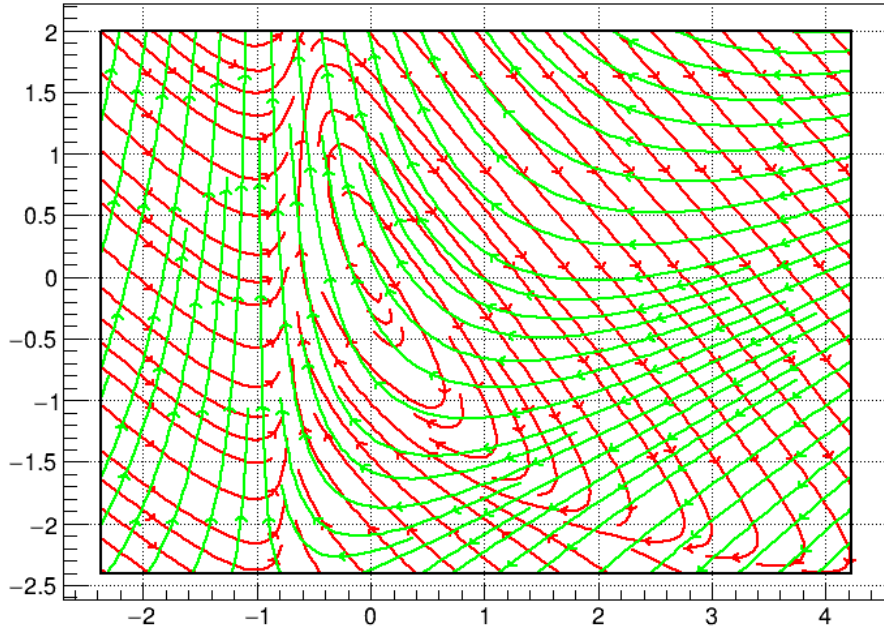


$D(x, y) = f_x(x, y) + g_y(x, y)$  – дивергенция.

$D^{(\mu)} = (\mu \cdot f)_x + (\mu \cdot g)_y$ ,  $\mu(x, y) > 0$  на некоторой содержащей предельный цикл области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Нужно найти такой множитель  $\mu$ , что  $D^{(\mu)}(x, y) < 0$  на  $\mathcal{D}$ .

## 2 Простой подбор

Линии уровня дивергенции  $D$ :



В левой верхней части предельного цикла дивергенция больше 0 (мы хотим меньше 0).

**Попытка 2.1.** Предлагалось попробовать что-то вроде  $\mu = \frac{1}{(x^2 + \alpha xy + y^2)^\beta}$ .

Матрица линеаризованной системы:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ; собственные значения

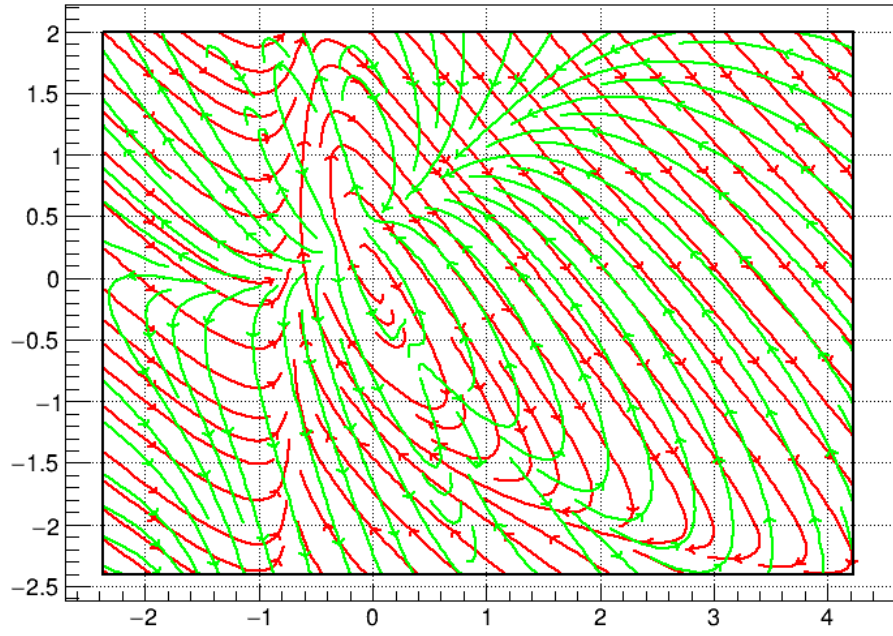
$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ , векторы  $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 3 \pm i\sqrt{3} \\ -6 \end{pmatrix}$ . Если явно записать решение

линейной системы, а затем убрать «расхождение» по спирали (то есть умножение на экспоненту), то получится система, фазовые кривые которой будут эллипсами  $F(x, y) = 3x^2 + 3xy + y^2 = C$  (линиями уровня  $F$ ).

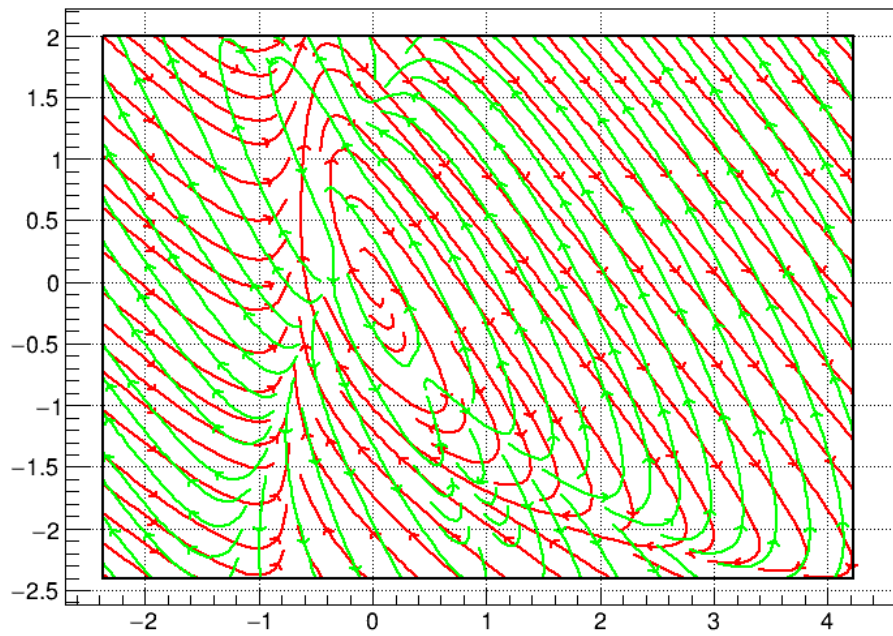
$$HF = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы в окрестности особой точки линии уровня  $D^{(\mu)}$  были замкнутыми кривыми, нужно брать  $\mu = \frac{1}{(3x^2 + 3xy + y^2)^\beta}$ .

$\beta = 2$ :

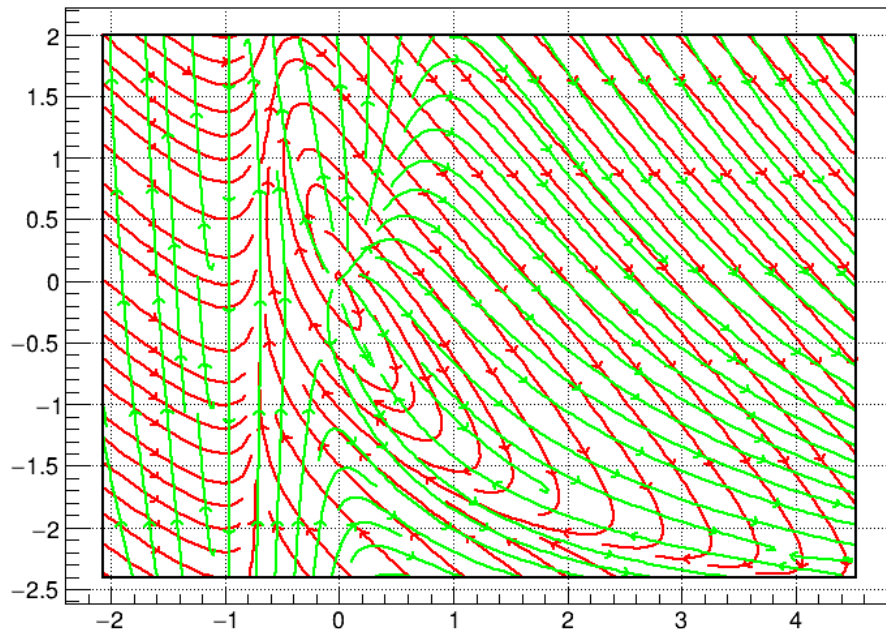


$\beta = 4 :$



Видно две «впадины» в верхней части цикла и один «клин» в нижней, где  $D^{(\mu)} > 0$ .

**Попытка 2.2.** Попробуем нормировать скорость движения по траекториям, то есть взять  $\mu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{f^2(x, y) + g^2(x, y)}}$ . Так как дивергенция – это величина «исходящего из точки потока», то с нормированной скоростью получим величину «схождения/расхождения» траекторий в точке. Так можно выяснить, что в верхней и правой частях цикла плотность траекторий падает (дивергенция положительна, линии расходятся), хотя предельный цикл в целом устойчивый.



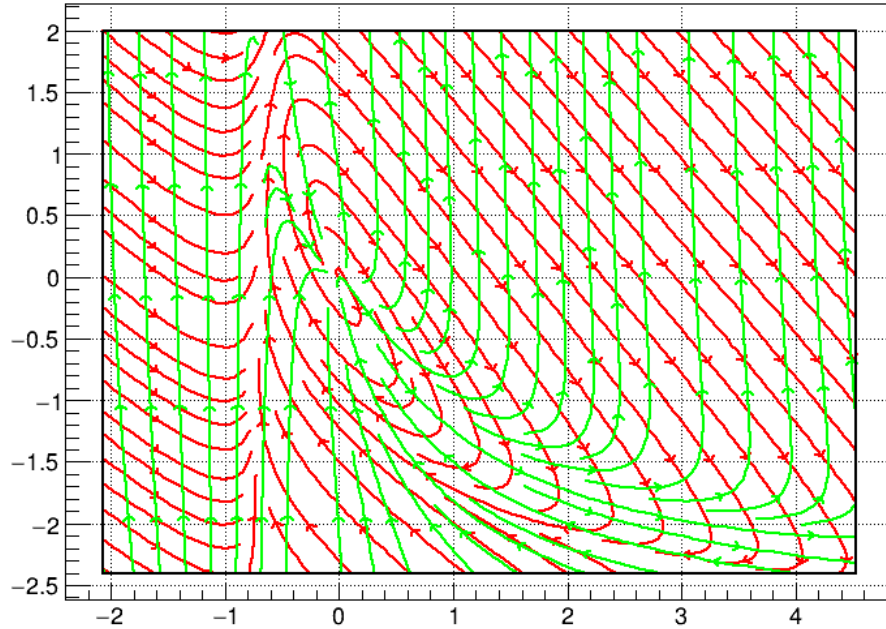
**Попытка 2.3.** Неожиданный результат дает следующее. Решим уравнение  $g(x, y) = -3x - y - x^2y - 3x^2 - 2xy = 0$ :

$$y = \frac{3x + 3x^2}{-1 - x^2 - 2x} = \frac{3x(x + 1)}{-(x + 1)^2} = \frac{3x}{-(x + 1)}$$

$$y + \frac{3x}{x + 1} = 0$$

Пусть  $\mu = \frac{-1}{y + \frac{3x}{x+1}}$ . Да, этот множитель не определен на целой кривой, стремится в ее окрестности к бесконечности и меняет там знак, поэтому,

строго говоря, нам не подходит. Но с ним получается следующая картина:

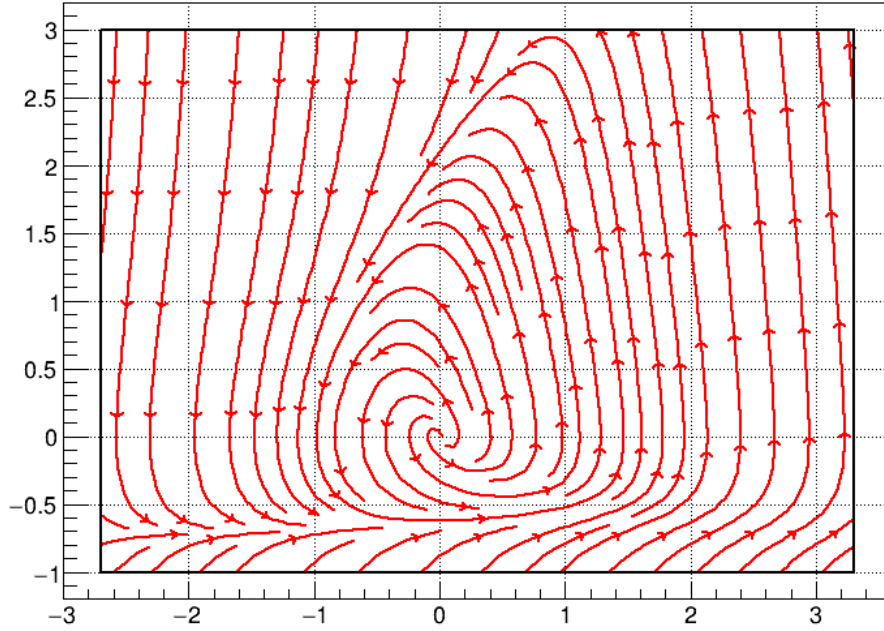


Если не считать выпавшей из области определения кривой  $g(x, y) = 0$ , то у  $D^{(\mu)}$  лишь один небольшой проблемный участок ( $> 0$ ) в самом верху цикла.

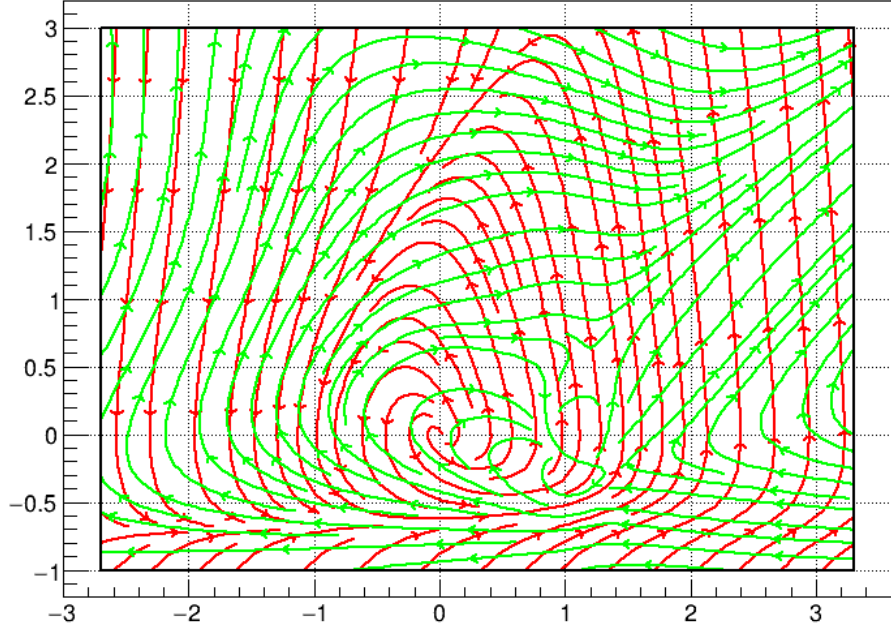
**Идея.** Проведем замену  $x = x_{old} + y_{old}$ ,  $y = x_{old}$ . Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = -y \\ \dot{y} = g(x, y) = x + y + xy^2 - y^3 + y^2 + 2xy \end{cases} \quad (4)$$

Предельный цикл стал куда более удобным и «круглым».



**Попытка 2.4.** Попробуем подобрать «угловую» функцию  $\mu(\cos \varphi_{(u,v)}, \sin \varphi_{(u,v)})$ , где  $\varphi_{(u,v)}(x, y)$  – полярный угол точки, если смотреть из точки  $(u, v)$ . Лучшее, что удалось найти, – это  $\mu = 1,05 - (\sin \varphi_{(1,1; 0,2)} - 0,3 \cos \varphi_{(1,1; 0,2)})$ :



Единственное проблемное место с положительной дивергенцией справа внизу цикла.

### 3 Умный подбор

Распишем дивергенцию домноженной на  $\mu(x, y)$  системы:

$$D^{(\mu)} = (\mu \cdot f)_x + (\mu \cdot g)_y = \mu_x f + \mu_y g + \mu \cdot (f_x + g_y) = \mu_x f + \mu_y g + \mu D$$

Пусть  $\mu(x, y) = e^{\xi(x, y)}$ .  $\mu > 0$ , что очень удобно вписывается в подстановку: на  $\xi$  никаких ограничений знака накладывать не нужно.

$$D^\mu = \xi_x e^\xi f + \xi_y e^\xi g + e^\xi D < 0 \iff \xi_x f + \xi_y g + D < 0$$

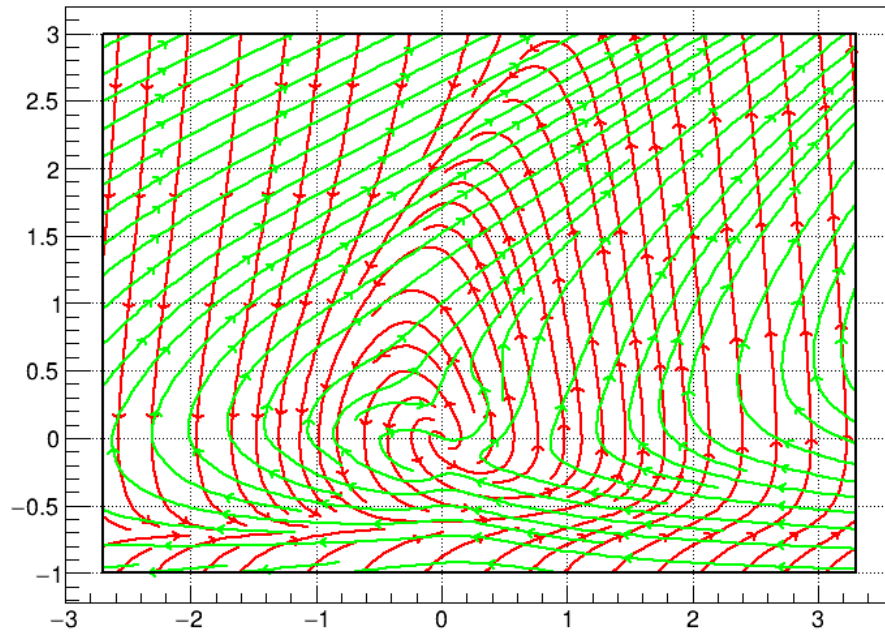
Условие на подбираемую функцию стало проще. Теперь знак функции неважен, а уравнение приняло вид  $\xi_x f + \xi_y g + D = \left( \nabla \xi, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right) + D < 0$ .

Далее приведу несколько функций, подобранных в виде  $\mu = \exp(\xi)$ .

**Попытка 3.1.** Наравне с  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  можно использовать любые непрерывно дифференцируемые периодические функции угла  $\varphi$ . Например,  $-\frac{\varphi}{\pi} \cdot \text{th}(1) + \text{th}\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)$ .



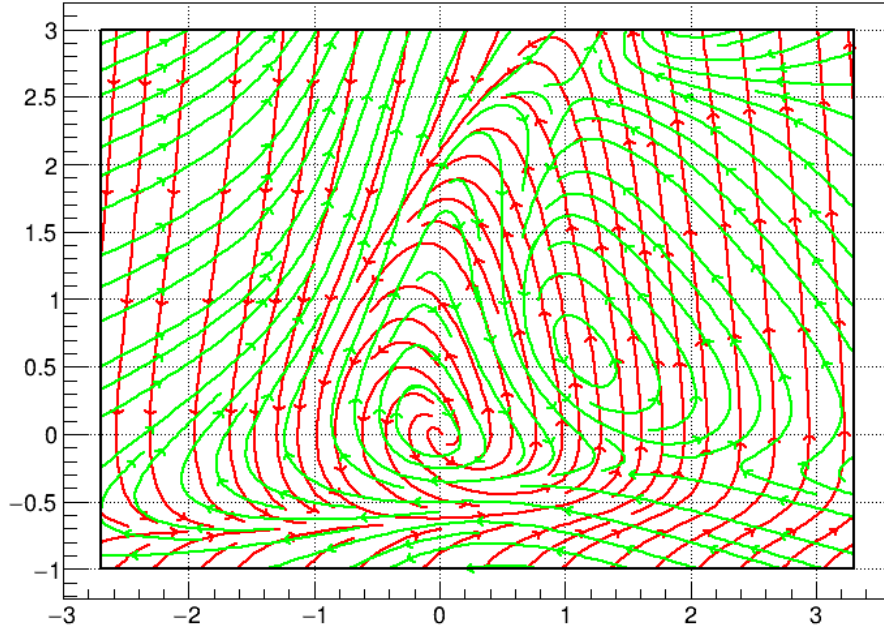
$$\mu = \exp \left( -10 \cdot \left( -\frac{\varphi}{\pi} \cdot \operatorname{th}(1) + \operatorname{th}\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) \right) \right):$$



Проблема снова справа внизу.

**Попытка 3.2.** Запутанная функция с неожиданно аккуратными линиями уровня  $D^{(\mu)}$  и, скорее всего, лучшее, что пока удалось найти:

$$\mu = \exp \left( (-3y - 2x + 0,5 \cdot y^2) \cdot \sigma(x) \right), \text{ где } \sigma(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} - \text{сигмоида}$$



$D^{(\mu)} > 0$  лишь на совсем маленькой части цикла справа внизу (виден выступ зеленых линий уровня).

Как функция построена и понимается: изначально дивергенция положительна (притом неравномерно большая) в правой части цикла, значит, скорость при движении там должна падать достаточно быстро (притом именно там, где надо), отсюда  $-3y + 0,5 \cdot y^2$ ;  $-2x$  нужно, чтобы подправить справа снизу; такого падения не выдерживает левая сторона цикла, поэтому скорость постепенно гасится при смещении по чертежу влево домножением на  $\sigma(x)$ .

Есть основания полагать, что эту функцию  $\mu$  можно доделать до строго подходящей. Но область отрицательного знака для нее сложна, в некоторых местах она будет едва покрывать предельный цикл, поэтому неясно, каким образом такой результат можно использовать в математическом доказательстве.

## 4 Гипотезы для решения без подбора

**Идея.** Условие  $\left( \nabla \xi, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right) + D < 0$  задает в каждой точке  $(x, y)$  строгую полуплоскость допустимых значений  $\nabla \xi$ .

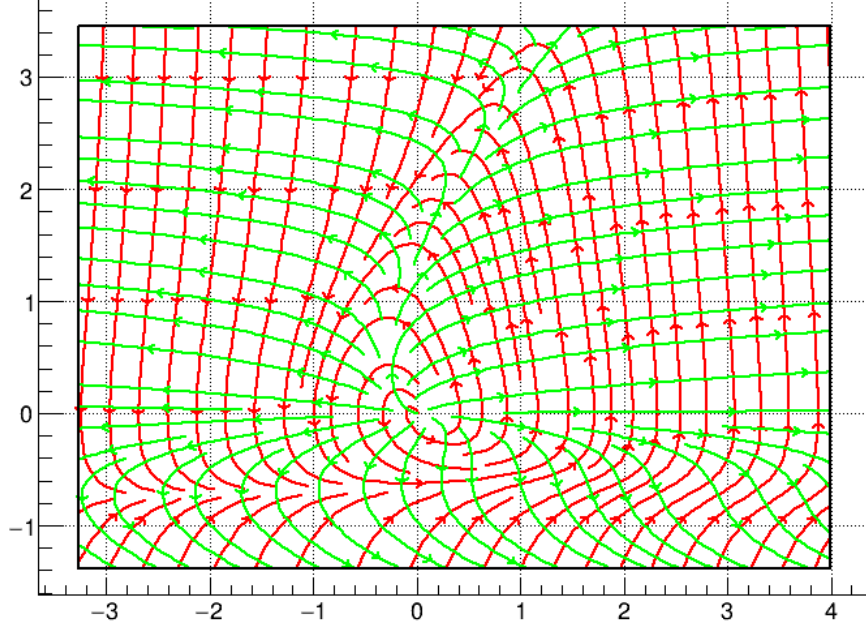
**Идея.** Формула  $\left(\nabla\xi, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) + D < 0$  вызывает желание воспользоваться для получения  $\xi$  инструментами функционального анализа. Гипотетически, рассмотреть пространство непрерывных векторных полей со скалярным произведением  $(A, B) = \iint_{\mathcal{D}} (\vec{A}(x, y), \vec{B}(x, y)) dx dy$ ; в нем подпространство  $\{\nabla\zeta, \quad \zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

**Идея.** Можно не сразу подбирать  $\xi$ , а попытаться подобрать поле  $(u, v)$  на односвязной области с непрерывно дифференцируемыми компонентами, такое что  $u_x \equiv v_y$ , тогда будет существовать соответствующая  $\xi$ .

## 5 Построение функции с сонаправленным полем градиентом

Будем работать с системой (4) – брюсселятором, упрощенным линейными заменами переменных. Рассмотрим систему, задающую перпендикулярное векторное поле:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + xy^2 - y^3 + y^2 + 2xy \\ \dot{y} = y \end{cases} \quad (5)$$



Видно, что эта система проще брюсселятора: здесь можно сразу заключить  $y = Ce^t$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Более того, она решается!

Дальнейшие вычисления упрощает замена переменной-времени  $t = e^\tau$ ,  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{e^\tau d\tau} = \frac{dx}{td\tau}$ ,  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{td\tau}$ , что дает систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{t} \cdot (x + y + xy^2 - y^3 + y^2 + 2xy) \\ \dot{y} = \frac{y}{t} \end{cases} \quad (6)$$

Время  $t = e^\tau > 0$ . Теперь  $y = Ct$ ; после подстановки получается линейное дифференциальное уравнение  $\dot{x} = \frac{x}{t} \cdot (1 + Ct)^2 + C + C^2t - C^3t^2$ .

В однородном уравнении  $\dot{x} = \frac{x}{t} \cdot (1 + Ct)^2$  разделяются переменные – получаем решение  $x = \tilde{C}_2 t e^{2Ct + C^2 t^2 / 2}$ ,  $\tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$ . Решение неоднородного уравнения получим методом вариации постоянной:

$$x = K(t) \cdot t e^{2Ct + C^2 t^2 / 2}$$

$$\dot{K}(t) \cdot t e^{2Ct + C^2 t^2 / 2} = C + C^2 t - C^3 t^2$$

$$\dot{K}(t) = \frac{C + C^2 t - C^3 t^2}{t e^{2Ct + C^2 t^2 / 2}}$$

Интеграл расходится в окрестности 0, поэтому придется брать от  $+\infty$  до

$t$ :  $K(t) = \int_{+\infty}^t \frac{C + C^2 s - C^3 s^2}{s e^{2Cs + C^2 s^2/2}} ds + C_2$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}$ . В итоге имеем общий вид решения:

$$\begin{cases} x(t) = K(t) \cdot t \cdot e^{2Ct + C^2 t^2/2} \\ y(t) = Ct \end{cases} \quad (7)$$

Полученное семейство решений, как и ожидается, имеет два параметра. Однако параметр  $C$ , на который везде домножается  $t$ , в пределах одного знака отвечает за сдвиг исходного времени  $\tau$  и интегральную кривую на плоскости не меняет. Избавимся от него. Далее будем рассматривать  $C \neq 0$ . Сделаем замену переменной в интеграле  $s' = Cs$ , учитывая знак  $C$ :

$$K_+(t) = C \cdot \left( \int_{+\infty}^{Ct} \frac{1 + s - s^2}{s e^{2s + s^2/2}} ds + \frac{C_2}{C} \right), \quad C > 0$$

$$K_-(t) = C \cdot \left( \int_{-\infty}^{Ct} \frac{1 + s - s^2}{s e^{2s + s^2/2}} ds + \frac{C_2}{C} \right), \quad C < 0$$

Можно считать, что вместо  $Ct$  везде в выражениях стоит просто  $t$ , учитывая два случая  $t \in (0, +\infty)$  и  $t \in (-\infty, 0)$ . Полагая  $A = \frac{C_2}{C}$ , получаем общий вид решения с одним параметром:

$$\begin{cases} x(t) = \left( \int_{\pm\infty}^t \frac{1 + s - s^2}{s e^{2s + s^2/2}} ds + A \right) \cdot t \cdot e^{t + t^2/2} \\ y(t) = t \end{cases} \quad (8)$$

Знак у предела интегрирования зависит от случая  $t > 0$  либо  $t < 0$ .

$y(t) = t$ , то есть случай  $t > 0$  описывает все интегральные кривые, лежащие в строгой верхней полуплоскости; случай  $t < 0$  – в строгой нижней. Подставив  $y$  вместо  $t$  в уравнение для  $x$  и затем выразив параметр  $A$ , получим первые интегралы системы в строгой верхней и строгой нижней полуплоскостях соответственно:

$$I_+(x, y) = \frac{x}{y e^{2y + y^2/2}} - \int_{+\infty}^y \frac{1 + s - s^2}{s e^{2s + s^2/2}} ds$$

$$I_-(x, y) = \frac{x}{y e^{2y + y^2/2}} - \int_{-\infty}^y \frac{1 + s - s^2}{s e^{2s + s^2/2}} ds \quad (9)$$

Получены первые интегралы системы, задающей векторное поле, перпендикулярное полю брюсселятора. Это функции непрерывно дифференцируемые на своих областях определения. По построению их градиенты в любой точке касаются интегральных кривых брюсселятора. Из вида общего решения следует, что в верхней полуплоскости при фиксированном  $t$  значение  $x$  тем больше, чем больше  $A$ ; в нижней, наоборот, тем меньше, чем больше  $A$ . Траектории брюсселятора «закручиваются» против часовой стрелки. Из этого следует, что при движении вдоль траекторий брюсселятора полученные первые интегралы убывают, то есть для каждого из них на всей области определения градиент направлен противоположно вектору поля брюсселятора.

**Утверждение 5.1.** Существуют две гладкие функции, определенные в верхней и в нижней координатных полуплоскостях соответственно, такие что их градиент в любой точке сонаправлен вектору поля брюсселятора с параметрами  $a = 1$ ,  $b = 3$ .