

Исследование модели диффузной границы для развития канала электрического пробоя

Студент:

Пономарев Андрей Сергеевич

Научный руководитель:

Савенков Евгений Борисович

Консультант:

Зипунова Елизавета Вячеславовна

20.06.2024



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели



Электрический пробой

Явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше критического.

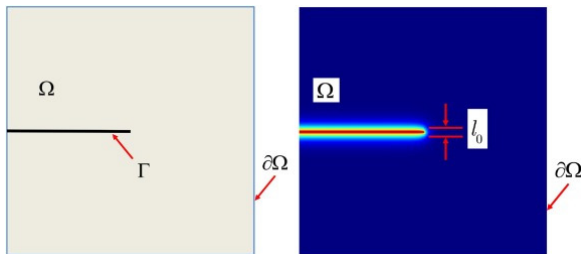
- Рассматриваем твердый диэлектрик
- Деградация диэлектрических свойств материала
- Процесс развивается в ограниченной зоне – канале пробоя
- Сложная физическая природа



Модель типа диффузной границы

Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества описывается гладкой функцией $\phi(\mathbf{x}, t)$ – фазовым полем.

- $\phi = 1$ – неповрежденная среда
- $\phi = 0$ – полностью разрушенная среда
- Зона $\phi \in (0, 1)$ – диффузная граница
- На разрушение среды тратится энергия



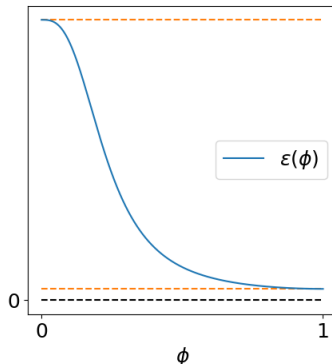
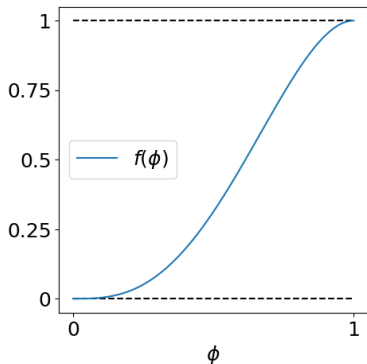
Модель, предложенная в работе [1]:

- $\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi](\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \left(\frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi) \right)$ – плотность свободной энергии
- Γ – энергия роста канала пробоя на единицу длины
- l – величина «размытия» канала
- $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi)$ – интерполирующая функция



Математическая модель

- $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}$ – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$ – интерполирующая функция



Уравнения модели

- Уравнение электрического потенциала Φ :

$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0 \quad (1)$$

- Уравнение фазового поля ϕ :

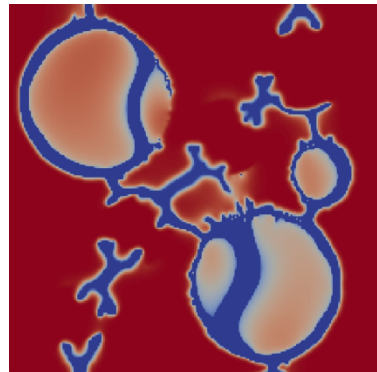
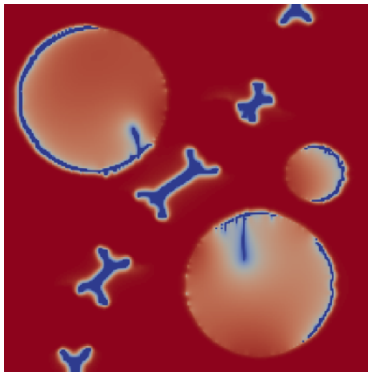
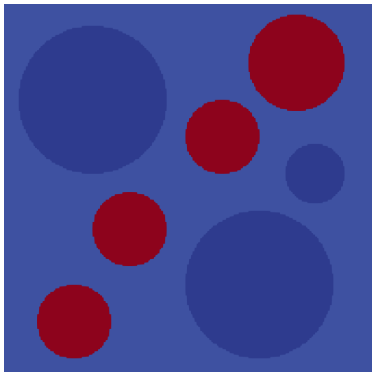
$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta \phi \quad (2)$$

Свойства:

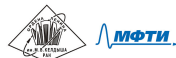
- связанная система уравнений на ϕ и Φ ;
- уравнение для ϕ типа Аллена–Кана, нелинейное.



Пример вычислительного эксперимента



Расчет из работы [2]

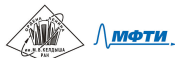


Цель работы

Цель работы

Исследовать качественные характеристики системы уравнений (1), (2) и выполнить ее численный анализ.

Для этого рассмотрим задачу в определенных краевых условиях, упрощающих ее, но позволяющих установить интересные свойства.



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи**
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели



Одномерная задача

- Область $\Omega = [0, w]_x \times [0, h]_y \times l_z$ в форме параллелепипеда
- $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0(x)$, $\epsilon_0(\mathbf{x}) = \epsilon_0(x)$ не зависят от y и z
- $\Phi|_{y=0} = \Phi^- \in \mathbb{R}$, $\Phi|_{y=h} = \Phi^+ \in \mathbb{R}$

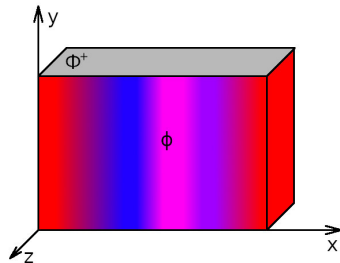
Решением является функция электрического потенциала

$$\Phi(x, t) = \Phi^- + \frac{y}{h}(\Phi^+ - \Phi^-)$$

Тогда уравнение на ϕ принимает вид

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$K_{\Phi} = \frac{\Phi^+ - \Phi^-}{h}. \text{ Будем считать } \epsilon_0 = \text{const.}$$



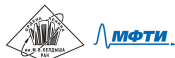
- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ**
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели



- Пробой может развиваться из малых возмущений свойств неповрежденной среды. Выясним условия развития.
- Рассмотрим положения равновесия вида $\phi(x, t) \equiv C$. Положению равновесия соответствует ноль C функции

$$\chi(\phi) = \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{I^2}f'(\phi)$$

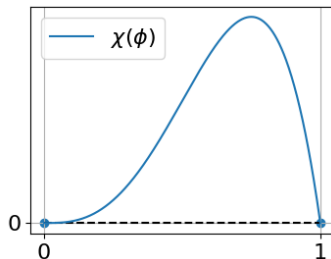
- Исследуем положения равновесия на устойчивость спектральным методом: к $\phi \equiv C$ прибавим возмущение $\delta\phi = e^{\alpha t} \cos(\omega x)$, линеаризуем уравнение на $\delta\phi$.
- $\chi(\phi)$ возрастает в $C \implies$ равновесие неустойчиво; $\chi(\phi)$ убывает в $C \implies$ равновесие устойчиво.



Анализ положений равновесия

«Слабое» напряжение

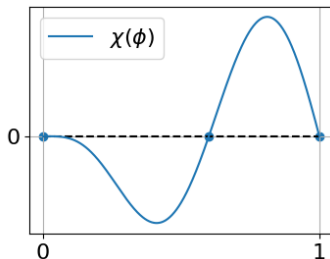
$$0 \leq \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < \delta^2$$



$\phi \equiv 0$ неустойчивое
 $\phi \equiv 1$ устойчивое

«Среднее» напряжение

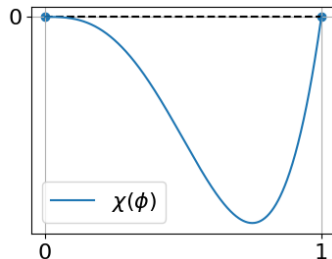
$$\delta^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < (1 + \delta)^2$$



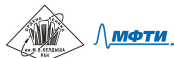
$\phi \equiv 0$ устойчивое
 $\phi \equiv C_3$ неустойчивое
 $\phi \equiv 1$ устойчивое

«Сильное» напряжение

$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma}$$



$\phi \equiv 0$ устойчивое
 $\phi \equiv 1$ неустойчивое



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ**
- 5 Исследование обобщения модели



Разностная задача

$$\frac{1}{m} \frac{\phi_a^{b+1} - \phi_a^b}{\tau} = \frac{1}{2} K_\phi^2 \epsilon'(\phi_a^b) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi_a^b) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{a+1}^b - 2\phi_a^b + \phi_{a-1}^b}{h^2}$$

$$\phi_a^0 = \phi_0(ah); \quad \phi_0^b = \phi_l(b\tau); \quad \phi_n^b = \phi_r(b\tau)$$

Сетка регулярная; τ – шаг по времени, h – шаг по пространству.

Явная разностная схема первого порядка по времени, второго – по пространству.



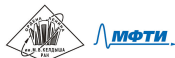
- Рассмотрим возмущенное решение $\phi_a^b + \delta_a^b$. Линеаризуем уравнение на возмущение δ_a^b в точке $\phi_a^b = P$:

$$\delta_a^{b+1} = \delta_a^b + m\tau \left(\frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon''(P) \delta_a^b + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) \delta_a^b + \frac{\Gamma}{2} \frac{\delta_{a+1}^b - 2\delta_a^b + \delta_{a-1}^b}{h^2} \right)$$

- Применим спектральный признак устойчивости:

$$1 > \lambda(\theta) = 1 + m\tau \left(\frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) - \frac{2\Gamma}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

- Исследуем вблизи $P = 0$.



Условие устойчивости

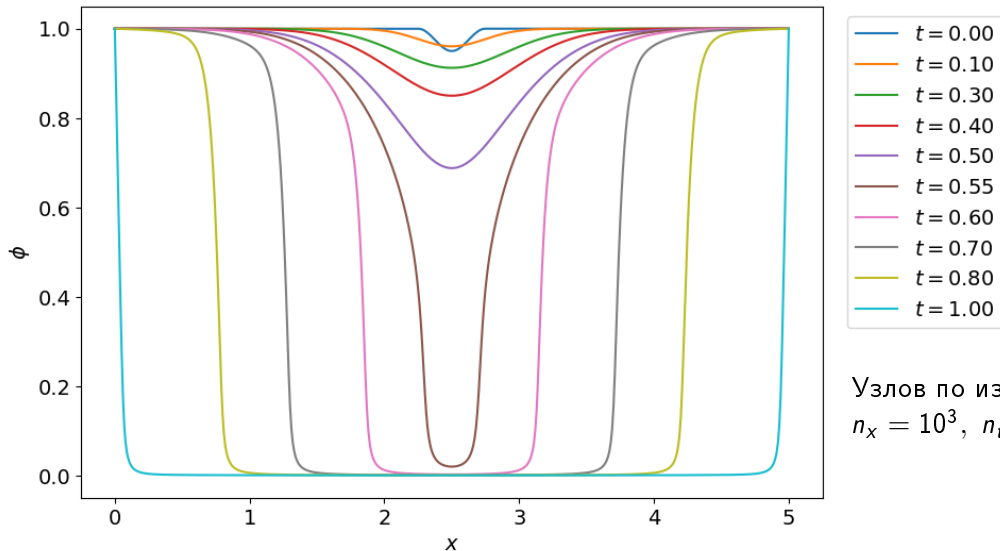
$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left(\frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$

Упрощенное условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{1}{4m} \min \left(\frac{\delta^{5/3}}{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}, \frac{h^2}{\Gamma} \right)$$

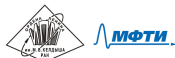


Вычисления: типичное решение

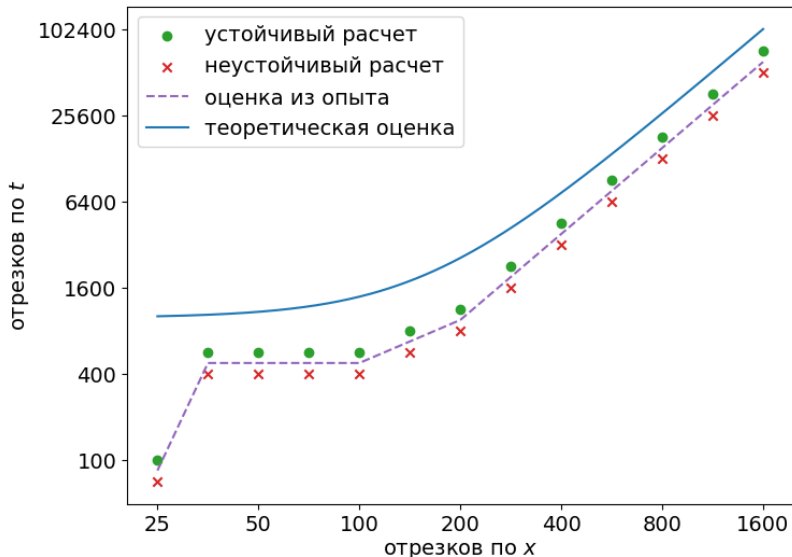


Узлов по измерениям:

$$n_x = 10^3, n_t = 10^5$$



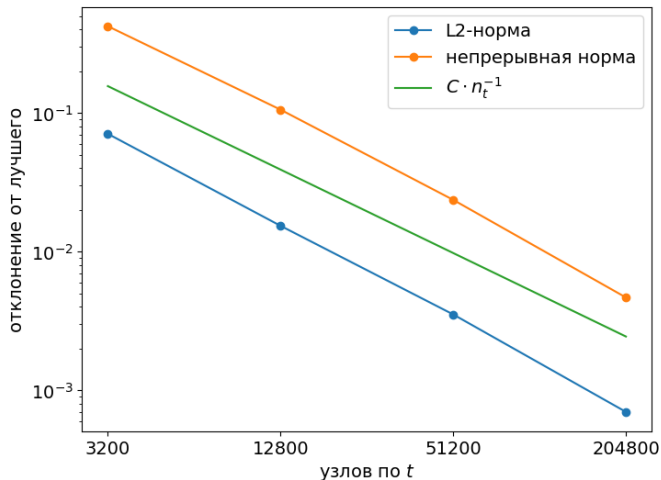
Вычисления: проверка устойчивости



$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left(\frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$



Вычисления: проверка сходимости

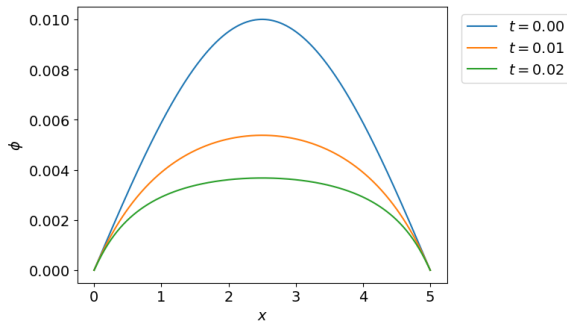


Здесь, согласно оценке устойчивости, $\tau = \frac{h^2}{4m\Gamma}$

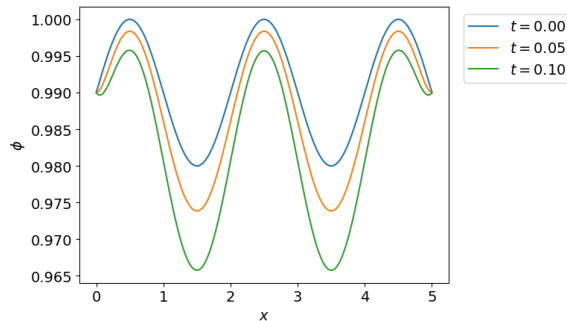


Вычисления: положения равновесия

$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 I^2 \epsilon_0}{2\Gamma} - \text{«сильное» напряжение}$$



$\phi \equiv 0$
устойчивое



$\phi \equiv 1$
неустойчивое



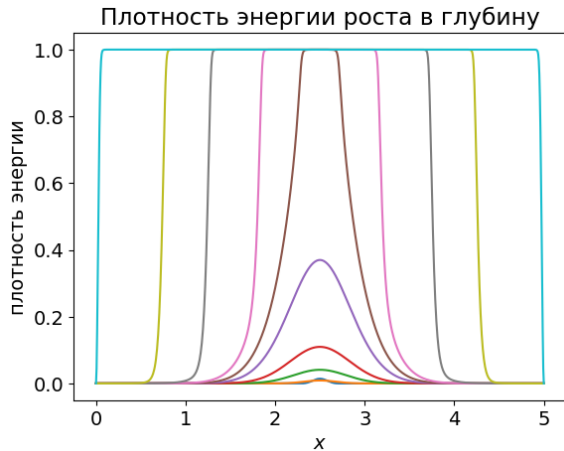
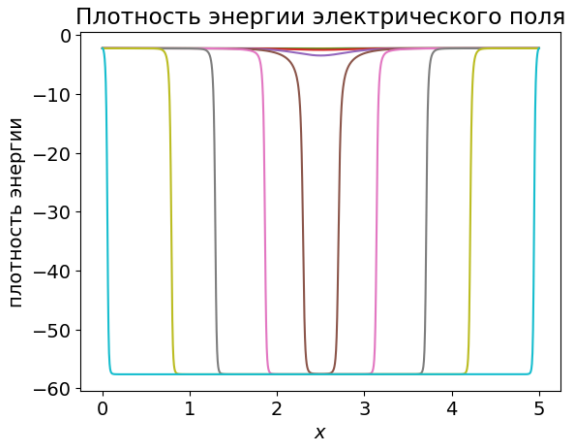
$$\Pi(t) = \int_{\Omega} \pi(x, t) dx$$

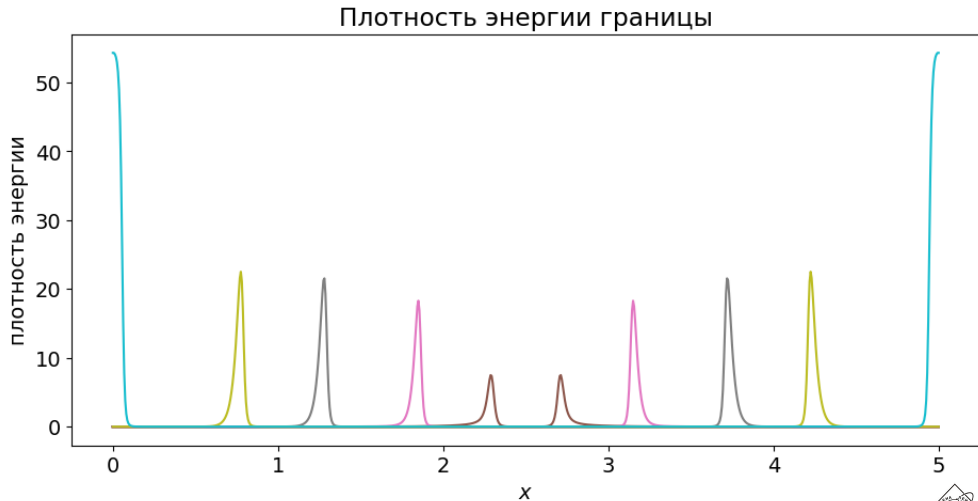
$$\pi(x, t) = \pi_1(x, t) + \pi_2(x, t) + \pi_3(x, t)$$

- $\pi_1(x, t) = -\frac{K_{\Phi}^2}{2} \epsilon(\phi)$ – плотность энергии электрического поля;
- $\pi_2(x, t) = \Gamma \frac{1 - f(\phi)}{l^2}$ – плотность энергии, отнесенной к веществу внутри канала;
- $\pi_3(x, t) = \frac{\Gamma}{4} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$ – плотность энергии, отнесенной к граничной зоне канала

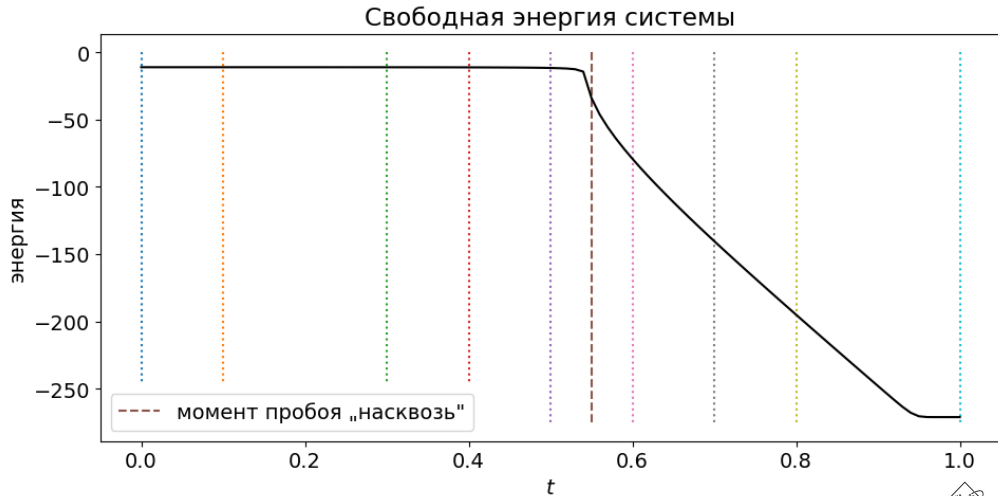


Вычисления: свободная энергия





Вычисления: свободная энергия



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели

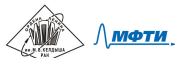


Постановка задачи

Исследуем распределение фазового поля вокруг проводников ($\phi = 0$) различного вида. Рассмотрим следующие краевые задачи:

- 1 $\Omega = [0, +\infty)_x \times I_y \times I_z$, $\phi|_{x=0} = 0$, $\phi \rightarrow 1$ при $r = x \rightarrow +\infty$ – плоский случай;
- 2 $\Omega = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times I_z$, $\phi|_{x,y=0} = 0$, $\phi \rightarrow 1$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$ – цилиндрический случай;
- 3 $\Omega = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$, $\phi|_{x,y,z=0} = 0$, $\phi \rightarrow 1$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow +\infty$ – сферический случай.

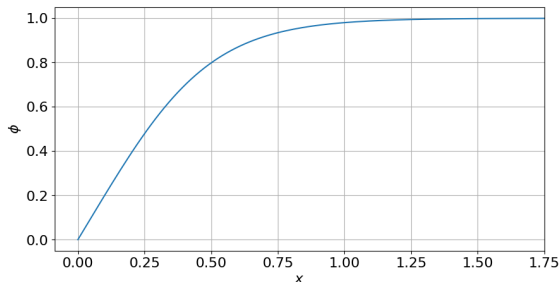
Ищем стационарное решение $\phi = \phi(r)$.



Плоский случай

Задача Коши:

$$\phi(0) = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2}{l} \sqrt{1 - f(\phi)}$$



Цилиндрический случай

Задача поставлена некорректно
и решения не имеет [3]

Обобщение модели, предложенное в работе [3]

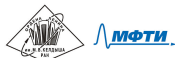
- Уравнение электрического потенциала Φ :

$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0$$

- Уравнение фазового поля ϕ :

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta\phi - \alpha \frac{\Gamma l^2}{4} \Delta^2\phi + \beta \Gamma l^{p-2} \operatorname{div}(\|\nabla\phi\|_2^{p-2} \nabla\phi)$$

- $\Delta^2\phi = \Delta(\Delta\phi)$ – билапласиан
- $\operatorname{div}(\|\nabla\phi\|_2^{p-2} \nabla\phi)$ – p -лапласиан



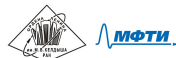
На границе $r = 0$ области моделирования у решения ϕ ожидается особенность.

Идея подхода:

- используем метод конечных объемов: к ячейке Ω_i отнесено среднее $\tilde{\phi}_i$; функции ϕ ;
- в первой и второй ячейках приближаем ϕ ЛК базисных функций, одна из которых имеет тот же вид особенности, что решение ϕ ;
- как и в классическом МКО, уравнения на $\tilde{\phi}_i$ являются следствием балансовых соотношений.

Преимущества подхода:

- точно учитываются граничные условия;
- точно учитывается асимптотика решения ϕ при $r \rightarrow 0$.



$$\frac{1}{m}(\tilde{\phi}_i^{j+1} - \tilde{\phi}_i^j) = \tau \frac{\Gamma}{l^2} f'(\tilde{\phi}_i^j) + \frac{\tau}{dV_i} \Gamma (\rho_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}^j S_{i-1/2});$$

$$dV_i = r_{i+1/2}^{k+1} - r_{i-1/2}^{k+1}; \quad S_{i\pm 1/2} = (k+1)r_{i\pm 1/2}^k;$$

$$\rho_{i\pm 1/2}^j = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j - \alpha \frac{l^2}{4} \left[\frac{\partial(\Delta \phi)}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j + \beta l^2 \left(\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j \right)^3;$$

$$\widetilde{\Delta \phi}_i^j = \frac{1}{dV_i} \left(\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i-1/2}^j S_{i-1/2} \right)$$



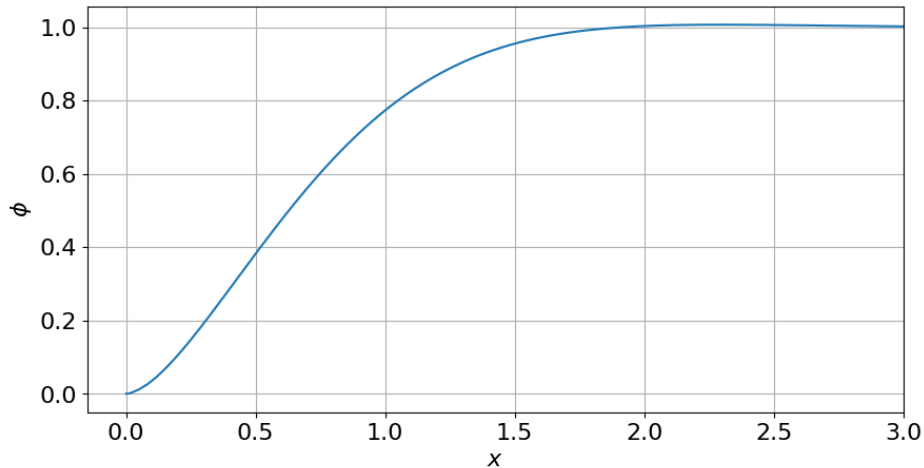
Полученные результаты

Предполагаемые виды особенности решения ϕ в точке $r = 0$

| | $\alpha = 0, \beta = 0$ | $\alpha = 0, \beta \neq 0$ | $\alpha \neq 0$ |
|-----------------------|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| Плоский случай | Без особенности | Без особенности | Без особенности |
| Цилиндрический случай | Не имеет решения | $r^{2/3}$ | $r^2(\ln r - 1)$ |
| Сферический случай | Предположительно не имеет решения | $r^{1/3}$ | Предположительно не имеет решения |



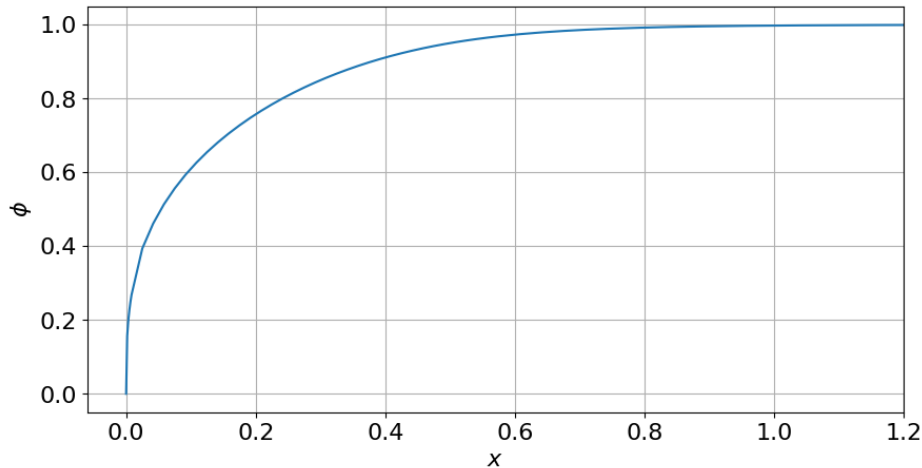
Полученные результаты



Цилиндрический случай, $\alpha = 1$: особенность вида $r^2(\ln r - 1)$



Полученные результаты

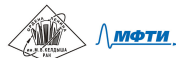





Сферический случай, $\alpha = 0$, $\beta = 1$: особенность вида $r^{1/3}$



Основные результаты работы:

- проведен теоретический анализ модели;
- построена разностная схема, дана содержательная оценка ее устойчивости;
- исследовано обобщение исходной модели; на основе метода конечных объемов построена специальная разностная схема, учитывающая особенности решений на границе области моделирования.



-  К. С. Pitike и W. Hong. *Phase-field model for dielectric breakdown in solids*. 2014.
-  Е. В. Зипунова, А. А. Кулешов и Е. Б. Савенков. *Численное исследование модели фазового поля для описания развития канала электрического пробоя в неоднородной среде*. 2024.
-  Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. *О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности*. 2020.



Спасибо за внимание!

