

Теоретические и численные вопросы моделирования развития канала электрического пробоя методом диффузной границы

Студент:

Пономарев Андрей Сергеевич

Научный руководитель:

Савенков Евгений Борисович

Консультант:

Зипунова Елизавета Вячеславовна

14.11.2025



МФТИ

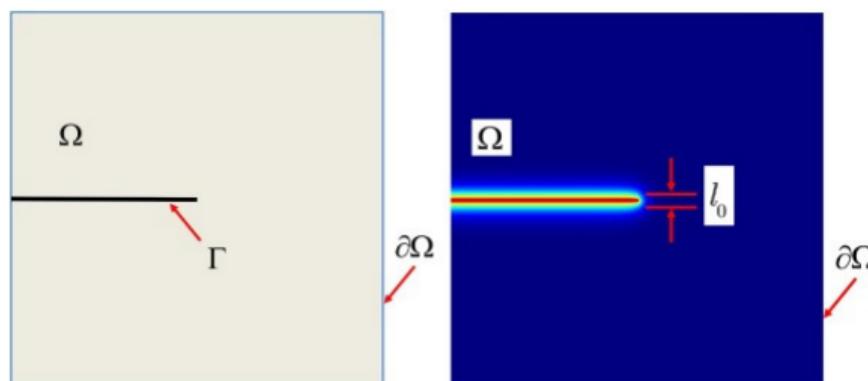
- 1 Постановка задачи
- 2 Адаптация расчетного шага по времени
- 3 Параллели с механикой

Математическая модель

Модель типа диффузной границы

Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества описывается гладкой функцией $\phi(x, t)$ – фазовым полем.

- $\phi = 1$ – неповрежденная среда
- $\phi = 0$ – полностью разрушенная среда
- Зона $\phi \in (0, 1)$ – диффузная граница
- На разрушение среды тратится энергия



Уравнения динамики системы

- Уравнение электрического потенциала Φ :

$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0$$

- Уравнение фазового поля ϕ (типа Аллена–Кана):

$$\frac{1}{m}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -F'(\phi; \|\nabla\Phi\|_2) + \frac{1}{2}\Gamma\Delta\phi$$

- Плотность свободной энергии

$$\pi = F(\phi; \|\nabla\Phi\|_2) + \frac{\Gamma}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi)$$

- m, Γ – параметры модели, константы



МФТИ

$$F(\phi; \|\nabla\Phi\|_2) = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi]\|\nabla\Phi\|_2^2 + \Gamma \frac{1-f(\phi)}{l^2}$$

$$\epsilon(x, t) = \frac{\epsilon_0(x)}{f(\phi(x, t)) + \delta}$$

$$f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$$

- l, δ – параметры модели

Разностная схема

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -F'(\phi; \|\nabla \Phi\|) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

- $\|\nabla \Phi\|$ – параметр

Разностная задача

$$\frac{1}{m} \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{\tau} = -F'(\phi_i^j; \|\nabla \Phi\|) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{i+1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i-1}^j}{h^2}$$

$$\phi_i^0 = \phi_0(ih); \quad \phi_0^j = \phi_l(j\tau); \quad \phi_n^j = \phi_r(j\tau)$$

Сетка регулярная; τ – шаг по времени, h – шаг по пространству.

Явная разностная схема первого порядка по времени, второго по пространству.

Открытые вопросы

- Большие вычислительные затраты на расчет
- Уточнение определяющих соотношений модели
- Воспроизведение в модели физического эксперимента

Цель работы

Предложить ответы на назревшие вопросы



МФТИ

- Интегрирование по времени с адаптивным шагом
- Использование результатов из теории трещин
- Настройка «большой» программы для моделирования

- 1 Постановка задачи
- 2 Адаптация расчетного шага по времени
- 3 Параллели с механикой

Общий вид схемы с адаптивным шагом

- Вводится переменный шаг τ^k :

$$\phi_j^{k+1} = \phi_j^k + m\tau^k \left(-F'(\phi_j^k) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{j+1}^k - 2\phi_j^k + \phi_{j-1}^k}{h^2} \right)$$

- Значение τ^k ограничено заранее выбранными τ_{\min} и τ_{\max} :

$$\tau^k = \max \left[\tau_{\min}, \min(\tau_{\max}, \tilde{\tau}^k) \right]$$

Методы адаптации

- По фазовому полю:

$$\tilde{\tau}_1^k = \frac{\text{tol}_1}{\left\| \frac{\partial_h \phi}{\partial t} \right\|_{C,h}}$$

- По полной энергии:

$$\tilde{\tau}_2^k = \frac{\text{tol}_2}{\left| \frac{d_h \Pi}{dt} \right|}$$

Предложены в статьях [1] и [2].

Методы адаптации

- Условие устойчивости схемы [3]:

$$\tau \leq \frac{1}{4m} \min \left(\frac{\delta^{5/3}}{|\nabla \Phi|^2 \epsilon_0}, \frac{h^2}{\Gamma} \right)$$

- Неравенство с первым аргументом \min можно переписать в виде

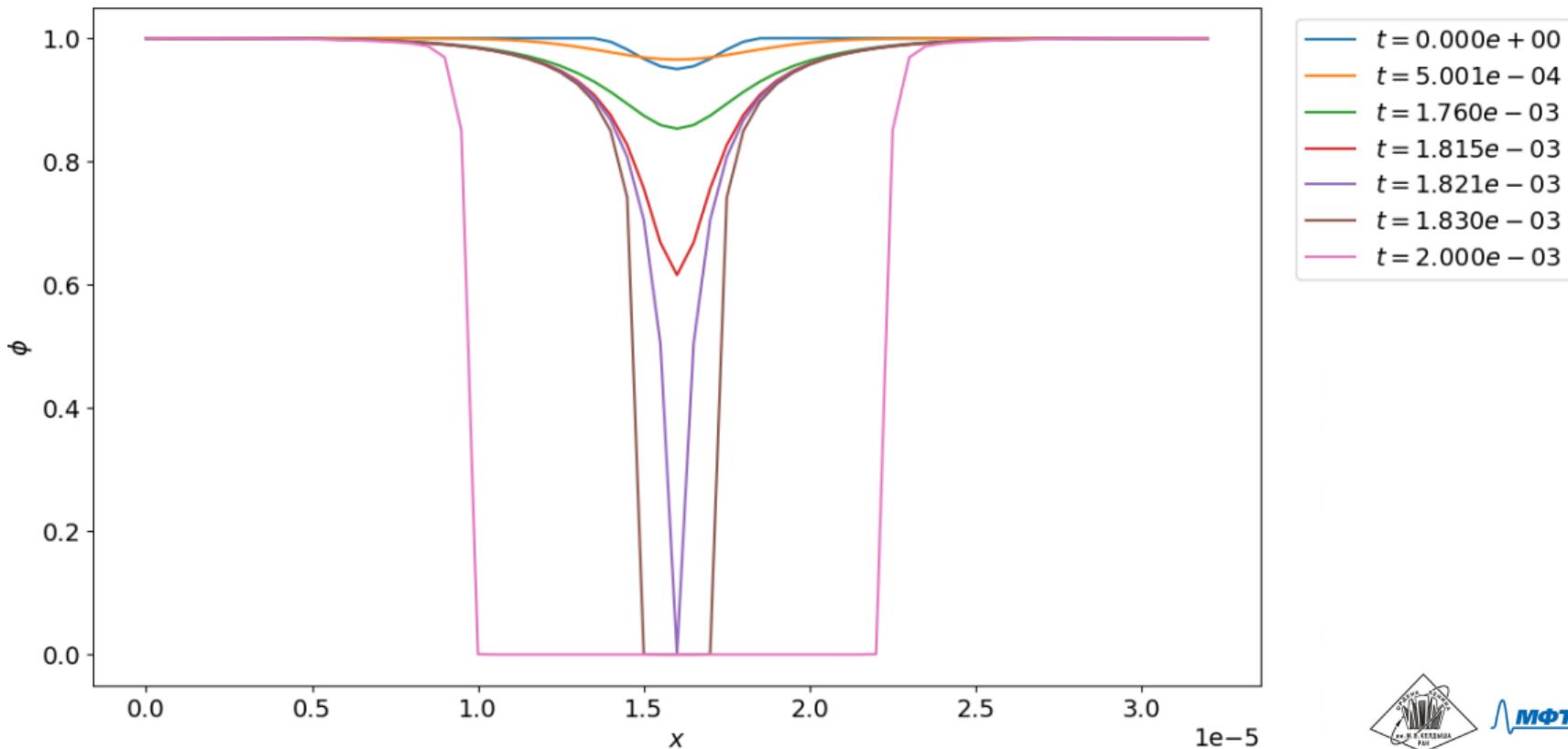
$$m\tau \max_{\phi \in [0,1]} |F''(\phi)| \leq 1$$

Адаптация по устойчивости

$$\tilde{\tau}_3^k = \frac{\text{tol}_3}{m \cdot \max_{j=0}^N G(\phi_j^k)},$$

где $G(\phi)$ мажорирует $|F''(\phi)|$

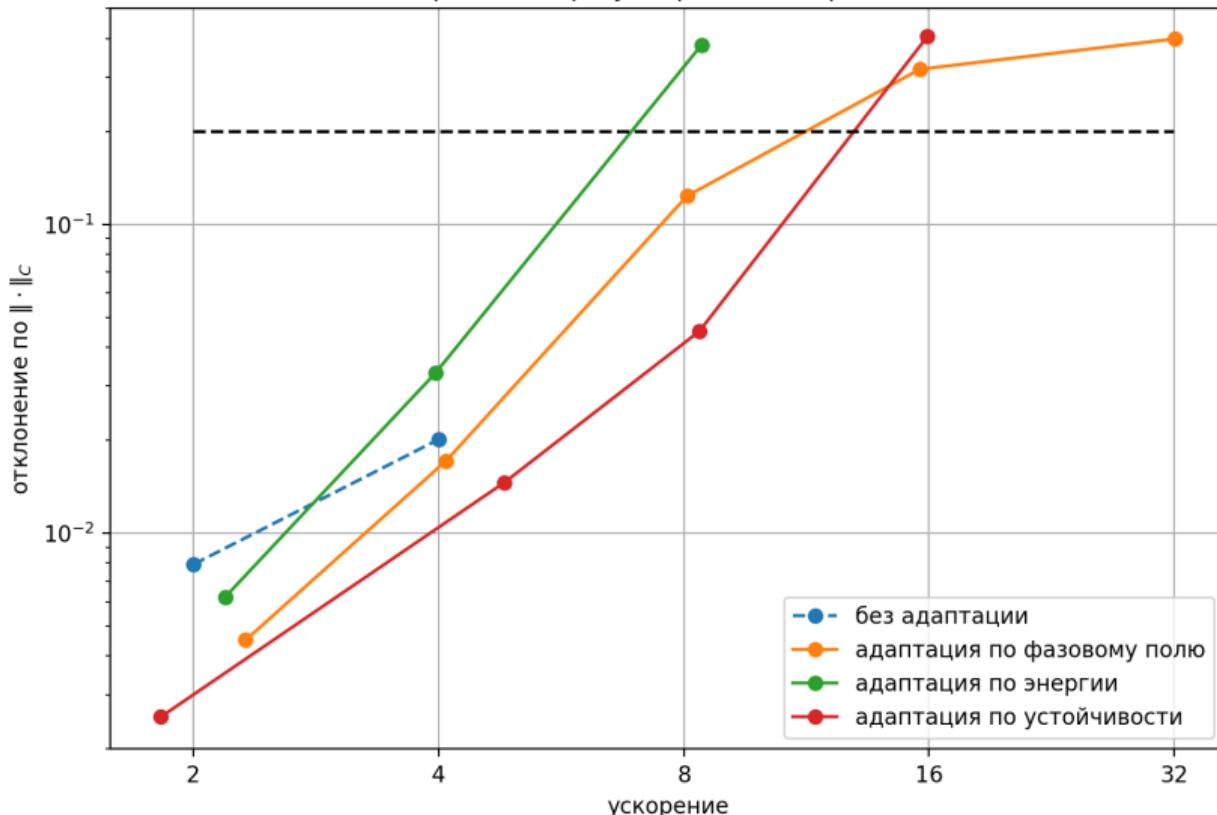
Вычислительный эксперимент



МФТИ

Вычислительный эксперимент

Ошибка расчета при ускорении по временной оси



Содержание

- 1 Постановка задачи
- 2 Адаптация расчетного шага по времени
- 3 Параллели с механикой

Связь с моделированием трещин

- Анализ статьи [4]

смещение u	электрический потенциал Φ
деформация $\hat{\epsilon}$	напряженность электрического поля E
упругость (жесткость) \hat{C}	диэлектрическая проницаемость ϵ

Литература

- [1] Y. Li, Y. Choi и J. Kim. “Computationally efficient adaptive time step method for the Cahn–Hilliard equation”. *Computers & Mathematics with Applications* (2017).
- [2] Zh. Zhang и Zh. Qiao. “An Adaptive Time-Stepping Strategy for the Cahn-Hilliard Equation”. *Communications in Computational Physics* (2012).
- [3] А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. “Устойчивость стационарных решений в модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»”. *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша* (2024).
- [4] J. M. Sargado и др. “High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (2018).



МФТИ

Спасибо за внимание!