Моделирование электрического пробоя методом диффузной границы

Пономарев А.С.[1,2], Савенков Е.Б.[2], Зипунова Е.В.[2]

[1]МФТИ (НИУ)
[2]ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

66-я Всероссийская научная конференция МФТИ
04.04.2024

Содержание

Содержание

Физическое явление

Электрический пробой

Явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше критического.

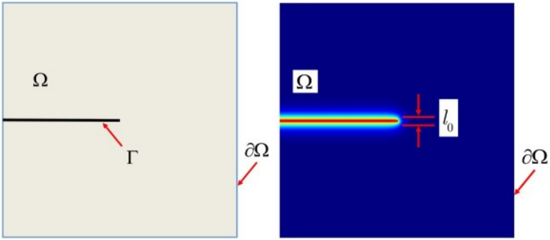
- Рассматриваем твердый диэлектрик
- Деградация диэлектрических свойств материала
- Процесс развивается в ограниченной зоне – канале

Математическая модель

Модель типа диффузной границы

Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества описывается гладкой функцией $\phi(\mathbf{x}, t)$ – фазовым полем.

- $\phi = 1$ – неповрежденная среда
- $\phi = 0$ – полностью разрушенная среда
- Зона $\phi \in (0, 1)$ – диффузная граница
- На разрушение среды тратится энергия



Математическая модель

Модель, предложенная в работе [1]:

- $\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi](\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma\left(\frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi)\right)$ – плотность свободной энергии
- Γ – энегрия роста пробоя на единицу длины
- l – величина «размытия» канала пробоя
- $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}$ – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$ – интерполирующая функция

Математическая модель

Уравнения модели

- Уравнение электрического потенциала Φ:

$$\mathrm{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0 \tag{1}$$

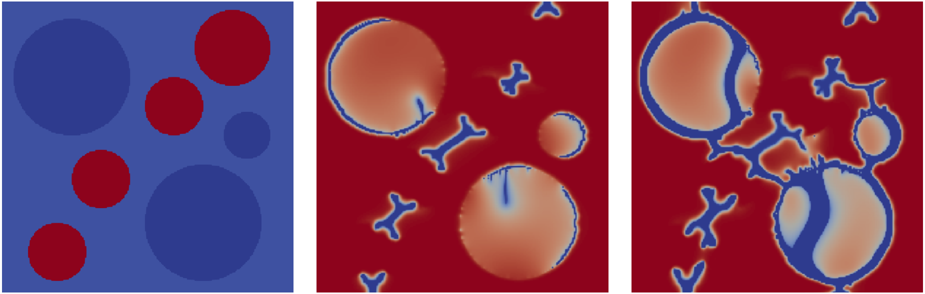
- Уравнение фазового поля ϕ:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\epsilon'(\phi)(\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi) + \frac{1}{2}\Gamma\triangle\phi \tag{2}$$

Свойства:

- связанная система уравнений на ϕ и Φ;
- уравнение для ϕ типа Аллена–Кана, нелинейное.

Пример вычислительного эксперимента



Расчет из работы [2]

Цель работы

Цель работы

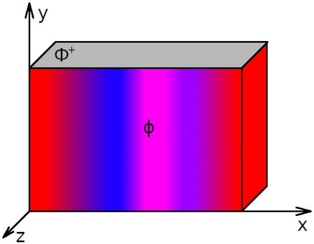
Исследовать качественные характеристики системы уравнений (1), (2): условия развития канала пробоя, границы применения разностной схемы.

Для этого будем рассматривать задачу в определенных краевых условиях, упрощающих ее, но позволяющих установить интересующие нас свойства.

Содержание

Одномерная задача

- Область $\Omega = [0, w]_x \times [0, h]_y \times I_z$ в форме параллелепипеда;
- $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0(x)$, $\epsilon_0(\mathbf{x}) = \epsilon_0(x)$ не зависят от y и z;
- $\Phi|_{y=0} = \Phi^- \in \mathbb{R}$, $\Phi|_{y=h} = \Phi^+ \in \mathbb{R}$.



Решением является функция электрического потенциала

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi^- + \frac{y}{h}(\Phi^+ - \Phi^-)$$

Тогда уравнение на ϕ принимает вид

$$\frac{1}{m}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2}K_\Phi^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2}\Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$K_\Phi = \dfrac{\Phi^+ - \Phi^-}{h}$. Будем считать $\epsilon_0 = \mathrm{const}$.

Содержание

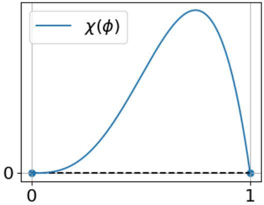
Анализ положений равновесия

- Пробой может развиваться из малых возмущений свойств неповрежденной среды. Выясним условия развития.
- Рассмотрим положения равновесия вида $\phi(x,t) \equiv C$. Положению равновесия соответствует ноль C функции
$$\chi(\phi) = \frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi)$$
- Исследуем положения равновесия на устойчивость спектральным методом: к $\phi \equiv C$ прибавим возмущение $\delta\phi = e^{\alpha t}\cos(\omega x)$, линеаризуем уравнение на $\delta\phi$.
- $\chi(\phi)$ возрастает в $C \implies$ равновесие неустойчиво; $\chi(\phi)$ убывает в $C \implies$ равновесие устойчиво.

Анализ положений равновесия

«Слабое» напряжение

$$0 \leqslant \frac{K_\Phi^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma} < \delta^2$$

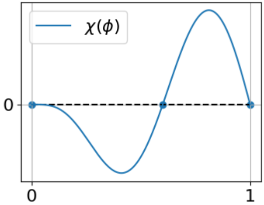


$\phi \equiv 0$ неустойчивое

$\phi \equiv 1$ устойчивое

«Среднее» напряжение

$$\delta^2 < \frac{K_\Phi^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma} < (1+\delta)^2$$



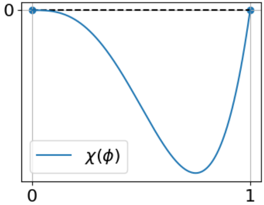
$\phi \equiv 0$ устойчивое

$\phi \equiv \mathrm{C}_3$ неустойчивое

$\phi \equiv 1$ устойчивое

«Сильное» напряжение

$$(1+\delta)^2 < \frac{K_\Phi^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma}$$



$\phi \equiv 0$ устойчивое

$\phi \equiv 1$ неустойчивое

Содержание

Разностная схема

Разностная задача

$$\frac{1}{m}\frac{\phi_a^{b+1}-\phi_a^b}{\tau}=\frac{1}{2}K_\phi^2\epsilon'(\phi_a^b)+\frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi_a^b)+\frac{\Gamma}{2}\frac{\phi_{a+1}^b-2\phi_a^b+\phi_{a-1}^b}{h^2}$$

$$\phi_a^0=\phi_0(ah);\quad \phi_0^b=\phi_l(b\tau);\quad \phi_{w/h}^b=\phi_r(b\tau)$$

Сетка регулярная; τ – шаг по времени, h – шаг по пространству.

Явная разностная схема первого порядка по времени, второго – по пространству.

Оценка устойчивости

- Рассмотрим возмущенное решение $\phi_a^b + \delta_a^b$. Линеаризуем уравнение на возмущение δ_a^b в точке $\phi_a^b = P$:

$$\delta_a^{b+1} = \delta_a^b + m\tau \left(\frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon''(P)\delta_a^b + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P)\delta_a^b + \frac{\Gamma}{2} \frac{\delta_{a+1}^b - 2\delta_a^b + \delta_{a-1}^b}{h^2} \right)$$

- Применим спектральный признак устойчивости:

$$1 > \lambda(\theta) = 1 + m\tau \left(\frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) - \frac{2\Gamma}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

- Исследуем вблизи $P = 0$.

Оценка устойчивости

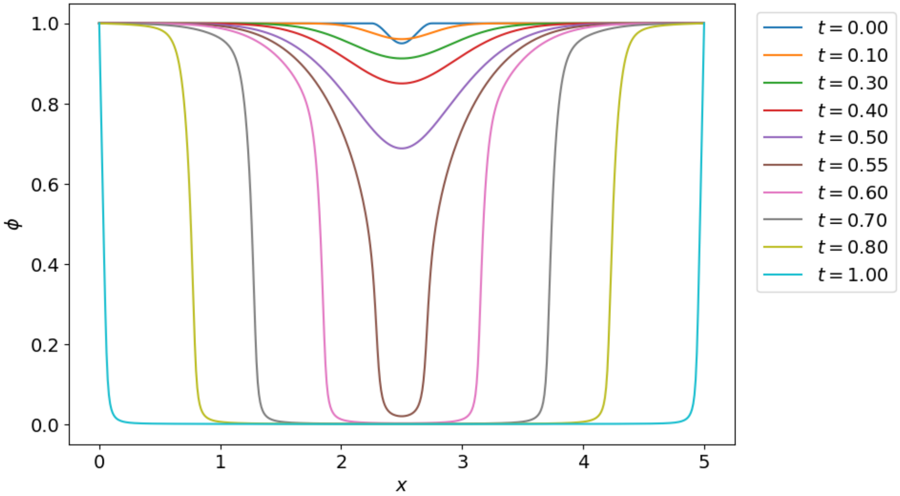
Условие устойчивости

$$\tau \leqslant \frac{1}{2m\left(\dfrac{K_\Phi^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \dfrac{\Gamma}{h^2}\right)}$$

Упрощенное условие устойчивости

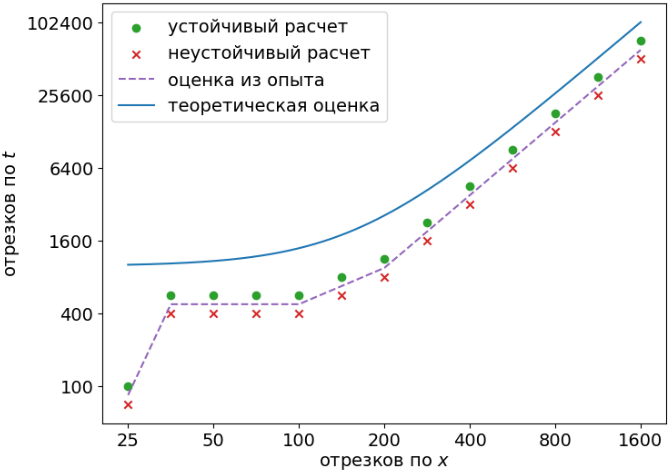
$$\tau \leqslant \frac{1}{4m} \min\left(\frac{\delta^{5/3}}{K_\Phi^2 \epsilon_0}, \frac{h^2}{\Gamma}\right)$$

Вычисления: типичное решение



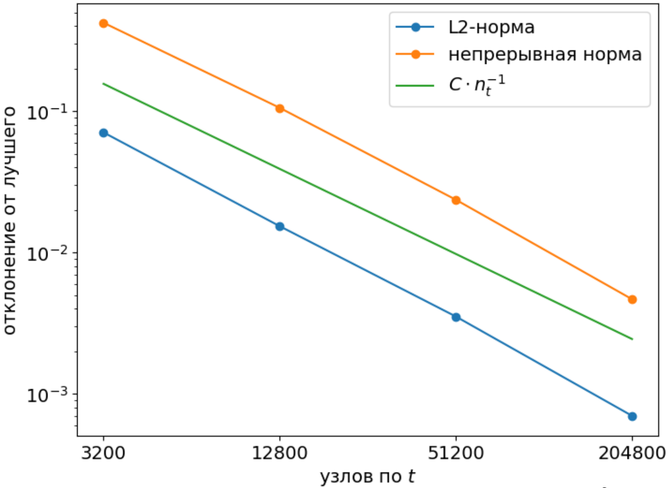
Узлов по измерениям: $n_x = 10^3, \ n_t = 10^5$

Вычисления: проверка устойчивости



$$\tau \leqslant \frac{1}{2m}\left(\frac{K_\Phi^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2}\right)^{-1}$$

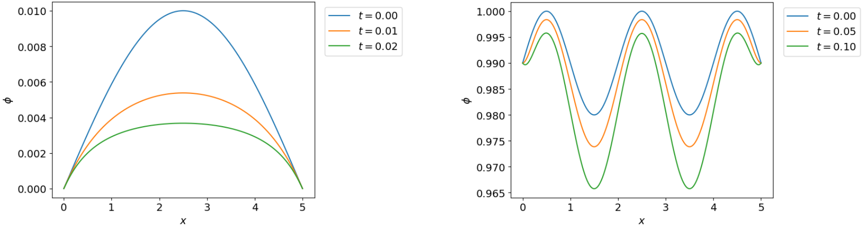
Вычисления: проверка сходимости



Здесь, согласно оценке устойчивости, $\tau = \dfrac{h^2}{4m\Gamma}$

Вычисления: положения равновесия

$$(1+\delta)^2 < \frac{K_\Phi^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma}$$ – «сильное» напряжение



$\phi \equiv 0$
устойчивое

$\phi \equiv 1$
неустойчивое

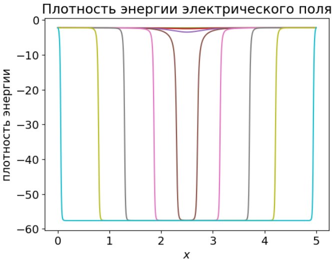
Свободная энергия

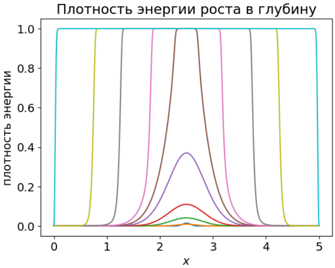
$$\Pi(t) = \int\limits_{\Omega} \pi(x,t)dx$$

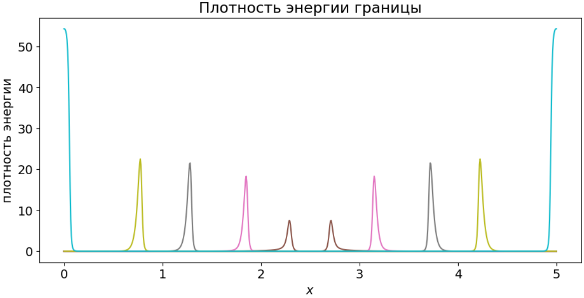
$$\pi(x,t) = \pi_1(x,t) + \pi_2(x,t) + \pi_3(x,t)$$

- $\pi_1(x,t) = -\frac{K_\Phi^2}{2}\epsilon(\phi(x,t))$ – плотность энергии электрического поля;
- $\pi_2(x,t) = \Gamma\frac{1 - f(\phi(x,t))}{l^2}$ – плотность энергии роста пробоя;
- $\pi_3(x,t) = \frac{\Gamma}{4}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)\right)^2$ – плотность энергии образования граничной зоны пробоя

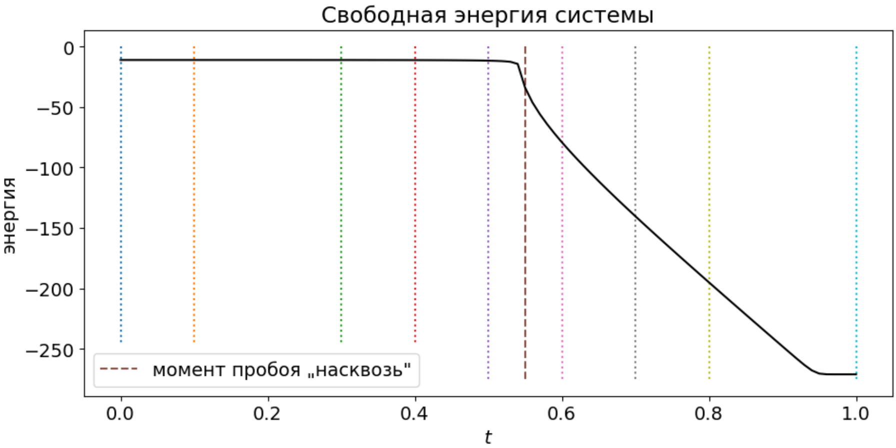
Вычисления: свободная энергия







Вычисления: свободная энергия



Литература

Е.В. Зипунова и Е.Б. Савенков. *О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности.* Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва, 2020.

Е.В. Зипунова, А.А. Кулешов и Е.Б. Савенков. *Численное исследование модели фазового поля для описания развития канала электрического пробоя в неоднородной среде.* Сибирский журнал индустриальной математики. 2024.

Спасибо за внимание