

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША

А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова, Е. Б. Савенков

**Устойчивость стационарных решений  
в модели развития канала электрического пробоя  
типа «диффузной границы»**

Москва, 2024

*А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова, Е. Б. Савенков, Устойчивость стационарных решений в модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»*

### **Аннотация**

Цель настоящей работы – исследование качественных характеристик и численный анализ модели типа диффузной границы, описывающей развитие канала электрического пробоя в твердом диэлектрике. Проведен анализ устойчивости положений равновесия системы; установлены условия развития канала пробоя из малых возмущений неповрежденной среды. Построена и изучена разностная схема для задачи, дана содержательная оценка ее устойчивости. Полученные теоретические результаты подтверждены моделированием на компьютере.

**Ключевые слова:** модель типа диффузной границы, фазовое поле, устойчивость, электрический пробой

*A. S. Ponomarev, E. V. Zipunova, E. B. Savenkov, Stability of stationary solutions of a diffuse interface model for the electrical breakdown process*

### **Abstract**

The aim of the present work is to study qualitative characteristics and to perform a numerical analysis of a diffuse interface model describing the development of an electrical breakdown channel in a solid dielectric. Stability of the system equilibrium positions is analysed. Conditions for the breakdown channel development from small perturbations of the intact medium are found. A differential scheme for the problem is constructed and investigated, an informative estimate of its stability is given. The obtained theoretical results are validated by a computer simulation.

**Key words and phrases:** diffuse interface model, phase field, stability, electrical breakdown

# 1 Введение

Электрический пробой – это явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше некоторого критического значения. Механизм разрушения диэлектрика под действием электрического поля сложен и многообразен: оно может иметь различные причины, характер развития, сопутствующие физические процессы [1]. В настоящей работе рассматривается исключительно случай твердого диэлектрика.

Вопрос о пробое твердых диэлектриков имеет важное практическое значение, так как таковые используются в любой электроизоляционной конструкции. В области техники это явление практически всегда вредно: оно приводит к нарушению работы электрической цепи и разрушению изоляции.

Деградация диэлектрических свойств материала, как правило, происходит лишь в ограниченной зоне, называемой каналом пробоя.

Среди многообразия математических моделей, созданных для описания развития канала электрического пробоя, выделим предложенную в работе [2] модель типа диффузной границы.

В настоящее время модели типа диффузной границы составляют целый класс подходов для решения прикладных задач гидродинамики [3–5], механики деформируемого тела и теории трещин [6], материаловедения [7], солидификации и теории фазовых переходов [8–10], описания кристаллических структур [11–13]. Предложенная в работе [2] модель развития канала электрического пробоя построена как формальное обобщение известных моделей типа диффузной границы для распространения трещин в упругой среде.

Исследование и дальнейшее развитие модели, предложенной в работе [2], можно найти в статьях [14–16].

Перечислим основные положения метода диффузной границы в применении к описанию развития канала электрического пробоя. Сразу отметим, что рассматриваемая модель феноменологическая: без рассмотрения причин образования пробоя на микроуровне строится уравнение, описывающее эволюцию состояния среды, согласующееся с базовыми законами физики. Вещество в системе находится в разных состояниях (фазах), то есть неоднородно, причем части вещества в одном и том же состоянии образуют некоторые однородные области. С точки зрения физики «раздел» фаз имеет пренебрежимо малую толщину, его можно считать плоской поверхностью. Однако в моделях типа диффузной границы принимается, что распределение фаз в пространстве задано гладкой функцией  $\phi$  (фазовым полем): внутри каждой области однородности значение  $\phi$  близко к постоянному, а на разделяющем слое («диффузной границе») меняется пусть и быстро, но непрерывно. В рассматриваемой модели вещество имеет две различные фазы: «неповрежденное» –  $\phi \approx 1$  – и «полностью разрушенное» (то есть относящееся к каналу пробоя) –

$\phi \approx 0$ . На разрушение среды, то есть на постепенный переход вещества от состояния  $\phi \approx 1$  к состоянию  $\phi \approx 0$ , тратится энергия электрического поля.

Настоящая работа посвящена исследованию модели развития канала электрического пробоя, предложенной в работе [2]. Цель работы – исследование качественных характеристик модели и ее численный анализ, представляющие интерес ввиду сложности модели.

Для анализа качественных характеристик модели исходная дифференциальная задача была рассмотрена в определенных краевых условиях, упрощающих ее. Проведен теоретический анализ устойчивости положений равновесия системы, посредством чего установлены условия, при которых происходит развитие канала электрического пробоя из малых возмущений неповрежденной среды.

Построена явная разностная схема первого порядка на регулярной сетке. Дана содержательная оценка устойчивости разностной схемы. С помощью моделирования на компьютере подтверждены полученные теоретические результаты: проверена оценка устойчивости схемы, сходимость сеточного решения при выполнении условия устойчивости, свойства положений равновесия, невозрастание свободной энергии системы.

## 2 Постановка задачи и модель

### 2.1 Математическая модель

Приведем описание математической модели, предложенной в работе [2].

Итак, рассматривается ограниченная область пространства  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Распределение фаз вещества в ней задается гладкой функцией  $\phi : \Omega \times [0, +\infty)_t \rightarrow [0, 1]$ ,  $\phi(\mathbf{x}, t)$  – фазовым полем; вещество может находиться в одной из двух фаз:  $\phi \approx 1$  – «неповрежденное»,  $\phi \approx 0$  – «полностью разрушенное» (то есть относящееся к каналу пробоя), – а также в промежуточных состояниях в зоне диффузной границы.

Диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon$  предлагается описать следующей формулой:

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon[\phi] = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}. \quad (1)$$

Здесь  $\epsilon_0(\mathbf{x})$  – диэлектрическая проницаемость неповрежденной среды;  $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$  – интерполирующая функция, гладко соединяющая значения 0 и 1 ( $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f'(0) = f'(1) = 0$ );  $0 < \delta \ll 1$  – регуляризирующий параметр. Обратим внимание, что при  $\phi = 1$   $\epsilon(\mathbf{x}, t) \approx \epsilon_0(\mathbf{x})$ , что соответствует диэлектрику; при  $\phi = 0$   $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0(\mathbf{x})/\delta$  (в  $\delta^{-1} \gg 1$  раз больше), что соответствует проводнику.

Помимо фазового поля  $\phi$ , состояние системы описывает также функция  $\Phi : \Omega \times [0, +\infty)_t \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  – потенциал электрического поля.

Постулируется следующее выражение для свободной энергии системы  $\Pi$ :

$$\Pi = \int_{\Omega} \pi d\mathbf{x}, \quad (2)$$

$$\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi] (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \frac{1-f(\phi)}{l^2} + \frac{\Gamma}{4} (\nabla\phi, \nabla\phi). \quad (3)$$

Здесь  $\Gamma > 0$ ,  $l > 0$  – числовые параметры модели, константы.

Постулируются два уравнения, определяющие динамику системы:

$$\begin{cases} \frac{\delta\Pi}{\delta\Phi} = 0; \\ \frac{1}{m} \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\delta\Pi}{\delta\phi}. \end{cases}$$

Здесь константа  $m > 0$  – числовой параметр модели, называемый подвижностью: она имеет смысл скорости изменения  $\phi$  под действием единичной «приложенной силы». Говоря нестрого, согласно первому уравнению электрический потенциал  $\Phi$  распределяется так, чтобы свободная энергия была минимальной; согласно второму – фазовое поле  $\phi$  с определенной скоростью стремится к тому, чтобы свободная энергия была минимальной.

Отыскав явно вариационные производные в двух уравнениях выше, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0; \\ \frac{1}{m} \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi) + \frac{1}{2}\Gamma\Delta\phi. \end{cases} \quad (4)$$

$$(5)$$

Здесь  $(\cdot)' \equiv (\cdot)'_{\phi}$ . Система состоит из двух уравнений: на  $\phi$  и  $\Phi$  соответственно; система связная, второе уравнение нелинейное, является уравнением типа Аллена–Кана.

В таблице 1 перечислены названия и размерности величин, встречающихся в описанной модели.

## 2.2 Одномерная задача

Рассмотрим систему (4), (5) с учетом следующих допущений. Пусть замкнутая область  $\bar{\Omega} = [0, W]_x \times [0, H]_y \times I_z$ , где  $W, H > 0$ ,  $I$  – некоторый отрезок. Пусть  $\epsilon_0(\mathbf{x}) = \epsilon_0(x)$ , а также задано начальное условие  $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(x)$ , то есть диэлектрическая проницаемость неповрежденной среды и начальное

Таблица 1. Величины, относящиеся к модели.

Величина	Размерность	Название либо физический смысл
$\phi(\mathbf{x}, t)$	1	фазовое поле
$\Phi(\mathbf{x}, t)$	$\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$	потенциал электрического поля
$\Pi(t)$	Дж	свободная энергия
$\pi(\mathbf{x}, t)$	$\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$	плотность свободной энергии
$\epsilon(\mathbf{x}, t)$	$\frac{\Phi}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж} \cdot \text{м}}$	диэлектрическая проницаемость среды
$\epsilon_0(\mathbf{x})$	$\frac{\Phi}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж} \cdot \text{м}}$	диэлектрическая проницаемость неповрежденной среды
$\delta$	1	определяет диэлектрическую проницаемость полностью разрушенной среды, равную $\epsilon_0(\mathbf{x})/\delta$
$l$	м	характерная толщина диффузной границы
$\Gamma$	$\frac{\text{Дж}}{\text{м}}$	характерная энергия образования единицы длины канала пробоя
$m$	$\frac{\text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{Дж}}$	подвижность фазового поля $\phi$

распределение фаз зависят только от  $x$ . На границе  $\bar{\Omega}$  считаем заданным следующее граничное условие на  $\phi$ :  $\phi|_{x=0} = \phi_l(t)$ ,  $\phi|_{x=W} = \phi_r(t)$ , а также  $\partial\phi/\partial\mathbf{n} = 0$  на «гранях» области  $\bar{\Omega}$ , перпендикулярных осям  $y$  и  $z$ ; следующее граничное условие на  $\Phi$ :  $\Phi|_{y=0} = \Phi^-$ ,  $\Phi|_{y=H} = \Phi^+$ , где  $\Phi^-, \Phi^+ \in \mathbb{R}$ , а также  $\partial\Phi/\partial\mathbf{n} = 0$  на «гранях»  $\bar{\Omega}$ , перпендикулярных осям  $x$  и  $z$ .  $\partial/\partial\mathbf{n}$  означает производную по вектору нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\bar{\Omega}$ . Описанную систему можно представить себе как двумерный (тривиально растянутый по третьему измерению) прямоугольный конденсатор, у которого сверху и снизу обкладки с постоянным электрическим потенциалом, между ними – диэлектрик, меняющий свойства только по горизонтали.

Учитывая описанные краевые условия, будем искать решение системы уравнений (4), (5), имеющее  $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(x, t)$ ,  $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(y, t)$ , то есть полагая, что  $\phi$  не зависит от  $y$  и  $z$ ,  $\Phi$  – от  $x$  и  $z$ .

Преобразуем уравнение (4):

$$0 = \text{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = (\nabla\epsilon, \nabla\Phi) + \epsilon\Delta\Phi. \quad (6)$$

$(\nabla\epsilon, \nabla\Phi) = 0$ , так как  $\epsilon$  не зависит от  $y$  (и  $z$ ). Заметим, что решением является  $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi^- + (y/H)(\Phi^+ - \Phi^-)$ , очевидно удовлетворяющее граничному

условию. В этом случае  $\Delta\Phi \equiv 0$  и уравнение (6) становится тождеством.

Преобразуем уравнение (5) с учетом найденного решения  $\Phi$ :

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) \left( \frac{\Phi^+ - \Phi^-}{H} \right)^2 + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Уравнение (7) можно рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных на функцию  $\phi(x, t)$  одной пространственной переменной и решать его в области  $[0, W]_x \times [0, +\infty)_t$ . Для удобства введем  $K_\Phi = \|\nabla\Phi\| = (\Phi^+ - \Phi^-)/H$ , тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Параметры  $\Phi^+$ ,  $\Phi^-$  и  $H$  перестали входить в уравнение явно – так мы убрали последнее упоминание о втором (по  $y$ ) измерении пространства. Для уравнения (8) следующий вид принимает начальное условие:

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x); \quad (9)$$

граничное условие:

$$\phi(0, t) = \phi_l(t), \quad \phi(W, t) = \phi_r(t). \quad (10)$$

Для простоты анализа везде далее будем считать  $\epsilon_0$  константой.

Итак, пара из решения уравнения (8) с краевыми условиями (9), (10) и функции  $\Phi = \Phi^- + (y/H)(\Phi^+ - \Phi^-)$  является решением исходной системы уравнений (4), (5) при описанных допущениях.

### 3 Теоретическое исследование: анализ положений равновесия

При определенных условиях электрический пробой может развиваться из малых возмущений свойств неповрежденной среды. Для отыскания этих условий исследуем положения равновесия уравнения (8) вида  $\phi(x, t) \equiv C$ ,  $C \in [0, 1]$  (то есть  $\phi$  постоянна и во времени, и в пространстве).

Приведем формулы для производных  $f(\phi)$  и  $\epsilon(\phi)$  (последняя задана выражением (1)):

$$f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4; \quad f'(\phi) = 12\phi^2 - 12\phi^3; \quad f''(\phi) = 24\phi - 36\phi^2;$$

$$\epsilon'_f = \frac{-\epsilon_0}{(f(\phi) + \delta)^2}; \quad \epsilon''_{ff} = \frac{2\epsilon_0}{(f(\phi) + \delta)^3};$$

откуда

$$\epsilon'(\phi) = \epsilon'_f \cdot f' = \frac{-\epsilon_0 f'(\phi)}{(f(\phi) + \delta)^2}; \quad (11)$$

$$\epsilon''(\phi) = \epsilon''_{ff} \cdot (f')^2 + \epsilon'_f \cdot f'' = \epsilon_0 \frac{2(f'(\phi))^2 - f''(\phi)(f(\phi) + \delta)}{(f(\phi) + \delta)^3}. \quad (12)$$

Подставим решение  $\phi(x, t) \equiv C$  в уравнение (8), получим

$$0 = \frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon'(C) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(C). \quad (13)$$

Отсюда с учетом выражения (11) имеем

$$f'(C) \left( \frac{\Gamma}{l^2} - \frac{1}{2} K_\Phi^2 \frac{\epsilon_0}{(f(C) + \delta)^2} \right) = 0.$$

Рассмотрим сначала случай  $f'(C) = 0$ : имеем  $f'(C) = 12C^2(1 - C) = 0$ , следовательно,  $C \in \{0, 1\}$ . Значит,  $\phi \equiv 0$  и  $\phi \equiv 1$  – положения равновесия.

Пусть теперь  $C \neq 0, 1$ . Тогда

$$\frac{\Gamma}{l^2} = \frac{K_\Phi^2 \epsilon_0}{2(f(C) + \delta)^2} \quad \text{и} \quad f(C) + \delta = K_\Phi l \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\Gamma}}.$$

Заметим, что  $f(C) \in [0, 1]$ , к тому же  $f(\phi)$  строго возрастает, поэтому если  $K_\Phi l \sqrt{\epsilon_0/(2\Gamma)} \in (\delta, 1 + \delta)$ , то уравнение (13) имеет отличный от 0 и 1 третий корень

$$C_3 = f^{-1} \left( K_\Phi l \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\Gamma}} - \delta \right). \quad (14)$$

В противном случае у уравнения (13) корня только два.

Итак, число положений равновесия зависит от выполнения условия

$$\delta^2 < \frac{K_\Phi^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma} < (1 + \delta)^2. \quad (15)$$

Немного позже станет ясна его связь со свойствами положений равновесия  $\phi \equiv 0$  и  $\phi \equiv 1$  и всего уравнения (8) в целом.

Перейдем теперь к анализу устойчивости положений равновесия.

Пусть  $\phi(x, t)$  – некоторое решение уравнения (8),  $\delta\phi(x, t)$  – возмущение. Запишем уравнение (8) для возмущенного решения  $\phi + \delta\phi$ :

$$\frac{1}{m} \frac{\partial(\phi + \delta\phi)}{\partial t} = \frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon'(\phi + \delta\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi + \delta\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2(\phi + \delta\phi)}{\partial x^2},$$



откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t} \right) &= \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 [\epsilon'(\phi) + \epsilon''(\phi)\delta\phi + o(1)\delta\phi] + \\ &+ \frac{\Gamma}{l^2} [f'(\phi) + f''(\phi)\delta\phi + o(1)\delta\phi] + \frac{1}{2} \Gamma \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\delta\phi)}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

С учетом того, что  $\phi$  – решение, перейдем к

$$\frac{1}{m} \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t} = \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 [\epsilon''(\phi) + o(1)]\delta\phi + \frac{\Gamma}{l^2} [f''(\phi) + o(1)]\delta\phi + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2(\delta\phi)}{\partial x^2}.$$

Линеаризуем (отбросим бесконечно малые). Получим уравнение на возмущение

$$\frac{1}{m} \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t} = \left( \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon''(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(\phi) \right) \delta\phi + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2(\delta\phi)}{\partial x^2}. \quad (16)$$

Часть дальнейшего анализа удобно провести в общем виде, для уравнения

$$\frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t} = A\delta\phi + B \frac{\partial^2(\delta\phi)}{\partial x^2}, \quad (17)$$

где  $A$  и  $B$  – некоторые постоянные, причем  $B > 0$ .

Подставим в уравнение (17)  $\delta\phi = e^{\alpha t} \sin(\omega x)$ , то есть некоторую экспоненциально растущую или убывающую во времени (в зависимости от знака  $\alpha$ ) гармонику, и получим уравнение относительно параметров возмущения

$$\alpha e^{\alpha t} \sin(\omega x) = A e^{\alpha t} \sin(\omega x) - B \omega^2 e^{\alpha t} \sin(\omega x),$$

откуда

$$\alpha = A - B\omega^2. \quad (18)$$

Объединим три части рассуждения. Для уравнения (8) рассмотрим положение равновесия  $\phi \equiv C$ . Прибавим к нему возмущение  $\delta\phi$ ; применим к  $\delta\phi$  уравнение (16), в  $\epsilon''$  и  $f''$  подставим  $\phi = C$ . Полученное уравнение имеет вид (17). В зависимости от значения коэффициента

$$A = \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon''(C) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(C)$$

возможны три случая.

1.  $A > 0$ . При  $\omega^2 \in [0, A/B)$  верно  $\alpha > 0$ , то есть существуют возмущения  $\delta\phi$ , возрастающие во времени. Значит, положение равновесия  $\phi \equiv C$  неустойчивое.

2.  $A < 0$ . Для любого  $\omega$  выполняется  $\alpha \leq A < 0$ . Любое возмущение  $\delta\phi$  на отрезке  $[0, W]_x$  можно представить в виде интеграла Фурье по гармоникам, все они убывают не медленнее гармоника  $\omega = 0$ . Значит, положение равновесия  $\phi \equiv C$  устойчивое.

3.  $A = 0$ . Рассуждаем аналогично случаю  $A < 0$ , однако здесь возможны сколь угодно медленно убывающие гармоники (со сколь угодно малым  $\alpha$ ). Этот случай соответствует нейтральному равновесию. Здесь проведенного анализа с линеаризацией недостаточно; пояснение будет дано позже.

Рассмотрим положение равновесия  $\phi \equiv 0$ . Имеем  $f''(0) = 0$ ,  $\epsilon''(0) = 0$  (см. выражение (12)); получаем  $A = 0$ . Этот случай требует более глубокого анализа, назвать тип положения равновесия мы пока не можем.

Рассмотрим положение равновесия  $\phi \equiv 1$ . Здесь  $f''(0) = -12$ ,  $\epsilon''(0) = 12\epsilon_0/(1 + \delta)^2$  (см. выражение (12)); получаем

$$A = \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon''(C) + \frac{\Gamma}{l^2}f''(C) = \frac{6K_{\Phi}^2\epsilon_0}{(1 + \delta)^2} - \frac{12\Gamma}{l^2}.$$

Положение равновесия устойчиво при условии  $A < 0$ , то есть при

$$\frac{K_{\Phi}^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma} < (1 + \delta)^2. \quad (19)$$

Найдем  $\omega_0$ , при котором в случае неустойчивого положения равновесия возрастающие гармоники сменяются убывающими. Для этого рассмотрим выражение (18) с  $\alpha = 0$ ,  $B = \Gamma/2$  и приведенным выше  $A$ . Получим

$$0 = \frac{6K_{\Phi}^2\epsilon_0}{(1 + \delta)^2} - \frac{12\Gamma}{l^2} - \frac{\Gamma}{2}\omega_0^2,$$

откуда

$$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{3K_{\Phi}^2\epsilon_0}{\Gamma(1 + \delta)^2} - \frac{6}{l^2}}.$$

Заметим, что условие (19) есть правое неравенство из условия (15). Чтобы объяснить это и сформировать полную картину происходящего, взглянем на положения равновесия немного под другим углом.

Решая уравнение (13), мы искали нули функции

$$\chi(\phi) = \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi). \quad (20)$$

Следовательно, любому положению равновесия  $\phi \equiv C$  однозначно соответствует ноль  $C$  функции  $\chi(\phi)$ . Из вывода уравнения (16) на возмущение следует, что в его правой части при  $\delta\phi$  стоит коэффициент  $\chi'(\phi)$ . После, проводя

анализ уравнения (17) для положения равновесия  $\phi \equiv C$ , мы рассматривали случаи в зависимости от знака коэффициента  $A$ , который, как оказалось, равен  $\chi'(C)$ .

Подведем итог рассуждениям. Функция  $\chi(\phi)$ , определенная формулой (20), гладкая на отрезке  $[0, 1]$ . Она имеет нули 0 и 1, а также при условии (15) – третий ноль в некоторой точке  $C_3 \in (0, 1)$ . Положения равновесия  $\phi \equiv C$  однозначно соответствуют нулям  $\chi(\phi)$ . Вопрос их устойчивости сводится к отысканию знака  $\chi'(\phi)$  в нулях: положительная  $\chi'$  – неустойчивое равновесие, отрицательная  $\chi'$  – устойчивое.

Теперь стало понятно, почему в случае нулевой  $\chi'$  (как в точке  $\phi = 0$ ) недостаточно анализа с линеаризацией уравнения на возмущение. Интуитивно понятно, что в случае нулевой первой производной нужно рассмотреть первую ненулевую производную высшего порядка; возрастание  $\chi$  будет означать неустойчивое равновесие, убывание – устойчивое.

В завершение докажем, что  $\chi(\phi)$  в нуле  $C_3 \in (0, 1)$  (в случае его существования) имеет ненулевую производную. Имеем

$$\chi(C_3) = f'(C_3) \left( \frac{\Gamma}{l^2} - \frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{2(f(C_3) + \delta)^2} \right) = 0.$$

Учитывая, что  $f'(C_3) \neq 0$ , получим

$$\frac{\Gamma}{l^2} - \frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{2(f(C_3) + \delta)^2} = 0.$$

Тогда

$$\chi'(\phi)|_{C_3} = f'(C_3) \left( \frac{\Gamma}{l^2} - \frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{2(f(\phi) + \delta)^2} \right)' \Big|_{C_3} = (f'(C_3))^2 \frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{(f(C_3) + \delta)^3} \neq 0.$$

Теперь можно провести исчерпывающий разбор случаев поведения  $\chi(\phi)$  в своих нулях. Как видно из условий (15) и (19), оно определяется величиной

$$\xi = \frac{K_{\Phi}^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma}. \quad (21)$$

Вначале рассмотрим случай  $0 \leq \xi < \delta^2$ . Нули  $\chi(\phi)$ : 0, 1;  $\chi'(0) = 0$ ,  $\chi'(1) < 0$ . Поведение функции  $\chi(\phi)$  схематично изображено на рис. 1. Положения равновесия:  $\phi \equiv 0$  неустойчивое,  $\phi \equiv 1$  устойчивое. Эту конфигурацию условно назовем случаем «слабого электрического напряжения». Интуитивно конфигурация означает, что при фиксированных прочих параметрах электрическое поле мало настолько, что даже близкая к полностью разрушенной среда  $\phi \approx 0$  со временем «восстанавливается» до  $\phi \approx 1$ .

Рассмотрим теперь случай  $\delta^2 < \xi < (1 + \delta)^2$ . Нули  $\chi(\phi)$ : 0,  $C_3$  (см. выражение (14)), 1;  $\chi'(0) = 0$ ,  $\chi'(1) < 0$ ;  $\chi'(C_3) > 0$  (из гладкости  $\chi$ ). Поведение функции  $\chi(\phi)$  схематично изображено на рис. 2. Положения равновесия:  $\phi \equiv 0$  устойчивое,  $\phi \equiv C_3$  неустойчивое,  $\phi \equiv 1$  устойчивое. Такую конфигурацию условно назовем случаем «среднего электрического напряжения». Интуитивно конфигурация означает, что при достаточно близких к 0 значениях  $\phi$  среда «разрушается» до 0, при достаточно близких к 1 – «восстанавливается» до 1; посередине же, «на границе», – неустойчивое равновесие.

Наконец, рассмотрим случай  $(1 + \delta)^2 < \xi$ . Нули  $\chi(\phi)$ : 0, 1;  $\chi'(0) = 0$ ,  $\chi'(1) > 0$ . Поведение функции  $\chi(\phi)$  схематично изображено на рис. 3. Положения равновесия:  $\phi \equiv 0$  устойчивое,  $\phi \equiv 1$  неустойчивое. Эту конфигурацию условно назовем случаем «сильного электрического напряжения». Интуитивно конфигурация означает, что электрическое поле достаточно сильно, чтобы сколь угодно близкую к неповрежденной среде  $\phi \approx 1$  «разрушить» до  $\phi \approx 0$ . Именно в этом случае электрический пробой развивается из малых возмущений свойств неповрежденной среды.

Во всех трех случаях устойчивость положения равновесия  $\phi \equiv 0$  определяется по производной высшего порядка из вида функции  $\chi(\phi)$ .

## 4 Разностная схема для одномерной задачи

Будем численно решать уравнение (8) в области  $[0, W]_x \times [0, +\infty)_t$  с краевыми условиями (9), (10).

Используем регулярную сетку с временным шагом  $\tau$  и пространственным –  $h$ . Пусть  $N = W/h$  – целое число. Пусть  $(jh, k\tau)$  – узлы сетки,  $j = \overline{0, N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Обозначим  $\phi_j^k$  значение сеточной функции  $\phi$  в узле  $(jh, k\tau)$ . Перейдем к следующей разностной задаче:

$$\frac{1}{m} \frac{\phi_j^{k+1} - \phi_j^k}{\tau} = \frac{1}{2} K_\phi^2 \epsilon'(\phi_j^k) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi_j^k) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{j+1}^k - 2\phi_j^k + \phi_{j-1}^k}{h^2}. \quad (22)$$

Имеем четырехточечную явную разностную схему

$$\begin{cases} \phi_j^{k+1} = \phi_j^k + m\tau \left( \frac{1}{2} K_\phi^2 \epsilon'(\phi_j^k) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi_j^k) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{j+1}^k - 2\phi_j^k + \phi_{j-1}^k}{h^2} \right), \\ j = \overline{1, N-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \\ \phi_j^0 = \phi_0(jh); \quad \phi_0^k = \phi_l(k\tau); \quad \phi_N^k = \phi_r(k\tau). \end{cases} \quad (23)$$

Легко видеть, что схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространственной переменной  $x$ .

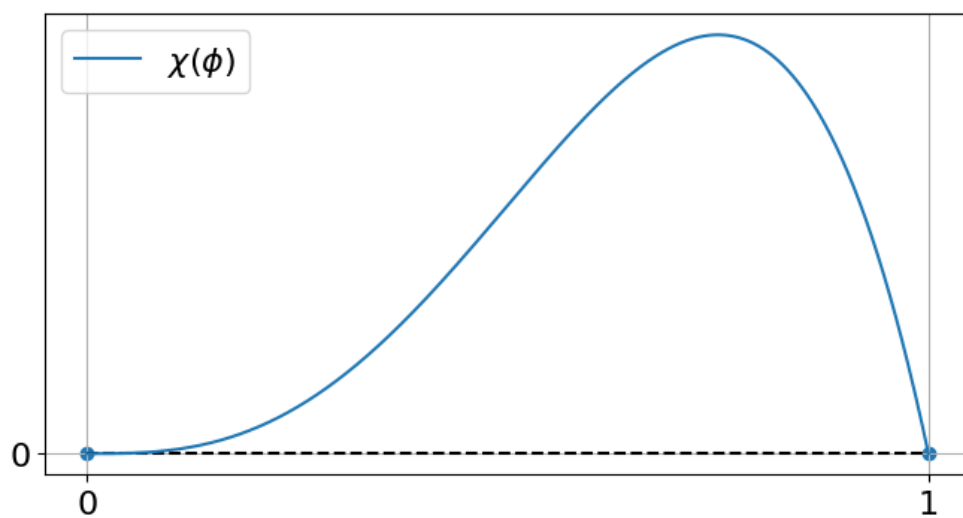


Рис. 1. Поведение функции  $\chi(\phi)$ , случай «слабого напряжения»

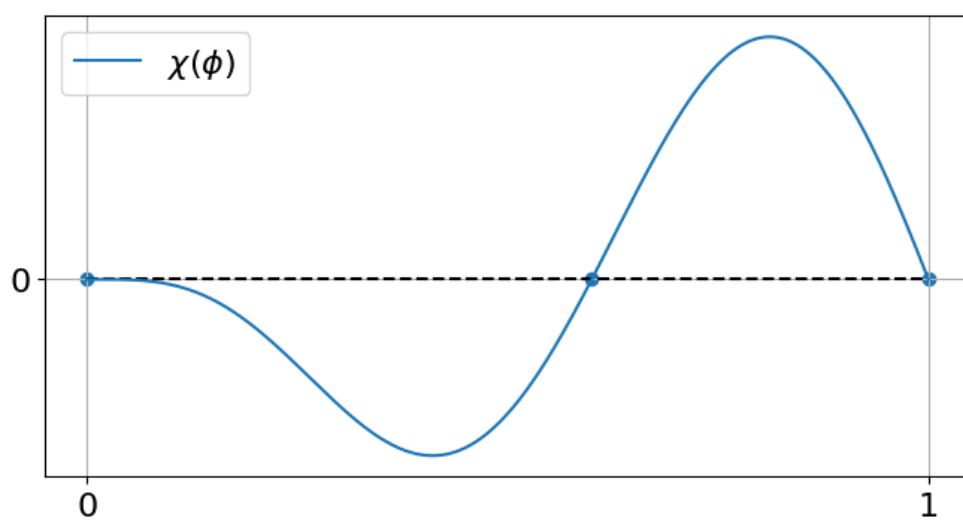


Рис. 2. Поведение функции  $\chi(\phi)$ , случай «среднего напряжения»

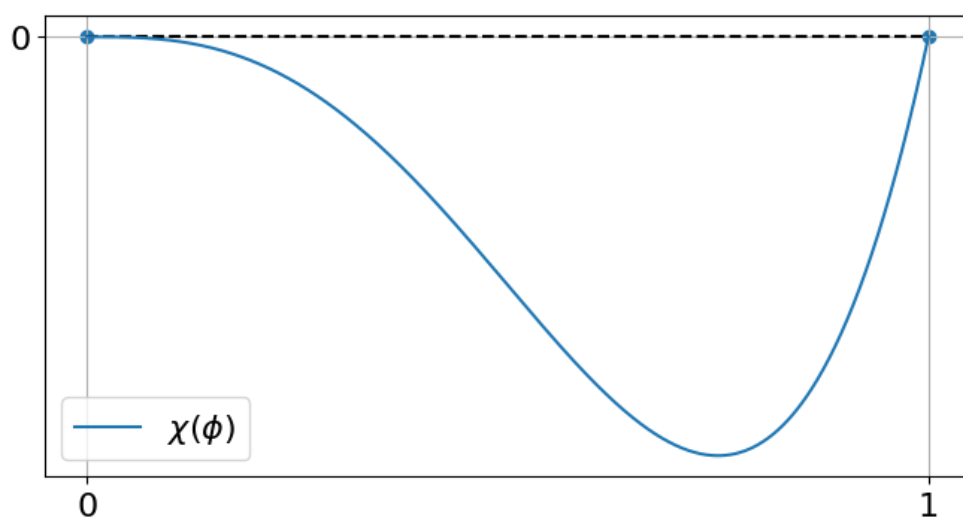


Рис. 3. Поведение функции  $\chi(\phi)$ , случай «сильного напряжения»

## 4.1 О сходимости решения разностной задачи

Если разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу и к тому же обладает устойчивостью при заданной связи  $\tau = \tau(h)$ , то решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной при  $h \rightarrow 0$ . Расшифруем перечисленные понятия более формально.

Далее кратко изложены базовые элементы теории сходимости линейных разностных схем, приближающих линейные дифференциальные задачи. За основу взят материал из книги [17, глава 10]; более подробно тема освещена в книге [18, глава IX]. Соответствующие определения и утверждения можно сформулировать и для нелинейных задач [18], однако удобнее будет в ходе нестрогого анализа применить линейную теорию к линеаризации уравнения (22), а затем подтвердить результаты моделированием полного, нелинейного случая.

Пусть замкнутая область  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^s$  – пространство независимых переменных,  $\Gamma = \partial\Omega$  – граница  $\bar{\Omega}$ ,  $\text{Int } \Omega = \bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$  – внутренность  $\bar{\Omega}$ ; задан класс  $Y$  функций  $y(\mathbf{x})$  на  $\bar{\Omega}$  (обладающих некоторыми содержательными свойствами, например, гладкостью).

Задан линейный оператор  $L : Y \rightarrow I$ , где  $I$  – некоторое пространство функций на  $\text{Int } \Omega$ ; задан линейный оператор  $l : Y \rightarrow G$ , где  $G$  – некоторое пространство функций на  $\partial\Omega$ . Подразумевается, что  $L$  и  $l$  включают в себя операции дифференцирования. Сформулируем дифференциальную задачу:

$$\{ \quad Ly = f; \quad ly = g \quad \}, \quad (25)$$

где  $y(\mathbf{x}) \in Y$  – искомая функция,  $f \in I$ ,  $g \in G$ . Первое уравнение имеет смысл условия на  $y$  во внутреннейности  $\bar{\Omega}$ , второе – краевого условия.

В пространстве  $\bar{\Omega}$  введем сетку, то есть определим некоторое конечное подмножество  $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$ . Здесь  $h$  – параметр, имеющий смысл мелкости шага сетки, – то есть, строго говоря, определено семейство сеток. Функцию  $y \in Y$  можно ограничить на  $\Omega_h$  – введем обозначение  $[y]_h = y|_{\Omega_h}$ . Пусть  $Y_h = \{[y]_h : y \in Y\}$ ,  $I_h = \{[f]_h : f \in I\}$ ,  $G_h = \{[g]_h : g \in G\}$ . Некоторые  $L_h : Y_h \rightarrow I_h$  и  $l_h : Y_h \rightarrow G_h$  будем называть разностными операторами; пусть  $L$  и  $l$  линейные. Теперь можно сформулировать разностную задачу (строго говоря, семейство задач):

$$\{ \quad L_h y_h = f_h; \quad l_h y_h = g_h \quad \}. \quad (26)$$

$y_h \in Y_h$  – искомая сеточная функция,  $f_h \in I_h$ ,  $g_h \in G_h$ . Подразумевается, что разностная задача является *определенной* системой линейных уравнений (решение существует и единственно).

Пусть на пространствах  $Y$ ,  $I$ ,  $G$  определены некоторые нормы  $\|\cdot\|_Y$ ,  $\|\cdot\|_I$ ,  $\|\cdot\|_G$  соответственно. Пусть на пространстве  $Y_h$  определена норма  $\|\cdot\|_{Y_h}$ ,

такая что  $\forall y \in Y \quad \| [y]_h \|_{Y_h} \rightarrow \| y \|_Y$  при  $h \rightarrow 0$ . В этом случае нормы  $\| \cdot \|_Y$  и  $\| \cdot \|_{Y_h}$  назовем *согласованными*. Пусть аналогично  $\| \cdot \|_{I_h}$  и  $\| \cdot \|_{G_h}$  – нормы на  $I_h$  и  $G_h$ , согласованные с  $\| \cdot \|_I$  и  $\| \cdot \|_G$  соответственно.

Теперь можно формально определить аппроксимацию, устойчивость и сходимость.

Разностная задача (26) *аппроксимирует* дифференциальную задачу (25), если

$$\begin{aligned} \forall y \in Y \quad & \| [Ly]_h - L_h[y]_h \|_{I_h} + \| [f]_h - f_h \|_{I_h} + \\ & + \| [ly]_h - l_h[y]_h \|_{G_h} + \| [g]_h - g_h \| = \mathcal{O}(h^k) \text{ при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Порядок  $k$  стремления выражения к 0 называют порядком аппроксимации.

Решение  $y_h$  разностной задачи (26) *сходится* к решению  $y$  дифференциальной задачи (25), если

$$\| [y]_h - y_h \|_{Y_h} = \mathcal{O}(h^k) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Порядок  $k$  стремления выражения к 0 называют порядком сходимости.

Разностная задача (26) *устойчива*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall h \quad \forall z_h \in Y_h \quad \| z_h \|_{Y_h} \leq M \cdot (\| L_h z_h \|_{I_h} + \| l_h z_h \|_{G_h}).$$

Далее в несколько упрощенном виде, достаточном для дальнейшего применения, приведем центральное утверждение рассматриваемой теории.

**Теорема 1** (Филиппова). *Пусть разностная задача (26) аппроксимирует дифференциальную задачу (25), а также разностная задача устойчива. Тогда решение  $y_h$  разностной задачи сходится к решению  $y$  дифференциальной задачи, причем с порядком не меньше, чем порядок аппроксимации.*

В исследуемом уравнении (8) оператор в левой части имеет следующий вид:

$$R\phi = \frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \left( \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) \right).$$

Оператор  $R$  нелинеен: нелинейная функция одного аргумента  $\phi$  входит в него как слагаемое. Это же верно и для аппроксимирующего его разностного оператора  $R_h$  из уравнения (22). Подобные уравнения иногда называют квазилинейными.

Разностную схему с оператором  $R_h$  будем исследовать следующим образом: линеаризуем оператор при фиксированном аргументе  $\phi$ , а затем применим к нему так называемый спектральный признак устойчивости [17]. При выполнении признака у схемы следует ожидать устойчивость (в «разумных» нормах, например, равномерной и  $L_2$ -норме), а значит, с учетом аппроксимации в силу теоремы 1 следует ожидать и сходимость. Как будет видно позже, подобный нестрогий анализ на практике принесет результат.

## 4.2 Оценка устойчивости схемы

Получим условие устойчивости по принципу «замороженных коэффициентов» (см., например, [17]). Пусть  $\phi_j^k$  и  $\phi_j^k + \delta_j^k$  – решения разностного уравнения (22). Подставим в него  $\phi_j^k + \delta_j^k$ , получим

$$\frac{1}{m} \frac{(\phi_j^{k+1} + \delta_j^{k+1}) - (\phi_j^k + \delta_j^k)}{\tau} = \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 [\epsilon'(\phi_j^k) + \epsilon''(\phi_j^k) \delta_j^k + o(\delta_j^k)] + \\ + \frac{\Gamma}{l^2} [f'(\phi_j^k) + f''(\phi_j^k) \delta_j^k + o(\delta_j^k)] + \frac{\Gamma(\phi_{j+1}^k + \delta_{j+1}^k) - 2(\phi_j^k + \delta_j^k) + (\phi_{j-1}^k + \delta_{j-1}^k)}{h^2}.$$

Линеаризуем уравнение по возмущению  $\delta_j^k$  в точке  $\phi_j^k = P$  и сократим слагаемые, учитывая, что  $\phi_j^k$  есть решение разностной задачи:

$$\delta_j^{k+1} = \delta_j^k + m\tau \left( \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon''(P) \delta_j^k + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) \delta_j^k + \frac{\Gamma \delta_{j+1}^k - 2\delta_j^k + \delta_{j-1}^k}{h^2} \right). \quad (27)$$

Применим спектральный признак устойчивости. Пусть  $\delta_j^k = \lambda(\theta)^k \cdot \exp(ij\theta)$ ,  $i^2 = -1$ ; подставим в уравнение (27) выражение для  $\delta_j^k$  и, сократив на  $\lambda(\theta)^k \exp(ij\theta)$ , получим

$$\lambda(\theta) = 1 + m\tau \left( \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) + \frac{\Gamma \exp(i\theta) - 2 + \exp(-i\theta)}{h^2} \right),$$

или

$$\lambda(\theta) = 1 + m\tau \left( \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) - \frac{2\Gamma}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (28)$$

Согласно спектральному признаку связь  $\tau = \tau(h)$  дает устойчивые вычисления в области  $[0, W]_x \times [0, T]_t$  при  $\tau, h \rightarrow 0$ , если существует  $C > 0$ , такое что для любого  $\theta$  выполнено  $|\lambda(\theta)| \leq e^{C\tau}$ . Заметим, что можно использовать условие  $|\lambda(\theta)| \leq 1 + C\tau$ , как более сильное. Если же для любого  $\theta$  выполнено  $|\lambda(\theta)| \leq 1$ , то устойчивыми будут вычисления в области  $[0, W]_x \times [0, +\infty)_t$  с бесконечным временным интервалом. Строго говоря, условие спектрального признака не является достаточным для устойчивости разностной схемы, однако на практике устойчивость следует ожидать.

Для начала рассмотрим выражение (28) в точке  $P = 0$ . Имеем  $f''(0) = 0$ ,  $\epsilon''(0) = 0$ . Уравнение (28) принимает вид

$$\lambda(\theta) = 1 - \frac{2\tau m \Gamma}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Значит, для любого  $\theta$  выполнено  $|\lambda(\theta)| \leq 1$ , если и только если

$$\tau \leq \frac{h^2}{m\Gamma}. \quad (29)$$



При выполнении условия (29) следует ожидать устойчивый расчет при полностью разрушенной или близкой к таковой среде ( $\phi \approx 0$ ) в области  $[0, W]_x \times [0, +\infty)_t$  с бесконечным временным интервалом.

Заметим, что при условии (29) к тому же ожидается устойчивый расчет на множестве  $[0, W]_x \times [0, T]_t$  в любой точке  $P \in [0, 1]$ , так как справедливо неравенство

$$|\lambda(\theta)| \leq \left| 1 - \frac{2\tau m\Gamma}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right| + m\tau \left| \frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) \right| \leq 1 + m\tau \left| \frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) \right|.$$

Значит, для некоторого  $C$  верно  $|\lambda(\theta)| \leq 1 + C\tau$ , так как  $\epsilon''(\phi)$  и  $f''(\phi)$  — непрерывные на отрезке  $[0, 1]$  функции. Следует отметить, что, несмотря на подобную универсальность, оценка (29) плохо применима на практике и нуждается в уточнении, которое будет сделано позже.

Теперь рассмотрим выражение (28) в точке  $P = 1$ . Имеем  $f''(1) < 0$ ,  $\epsilon''(1) > 0$ . Заметим, что при  $(K_\Phi^2/2)\epsilon''(1) + (\Gamma/l^2)f''(1) \leq 0$  можно добиться  $|\lambda(\theta)| \leq 1$ , потребовав, подобно условию (29),  $\tau \leq h^2/(2m\Gamma)$  и притом достаточно малое  $\tau$ . Если подставить в упомянутое неравенство значения  $f''(1) = -12$ ,  $\epsilon''(1) = 12\epsilon_0/(1+\delta)^2$  (см. выражение (12)), то оно преобразуется в

$$\frac{K_\Phi^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma(1+\delta)^2} \leq 1. \quad (30)$$

Итак, при условии (30) ожидается существование таких  $\tau$  и  $h$ , что расчет устойчив при  $\phi \approx 1$  на множестве с бесконечным временным интервалом. Закономерно, что условие (30) эквивалентно (с точностью до строгости) условию (19) устойчивости положения равновесия  $\phi \equiv 1$  уравнения (8).

### 4.3 Улучшенная оценка устойчивости схемы

В предыдущем разделе из анализа уравнения (28) было получено условие (29) устойчивости разностной схемы (23), (24) при  $\phi \approx 0$ . Предположение о его полезности основано на том, что типичным поведением модели будет некоторый процесс перехода  $\phi$  от 1 к 0 («разрушение») за конечное время, а затем бесконечно долгое пребывание в состоянии  $\phi \approx 0$ .

Однако проделанного анализа уравнения (28) в точке  $\phi = 0$  недостаточно. В самом деле, было использовано, что  $\epsilon''(0) = 0$  (см. выражение (12)), но не учтено, что  $\epsilon''(\phi)$  при малых  $\delta$  вблизи 0 растет очень быстро и достигает больших значений (рис. 4). Получается, что модель, устойчивая в точке 0,

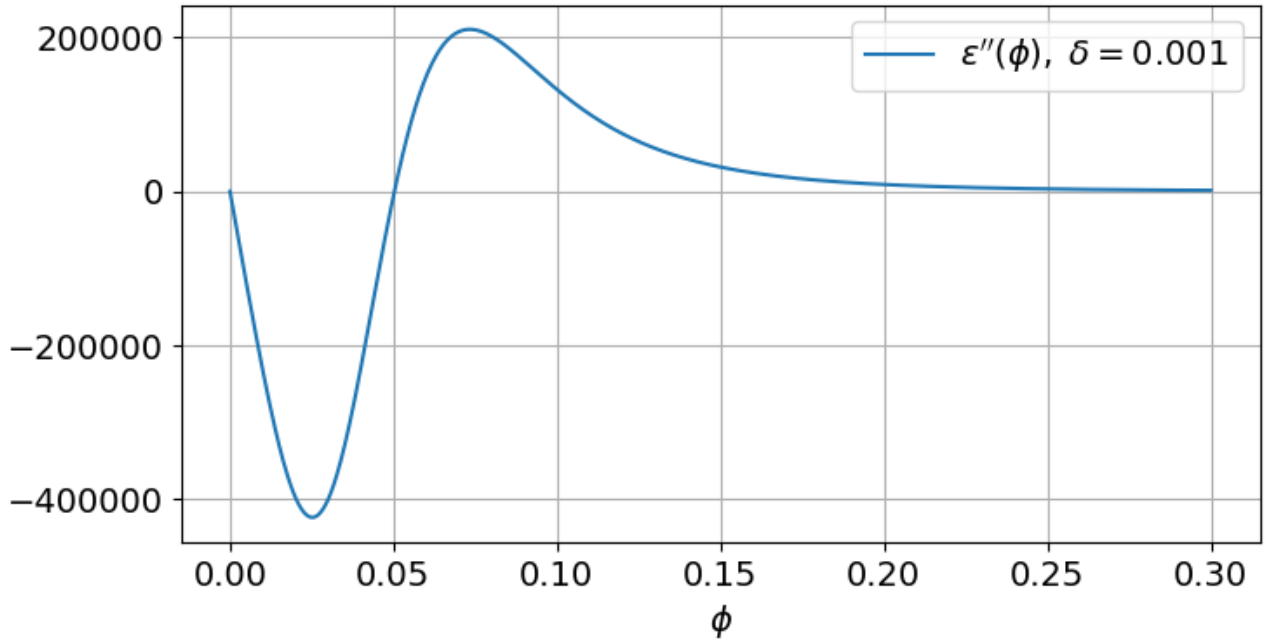


Рис. 4. Поведение функции  $\epsilon''(\phi)$  около 0

может работать неадекватно в малой ее окрестности. Это нас, конечно, не устраивает – улучшим оценку устойчивости.

Нужно оценить экстремумы функции  $\epsilon''(\phi)$  вблизи 0. Для начала найдем нули  $\epsilon'''(\phi)$ . Имеем

$$f'''(\phi) = 24 - 72\phi; \quad \epsilon'''_{fff} = \frac{-6\epsilon_0}{(f(\phi) + \delta)^4};$$

$$\begin{aligned} \epsilon''' &= \epsilon'''_{fff} \cdot (f')^3 + 3\epsilon''_{ff} \cdot f' \cdot f'' + \epsilon'_f \cdot f''' = \\ &= \epsilon_0 \frac{-6(f')^3 + 6(f + \delta)f'f'' - (f + \delta)^2 f'''}{(f + \delta)^4}. \end{aligned}$$

Приравняв  $\epsilon'''$  к 0, получим

$$-6(f')^3 + 6(f + \delta)f'f'' - (f + \delta)^2 f''' = 0,$$

или

$$\begin{aligned} -6(12\phi^2(1 - \phi))^3 + 6(4\phi^3 - 3\phi^4 + \delta) \cdot 12\phi^2(1 - \phi) \cdot 12\phi(2 - 3\phi) - \\ - (4\phi^3 - 3\phi^4 + \delta)^2 \cdot 24(1 - 3\phi) = 0. \end{aligned}$$

Разделим последнее уравнение на  $24\phi^6$ , получим

$$-3 \cdot 12^2 (1 - \phi)^3 + 36 \left( 4 - 3\phi + \frac{\delta}{\phi^3} \right) (1 - \phi)(2 - 3\phi) - \left( 4 - 3\phi + \frac{\delta}{\phi^3} \right)^2 (1 - 3\phi) = 0.$$

Пусть  $\delta_n \rightarrow +0$  и корень  $\phi_n \rightarrow +0$ , причем  $\delta_n/\phi_n^3$  ограничено. Тогда

$$\begin{aligned} -3 \cdot 12^2 \cdot 1^3 + 36 \left(4 + \frac{\delta_n}{\phi_n^3}\right) \cdot 1 \cdot 2 - \left(4 + \frac{\delta_n}{\phi_n^3}\right)^2 \cdot 1 &\rightarrow 0, \\ \left(4 + \frac{\delta_n}{\phi_n^3}\right)^2 - 72 \left(4 + \frac{\delta_n}{\phi_n^3}\right) + 3 \cdot 12^2 &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Значит, последовательность  $4 + \delta_n/\phi_n^3$  имеет не более двух частичных пределов  $\xi_+$  и  $\xi_-$  – корней уравнения  $\xi^2 - 72\xi + 432 = 0$ . Первому корню  $\xi_+ = 36 + 12\sqrt{6}$  соответствует

$$\phi_+ = \frac{1}{\sqrt[3]{32 + 12\sqrt{6}}} \sqrt[3]{\delta_n} \approx \frac{1}{3.945} \sqrt[3]{\delta_n};$$

второму корню  $\xi_- = 36 - 12\sqrt{6}$  соответствует

$$\phi_- = \frac{1}{\sqrt[3]{32 - 12\sqrt{6}}} \sqrt[3]{\delta_n} \approx \frac{1}{1.376} \sqrt[3]{\delta_n}.$$

Из проделанного рассуждения следует, что при  $\delta \rightarrow +0$  функция  $\epsilon'''(\phi)$  имеет в окрестности 0 два корня

$$\phi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt[3]{32 \pm 12\sqrt{6}}} \sqrt[3]{\delta} [1 + o(1)].$$

Оценим  $\epsilon''(\phi)$  в точках  $\phi_{\pm}$  при  $\delta \rightarrow +0$ . Пусть  $\phi = (1/c)\sqrt[3]{\delta}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon''}{\epsilon_0} &= \frac{2(f')^2 - (f + \delta)f''}{(f + \delta)^3} = \frac{2 \cdot 12^2 \phi^4 (1 - \phi)^2 - (4\phi^3 - 3\phi^4 + \delta) \cdot 12\phi(2 - 3\phi)}{(4\phi^3 - 3\phi^4 + \delta)^3} = \\ &= \frac{2 \cdot 12^2 - 8 \cdot 12 - 24(\delta/\phi^3)}{(4 + \delta/\phi^3)^3} \cdot \frac{1}{\phi^5} [1 + o(1)] = \frac{24c^5(8 - c^3)}{(4 + c^3)^3} \delta^{-5/3} [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\epsilon''(\phi_+) \approx -4.378\epsilon_0\delta^{-5/3}; \quad \epsilon''(\phi_-) \approx 2.216\epsilon_0\delta^{-5/3}.$$

Оценки экстремумов  $\epsilon''(\phi)$  вблизи 0 показаны на рис. 5.

Получим новую оценку устойчивости, рассмотрев уравнение (28) в точке  $\phi = \phi_+$ .  $\epsilon''(\phi_+) \approx -4.4\epsilon_0\delta^{-5/3}$ . Сумма в скобках отрицательна ( $\delta$  мало,  $\epsilon''(\phi_+)$  велико по модулю и отрицательно), поэтому  $f''(\phi_+) > 0$  можно считать равным 0: оценку это только усилит. Преобразовав уравнение (28), получим

$$\lambda(\theta) = 1 + m\tau \left( -\frac{2.2K_{\Phi}^2\epsilon_0}{\delta^{5/3}} - \frac{2\Gamma}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

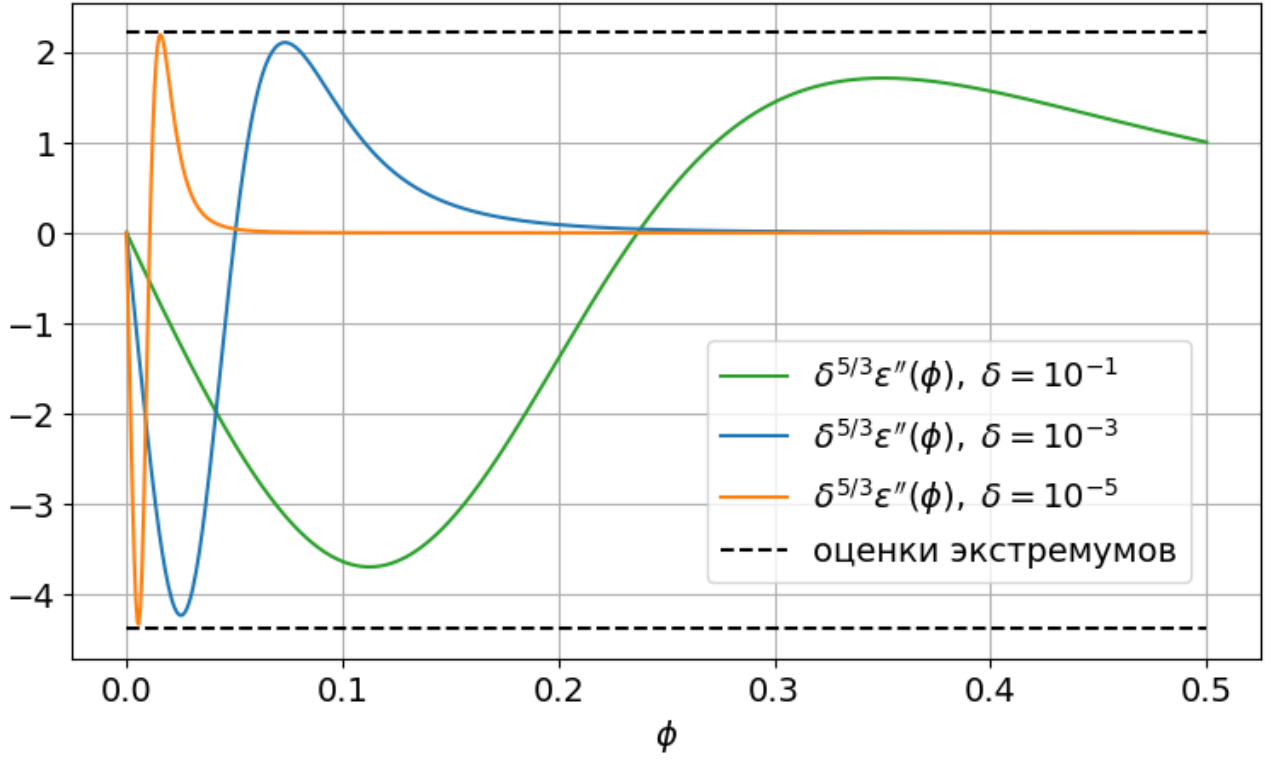


Рис. 5. Сравнение функций  $\delta^{5/3}\epsilon''(\phi)$  при различных значениях  $\delta$

Условие  $|\lambda(\theta)| \leq 1$  справедливо для любого  $\theta$ , если и только если

$$\tau \leq \frac{1}{m} \left( \frac{1.1K_{\Phi}^2\epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}. \quad (31)$$

Для применения на практике оценку (31) нужно брать «с запасом» (экспериментальное обоснование будет дано позже). Сделаем оценку строже, примерно удвоив знаменатель:

$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left( \frac{K_{\Phi}^2\epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}. \quad (32)$$

Более простая оценка не слабее оценки (32) выглядит следующим образом:

$$\tau \leq \frac{1}{4m} \min \left( \frac{\delta^{5/3}}{K_{\Phi}^2\epsilon_0}, \frac{h^2}{\Gamma} \right).$$

Полученная оценка (32) устойчивости разностной схемы (23), (24) содержит все параметры уравнения (8), кроме  $l$ .

## 5 Численное исследование

Была написана программа, реализующая разностную схему (23), (24). С помощью моделирования проверим полученные ранее теоретические результаты, а именно: устойчивость и сходимость схемы при выполнении условия устойчивости (32), а также свойства положений равновесия системы, описанные в разделе 3. Помимо этого, проверим поведение полной свободной энергии системы при моделировании.

### 5.1 Вычислительный эксперимент: устойчивость

Зафиксируем параметры уравнения (8):

$$\epsilon_0 = 0.2, \delta = 0.04, l = 1.0, \Gamma = 1.0, m = 0.5, K_\Phi = 4.8. \quad (33)$$

Перед нами случай «сильного напряжения» (см. выражение (21)).

Моделируем решение в области

$$\bar{\Omega} = [0, W]_x \times [0, T]_t, \quad W = 5, \quad T = 1. \quad (34)$$

Зададим следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \phi(0, t) &= 1, \quad \phi(W, t) = 1, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 2.25 \text{ или } x \geq 2.75; \\ 1 - 0.025 \cdot [1 + \cos(4\pi x)], & \text{если } 2.25 < x < 2.75. \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Обратим внимание, что  $\phi_0(x)$  дважды дифференцируема всюду, кроме конечного числа точек, с ограниченной второй производной.

Обозначим  $N_x$  число отрезков разбиения  $[0, W]_x$  (узлов, соответственно,  $N_x + 1$ );  $N_t$  – число отрезков разбиения  $[0, T]_t$ .  $h = W/N_x$ ,  $\tau = T/N_t$ .

Для начала посмотрим на типичное решение исследуемой задачи (рис. 6). Видно постепенное развитие канала электрического пробоя (разрушение среды) из небольшого начального возмущения фазового поля  $\phi$  неповрежденной среды. Примерно в момент времени  $t = 0.55$  канал пробоя «прорастает насквозь», а именно:  $\phi$  вблизи точки  $x = 2.5$  приближается к нулевому значению. Обратим внимание, что в период времени  $t \in (0.3, 0.55)$  канал пробоя (область, где  $\phi$  существенно отличается от 1) практически не растет в ширину, а при  $t > 0.55$ , напротив, растет в ширину почти с постоянной скоростью.

Проверим полученную в предыдущем разделе оценку (32) устойчивости разностной схемы. Будем считать, что в вычислительном эксперименте схема неустойчива, если программа завершилась с ошибкой: произошло деление на 0 (в формуле (1) функции  $\epsilon(\phi)$  при  $f(\phi) = -\delta$ ) или значения  $\phi$  ушли

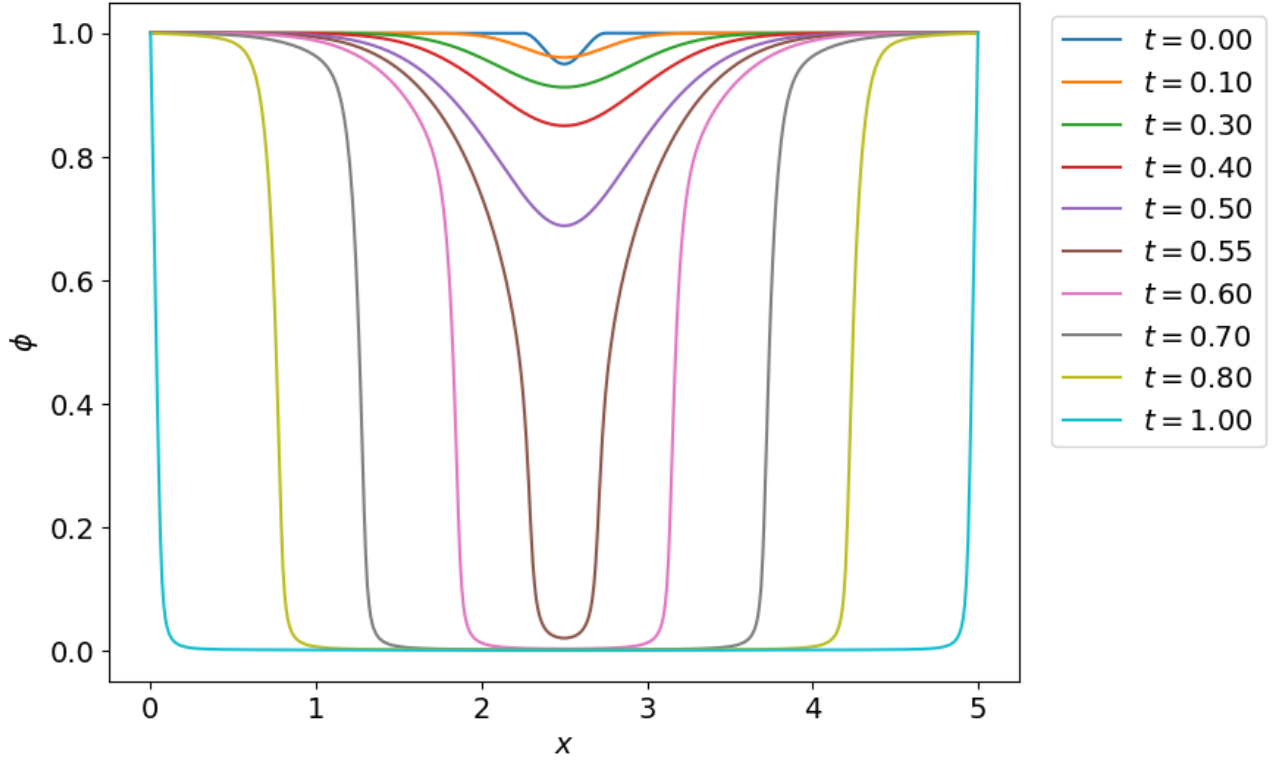


Рис. 6. Типичное решение задачи,  $N_x = 10^3$ ,  $N_t = 10^5$

на бесконечность (переполнился тип double). Будем перебирать  $N_x$  и  $N_t$ , запоминая пары соседних точек, в одной из которых устойчивость есть, а в другой нет. Так получим опытную оценку устойчивости схемы. Отобразим ее на графике вместе с оценкой (32) (рис. 7).

Эксперимент показывает, что оценка (32) удачна: она примерно повторяет контур опытной оценки, к тому же ее график лежит выше, то есть она имеет некоторый «запас» до момента, когда в программе возникает ошибка. Именно ради этого «запаса» знаменатель исходной оценки (31) был удвоен.

## 5.2 Вычислительный эксперимент: сходимость

Аппроксимация разностной схемой (23), (24) дифференциальной задачи (8), (9), (10) очевидна; для устойчивости схемы в ходе нестрогого анализа получено условие (32), применимое на практике. Теперь экспериментально проверим сходимость.

На множестве  $C_2(\overline{\Omega})$  дважды непрерывно дифференцируемых функций в замкнутой области  $\overline{\Omega} = [0, W]_x \times [0, T]_t$  рассмотрим следующие нормы: равномерную  $\|\cdot\|_C$  и  $L_2$ -норму  $\|\cdot\|_2$ .

$$\|f\|_C = \max_{(x,t) \in \overline{\Omega}} |f(x,t)|; \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\overline{\Omega}} f^2(x,t) dx dt}.$$

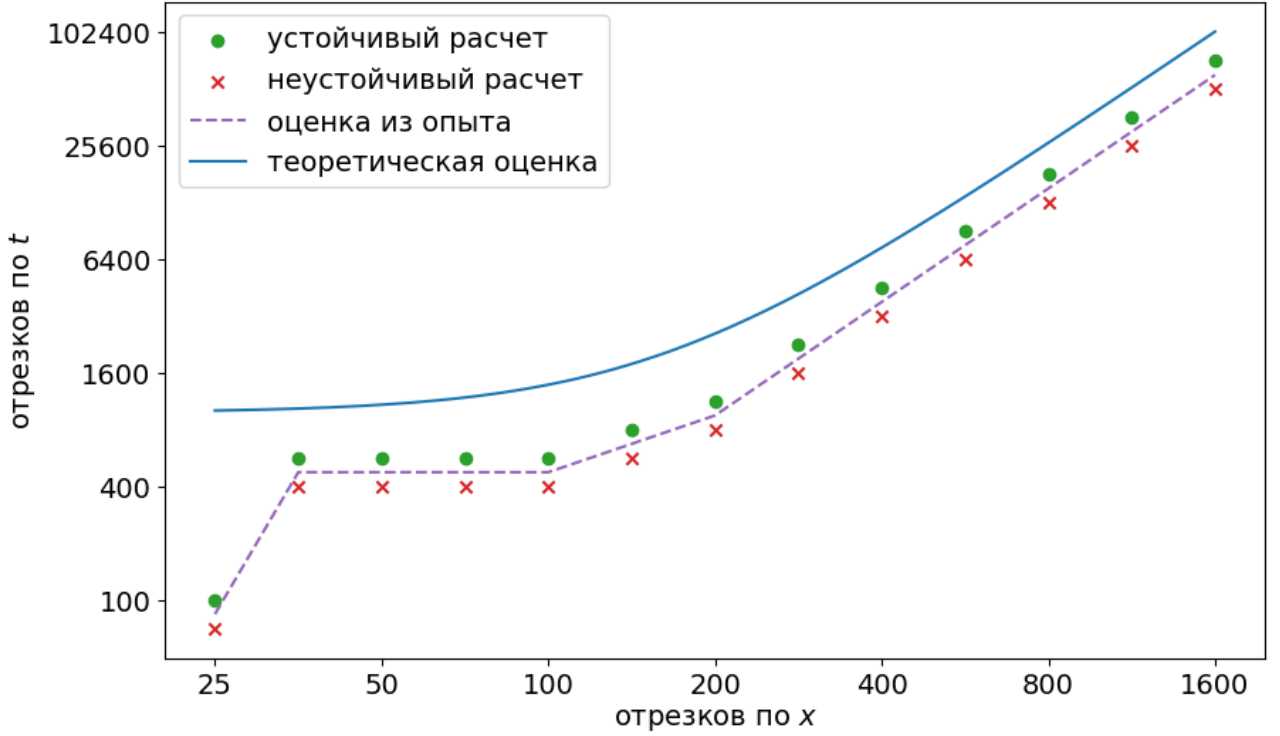


Рис. 7. Теоретическая и опытная оценки устойчивости разностной схемы

Теперь рассмотрим регулярную сетку  $\Omega_{h,\tau} \subset \bar{\Omega}$  с некоторой зависимостью  $\tau = \tau(h)$ . Ограничивая функции из  $C_2(\Omega)$  на сетке  $\Omega_h = \Omega_{h,\tau(h)}$ , получаем множество  $C_2(\bar{\Omega})_h$  сеточных функций.

На множестве  $C_2(\bar{\Omega})_h$  сеточных функций введем нормы, согласованные с  $\|\cdot\|_C$  и  $\|\cdot\|_2$ :

$$\|f_j^k\|_C = \max_{(j,k) \in \Omega_h} |f_j^k|; \quad \|f_j^k\|_2 = \sqrt{h\tau \sum_{(j,k) \in \Omega_h} (f_j^k)^2}.$$

Перейдем к вычислительному эксперименту. Сходимость будем проверять по описанным выше нормам  $\|\cdot\|_C$  и  $\|\cdot\|_2$  на множестве сеточных функций. Так как аналитическое решение дифференциальной задачи неизвестно, будем сравнивать ряд результатов на все более мелких сетках по норме с лучшим результатом в ряду. При сравнении функцию на более мелкой сетке ограничиваем на более крупной, игнорируя часть узлов.

Зафиксируем ранее использовавшиеся параметры уравнения (33), (34); зададим краевые условия (35). Положим  $N_x = W/h$  — число отрезков разбиения по  $x$ ,  $N_t = T/\tau$  — по  $t$ .

Во всех описанных далее вариантах расчетов соблюдается условие устойчивости (32).

Для начала зафиксируем  $N_x = 200$  и будем перебирать  $N_t$ , каждый раз увеличивая его вдвое. Сравнение по нормам с результатом при  $N_t = 204800$

изображено на рис. 8. Разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по  $t$ ; опыт показывает первый порядок сходимости  $\mathcal{O}(\tau)$ .

Зафиксируем  $N_t = 204800$  и будем перебирать  $N_x$ , каждый раз увеличивая его вдвое. Сравнение по нормам с результатом при  $N_x = 1600$  изображено на рис. 9. Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации по  $x$ ; опыт показывает второй порядок сходимости  $\mathcal{O}(h^2)$ .

Теперь свяжем  $N_x$  и  $N_t$  уравнением, так чтобы при  $h, \tau \rightarrow 0$  выполнялось условие устойчивости (32). При выбранных параметрах модели подойдет  $N_t = 0.08 \cdot N_x^2$ . Аналогично проведем сравнение ряда измерений по норме с лучшим (рис. 10). Как и ожидалось, измерения показывают сходимость  $\mathcal{O}(\tau + h^2) = \mathcal{O}(\tau)$  первого порядка по времени при выбранном уравнении связи.

В первых двух опытах, без стремления обоих шагов сетки к 0, последовательности сеточных функций имели неясный предел. В третьем же, если принять предположение об устойчивости разностной схемы, сеточные функции сходятся к решению дифференциальной задачи (8), (9), (10).

### 5.3 Вычислительный эксперимент: положения равновесия

Ранее были исследованы положения равновесия уравнения (8) вида  $\phi \equiv C$ . Их количество и устойчивость определяются значением выражения (21) (обозначено  $\xi$ ). Проверим этот результат экспериментально.

Зададим модели параметры (33), (34),  $K_\Phi$  определим позже. В качестве начального условия берем возмущенное положение равновесия:  $\phi(x, 0) = C + A \cos(\omega x)$ ;  $\phi(0, t) = \phi(0, 0)$ ,  $\phi(W, t) = \phi(W, 0)$ . Амплитуда  $A$  мала, порядка 0.01.  $N_x = 800$ ,  $N_t = 51200$ .

Если положение равновесия устойчиво, то при любом  $\omega$  возмущение угасает; если неустойчиво, то существует некоторое  $\omega_0$ , такое что при  $\omega < \omega_0$  возмущение растет.

Положим  $K_{\Phi,1} = 0$ ,  $K_{\Phi,2} = 1.1$ ,  $K_{\Phi,3} = 4.8$ . Было задано  $\delta = 0.04$ . В таком случае  $\xi_1 = 0 < \delta^2$ ,  $\xi_2 = 0.121 \in (\delta^2, (1 + \delta)^2)$ ,  $\xi_3 = 2.304 > (1 + \delta)^2$ .

Вначале рассмотрим  $K_{\Phi,1} = 0$ ,  $\xi_1 < \delta^2$  – случай «слабого напряжения». Система имеет два положения равновесия:  $\phi \equiv 0$  неустойчивое,  $\phi \equiv 1$  устойчивое. На рис. 11, 12 видно теоретически предсказанное поведение возмущенной среды: при  $C = 0$  возмущение растет, при  $C = 1$  – затухает. В точке  $C = 0$  производная функции  $\chi(\phi)$  (см. выражение (20)) равна 0, поэтому, чтобы увидеть рост возмущения, приходится брать небольшое  $\omega$ , обеспечивая небольшое значение  $\partial^2 \phi / \partial x^2$ . В эксперименте с  $\phi \equiv 1$  взято  $C = 1 - A$ , чтобы значения  $\phi$  не превосходили 1.

Теперь рассмотрим  $K_{\Phi,2} = 1.1$ ,  $\xi_2 \in (\delta^2, (1 + \delta)^2)$  – случай «среднего



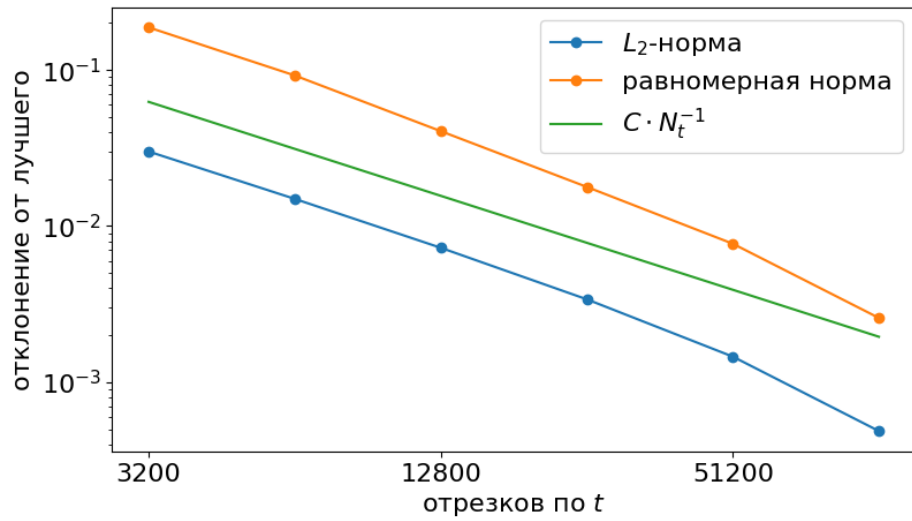


Рис. 8. Ошибка решения по норме при фиксированном  $N_x = 200$

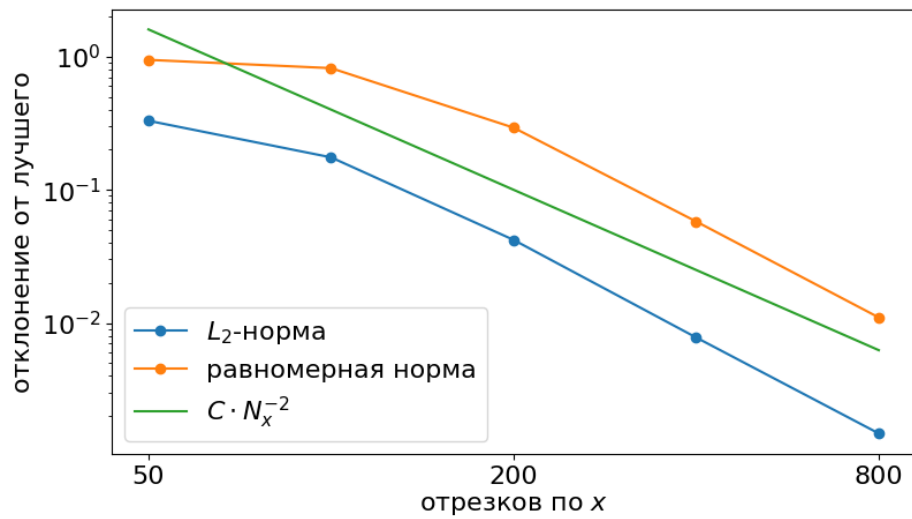


Рис. 9. Ошибка решения по норме при фиксированном  $N_t = 204800$

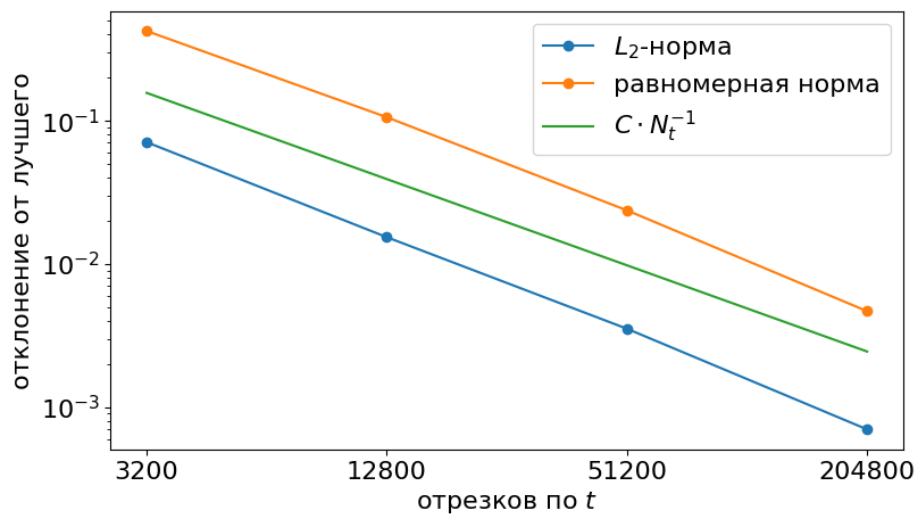


Рис. 10. Ошибка решения по норме при  $N_t = 0.08 \cdot N_x^2$

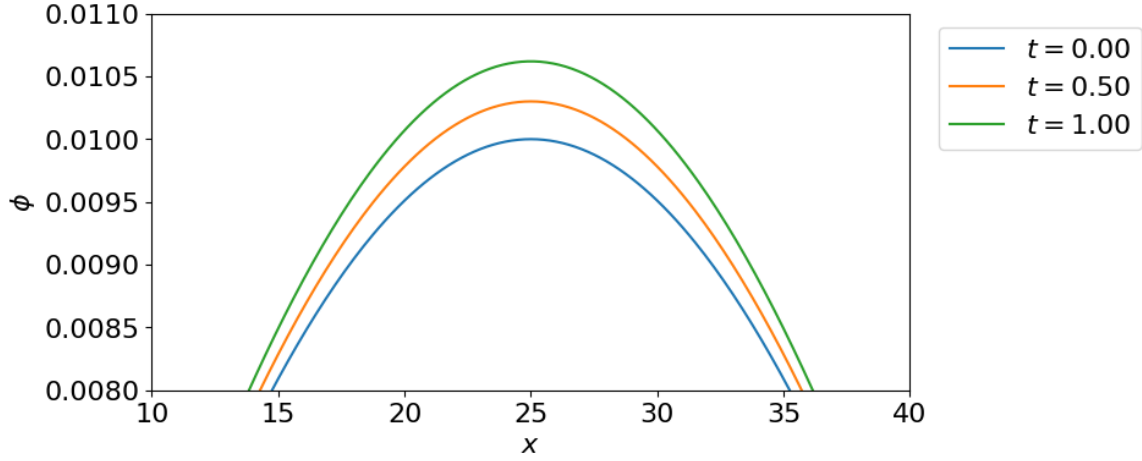


Рис. 11. Случай «слабого напряжения»: возмущенное положение равновесия  $\phi \equiv 0$ , неустойчивое

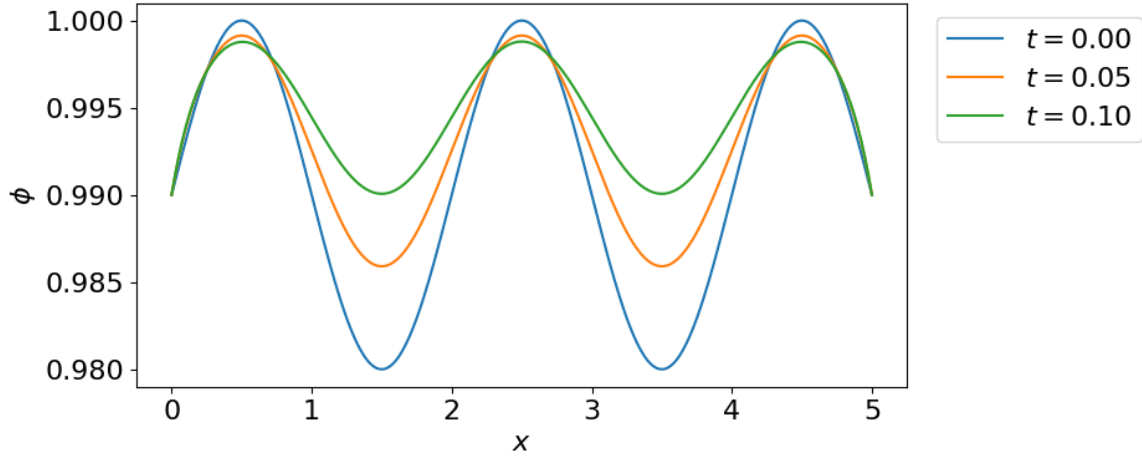


Рис. 12. Случай «слабого напряжения»: возмущенное положение равновесия  $\phi \equiv 1$ , устойчивое

напряжения». Система имеет три положения равновесия:  $\phi \equiv 0$  устойчивое,  $\phi \equiv C_3 \approx 0.5$  неустойчивое ( $C_3$  – корень функции  $\chi(\phi)$  в интервале  $(0, 1)$ ),  $\phi \equiv 1$  устойчивое. Поведение возмущенной среды изображено на рис. 13, 14, 15, оно соответствует теоретическим результатам.

Наконец, рассмотрим  $K_{\Phi,3} = 4.8$ ,  $\xi_3 > (1 + \delta)^2$  – случай «сильного напряжения». Система имеет два положения равновесия:  $\phi \equiv 0$  устойчивое,  $\phi \equiv 1$  неустойчивое. Поведение возмущенной среды изображено на рис. 16, 17, оно также соответствует теории.

## 5.4 Вычислительный эксперимент: свободная энергия

В рассматриваемой модели введена функция свободной энергии (2), заданная интегралом плотности свободной энергии (3) по пространству.

Построим график полной свободной энергии системы от времени. Зада-

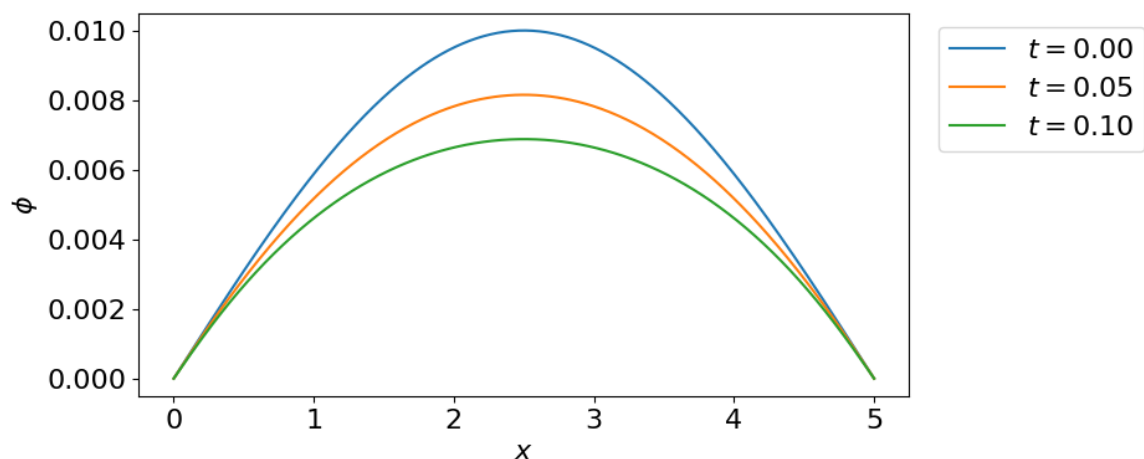


Рис. 13. Случай «среднего напряжения»: возмущенное положение равновесия  $\phi \equiv 0$ , устойчивое

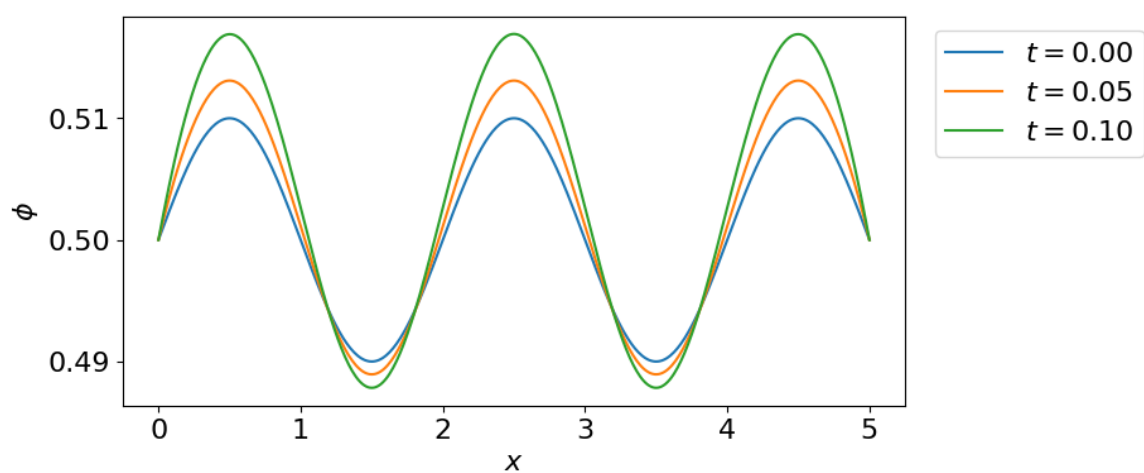


Рис. 14. Случай «среднего напряжения»: возмущенное положение равновесия  $\phi \equiv C_3 \approx 0.5$ , неустойчивое

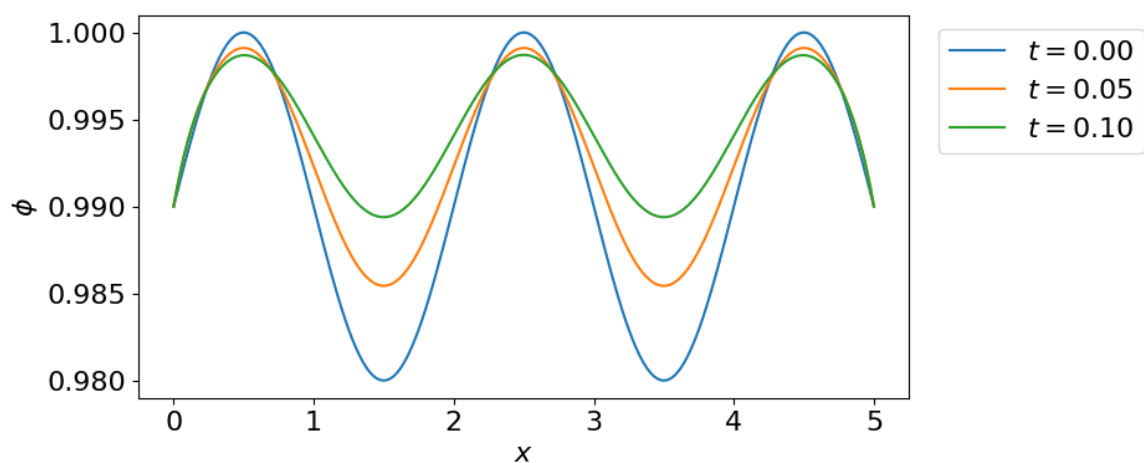


Рис. 15. Случай «среднего напряжения»: возмущенное положение равновесия  $\phi \equiv 1$ , устойчивое

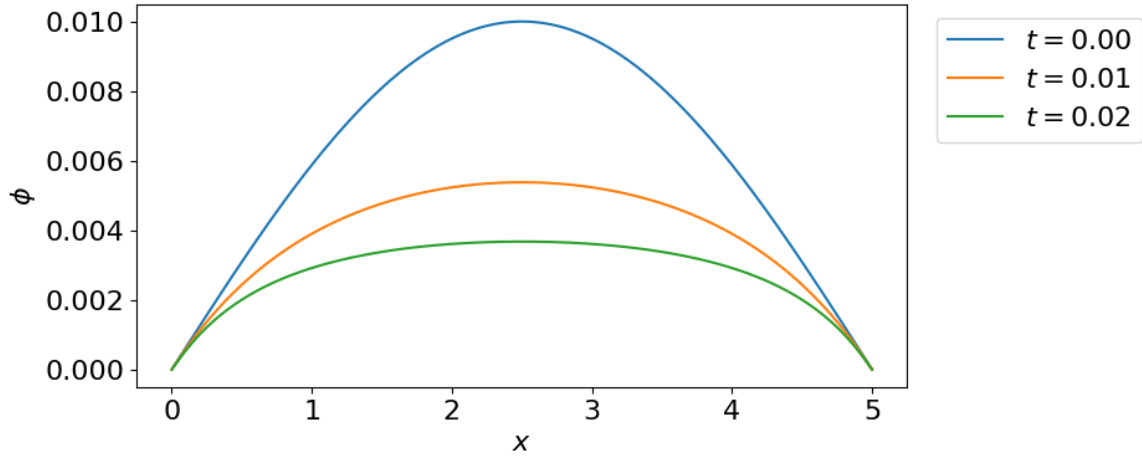


Рис. 16. Случай «сильного напряжения»: возмущенное положение равновесия  $\phi \equiv 0$ , устойчивое

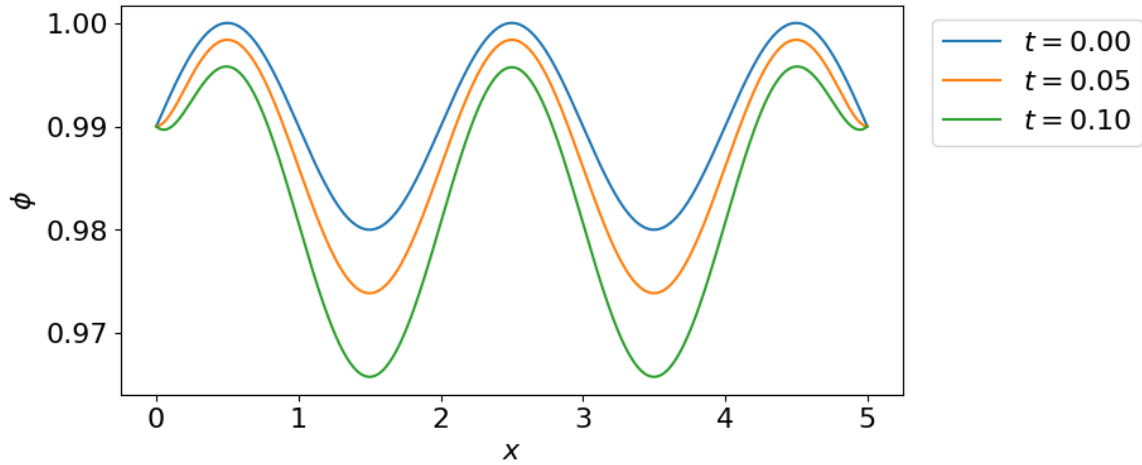


Рис. 17. Случай «сильного напряжения»: возмущенное положение равновесия  $\phi \equiv 1$ , неустойчивое

дим модели параметры (33), (34) и краевые условия (35). Ранее мы уже проводили расчеты в этой конфигурации – графики  $\phi$  изображены на рис. 6.

Единственное существенное дополнение, требующееся использованной ранее схеме (23), (24), – вычисление разностной производной  $\partial_h \phi_i^j / \partial_h x$ . Ограничимся простейшей разностной производной первого порядка, так как искомая величина не влияет на пересчет состояния системы.

Результат вычисления полной свободной энергии  $\Pi$  в зависимости от времени изображен на рис. 18. Для сравнения с рис. 6 пунктирными линиями соответствующих цветов отмечены моменты времени. Интересно, что до момента  $t = 0.5$  энергия  $\Pi$  убывает очень медленно; после, при  $t \approx 0.55$ , резко падает; затем падение замедляется, и после  $t = 0.6$  убывание выравнивается, становясь близким к линейному; так продолжается практически до полного разрушения среды.

Отметим, что вывод системы уравнений (4), (5) динамики системы из

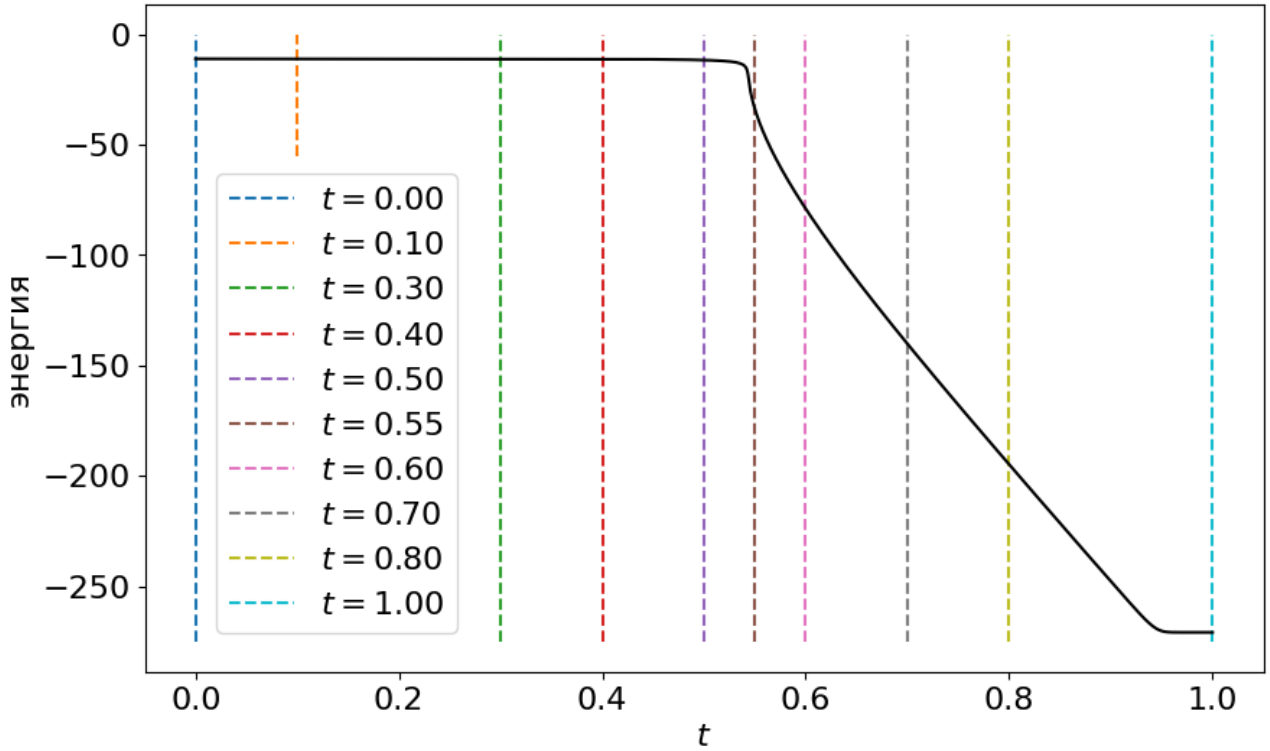


Рис. 18. Поведение полной свободной энергии системы

выражений (2), (3) для свободной энергии означает, что система в ходе эволюции стремится в положение с как можно меньшей свободной энергией. Поэтому для адекватного моделирования системы крайне важно, чтобы полная свободная энергия  $\Pi$  не возрастала. Мы не дали этому теоретического обоснования для используемой разностной схемы, однако проверили на опыте. Другими словами, это означает, что при используемом виде краевых условий и параметрах расчета предложенная схема является градиентно-устойчивой.

## 6 Заключение

Центральный результат настоящей работы – классификация положений равновесия исследуемой модели в зависимости от ее параметров. Свойства положений равновесия системы позволяют сделать выводы о качественных характеристиках модели, в частности об условиях роста канала пробоя из малых возмущений свойств неповрежденной среды.

Помимо этого, достигнуты определенные результаты в исследовании свойств явной разностной схемы для модели. Наибольший интерес, главным образом для практики моделирования, представляет найденное условие устойчивости схемы.

Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают теоретические выводы о свойствах модели и разностной схемы.

## Список литературы

1. Физика диэлектриков (область сильных полей) / Г. А. Воробьев [и др.]. — Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2011.
2. *Pitike K. C., Hong W.* Phase-field model for dielectric breakdown in solids // Journal of Applied Physics. — 2014. — Янв. — Т. 115, № 4. — С. 044101. — DOI: 10.1063/1.4862929. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4862929>.
3. *Lamorgese A. G., Molin D., Mauri R.* Phase Field Approach to Multiphase Flow Modeling // Milan Journal of Mathematics. — 2011. — Дек. — Т. 79, № 2. — С. 597—642. — DOI: 10.1007/s00032-011-0171-6. — URL: <https://doi.org/10.1007/s00032-011-0171-6>.
4. *Kim J.* Phase-Field Models for Multi-Component Fluid Flows // Communications in Computational Physics. — 2012. — Т. 12, № 3. — С. 613—661. — DOI: 10.4208/cicp.301110.040811a.
5. *Xu Z., Meakin P., Tartakovsky A. M.* Diffuse-interface model for smoothed particle hydrodynamics // Physical Review E. — 2009. — Март. — Т. 79, № 3. — DOI: 10.1103/physreve.79.036702. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.79.036702>.
6. *Ambati M., Gerasimov T., De Lorenzis L.* A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation // Computational Mechanics. — 2014. — Дек. — Т. 55. — DOI: 10.1007/s00466-014-1109-y.
7. *Provatas N., Elder K.* Phase-Field Methods in Materials Science and Engineering. — 10.2010. — DOI: 10.1002/9783527631520.
8. Phase-Field Simulation of Solidification / W. Boettinger [и др.] // Annual Review of Materials Research. — 2002. — Авг. — Т. 32. — С. 163—194. — DOI: 10.1146/annurev.matsci.32.101901.155803.
9. Simulations of Phase-field Models for Crystal Growth and Phase Separation / A. Cartalade [и др.] // Procedia Materials Science. — 2014. — Дек. — Т. 7. — С. 72—78. — DOI: 10.1016/j.mspro.2014.10.010.
10. Phase-Field Modeling of Polycrystalline Solidification: From Needle Crystals to Spherulites – A Review / L. Gránásy [и др.] // Metallurgical and Materials Transactions A. — 2014. — Апр. — Т. 45. — С. 1694—1719. — DOI: 10.1007/s11661-013-1988-0.
11. Phase-field-crystal models for condensed matter dynamics on atomic length and diffusive time scales: an overview / H. Emmerich [и др.] // Advances in Physics. — 2012. — Июль. — Т. 61. — С. 665—743. — DOI: 10.1080/00018732.2012.737555.

12. *Asadi E., Asle Zaeem M.* A Review of Quantitative Phase-Field Crystal Modeling of Solid-Liquid Structures // JOM. — 2014. — Дек. — Т. 67. — DOI: 10.1007/s11837-014-1232-4.
13. Using the phase-field crystal method in the multi-scale modeling of microstructure evolution / N. Provatas [и др.] // JOM. — 2007. — Июль. — Т. 59, № 7. — С. 83–90. — DOI: 10.1007/s11837-007-0095-3. — URL: <https://doi.org/10.1007/s11837-007-0095-3>.
14. *Зипунова Е. В., Савенков Е. Б.* О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — Москва, 2020. — № 122. — С. 1–34. — DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-122>. — URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-122>.
15. *Зипунова Е. В., Савенков Е. Б.* Неизотермическая консервативная модель динамики развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы» // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — Москва, 2021. — № 19. — С. 1–34. — DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-19>. — URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-19>.
16. *Зипунова Е. В., Савенков Е. Б.* Феноменологический вывод термомеханической модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы» // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — Москва, 2022. — № 31. — С. 1–36. — DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-31>. — URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-31>.
17. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — 8-е изд. (эл.). — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
18. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи и модель</b>	<b>4</b>
2.1	Математическая модель . . . . .	4
2.2	Одномерная задача . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Теоретическое исследование: анализ положений равновесия</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Разностная схема для одномерной задачи</b>	<b>12</b>
4.1	О сходимости решения разностной задачи . . . . .	14
4.2	Оценка устойчивости схемы . . . . .	16
4.3	Улучшенная оценка устойчивости схемы . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Численное исследование</b>	<b>21</b>
5.1	Вычислительный эксперимент: устойчивость . . . . .	21
5.2	Вычислительный эксперимент: сходимость . . . . .	22
5.3	Вычислительный эксперимент: положения равновесия . . . . .	24
5.4	Вычислительный эксперимент: свободная энергия . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>29</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>30</b>