

# Моделирование электрического пробоя методом диффузной границы

Пономарев А.С.  
под руководством Савенкова Е.Б., Зипуновой Е.В.

группа Б05-029, 4 курс МФТИ

05.03.2024



## Электрический пробой

Явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше критического.

- Рассматриваем твердый диэлектрик
- Деградация диэлектрических свойств материала
- Процесс развивается в ограниченной зоне – канале
- Сложная физическая природа



## Модель типа диффузной границы

Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества приближается гладкой функцией  $\phi(\omega, t)$  – фазовым полем. Динамика процесса – изменение фазового поля.

- $\phi = 1$  – неповрежденная среда
- $\phi = 0$  – полностью разрушенная среда
- Зона  $\phi \in (0, 1)$  – диффузная граница



Модель, предложенная в работе [1]:

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – ограниченная область пространства  
 $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$  – интерполирующая функция

$$\epsilon(\omega, t) = \frac{\epsilon_0(\omega)}{f(\phi(\omega, t)) + \delta}$$

$$\Pi = \int_{\Omega} \pi d\omega$$

$$\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi](\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{\Gamma}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi)$$



## Уравнения модели

Уравнение электрического потенциала  $\Phi$ :

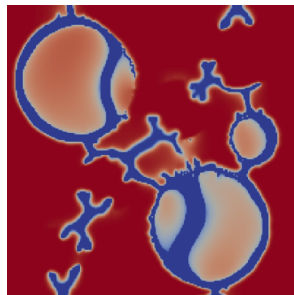
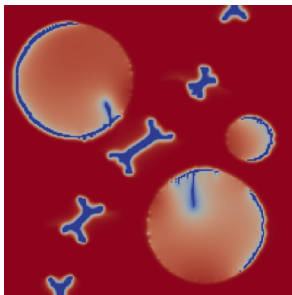
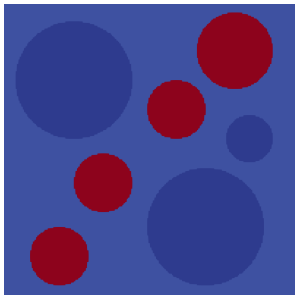
$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0$$

Уравнение фазового поля  $\phi$ :

$$\frac{1}{m}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\epsilon'(\phi)(\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{j^2}f'(\phi) + \frac{1}{2}\Gamma\Delta\phi$$



# Пример вычислительного эксперимента



# Одномерная задача

$$\Omega = [0, w]_x \times [0, h]_y \times l_z$$

$$\Phi|_{y=0} = \Phi^- \in \mathbb{R}, \quad \Phi|_{y=h} = \Phi^+ \in \mathbb{R}$$

Подходит функция электрического потенциала

$$\Phi(\omega, t) = \Phi^- + \frac{y}{h}(\Phi^+ - \Phi^-)$$

Тогда уравнение на  $\phi$  принимает вид

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

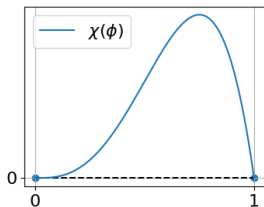
Будем считать  $\epsilon_0 = \text{const.}$



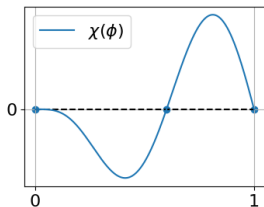
# Анализ положений равновесия

Исследуем положения равновесия вида  $\phi(x, t) \equiv C$ . Положению равновесия соответствует ноль  $C$  функции

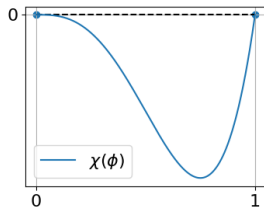
$$\chi(\phi) = \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi)$$



$$0 \leq \frac{K_{\Phi}^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma} < \delta^2$$



$$\delta^2 < \frac{K_{\Phi}^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma} < (1+\delta)^2$$



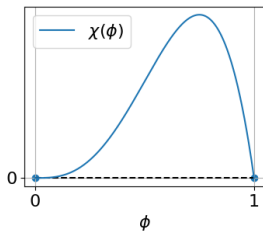
$$(1+\delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma}$$





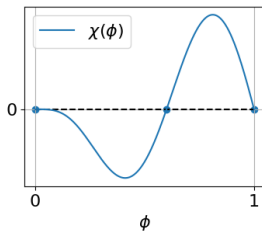
# Анализ положений равновесия

«Слабое»  
напряжение



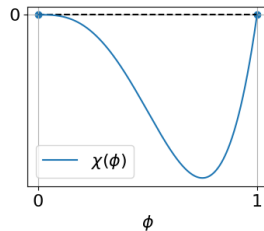
$\phi \equiv 0$  неустойчивое  
 $\phi \equiv 1$  устойчивое

«Среднее»  
напряжение



$\phi \equiv 0$  устойчивое  
 $\phi \equiv C_3$  неустойчивое  
 $\phi \equiv 1$  устойчивое

«Сильное»  
напряжение



$\phi \equiv 0$  устойчивое  
 $\phi \equiv 1$  неустойчивое



## Разностная задача

$$\frac{1}{m} \frac{\phi_a^{b+1} - \phi_a^b}{\tau} = \frac{1}{2} K_\phi^2 \epsilon'(\phi_a^b) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi_a^b) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{a+1}^b - 2\phi_a^b + \phi_{a-1}^b}{h^2}$$

$$\phi_a^0 = \phi_0(ah); \quad \phi_0^b = \phi_l(b\tau); \quad \phi_{w/h}^b = \phi_r(b\tau)$$

Сетка регулярная;  $t$  – шаг по времени,  $h$  – шаг по пространству.

Явная разностная схема первого порядка по времени, второго – по пространству.



Рассмотрим возмущенное решение  $\phi_a^b + \delta_a^b$ . Линеаризуем уравнение на возмущение  $\delta_a^b$  в точке  $\phi_a^b = P$ :

$$\delta_a^{b+1} = \delta_a^b + m\tau \left( \frac{1}{2}K_\Phi^2 \epsilon''(P) \delta_a^b + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) \delta_a^b + \frac{\Gamma}{2} \frac{\delta_{a+1}^b - 2\delta_a^b + \delta_{a-1}^b}{h^2} \right)$$

Применим спектральный признак устойчивости:

$$1 > \lambda(\theta) = 1 + m\tau \left( \frac{1}{2}K_\Phi^2 \epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) - \frac{2\Gamma}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Исследуем вблизи 0.



## Условие устойчивости

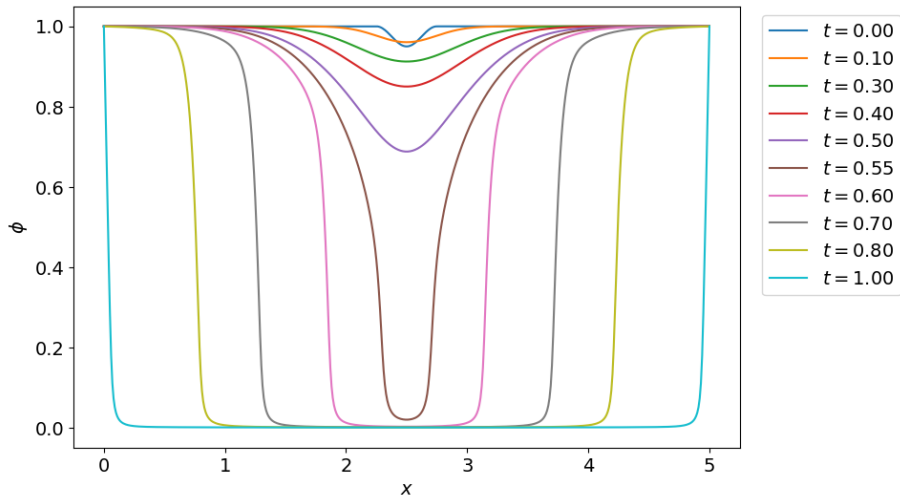
$$\tau \leq \frac{1}{\frac{2.2mK_{\Phi}^2\epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{2m\Gamma}{h^2}}$$

## Упрощенное условие устойчивости

$$\tau \leq \min \left( \frac{\delta^{5/3}}{4.4mK_{\Phi}^2\epsilon_0}, \frac{h^2}{4m\Gamma} \right)$$



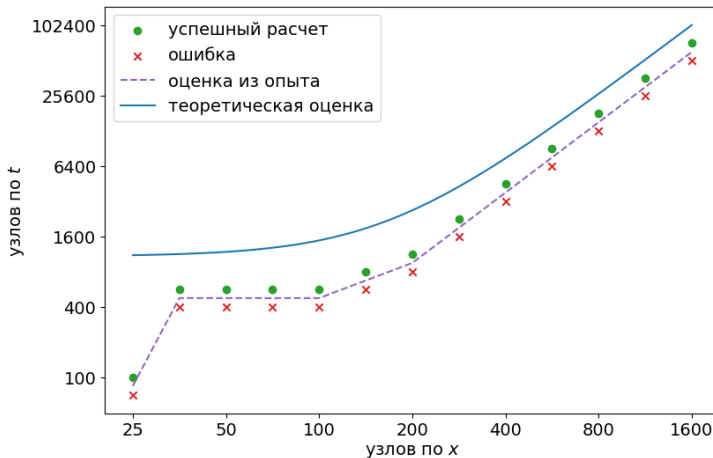
# Вычисления: типичное решение



Узлов по измерениям:  $n_x = 10^3$ ,  $n_t = 10^5$



# Вычисления: проверка устойчивости

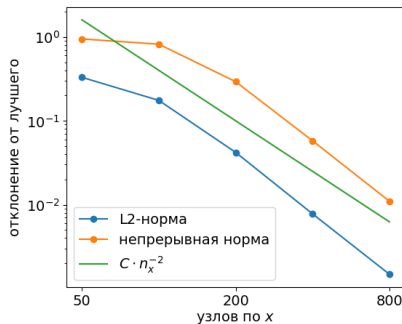
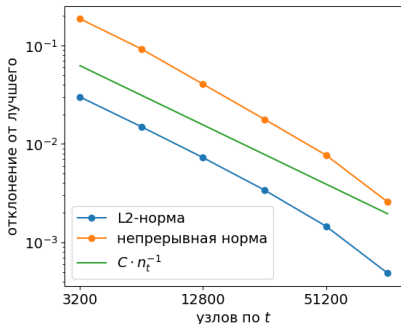


$$\tau \leq \left( \frac{2.2mK_{\Phi}^2\epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{2m\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$

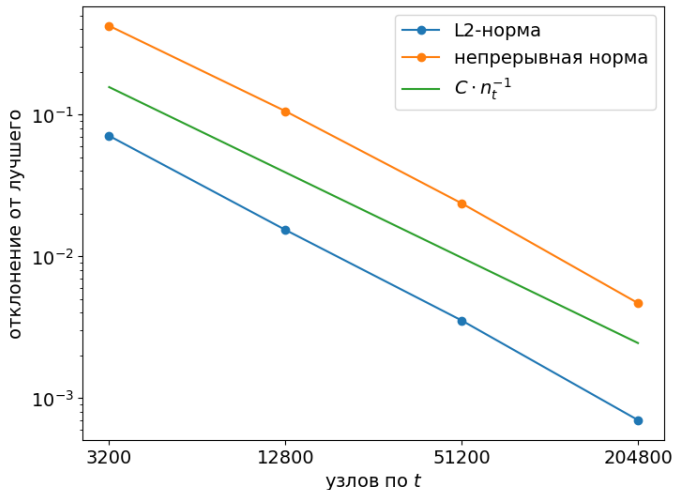


# Вычисления: проверка сходимости

Проводится ряд вычислений, затем результаты сравниваются по норме с лучшим в ряду.



# Вычисления: проверка сходимости



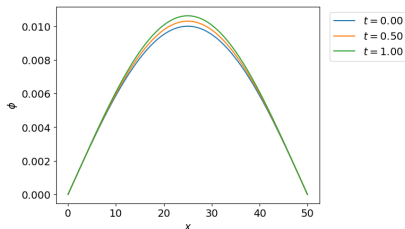
Здесь, согласно оценке устойчивости,  $\tau = \frac{h^2}{4m\Gamma}$ .



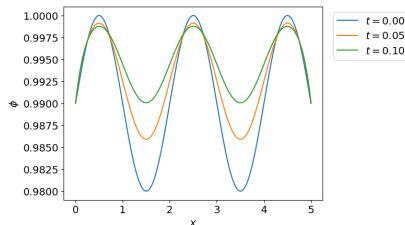


# Вычисления: положения равновесия

$$0 \leq \frac{K_{\Phi}^2 l^2 \epsilon_0}{2\Gamma} < \delta^2 - \text{«слабое» напряжение}$$



$\phi \equiv 0$   
неустойчивое

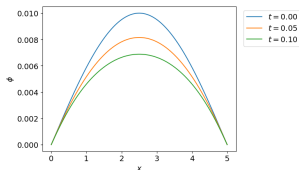


$\phi \equiv 1$   
устойчивое

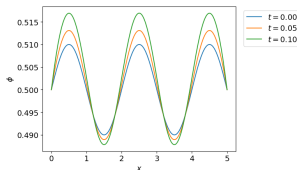


# Вычисления: положения равновесия

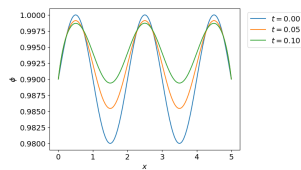
$$\delta^2 < \frac{K_{\Phi}^2 I^2 \epsilon_0}{2\Gamma} < (1 + \delta)^2 - \text{«среднее» напряжение}$$



$\phi \equiv 0$   
устойчивое



$\phi \equiv C_3$   
неустойчивое

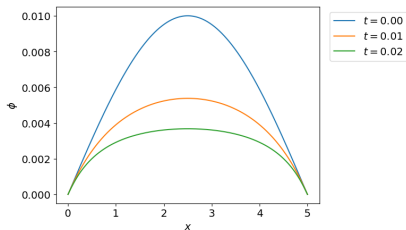


$\phi \equiv 1$   
устойчивое

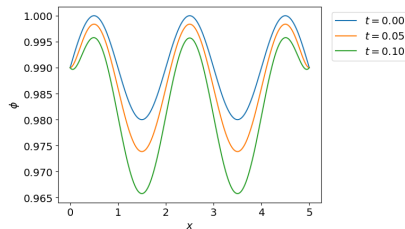


# Вычисления: положения равновесия

$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 I^2 \epsilon_0}{2\Gamma} - \text{«сильное» напряжение}$$



$\phi \equiv 0$   
устойчивое



$\phi \equiv 1$   
неустойчивое



$$\Pi(t) = \int_{\Omega} \pi(x, t) dx$$

$$\pi(x, t) = \pi_1(x, t) + \pi_2(x, t) + \pi_3(x, t)$$

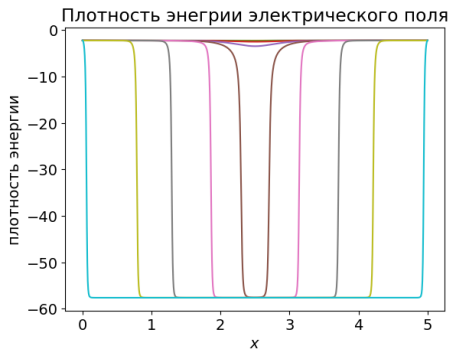
$$\pi_1(x, t) = -\frac{K_{\Phi}^2}{2} \epsilon(\phi(x, t)) - \text{плотность энергии электрического поля};$$

$$\pi_2(x, t) = \Gamma \frac{1 - f(\phi(x, t))}{l^2} - \text{плотность энергии роста пробоя в глубину};$$

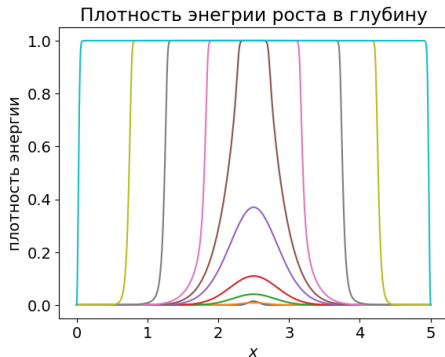
$$\pi_3(x, t) = \frac{\Gamma}{4} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right)^2 - \text{плотность энергии образования граничной зоны пробоя}$$



# Вычисления: свободная энергия



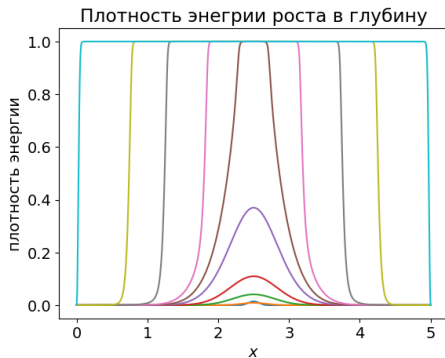
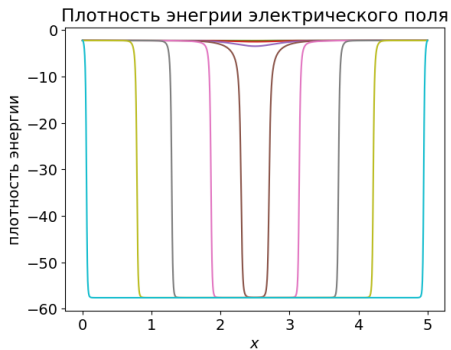
плотность энергии  
электрического поля



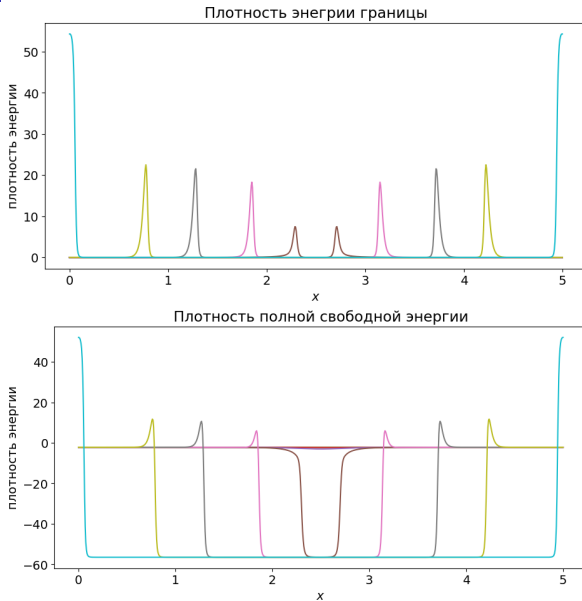
плотность энергии  
роста в глубину



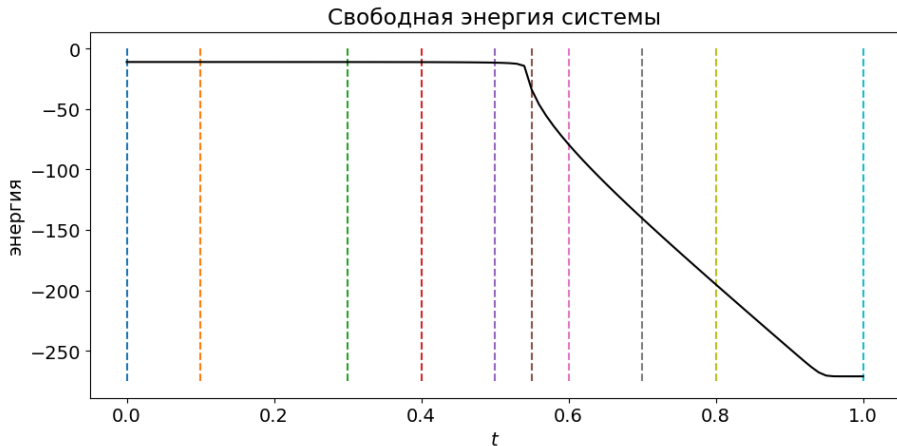
# Вычисления: свободная энергия



# Вычисления: свободная энергия



# Вычисления: свободная энергия







Е.В. Зипунова и Е.Б. Савенков. *О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности.*

Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва, 2020. DOI:

<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-122>. eprint:

[https://keldysh.ru/papers/2020/prep2020\\_122.pdf](https://keldysh.ru/papers/2020/prep2020_122.pdf).

