

Моделирование канала электрического пробоя методом диффузной границы

Пономарев А. С.^{1,2}, Савенков Е. Б.², Зипунова Е. В.²

¹МФТИ (НИУ)

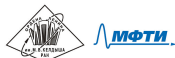
²ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

Вычислительная классическая и многофазная
гидродинамика и термомеханика сплошной среды

4–8 ноября 2024 года



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



Электрический пробой

Явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше критического.

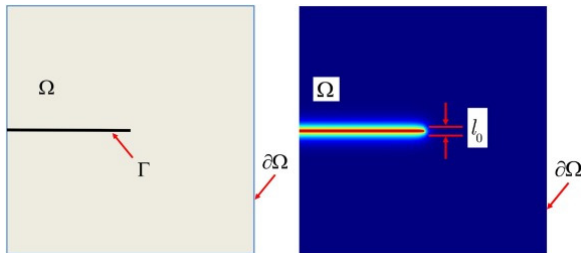
- Рассматриваем твердый диэлектрик
- Деградация диэлектрических свойств материала
- Процесс развивается в ограниченной зоне – канале пробоя
- Сложная физическая природа



Модель типа диффузной границы

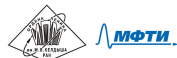
Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества описывается гладкой функцией $\phi(x, t)$ – фазовым полем.

- $\phi = 1$ – неповрежденная среда
- $\phi = 0$ – полностью разрушенная среда
- Зона $\phi \in (0, 1)$ – диффузная граница
- На разрушение среды тратится энергия



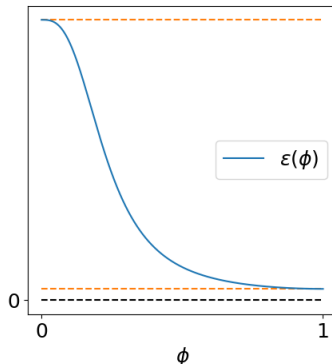
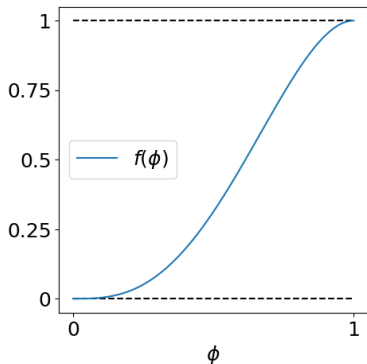
Модель, предложенная в работе [1]:

- $\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi](\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \left(\frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi) \right)$ – плотность свободной энергии
- Γ – энергия роста канала пробоя на единицу длины
- l – величина «размытия» канала
- $\epsilon(x, t)$ – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi)$ – интерполирующая функция



Математическая модель

- $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}$ – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$ – интерполирующая функция



Уравнения модели

- Уравнение электрического потенциала Φ :

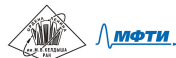
$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0 \quad (1)$$

- Уравнение фазового поля ϕ :

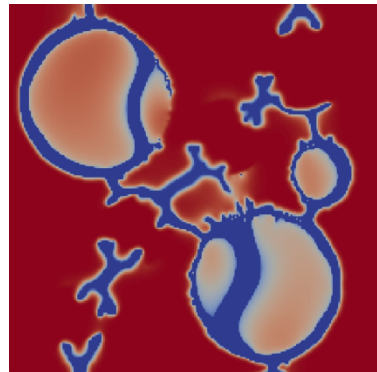
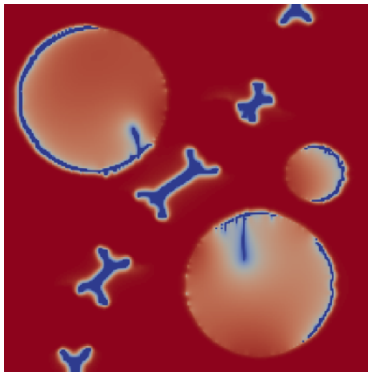
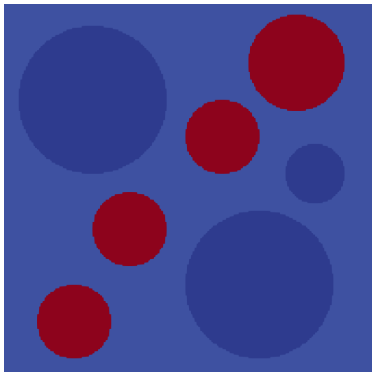
$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta \phi \quad (2)$$

Свойства:

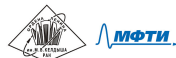
- связанная система уравнений на ϕ и Φ ;
- уравнение для ϕ типа Аллена–Кана, нелинейное.



Пример вычислительного эксперимента



Расчет из работы [2]

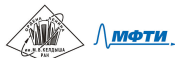


Цель работы

Цель работы

Исследовать качественные характеристики системы уравнений (1), (2) и выполнить ее численный анализ.

Для этого рассмотрим задачу в определенных краевых условиях, упрощающих ее, но позволяющих установить интересные свойства.



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи**
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



Одномерная задача

- Область $\bar{\Omega} = [0, W]_x \times [0, H]_y \times I_z$ в форме параллелепипеда
- $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0(x)$, $\epsilon_0(\mathbf{x}) = \epsilon_0(x)$ не зависят от y и z
- $\Phi|_{y=0} = \Phi^- \in \mathbb{R}$, $\Phi|_{y=h} = \Phi^+ \in \mathbb{R}$

Подробнее в работе [3].

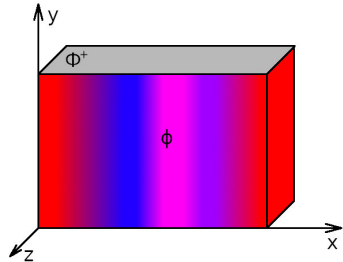
Решением является функция электрического потенциала

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi^- + \frac{y}{h}(\Phi^+ - \Phi^-).$$

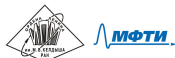
Тогда уравнение на ϕ принимает вид

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$K_{\Phi} = \frac{\Phi^+ - \Phi^-}{h} = \|\nabla \Phi\|. \text{ Будем считать } \epsilon_0 = \text{const.}$$



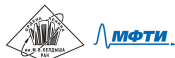
- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ**
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



- Канал пробоя может развиваться из малых возмущений свойств неповрежденной среды. Выясним условия развития.
- Рассмотрим положения равновесия вида $\phi(x, t) \equiv C$. Положению равновесия соответствует ноль C функции

$$\chi(\phi) = \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi).$$

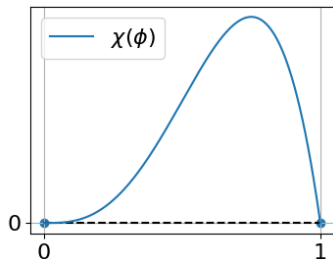
- Исследуем положения равновесия на устойчивость спектральным методом: к $\phi \equiv C$ прибавим возмущение $\delta\phi = e^{\alpha t} \sin(\omega x)$, линеаризуем уравнение на $\delta\phi$.
- $\chi(\phi)$ возрастает в $C \implies$ равновесие неустойчиво; $\chi(\phi)$ убывает в $C \implies$ равновесие устойчиво.



Анализ положений равновесия

«Слабое» напряжение

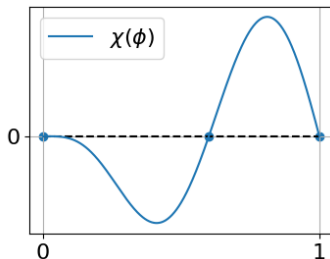
$$0 \leq \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < \delta^2$$



$\phi \equiv 0$ неустойчивое
 $\phi \equiv 1$ устойчивое

«Среднее» напряжение

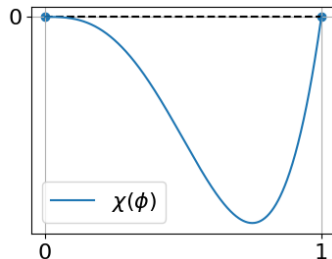
$$\delta^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < (1 + \delta)^2$$



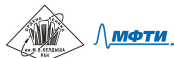
$\phi \equiv 0$ устойчивое
 $\phi \equiv C_3$ неустойчивое
 $\phi \equiv 1$ устойчивое

«Сильное» напряжение

$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma}$$



$\phi \equiv 0$ устойчивое
 $\phi \equiv 1$ неустойчивое



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ**
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



Разностная задача

$$\frac{1}{m} \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} K_\phi^2 \epsilon'(\phi_i^j) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi_i^j) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{i+1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i-1}^j}{h^2}$$

$$\phi_i^0 = \phi_0(ih); \quad \phi_0^j = \phi_l(j\tau); \quad \phi_n^j = \phi_r(j\tau)$$

Сетка регулярная; τ – шаг по времени, h – шаг по пространству.

Явная разностная схема первого порядка по времени, второго – по пространству.



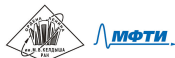
- Рассмотрим возмущенное решение $\phi_i^j + \delta_i^j$. Линеаризуем уравнение на возмущение δ_i^j в точке $\phi_i^j = P$:

$$\delta_i^{j+1} = \delta_i^j + m\tau \left(\frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon''(P)\delta_i^j + \frac{\Gamma}{l^2}f''(P)\delta_i^j + \frac{\Gamma}{2}\frac{\delta_{i+1}^j - 2\delta_i^j + \delta_{i-1}^j}{h^2} \right).$$

- Применим спектральный признак устойчивости:

$$1 > |\lambda(\theta)| = \left| 1 + m\tau \left(\frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2}f''(P) - \frac{2\Gamma}{h^2}\sin^2\frac{\theta}{2} \right) \right|.$$

- Исследуем вблизи $P = 0$.



Условие устойчивости

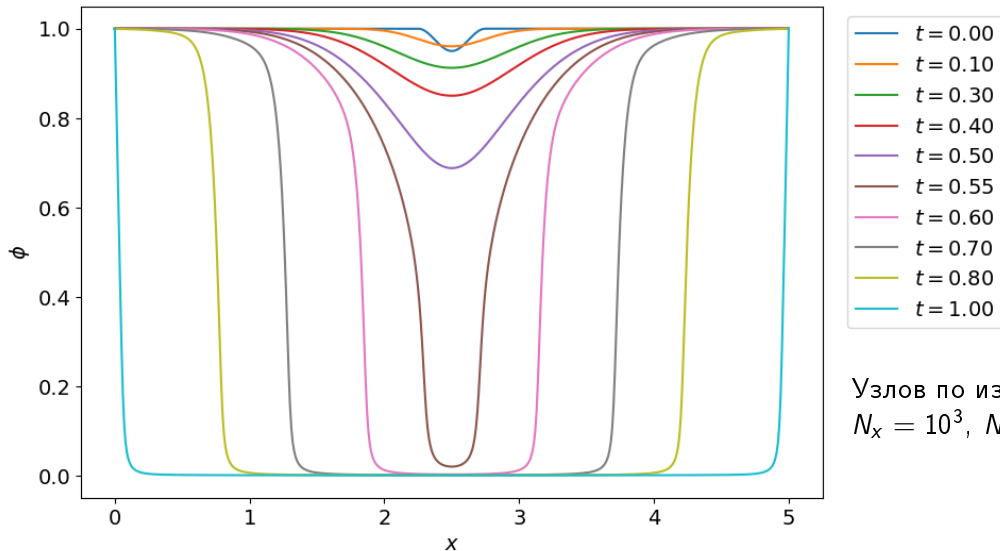
$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left(\frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$

Упрощенное условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{1}{4m} \min \left(\frac{\delta^{5/3}}{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}, \frac{h^2}{\Gamma} \right)$$

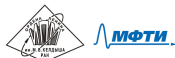


Вычисления: типичное решение

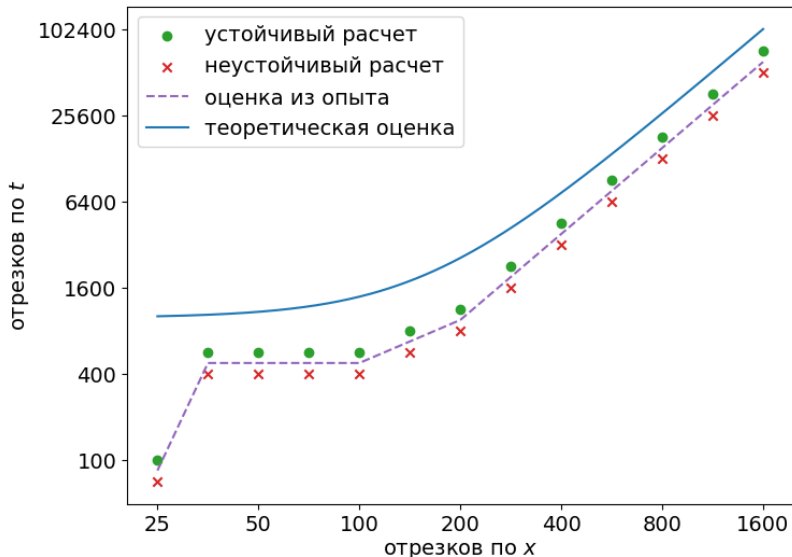


Узлов по измерениям:

$$N_x = 10^3, N_t = 10^5$$

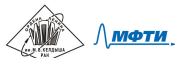


Вычисления: проверка устойчивости

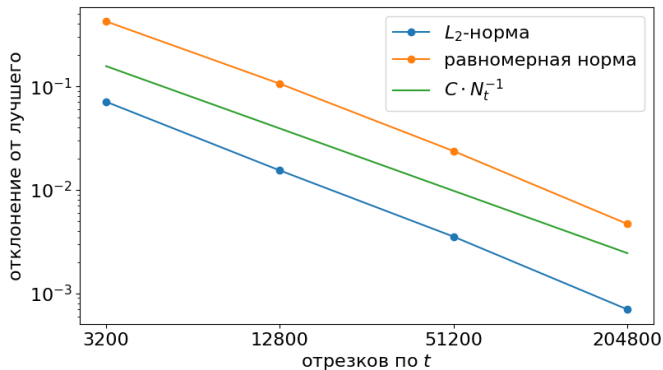


Условие устойчивости:

$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left(\frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$



Вычисления: проверка сходимости

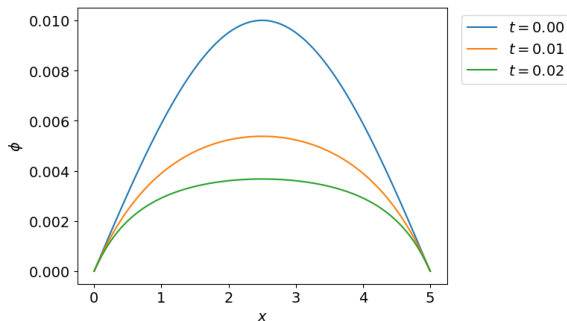


Здесь, согласно оценке устойчивости, $\tau = \frac{h^2}{4m\Gamma}$

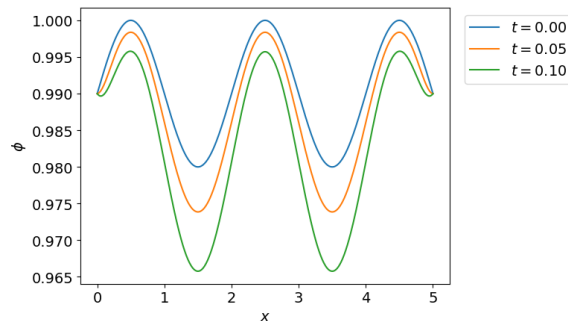


Вычисления: положения равновесия

$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 I^2 \epsilon_0}{2\Gamma} - \text{«сильное» напряжение}$$



$\phi \equiv 0$, устойчивое



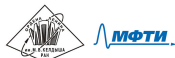
$\phi \equiv 1$, неустойчивое



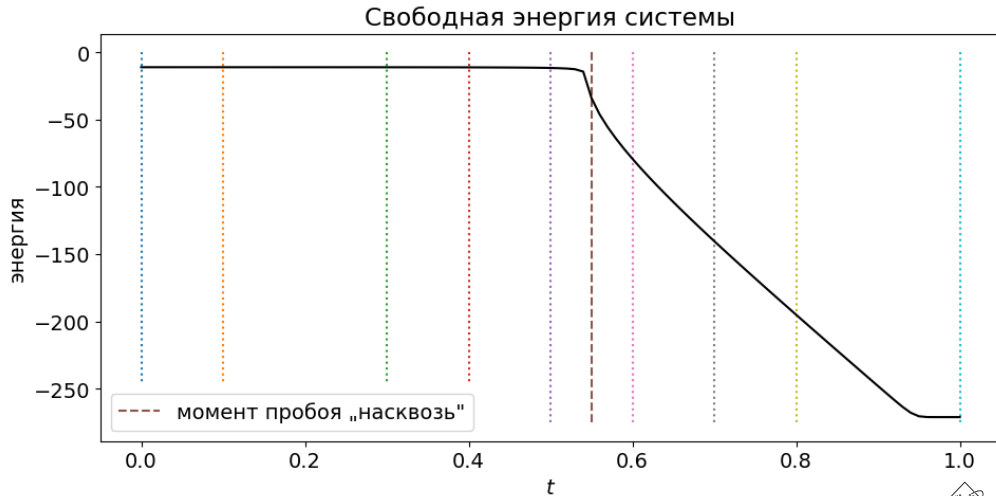
$$\Pi(t) = \int_{\Omega} \pi(x, t) dx$$

$$\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi](\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \left(\frac{1-f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi) \right)$$

- Уравнения (1), (2) выведены так, что система в ходе эволюции стремится в состояние с как можно меньшей полной свободной энергией Π .
- Необходимо, чтобы указанное свойство выполнялось при моделировании.



Вычисления: свободная энергия



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели**
- 6 Заключение

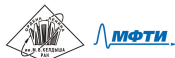


Постановка задачи

Исследуем распределение фазового поля вокруг проводников ($\phi = 0$) различного вида. Пусть $\Phi \equiv 0$. Рассмотрим следующие краевые задачи:

- 1 $\bar{\Omega} = [0, +\infty)_x \times I_y \times J_z$, $\phi|_{x=0} = 0$, $\phi \rightarrow 1$ при $r = x \rightarrow +\infty$ – плоский случай;
- 2 $\bar{\Omega} = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times J_z$, $\phi|_{x,y=0} = 0$, $\phi \rightarrow 1$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$ – цилиндрический случай;
- 3 $\bar{\Omega} = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$, $\phi|_{x,y,z=0} = 0$, $\phi \rightarrow 1$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow +\infty$ – сферический случай.

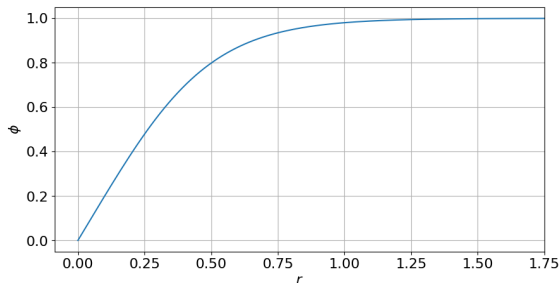
Ищем стационарное решение $\phi = \phi(r)$.



Плоский случай

Задача Коши:

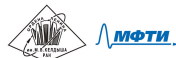
$$\phi(0) = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{2}{l} \sqrt{1 - f(\phi)}$$



Цилиндрический случай

Задача поставлена некорректно
и решения не имеет [4].

Вместе с тем канал пробоя – одномерный
объект в трехмерном пространстве!



Обобщение модели, предложенное в работе [4]

- Уравнение электрического потенциала Φ :

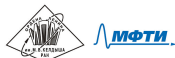
$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0$$

- Уравнение фазового поля ϕ :

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta\phi - \alpha \frac{\Gamma l^2}{4} \Delta^2\phi + \beta \Gamma l^{p-2} \operatorname{div}(\|\nabla\phi\|_2^{p-2} \nabla\phi)$$

- $\Delta^2\phi = \Delta(\Delta\phi)$ – билапласиан
- $\operatorname{div}(\|\nabla\phi\|_2^{p-2} \nabla\phi)$ – p -лапласиан

Везде далее $p = 4$.



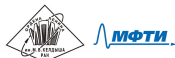
На границе $r = 0$ области моделирования у решения ϕ ожидается особенность.

Идея подхода:

- используем метод конечных объемов: к ячейке Ω_i отнесено среднее $\tilde{\phi}_i$ функции ϕ ;
- в первой и второй ячейках приближаем ϕ ЛК базисных функций, одна из которых имеет тот же вид особенности, что решение ϕ ;
- как и в классическом МКО, уравнения на $\tilde{\phi}_i$ являются следствием балансовых соотношений.

Преимущества подхода:

- точно учитываются граничные условия;
- точно учитывается асимптотика решения ϕ при $r \rightarrow +0$.



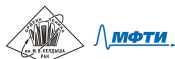
$$\frac{1}{m}(\tilde{\phi}_i^{j+1} - \tilde{\phi}_i^j) = \tau \frac{\Gamma}{l^2} f'(\tilde{\phi}_i^j) + \frac{\tau}{dV_i} \Gamma (\rho_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}^j S_{i-1/2});$$

$$dV_i = r_{i+1/2}^{k+1} - r_{i-1/2}^{k+1}; \quad S_{i\pm 1/2} = (k+1)r_{i\pm 1/2}^k;$$

$$\rho_{i\pm 1/2}^j = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j - \alpha \frac{l^2}{4} \left[\frac{\partial(\Delta \phi)}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j + \beta l^2 \left(\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j \right)^3;$$

$$\tilde{\Delta \phi}_i^j = \frac{1}{dV_i} \left(\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i-1/2}^j S_{i-1/2} \right)$$

Подробнее в работе [5].



Полученные результаты

Предполагаемые виды особенности решения ϕ в точке $r = 0$

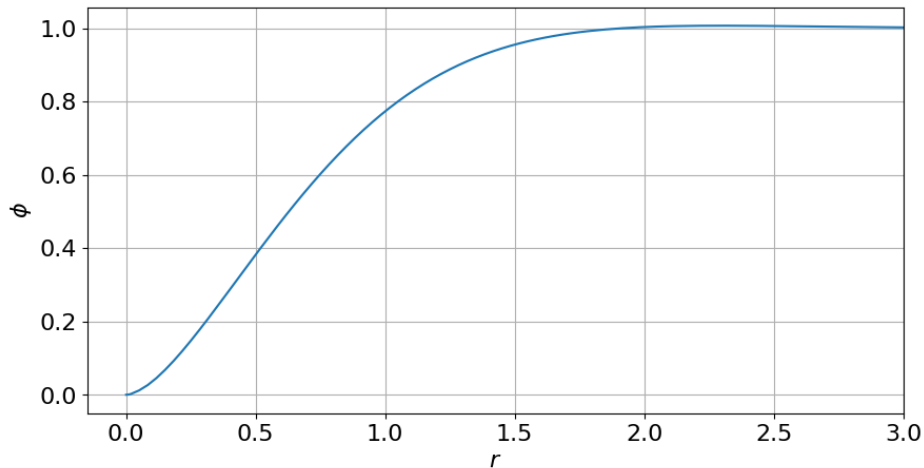
	$\alpha = 0, \beta = 0$	$\alpha = 0, \beta \neq 0$	$\alpha \neq 0$
Плоский случай	Без особенности	Без особенности	Без особенности
Цилиндрический случай	Не имеет решения	$r^{2/3}$	$r^2 \ln r$
Сферический случай	Предположительно не имеет решения	$r^{1/3}$	Предположительно не имеет решения

- Базисная функция g подбирается так, чтобы

$$\rho[\phi = g] \cdot S \rightarrow C > 0 \text{ при } r \rightarrow +0.$$



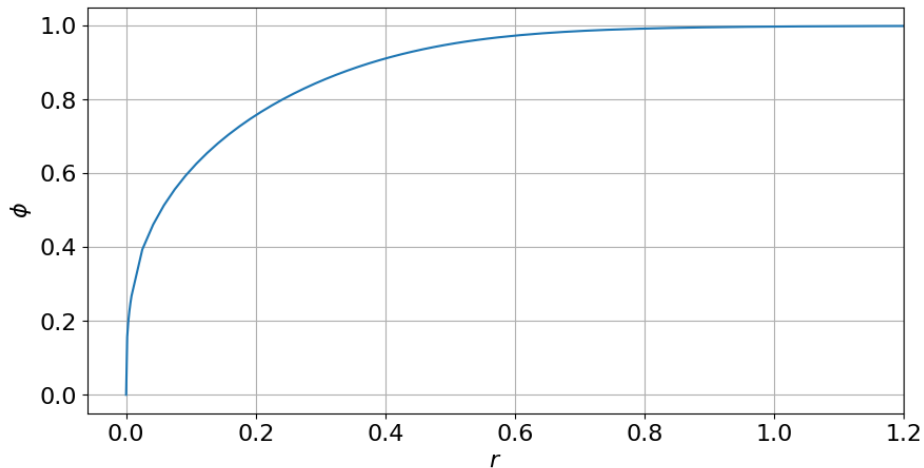
Полученные результаты



Цилиндрический случай, $\alpha = 1$: особенность вида $r^2 \ln r$



Полученные результаты



Сферический случай, $\alpha = 0$, $\beta = 1$: особенность вида $r^{1/3}$

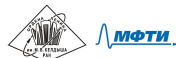


- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



Основные результаты работы.

- Проведен теоретический анализ модели.
- Построена разностная схема, дана содержательная оценка ее устойчивости.
- Исследовано обобщение исходной модели; на основе метода конечных объемов построена специальная разностная схема, учитывающая особенности решений на границе области моделирования.



Вопросы будущих исследований.

- Насколько адекватно «классические» уравнения метода диффузной границы описывают включения высшей коразмерности?
- Каково возможное развитие моделей?



- [1] К. С. Pitike и W. Hong. “Phase-field model for dielectric breakdown in solids”. *Journal of Applied Physics* (2014).
- [2] Е. В. Зипунова, А. А. Кулешов и Е. Б. Савенков. “Численное исследование модели фазового поля для описания развития канала электрического пробоя в неоднородной среде”. 2024.
- [3] А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. “Устойчивость стационарных решений в модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»”. 2024.
- [4] Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. “О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности”. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша* (2020).
- [5] А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. “Численное исследование обобщения модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»”. 2024.



Спасибо за внимание!

