

# Исследование модели диффузной границы для развития канала электрического пробоя

**Студент:**

Пономарев Андрей Сергеевич

**Научный руководитель:**

Савенков Евгений Борисович

**Консультант:**

Зипунова Елизавета Вячеславовна

20.06.2024



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели



## Электрический пробой

Явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше критического.

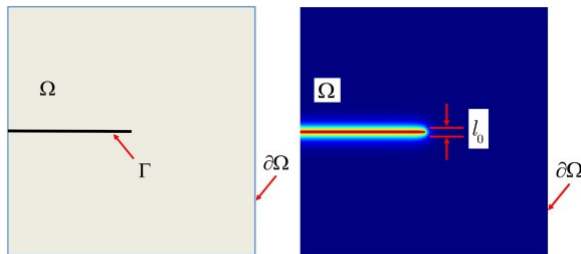
- Рассматриваем твердый диэлектрик
- Деградация диэлектрических свойств материала
- Процесс развивается в ограниченной зоне – канале пробоя
- Сложная физическая природа



## Модель типа диффузной границы

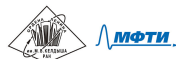
Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества описывается гладкой функцией  $\phi(\mathbf{x}, t)$  – фазовым полем.

- $\phi = 1$  – неповрежденная среда
- $\phi = 0$  – полностью разрушенная среда
- Зона  $\phi \in (0, 1)$  – диффузная граница
- На разрушение среды тратится энергия



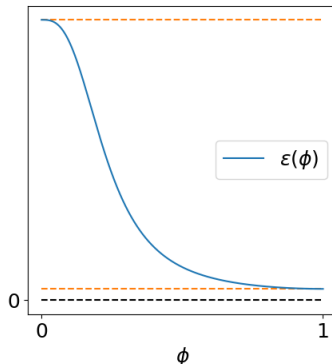
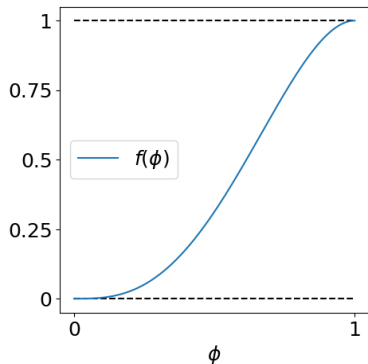
Модель, предложенная в работе [1]:

- $\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi](\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \left( \frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi) \right)$  – плотность свободной энергии
- $\Gamma$  – энергия роста пробоя на единицу длины
- $l$  – величина «размытия» пробоя
- $\epsilon(\mathbf{x}, t)$  – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi)$  – интерполирующая функция



# Математическая модель

- $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}$  – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$  – интерполирующая функция



## Уравнения модели

- Уравнение электрического потенциала  $\Phi$ :

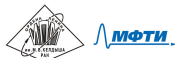
$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0 \quad (1)$$

- Уравнение фазового поля  $\phi$ :

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta \phi \quad (2)$$

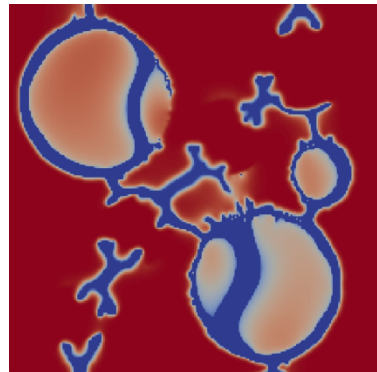
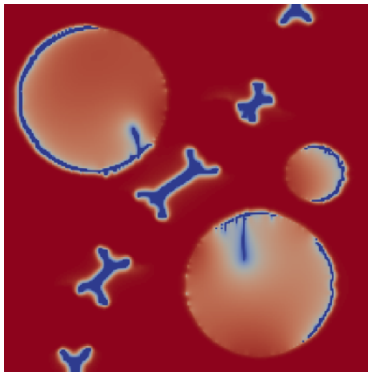
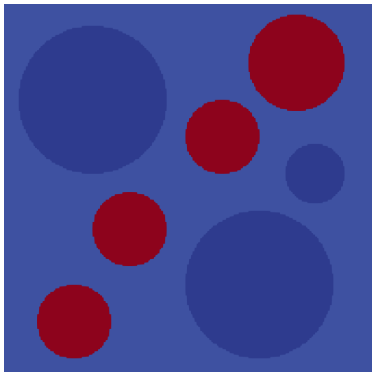
Свойства:

- связанная система уравнений на  $\phi$  и  $\Phi$ ;
- уравнение для  $\phi$  типа Аллена–Кана, нелинейное.

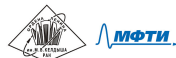




# Пример вычислительного эксперимента



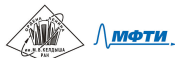
Расчет из работы [2]



## Цель работы

Исследовать качественные характеристики системы уравнений (1), (2): условия развития канала пробоя, границы применения разностной схемы.

Для этого будем рассматривать задачу в определенных краевых условиях, упрощающих ее, но позволяющих установить интересующие нас свойства.



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи**
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели



# Одномерная задача

- Область  $\Omega = [0, w]_x \times [0, h]_y \times l_z$  в форме параллелепипеда;
- $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0(x)$ ,  $\epsilon_0(\mathbf{x}) = \epsilon_0(x)$  не зависят от  $y$  и  $z$ ;
- $\Phi|_{y=0} = \Phi^- \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi|_{y=h} = \Phi^+ \in \mathbb{R}$ .

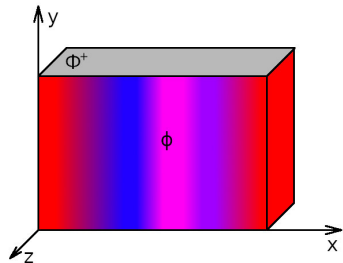
Решением является функция электрического потенциала

$$\Phi(x, t) = \Phi^- + \frac{y}{h}(\Phi^+ - \Phi^-)$$

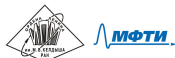
Тогда уравнение на  $\phi$  принимает вид

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$K_{\Phi} = \frac{\Phi^+ - \Phi^-}{h}. \text{ Будем считать } \epsilon_0 = \text{const.}$$



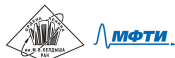
- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ**
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели



- Пробой может развиваться из малых возмущений свойств неповрежденной среды. Выясним условия развития.
- Рассмотрим положения равновесия вида  $\phi(x, t) \equiv C$ . Положению равновесия соответствует ноль  $C$  функции

$$\chi(\phi) = \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi)$$

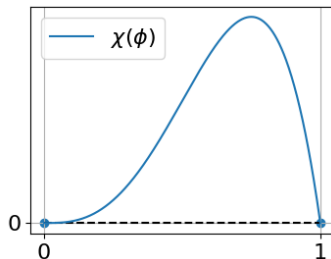
- Исследуем положения равновесия на устойчивость спектральным методом: к  $\phi \equiv C$  прибавим возмущение  $\delta\phi = e^{\alpha t} \cos(\omega x)$ , линеаризуем уравнение на  $\delta\phi$ .
- $\chi(\phi)$  возрастает в  $C \implies$  равновесие неустойчиво;  $\chi(\phi)$  убывает в  $C \implies$  равновесие устойчиво.



# Анализ положений равновесия

«Слабое» напряжение

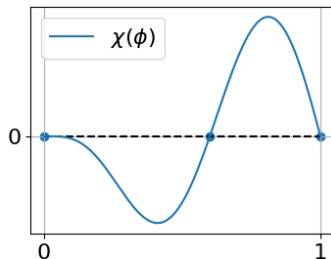
$$0 \leq \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < \delta^2$$



$\phi \equiv 0$  неустойчивое  
 $\phi \equiv 1$  устойчивое

«Среднее» напряжение

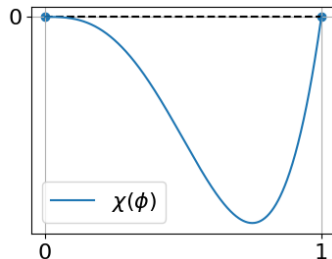
$$\delta^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < (1 + \delta)^2$$



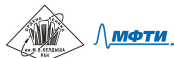
$\phi \equiv 0$  устойчивое  
 $\phi \equiv C_3$  неустойчивое  
 $\phi \equiv 1$  устойчивое

«Сильное» напряжение

$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma}$$



$\phi \equiv 0$  устойчивое  
 $\phi \equiv 1$  неустойчивое



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ**
- 5 Исследование обобщения модели





## Разностная задача

$$\frac{1}{m} \frac{\phi_a^{b+1} - \phi_a^b}{\tau} = \frac{1}{2} K_\phi^2 \epsilon'(\phi_a^b) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi_a^b) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{a+1}^b - 2\phi_a^b + \phi_{a-1}^b}{h^2}$$

$$\phi_a^0 = \phi_0(ah); \quad \phi_0^b = \phi_l(b\tau); \quad \phi_{w/h}^b = \phi_r(b\tau)$$

Сетка регулярная;  $\tau$  – шаг по времени,  $h$  – шаг по пространству.

Явная разностная схема первого порядка по времени, второго – по пространству.



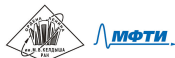
- Рассмотрим возмущенное решение  $\phi_a^b + \delta_a^b$ . Линеаризуем уравнение на возмущение  $\delta_a^b$  в точке  $\phi_a^b = P$ :

$$\delta_a^{b+1} = \delta_a^b + m\tau \left( \frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon''(P) \delta_a^b + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) \delta_a^b + \frac{\Gamma}{2} \frac{\delta_{a+1}^b - 2\delta_a^b + \delta_{a-1}^b}{h^2} \right)$$

- Применим спектральный признак устойчивости:

$$1 > \lambda(\theta) = 1 + m\tau \left( \frac{1}{2} K_\Phi^2 \epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) - \frac{2\Gamma}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

- Исследуем вблизи  $P = 0$ .



## Условие устойчивости

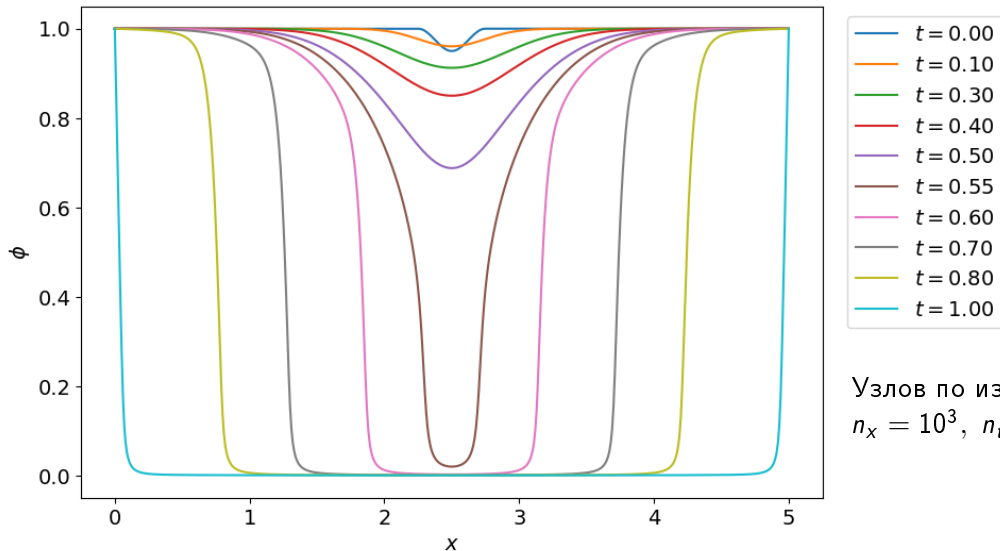
$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left( \frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$

## Упрощенное условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{1}{4m} \min \left( \frac{\delta^{5/3}}{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}, \frac{h^2}{\Gamma} \right)$$

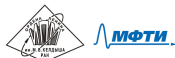


# Вычисления: типичное решение

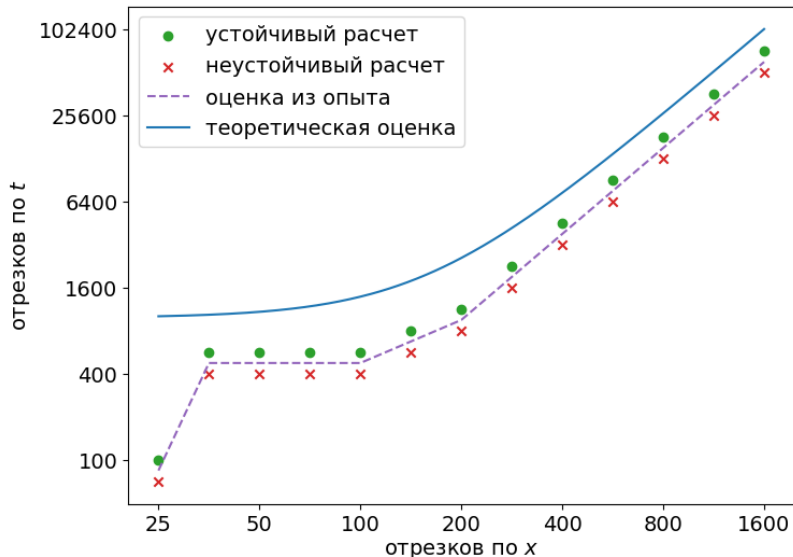


Узлов по измерениям:

$$n_x = 10^3, n_t = 10^5$$



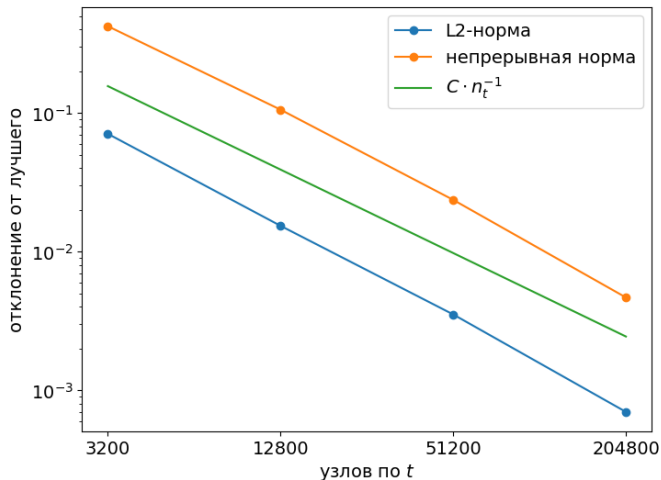
# Вычисления: проверка устойчивости



$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left( \frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$



# Вычисления: проверка сходимости

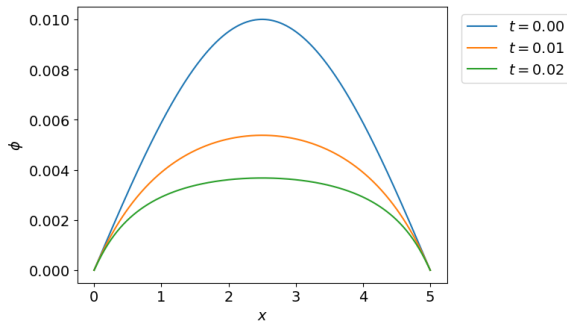


Здесь, согласно оценке устойчивости,  $\tau = \frac{h^2}{4m\Gamma}$

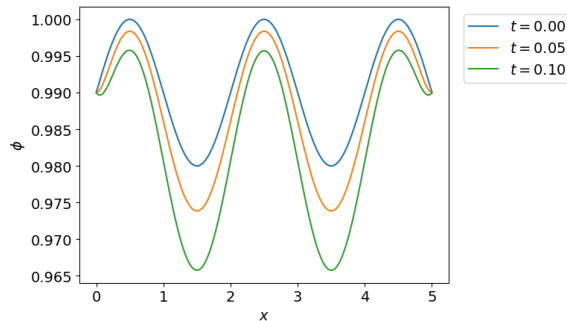


# Вычисления: положения равновесия

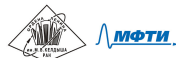
$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 I^2 \epsilon_0}{2\Gamma} - \text{«сильное» напряжение}$$



$\phi \equiv 0$   
устойчивое



$\phi \equiv 1$   
неустойчивое



$$\Pi(t) = \int_{\Omega} \pi(x, t) dx$$

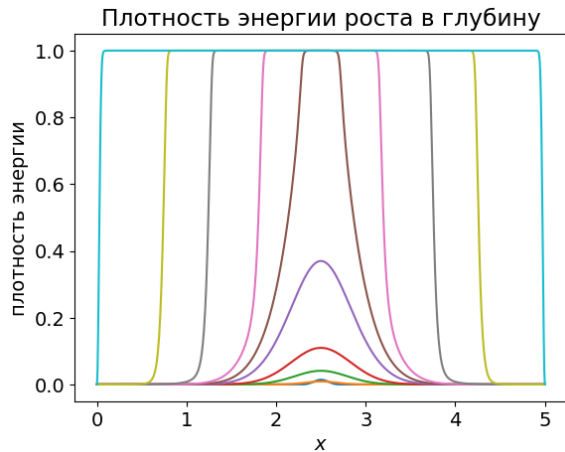
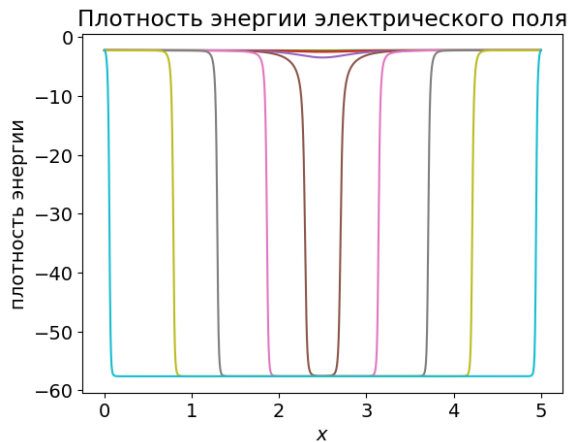
$$\pi(x, t) = \pi_1(x, t) + \pi_2(x, t) + \pi_3(x, t)$$

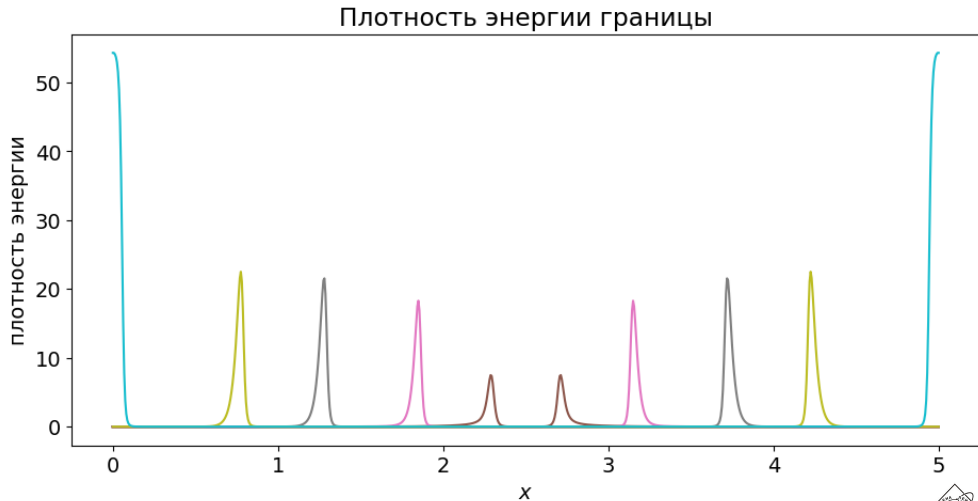
- $\pi_1(x, t) = -\frac{K_{\Phi}^2}{2} \epsilon(\phi(x, t))$  – плотность энергии электрического поля;
- $\pi_2(x, t) = \Gamma \frac{1 - f(\phi(x, t))}{l^2}$  – плотность энергии, отнесенной к веществу внутри канала;
- $\pi_3(x, t) = \frac{\Gamma}{4} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right)^2$  – плотность энергии, отнесенной к граничной зоне канала



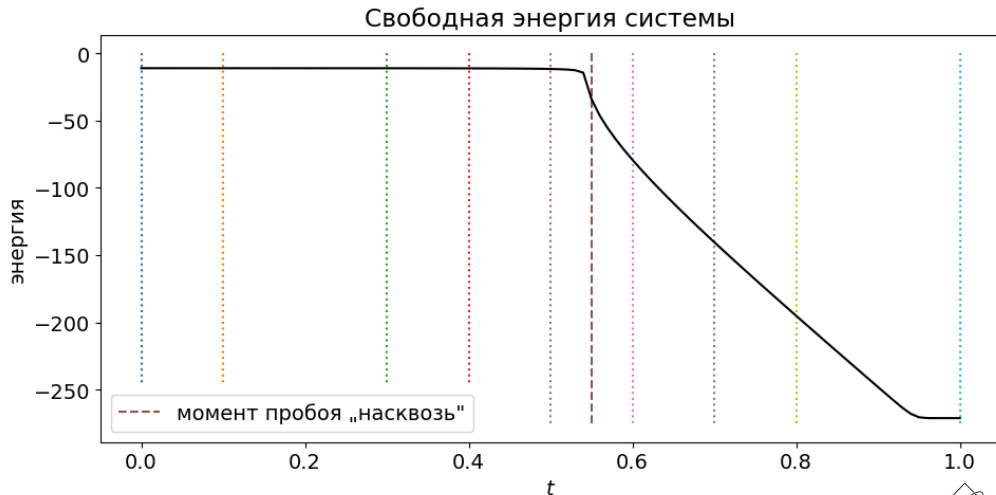


# Вычисления: свободная энергия





# Вычисления: свободная энергия



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели

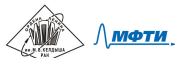


# Постановка задачи

Исследуем распределение фазового поля вокруг проводников ( $\phi = 0$ ) различного вида.  
Рассмотрим следующие краевые задачи:

- 1  $\Omega = [0, +\infty)_x \times I_y \times I_z$ ,  $\phi|_{x=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $r = x \rightarrow +\infty$  – плоский случай;
- 2  $\Omega = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times I_z$ ,  $\phi|_{x,y=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$  – цилиндрический случай;
- 3  $\Omega = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$ ,  $\phi|_{x,y,z=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow +\infty$  – сферический случай.

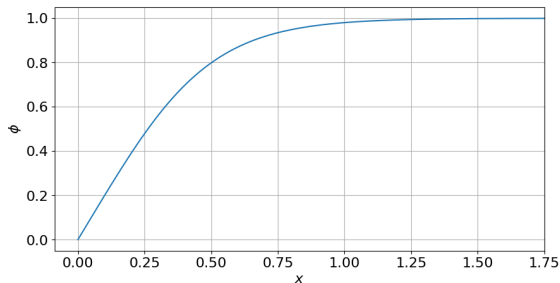
Ищем стационарное решение  $\phi = \phi(r)$ .



## Плоский случай

Задача Коши:

$$\phi(0) = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2}{l} \sqrt{1 - f(\phi)}$$



## Цилиндрический случай

Задача поставлена некорректно  
и решения не имеет [3]



## Обобщение модели, предложенное в работе [3]

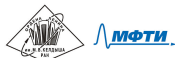
- Уравнение электрического потенциала  $\Phi$ :

$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0$$

- Уравнение фазового поля  $\phi$ :

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) (\nabla \Phi, \nabla \Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta \phi - \alpha \frac{\Gamma l^2}{4} \Delta^2 \phi + \beta \Gamma l^{p-2} \operatorname{div}(\|\nabla \phi\|_2^{p-2} \nabla \phi)$$

- $\Delta^2 \phi = \Delta(\Delta \phi)$  – билапласиан;
- $\operatorname{div}(\|\nabla \phi\|_2^{p-2} \nabla \phi)$  –  $p$ -лапласиан



На границе  $r = 0$  области моделирования у решения  $\phi$  ожидается особенность. Основная идея: пусть одна из базисных функций, используемых для приближения  $\phi$  вблизи 0, имеет тот же вид особенности.

$$\frac{1}{m}(\tilde{\phi}_i^{j+1} - \tilde{\phi}_i^j) = \tau \frac{\Gamma}{l^2} f'(\tilde{\phi}_i^j) + \frac{\tau}{dV_i} \Gamma (\rho_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}^j S_{i-1/2});$$

$$dV_i = r_{i+1/2}^{k+1} - r_{i-1/2}^{k+1}; \quad S_{i\pm 1/2} = (k+1)r_{i\pm 1/2}^k;$$

$$\rho_{i\pm 1/2}^j = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j - \alpha \frac{l^2}{4} \left[ \frac{\partial(\Delta \phi)}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j + \beta l^2 \left( \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j \right)^3;$$

$$\widetilde{\Delta \phi}_i^j = \frac{1}{dV_i} \left( \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i-1/2}^j S_{i-1/2} \right)$$





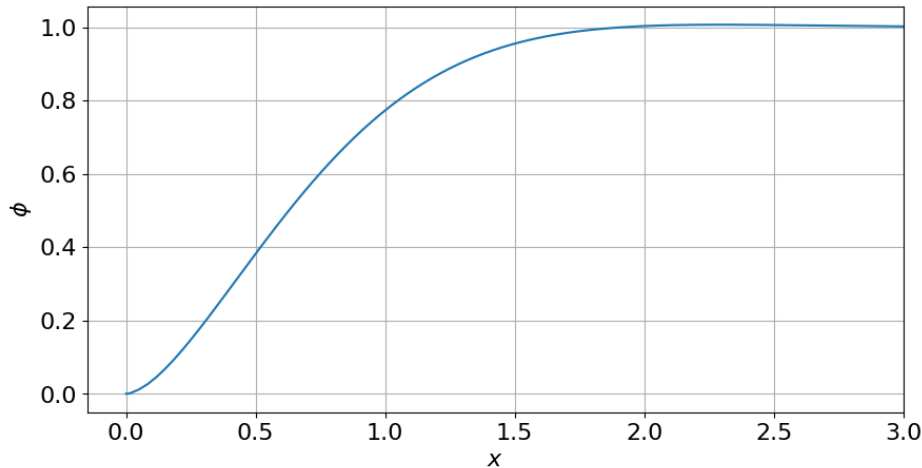
# Полученные результаты

Предполагаемые виды особенности решения  $\phi$  в точке  $r = 0$

	$\alpha = 0, \beta = 0$	$\alpha = 0, \beta \neq 0$	$\alpha \neq 0$
Плоский случай	Без особенности	Без особенности	Без особенности
Цилиндрический случай	Не имеет решения	$r^{2/3}$	$r^2(\ln r - 1)$
Сферический случай	Предположительно не имеет решения	$r^{1/3}$	Предположительно не имеет решения



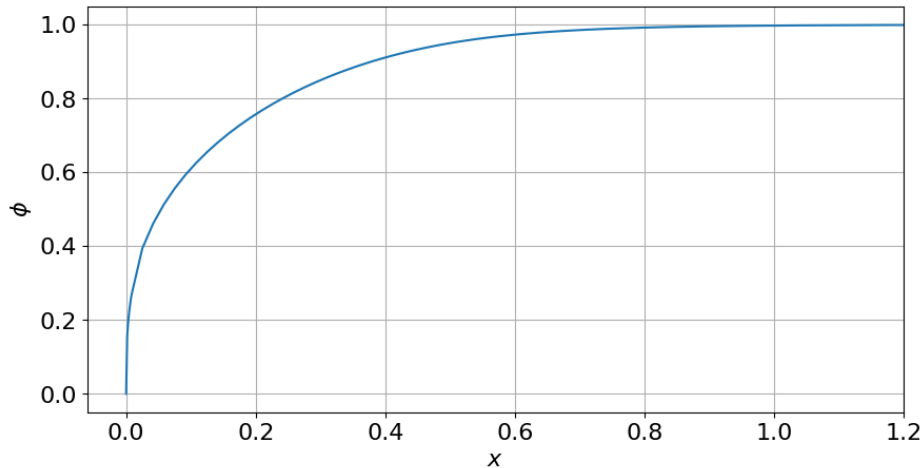
# Полученные результаты



Цилиндрический случай,  $\alpha = 1$ : особенность вида  $r^2(\ln r - 1)$



# Полученные результаты

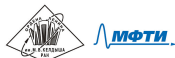





Сферический случай,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ : особенность вида  $r^{1/3}$



Основные результаты работы.

- Проведен теоретический анализ модели.
- Построена разностная схема, дана содержательная оценка ее устойчивости.
- Исследовано обобщение исходной модели; на основе метода конечных объемов построена специальная разностная схема, учитывающая особенности решений на границе области моделирования.



-  К. С. Pitike и W. Hong. *Phase-field model for dielectric breakdown in solids*. 2014.
-  Е. В. Зипунова, А. А. Кулешов и Е. Б. Савенков. Численное исследование модели фазового поля для описания развития канала электрического пробоя в неоднородной среде. 2024.
-  Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности. 2020.



Спасибо за внимание

