

Применение метода диффузной границы в моделировании электрического пробоя

Пономарев А.С.^{1,2}, Савенков Е.Б.², Зипунова Е.В.²

¹МФТИ (НИУ)

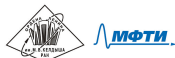
²ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Новые горизонты прикладной математики

19.04.2024



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ



Электрический пробой

Явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше критического.

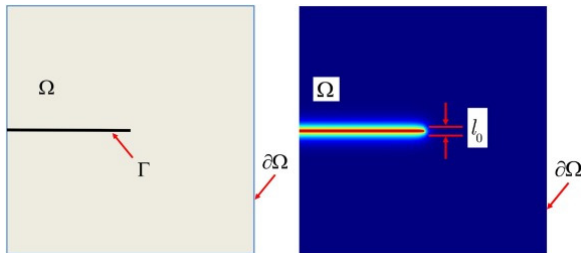
- Рассматриваем твердый диэлектрик
- Деградация диэлектрических свойств материала
- Процесс развивается в ограниченной зоне – канале
- Сложная физическая природа



Модель типа диффузной границы

Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества описывается гладкой функцией $\phi(\mathbf{x}, t)$ – фазовым полем.

- $\phi = 1$ – неповрежденная среда
- $\phi = 0$ – полностью разрушенная среда
- Зона $\phi \in (0, 1)$ – диффузная граница
- На разрушение среды тратится энергия



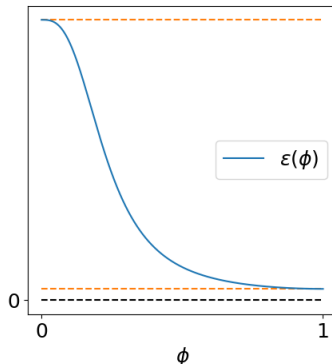
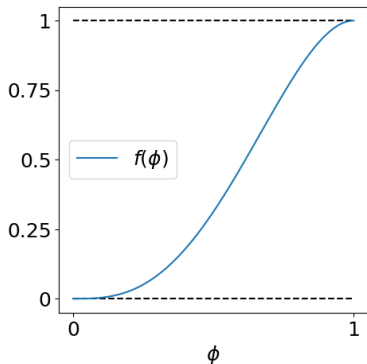
Модель, предложенная в работе [1]:

- $\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi](\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \left(\frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi) \right)$ – плотность свободной энергии
- Γ – энергия роста пробоя на единицу длины
- l – величина «размытия» пробоя
- $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi)$ – интерполирующая функция



Математическая модель

- $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}$ – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$ – интерполирующая функция



Уравнения модели

- Уравнение электрического потенциала Φ :

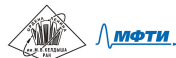
$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0 \quad (1)$$

- Уравнение фазового поля ϕ :

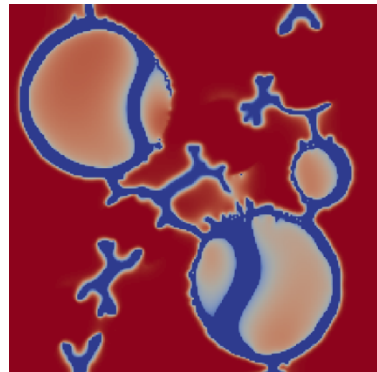
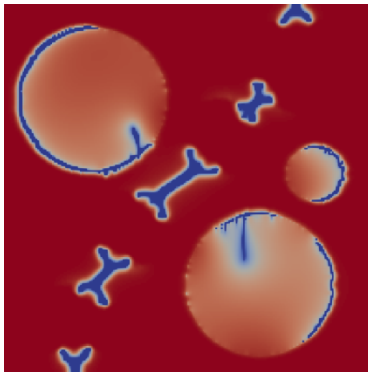
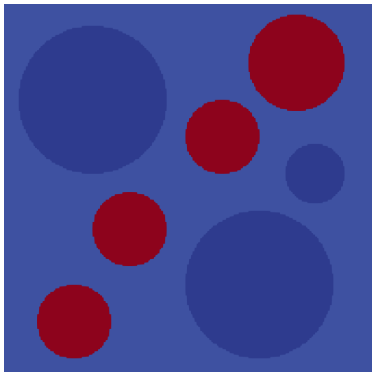
$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta \phi \quad (2)$$

Свойства:

- связанная система уравнений на ϕ и Φ ;
- уравнение для ϕ типа Аллена–Кана, нелинейное.



Пример вычислительного эксперимента



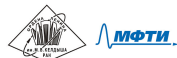
Расчет из работы [2]



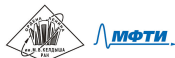
Цель работы

Исследовать качественные характеристики системы уравнений (1), (2): условия развития канала пробоя, границы применения разностной схемы.

Для этого будем рассматривать задачу в определенных краевых условиях, упрощающих ее, но позволяющих установить интересующие нас свойства.



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи**
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ



Одномерная задача

- Область $\Omega = [0, w]_x \times [0, h]_y \times l_z$ в форме параллелепипеда;
- $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0(x)$, $\epsilon_0(\mathbf{x}) = \epsilon_0(x)$ не зависят от y и z ;
- $\Phi|_{y=0} = \Phi^- \in \mathbb{R}$, $\Phi|_{y=h} = \Phi^+ \in \mathbb{R}$.

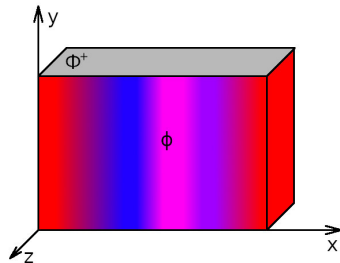
Решением является функция электрического потенциала

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi^- + \frac{y}{h}(\Phi^+ - \Phi^-)$$

Тогда уравнение на ϕ принимает вид

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$K_{\Phi} = \frac{\Phi^+ - \Phi^-}{h}. \text{ Будем считать } \epsilon_0 = \text{const.}$$



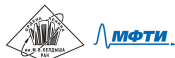
- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ**
- 4 Численный анализ



- Пробой может развиваться из малых возмущений свойств неповрежденной среды. Выясним условия развития.
- Рассмотрим положения равновесия вида $\phi(x, t) \equiv C$. Положению равновесия соответствует ноль C функции

$$\chi(\phi) = \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi)$$

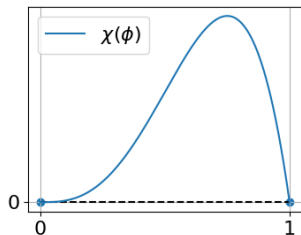
- Исследуем положения равновесия на устойчивость спектральным методом: к $\phi \equiv C$ прибавим возмущение $\delta\phi = e^{\alpha t} \cos(\omega x)$, линеаризуем уравнение на $\delta\phi$.
- $\chi(\phi)$ возрастает в $C \implies$ равновесие неустойчиво; $\chi(\phi)$ убывает в $C \implies$ равновесие устойчиво.



Анализ положений равновесия

«Слабое» напряжение

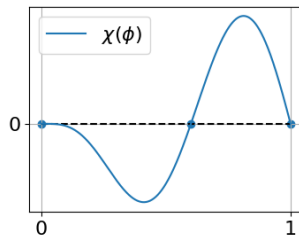
$$0 \leq \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < \delta^2$$



$\phi \equiv 0$ неустойчивое
 $\phi \equiv 1$ устойчивое

«Среднее» напряжение

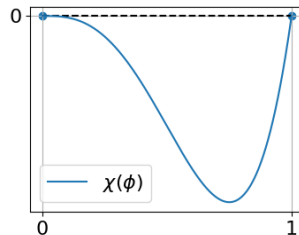
$$\delta^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < (1 + \delta)^2$$



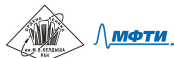
$\phi \equiv 0$ устойчивое
 $\phi \equiv C_3$ неустойчивое
 $\phi \equiv 1$ устойчивое

«Сильное» напряжение

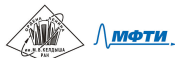
$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma}$$



$\phi \equiv 0$ устойчивое
 $\phi \equiv 1$ неустойчивое



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ**



Разностная задача

$$\frac{1}{m} \frac{\phi_a^{b+1} - \phi_a^b}{\tau} = \frac{1}{2} K_\phi^2 \epsilon'(\phi_a^b) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi_a^b) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{a+1}^b - 2\phi_a^b + \phi_{a-1}^b}{h^2}$$

$$\phi_a^0 = \phi_0(ah); \quad \phi_0^b = \phi_l(b\tau); \quad \phi_{w/h}^b = \phi_r(b\tau)$$

Сетка регулярная; τ – шаг по времени, h – шаг по пространству.

Явная разностная схема первого порядка по времени, второго – по пространству.



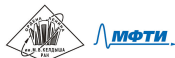
- Рассмотрим возмущенное решение $\phi_a^b + \delta_a^b$. Линеаризуем уравнение на возмущение δ_a^b в точке $\phi_a^b = P$:

$$\delta_a^{b+1} = \delta_a^b + m\tau \left(\frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon''(P) \delta_a^b + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) \delta_a^b + \frac{\Gamma}{2} \frac{\delta_{a+1}^b - 2\delta_a^b + \delta_{a-1}^b}{h^2} \right)$$

- Применим спектральный признак устойчивости:

$$1 > \lambda(\theta) = 1 + m\tau \left(\frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2} f''(P) - \frac{2\Gamma}{h^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

- Исследуем вблизи $P = 0$.



Условие устойчивости

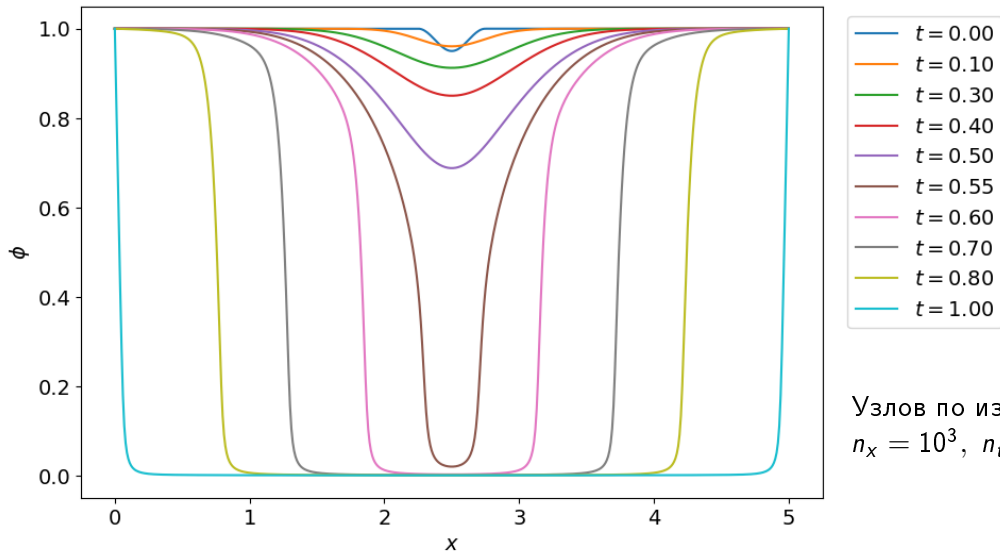
$$\tau \leq \frac{1}{2m \left(\frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)}$$

Упрощенное условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{1}{4m} \min \left(\frac{\delta^{5/3}}{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}, \frac{h^2}{\Gamma} \right)$$

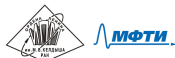


Вычисления: типичное решение

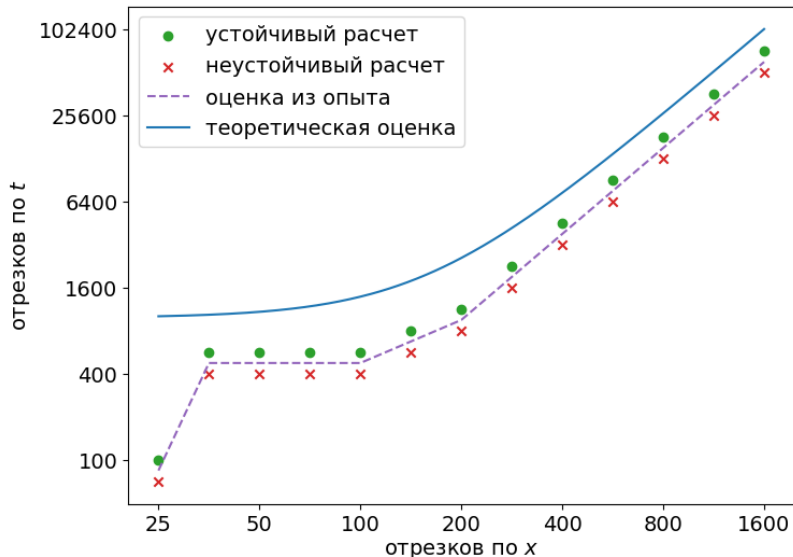


Узлов по измерениям:

$$n_x = 10^3, n_t = 10^5$$

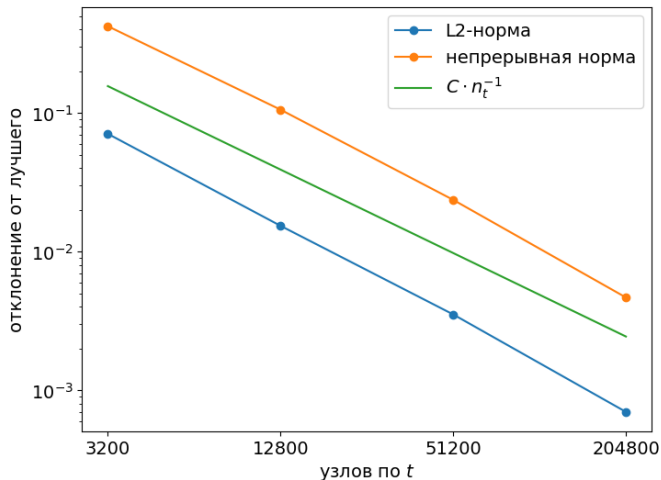


Вычисления: проверка устойчивости



$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left(\frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$

Вычисления: проверка сходимости

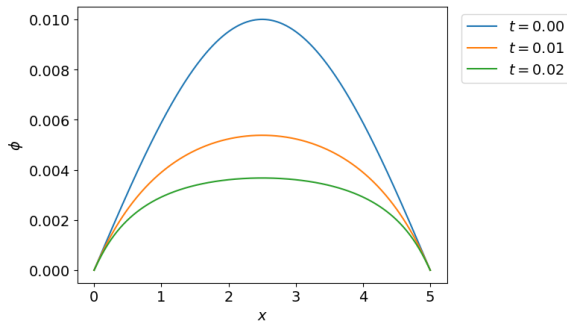


Здесь, согласно оценке устойчивости, $\tau = \frac{h^2}{4m\Gamma}$

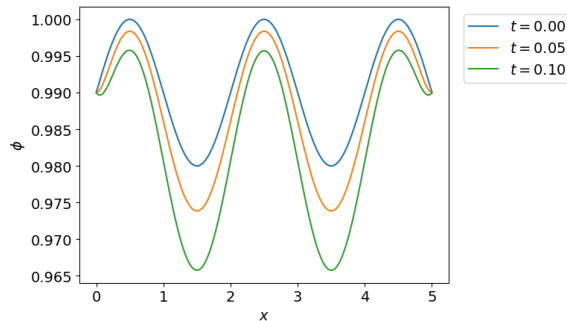


Вычисления: положения равновесия

$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 I^2 \epsilon_0}{2\Gamma} - \text{«сильное» напряжение}$$



$\phi \equiv 0$
устойчивое



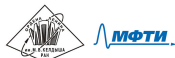
$\phi \equiv 1$
неустойчивое



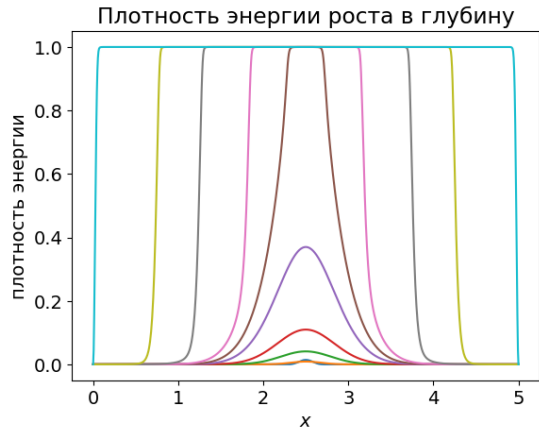
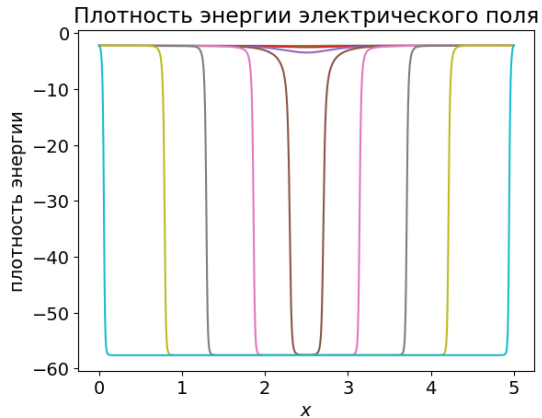
$$\Pi(t) = \int_{\Omega} \pi(x, t) dx$$

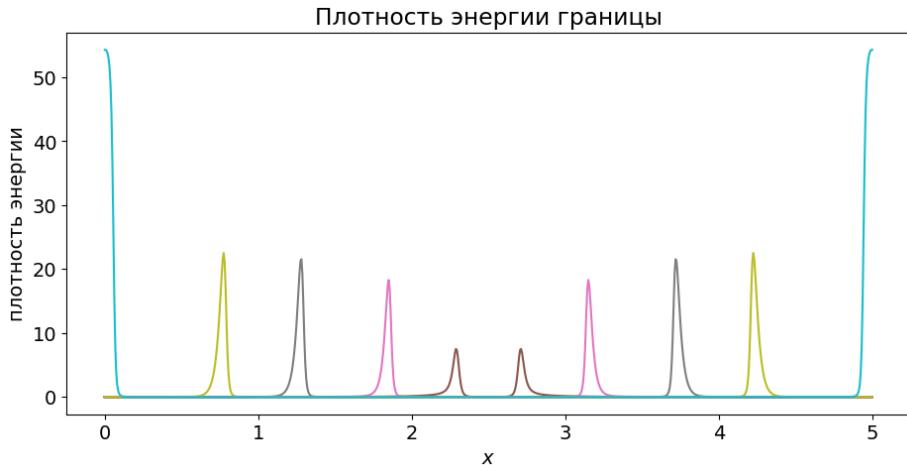
$$\pi(x, t) = \pi_1(x, t) + \pi_2(x, t) + \pi_3(x, t)$$

- $\pi_1(x, t) = -\frac{K_{\Phi}^2}{2} \epsilon(\phi(x, t))$ – плотность энергии электрического поля;
- $\pi_2(x, t) = \Gamma \frac{1 - f(\phi(x, t))}{l^2}$ – плотность энергии роста пробоя;
- $\pi_3(x, t) = \frac{\Gamma}{4} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right)^2$ – плотность энергии образования граничной зоны пробоя

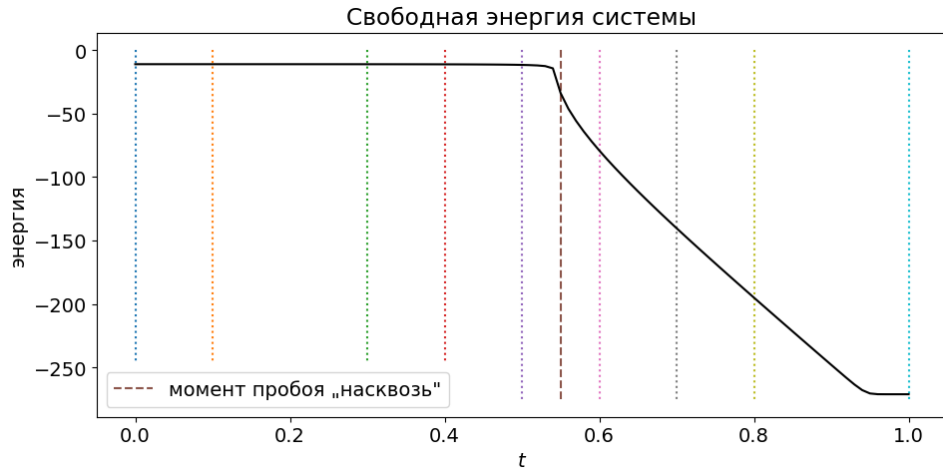


Вычисления: свободная энергия





Вычисления: свободная энергия





Е.В. Зипунова и Е.Б. Савенков. *О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва, 2020.*



Е.В. Зипунова, А.А. Кулешов и Е.Б. Савенков. *Численное исследование модели фазового поля для описания развития канала электрического пробоя в неоднородной среде. Сибирский журнал индустриальной математики. 2024.*



Спасибо за внимание

