

Теоретические и численные вопросы моделирования развития канала электрического пробоя методом диффузной границы

Студент:

Пономарев Андрей Сергеевич

Научный руководитель:

Савенков Евгений Борисович

Консультант:

Зипунова Елизавета Вячеславовна

15.01.2026



МФТИ

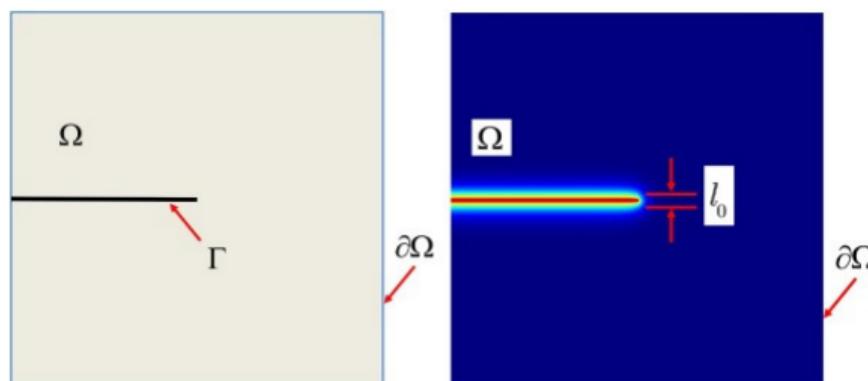
- 1 Постановка задачи
- 2 Адаптация расчетного шага по времени
- 3 Параллели с механикой

Математическая модель

Модель типа диффузной границы

Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества описывается гладкой функцией $\phi(x, t)$ – фазовым полем.

- $\phi = 1$ – неповрежденная среда
- $\phi = 0$ – полностью разрушенная среда
- Зона $\phi \in (0, 1)$ – диффузная граница
- На разрушение среды тратится энергия



Уравнения динамики системы

- Уравнение электрического потенциала Φ :

$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0$$

- Уравнение фазового поля ϕ (типа Аллена–Кана):

$$\frac{1}{m}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -F'(\phi; \|\nabla\Phi\|) + \frac{\Gamma}{2}\Delta\phi$$

- Плотность свободной энергии

$$\pi = F(\phi; \|\nabla\Phi\|) + \frac{\Gamma}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi)$$

- m, Γ – параметры модели, константы



МФТИ

Математическая модель

$$F(\phi; \|\nabla\Phi\|_2) = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi] \cdot \|\nabla\Phi\|_2^2 + \Gamma \frac{1 - f(\phi)}{l^2}$$

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}$$

$$f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$$

- l, δ – параметры модели

Разностная схема

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -F'(\phi; \|\nabla \Phi\|) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

- $\|\nabla \Phi\|$ – параметр

Разностная задача

$$\frac{1}{m} \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{\tau} = -F'(\phi_i^j; \|\nabla \Phi\|) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{i+1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i-1}^j}{h^2}$$

$$\phi_i^0 = \phi_0(ih); \quad \phi_0^j = \phi_l(j\tau); \quad \phi_n^j = \phi_r(j\tau)$$

Сетка регулярная; τ – шаг по времени, h – шаг по пространству.

Явная разностная схема первого порядка по времени, второго по пространству.

- Снижение вычислительных затрат на расчет
- Уточнение определяющих соотношений модели
- Воспроизведение в модели физического эксперимента

Цель работы

Предложить ответы на назревшие вопросы

- Интегрирование по времени с адаптивным шагом
- Настройка «большой» программы для моделирования
- Использование результатов из теории трещин

- 1 Постановка задачи
- 2 Адаптация расчетного шага по времени
- 3 Параллели с механикой

Общий вид схемы с адаптивным шагом

- Вводится переменный шаг τ^k :

$$\phi_j^{k+1} = \phi_j^k + m\tau^k \left(-F'(\phi_j^k) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{j+1}^k - 2\phi_j^k + \phi_{j-1}^k}{h^2} \right)$$

- Значение τ^k ограничено заранее выбранными τ_{\min} и τ_{\max} :

$$\tau^k = \max \left[\tau_{\min}, \min(\tau_{\max}, \tilde{\tau}^k) \right]$$

Методы адаптации

- По фазовому полю:

$$\tilde{\tau}_1^k = \frac{\text{tol}_1}{\|[\partial\phi/\partial t]_h\|_C}$$

- По полной энергии:

$$\tilde{\tau}_2^k = \frac{\text{tol}_2}{|[d\Pi/dt]_h|}$$

Предложены в статьях [1] и [2].

Методы адаптации

- Условие устойчивости схемы [3]:

$$\tau \leqslant \frac{1}{4m} \min \left(\frac{\delta^{5/3}}{\|\nabla \Phi\|^2 \epsilon_0}, \frac{h^2}{\Gamma} \right)$$

- Неравенство с первым аргументом \min можно переписать в виде

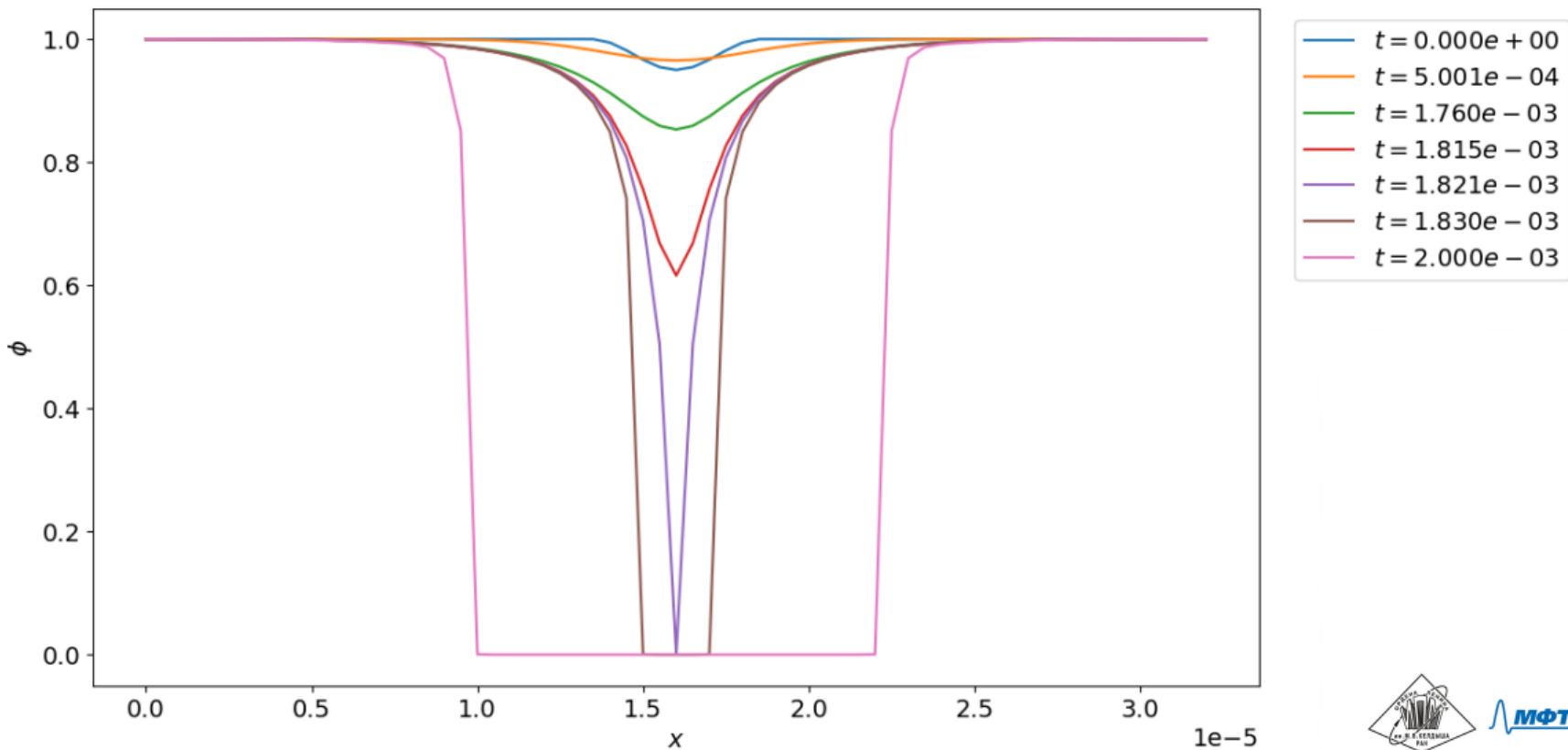
$$m\tau \max_{\phi \in [0,1]} |F''(\phi)| \leqslant 1$$

Адаптация по устойчивости

$$\tilde{\tau}_3^k = \frac{\text{tol}_3}{m \cdot \max_{j=0}^N G(\phi_j^k)},$$

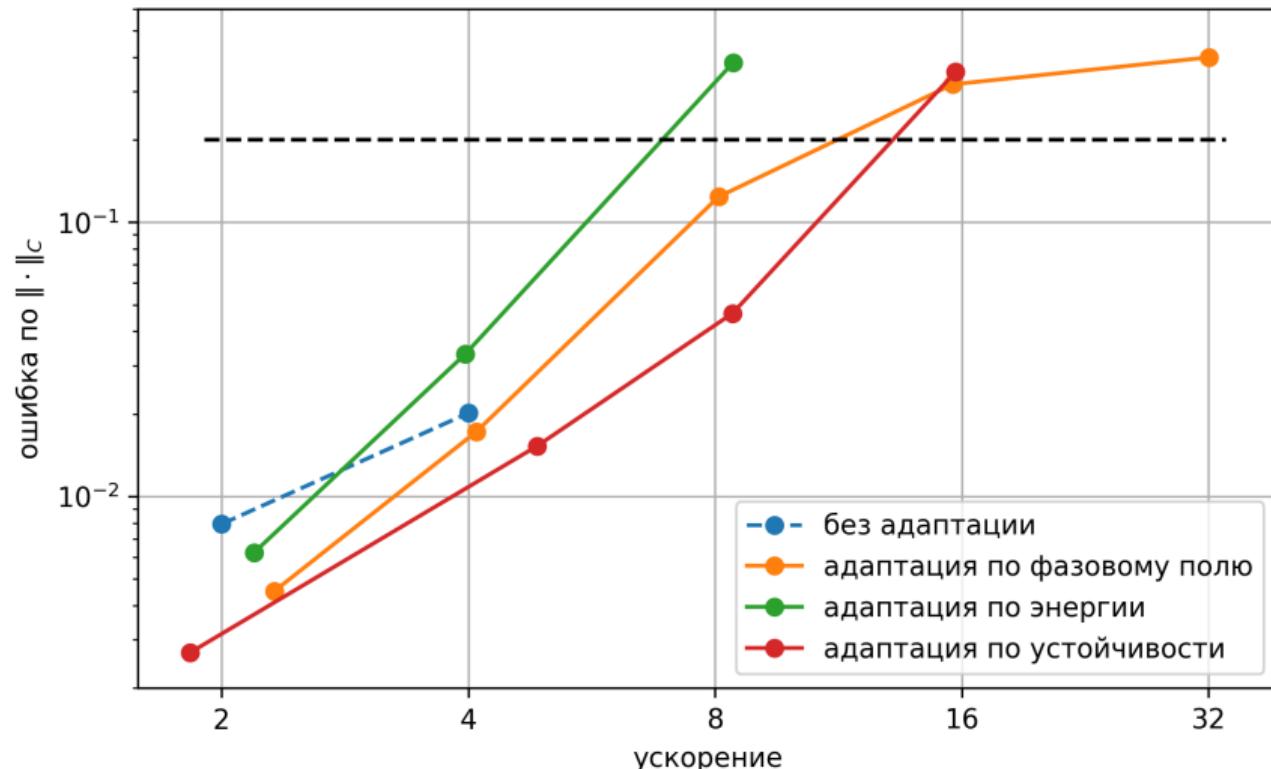
где $G(\phi)$ мажорирует $|F''(\phi)|$

Вычислительный эксперимент



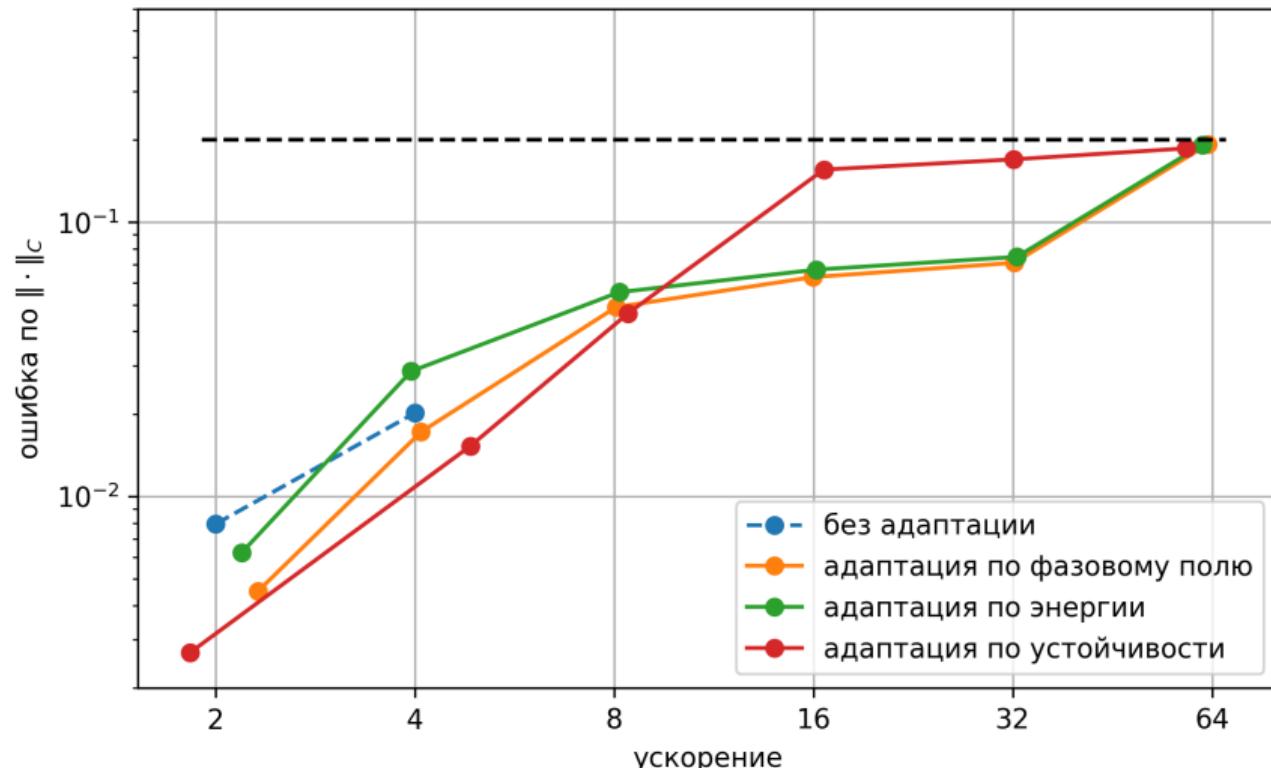
Вычислительный эксперимент

Ошибка решения при ускорении



Вычислительный эксперимент

Ошибка решения при ускорении: задан существенный τ_{\max}



- 1 Постановка задачи
- 2 Адаптация расчетного шага по времени
- 3 Параллели с механикой

Связь с моделированием трещин

- Изучение статьи [4]

смещение u	электрический потенциал Φ
деформация $\hat{\epsilon}$	напряженность электрического поля E
упругость (жесткость) \hat{C}	диэлектрическая проницаемость ϵ
напряжение $\hat{\sigma} = \hat{C} : \hat{\epsilon}$	электрическая индукция $D = \epsilon E$

Связь с моделированием трещин

- Рост канала электрического пробоя соответствует не разрушению, а отвердеванию:
$$\epsilon(\phi = 0) \gg \epsilon(\phi = 1), \quad \hat{C}(\phi = 0) \ll \hat{C}(\phi = 1).$$
- Задача разрушения: граничные условия на смещение / электрический потенциал, задача отвердевания: граничные условия на напряжение / электрическую индукцию.

Модель с измененными граничными условиями

$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0$$

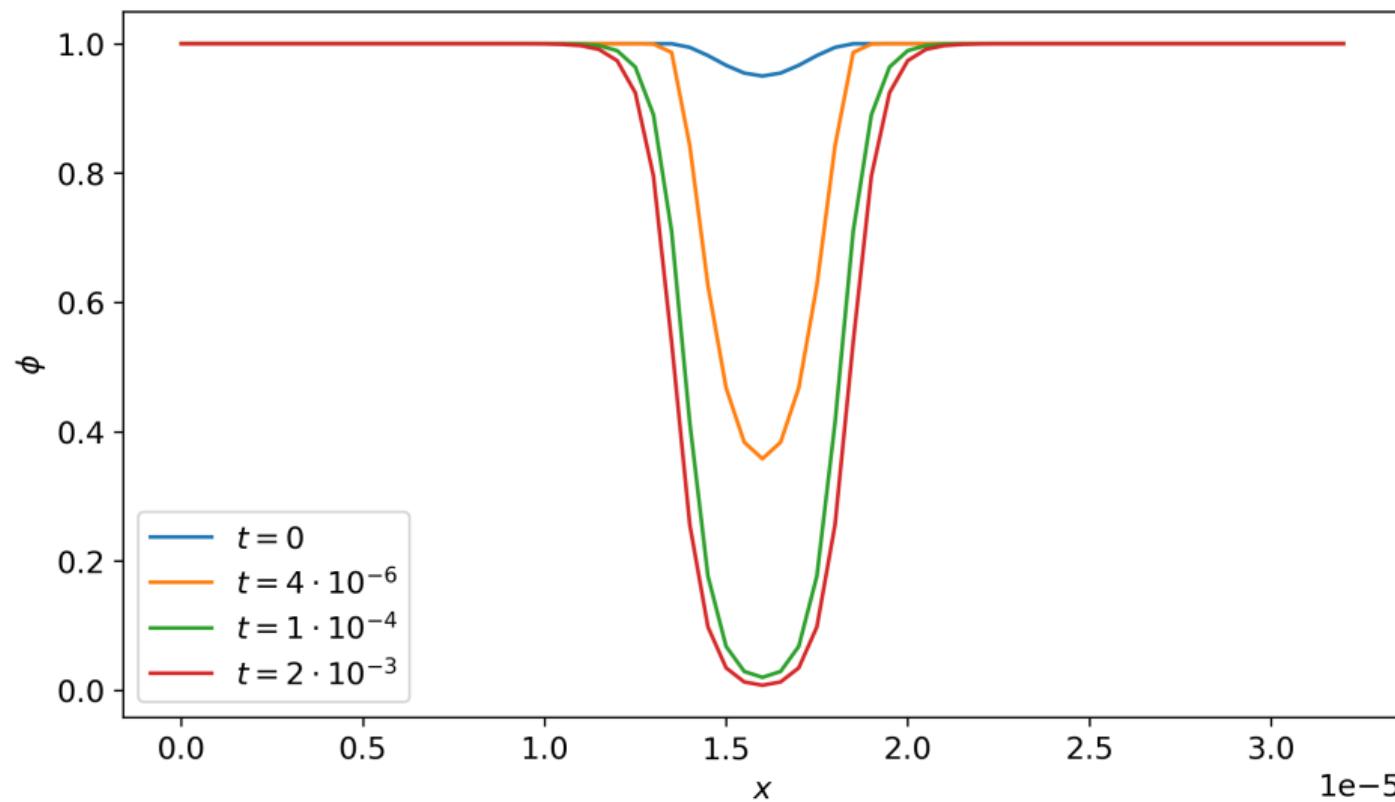
$$\frac{1}{m}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\epsilon'[\phi] \cdot \|\nabla\Phi\|^2 + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi) + \frac{\Gamma}{2}\Delta\phi$$

$$\Phi|_{y=0} = -\Phi|_{y=H} = \Phi^+(t)$$

$$q^+ = \int_{y=0} \epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial y} dS = \int_{y=H} \epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial y} dS$$

- Потенциал на обкладках $\Phi^+(t) = -\Phi^-(t)$ есть функция времени
- $q^+ = -q^-$ – постоянный поверхностный заряд на обкладках

Модель с измененными граничными условиями



Литература

- [1] Y. Li, Y. Choi и J. Kim. “Computationally efficient adaptive time step method for the Cahn–Hilliard equation”. *Computers & Mathematics with Applications* (2017).
- [2] Zh. Zhang и Zh. Qiao. “An Adaptive Time-Stepping Strategy for the Cahn-Hilliard Equation”. *Communications in Computational Physics* (2012).
- [3] А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. “Устойчивость стационарных решений в модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»”. *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша* (2024).
- [4] J. M. Sargado и др. “High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (2018).



МФТИ

Спасибо за внимание!