

# Моделирование канала электрического пробоя методом диффузной границы

Пономарев Андрей Сергеевич<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>МФТИ (НИУ)

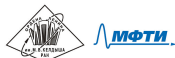
<sup>2</sup>ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

Вычислительная классическая и многофазная  
гидродинамика и термомеханика сплошной среды

4–8 ноября 2024 года



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



## Электрический пробой

Явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше критического.

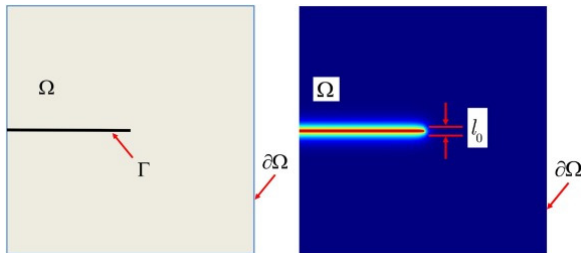
- Рассматриваем твердый диэлектрик
- Деградация диэлектрических свойств материала
- Процесс развивается в ограниченной зоне – канале пробоя
- Сложная физическая природа



## Модель типа диффузной границы

Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества описывается гладкой функцией  $\phi(x, t)$  – фазовым полем.

- $\phi = 1$  – неповрежденная среда
- $\phi = 0$  – полностью разрушенная среда
- Зона  $\phi \in (0, 1)$  – диффузная граница
- На разрушение среды тратится энергия



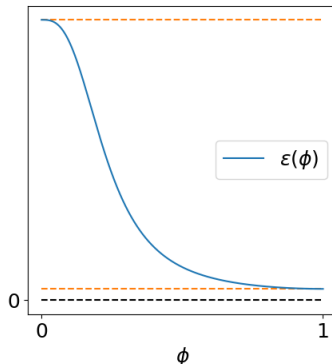
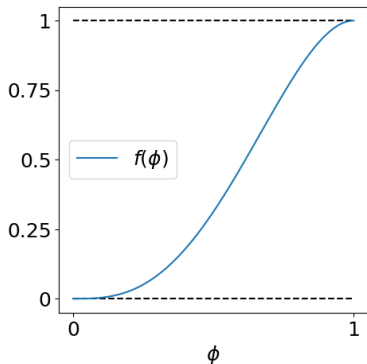
Модель, предложенная в работе [1]:

- $\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi](\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \left( \frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi) \right)$  – плотность свободной энергии
- $\Gamma$  – энергия роста канала пробоя на единицу длины
- $l$  – величина «размытия» канала
- $\epsilon(x, t)$  – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi)$  – интерполирующая функция



# Математическая модель

- $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}$  – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$  – интерполирующая функция



## Уравнения модели

- Уравнение электрического потенциала  $\Phi$ :

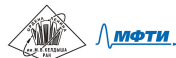
$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0 \quad (1)$$

- Уравнение фазового поля  $\phi$ :

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta \phi \quad (2)$$

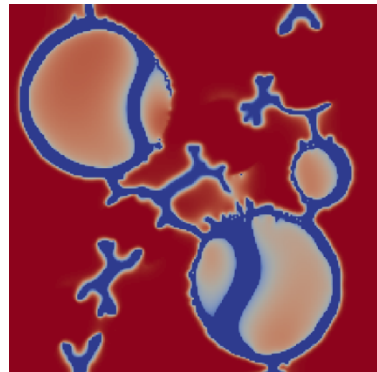
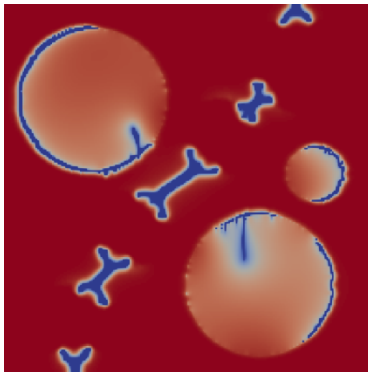
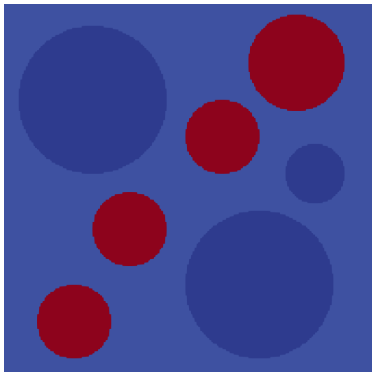
Свойства:

- связанная система уравнений на  $\phi$  и  $\Phi$ ;
- уравнение для  $\phi$  типа Аллена–Кана, нелинейное.





# Пример вычислительного эксперимента



Расчет из работы [2]

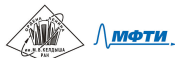


# Цель работы

## Цель работы

Исследовать качественные характеристики системы уравнений (1), (2) и выполнить ее численный анализ.

Для этого рассмотрим задачу в определенных краевых условиях, упрощающих ее, но позволяющих установить интересные свойства.



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи**
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



# Одномерная задача

- Область  $\bar{\Omega} = [0, W]_x \times [0, H]_y \times I_z$  в форме параллелепипеда
- $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0(x)$ ,  $\epsilon_0(\mathbf{x}) = \epsilon_0(x)$  не зависят от  $y$  и  $z$
- $\Phi|_{y=0} = \Phi^- \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi|_{y=h} = \Phi^+ \in \mathbb{R}$

Подробнее в работе [3].

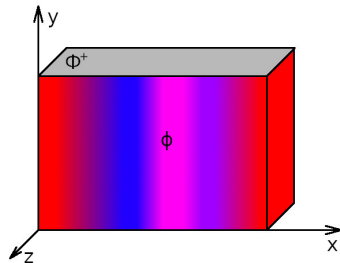
Решением является функция электрического потенциала

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi^- + \frac{y}{h}(\Phi^+ - \Phi^-).$$

Тогда уравнение на  $\phi$  принимает вид

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} K_{\Phi}^2 \epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$K_{\Phi} = \frac{\Phi^+ - \Phi^-}{h} = \|\nabla \Phi\|. \text{ Будем считать } \epsilon_0 = \text{const.}$$



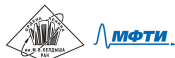
- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ**
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



- Канал пробоя может развиваться из малых возмущений свойств неповрежденной среды. Выясним условия развития.
- Рассмотрим положения равновесия вида  $\phi(x, t) \equiv C$ . Положению равновесия соответствует ноль  $C$  функции

$$\chi(\phi) = \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon'(\phi) + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi).$$

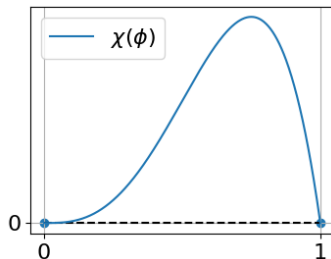
- Исследуем положения равновесия на устойчивость спектральным методом: к  $\phi \equiv C$  прибавим возмущение  $\delta\phi = e^{\alpha t} \sin(\omega x)$ , линеаризуем уравнение на  $\delta\phi$ .
- $\chi(\phi)$  возрастает в  $C \implies$  равновесие неустойчиво;  $\chi(\phi)$  убывает в  $C \implies$  равновесие устойчиво.



# Анализ положений равновесия

«Слабое» напряжение

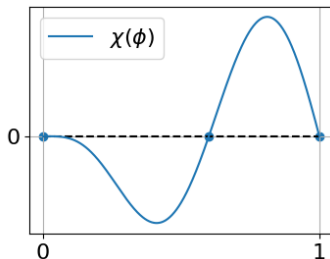
$$0 \leq \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < \delta^2$$



$\phi \equiv 0$  неустойчивое  
 $\phi \equiv 1$  устойчивое

«Среднее» напряжение

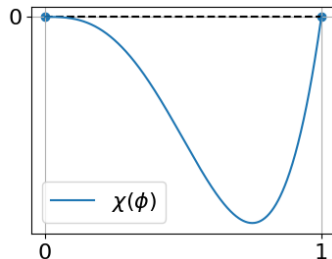
$$\delta^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma} < (1 + \delta)^2$$



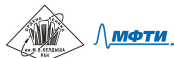
$\phi \equiv 0$  устойчивое  
 $\phi \equiv C_3$  неустойчивое  
 $\phi \equiv 1$  устойчивое

«Сильное» напряжение

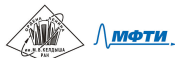
$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 / \epsilon_0}{2\Gamma}$$



$\phi \equiv 0$  устойчивое  
 $\phi \equiv 1$  неустойчивое



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ**
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение





## Разностная задача

$$\frac{1}{m} \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} K_\phi^2 \epsilon'(\phi_i^j) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi_i^j) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\phi_{i+1}^j - 2\phi_i^j + \phi_{i-1}^j}{h^2}$$

$$\phi_i^0 = \phi_0(ih); \quad \phi_0^j = \phi_l(j\tau); \quad \phi_n^j = \phi_r(j\tau)$$

Сетка регулярная;  $\tau$  – шаг по времени,  $h$  – шаг по пространству.

Явная разностная схема первого порядка по времени, второго – по пространству.



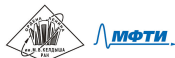
- Рассмотрим возмущенное решение  $\phi_i^j + \delta_i^j$ . Линеаризуем уравнение на возмущение  $\delta_i^j$  в точке  $\phi_i^j = P$ :

$$\delta_i^{j+1} = \delta_i^j + m\tau \left( \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon''(P)\delta_i^j + \frac{\Gamma}{l^2}f''(P)\delta_i^j + \frac{\Gamma}{2}\frac{\delta_{i+1}^j - 2\delta_i^j + \delta_{i-1}^j}{h^2} \right).$$

- Применим спектральный признак устойчивости:

$$1 > |\lambda(\theta)| = \left| 1 + m\tau \left( \frac{1}{2}K_{\Phi}^2\epsilon''(P) + \frac{\Gamma}{l^2}f''(P) - \frac{2\Gamma}{h^2}\sin^2\frac{\theta}{2} \right) \right|.$$

- Исследуем вблизи  $P = 0$ .



## Условие устойчивости

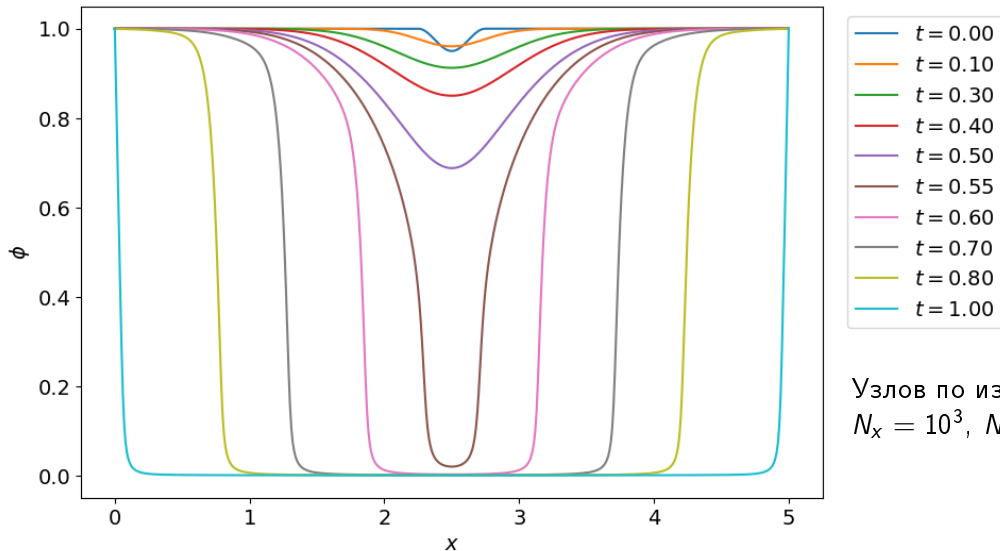
$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left( \frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$

## Упрощенное условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{1}{4m} \min \left( \frac{\delta^{5/3}}{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}, \frac{h^2}{\Gamma} \right)$$

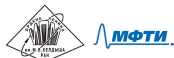


# Вычисления: типичное решение

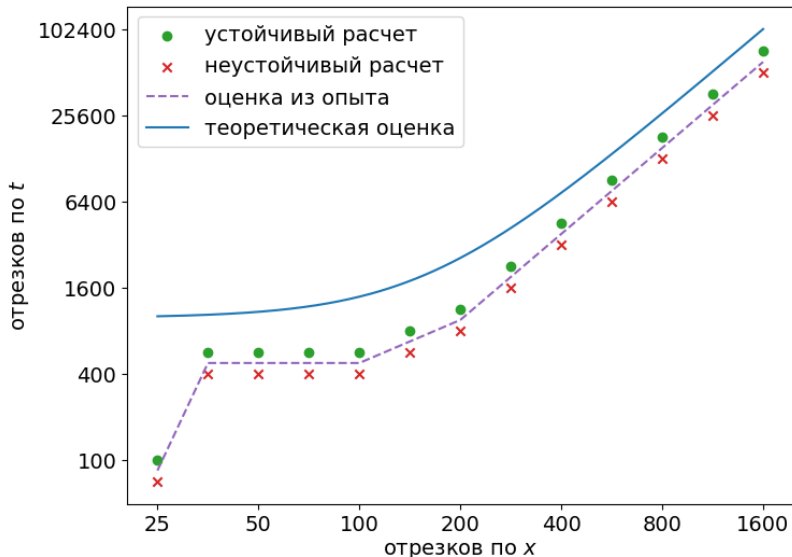


Узлов по измерениям:

$$N_x = 10^3, N_t = 10^5$$

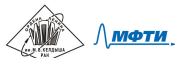


# Вычисления: проверка устойчивости

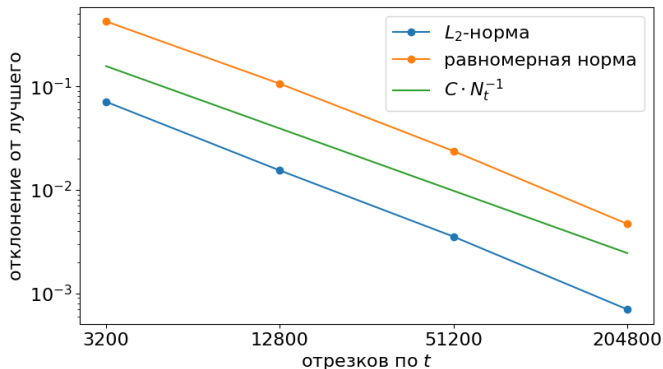


Условие устойчивости:

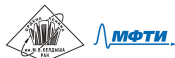
$$\tau \leq \frac{1}{2m} \left( \frac{K_{\Phi}^2 \epsilon_0}{\delta^{5/3}} + \frac{\Gamma}{h^2} \right)^{-1}$$



# Вычисления: проверка сходимости

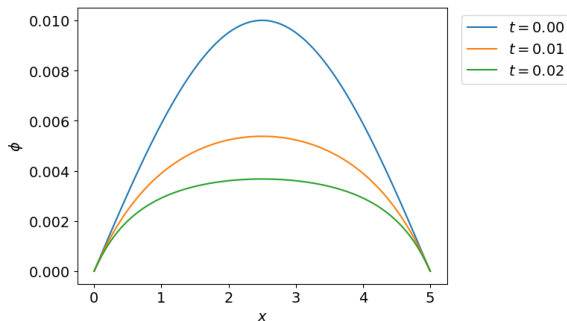


Здесь, согласно оценке устойчивости,  $\tau = \frac{h^2}{4m\Gamma}$

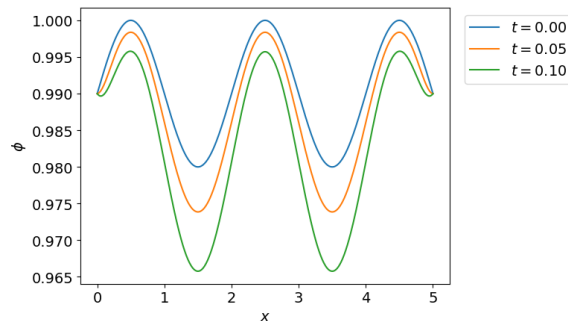


# Вычисления: положения равновесия

$$(1 + \delta)^2 < \frac{K_{\Phi}^2 I^2 \epsilon_0}{2\Gamma} - \text{«сильное» напряжение}$$



$\phi \equiv 0$ , устойчивое



$\phi \equiv 1$ , неустойчивое



$$\Pi(t) = \int_{\Omega} \pi(x, t) dx$$

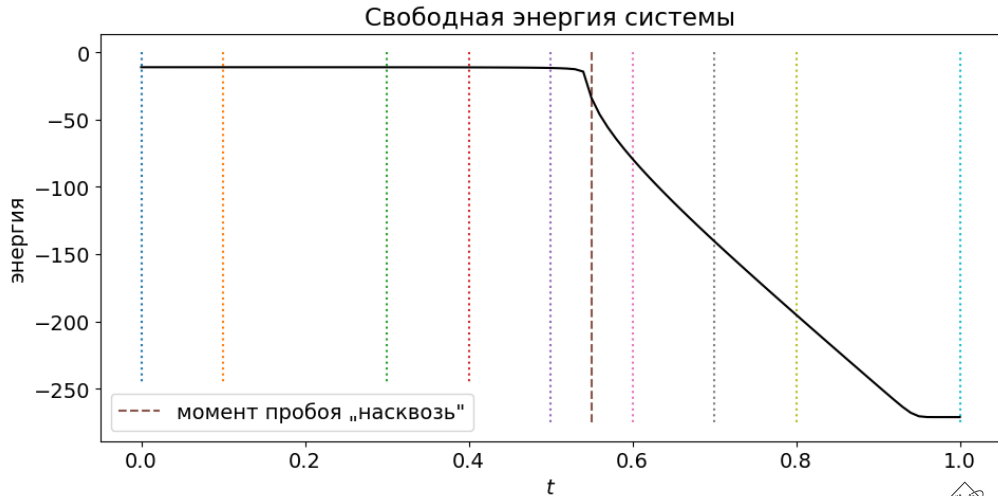
$$\pi = -\frac{1}{2}\epsilon[\phi](\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \Gamma \left( \frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}(\nabla\phi, \nabla\phi) \right)$$

- Уравнения (1), (2) выведены так, что система в ходе эволюции стремится в состояние с как можно меньшей полной свободной энергией  $\Pi$ .
- Необходимо, чтобы указанное свойство выполнялось при моделировании.





# Вычисления: свободная энергия



- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели**
- 6 Заключение

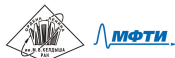


# Постановка задачи

Исследуем распределение фазового поля вокруг проводников ( $\phi = 0$ ) различного вида. Пусть  $\Phi \equiv 0$ . Рассмотрим следующие краевые задачи:

- 1  $\bar{\Omega} = [0, +\infty)_x \times I_y \times J_z$ ,  $\phi|_{x=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $r = x \rightarrow +\infty$  – плоский случай;
- 2  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times J_z$ ,  $\phi|_{x,y=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$  – цилиндрический случай;
- 3  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$ ,  $\phi|_{x,y,z=0} = 0$ ,  $\phi \rightarrow 1$  при  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow +\infty$  – сферический случай.

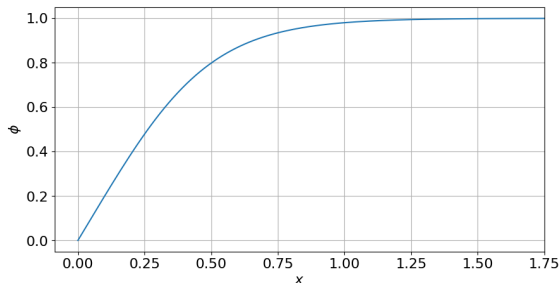
Ищем стационарное решение  $\phi = \phi(r)$ .



## Плоский случай

Задача Коши:

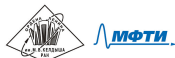
$$\phi(0) = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2}{l} \sqrt{1 - f(\phi)}$$



## Цилиндрический случай

Задача поставлена некорректно  
и решения не имеет [4].

Вместе с тем канал пробоя – одномерный  
объект в трехмерном пространстве!



## Обобщение модели, предложенное в работе [4]

- Уравнение электрического потенциала  $\Phi$ :

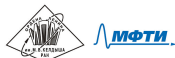
$$\operatorname{div}(\epsilon[\phi]\nabla\Phi) = 0$$

- Уравнение фазового поля  $\phi$ :

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) (\nabla\Phi, \nabla\Phi) + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta\phi - \alpha \frac{\Gamma l^2}{4} \Delta^2\phi + \beta \Gamma l^{p-2} \operatorname{div}(\|\nabla\phi\|_2^{p-2} \nabla\phi)$$

- $\Delta^2\phi = \Delta(\Delta\phi)$  – билапласиан
- $\operatorname{div}(\|\nabla\phi\|_2^{p-2} \nabla\phi)$  –  $p$ -лапласиан

Везде далее  $p = 4$ .



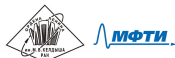
На границе  $r = 0$  области моделирования у решения  $\phi$  ожидается особенность.

Идея подхода:

- используем метод конечных объемов: к ячейке  $\Omega_i$  отнесено среднее  $\tilde{\phi}_i$  функции  $\phi$ ;
- в первой и второй ячейках приближаем  $\phi$  ЛК базисных функций, одна из которых имеет тот же вид особенности, что решение  $\phi$ ;
- как и в классическом МКО, уравнения на  $\tilde{\phi}_i$  являются следствием балансовых соотношений.

Преимущества подхода:

- точно учитываются граничные условия;
- точно учитывается асимптотика решения  $\phi$  при  $r \rightarrow +0$ .



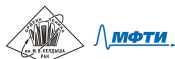
$$\frac{1}{m}(\tilde{\phi}_i^{j+1} - \tilde{\phi}_i^j) = \tau \frac{\Gamma}{l^2} f'(\tilde{\phi}_i^j) + \frac{\tau}{dV_i} \Gamma (\rho_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}^j S_{i-1/2});$$

$$dV_i = r_{i+1/2}^{k+1} - r_{i-1/2}^{k+1}; \quad S_{i\pm 1/2} = (k+1)r_{i\pm 1/2}^k;$$

$$\rho_{i\pm 1/2}^j = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j - \alpha \frac{l^2}{4} \left[ \frac{\partial(\Delta \phi)}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j + \beta l^2 \left( \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i\pm 1/2}^j \right)^3;$$

$$\tilde{\Delta \phi}_i^j = \frac{1}{dV_i} \left( \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i+1/2}^j S_{i+1/2} - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{i-1/2}^j S_{i-1/2} \right)$$

Подробнее в работе [5].



# Полученные результаты

Предполагаемые виды особенности решения  $\phi$  в точке  $r = 0$

|                       | $\alpha = 0, \beta = 0$           | $\alpha = 0, \beta \neq 0$ | $\alpha \neq 0$                   |
|-----------------------|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| Плоский случай        | Без особенности                   | Без особенности            | Без особенности                   |
| Цилиндрический случай | Не имеет решения                  | $r^{2/3}$                  | $r^2 \ln r$                       |
| Сферический случай    | Предположительно не имеет решения | $r^{1/3}$                  | Предположительно не имеет решения |

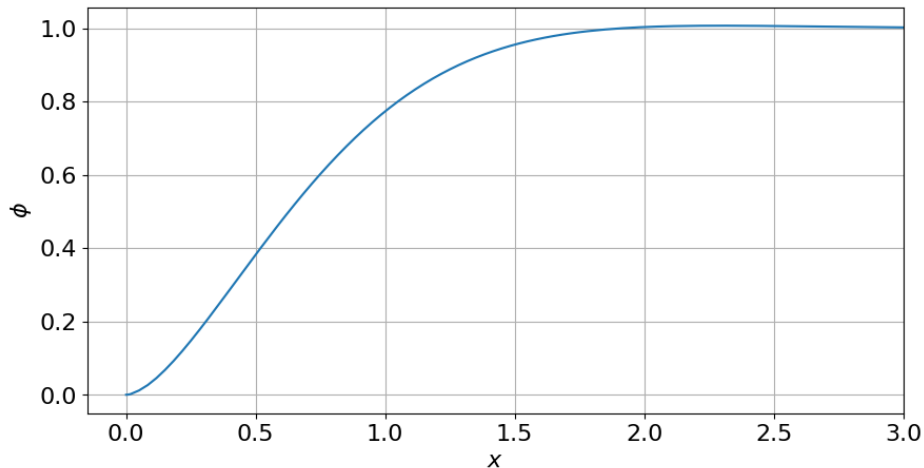
- Базисная функция  $g$  подбирается так, чтобы

$$\rho[\phi = g] \cdot S \rightarrow C > 0 \text{ при } r \rightarrow +0.$$





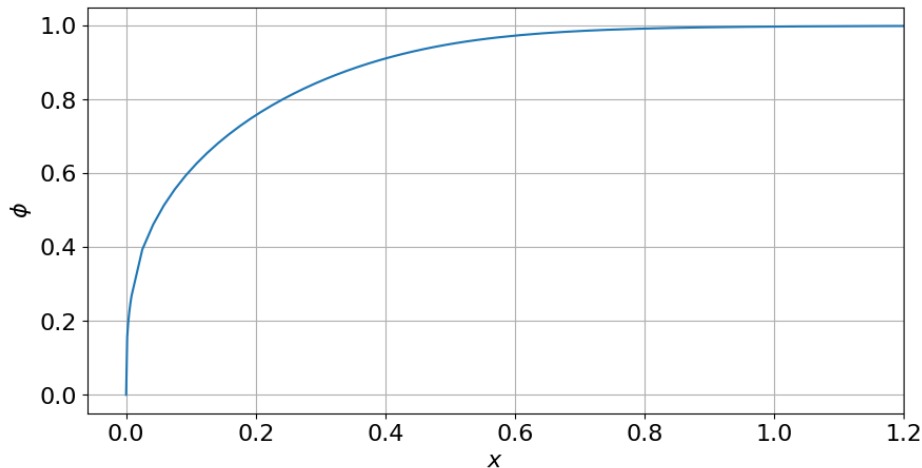
# Полученные результаты



Цилиндрический случай,  $\alpha = 1$ : особенность вида  $r^2 \ln r$



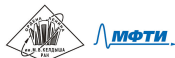
# Полученные результаты



Сферический случай,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ : особенность вида  $r^{1/3}$

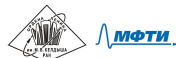


- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Теоретический анализ
- 4 Численный анализ
- 5 Исследование обобщения модели
- 6 Заключение



Основные результаты работы.

- Проведен теоретический анализ модели.
- Построена разностная схема, дана содержательная оценка ее устойчивости.
- Исследовано обобщение исходной модели; на основе метода конечных объемов построена специальная разностная схема, учитывающая особенности решений на границе области моделирования.



Вопросы будущих исследований.

- Насколько адекватно «классические» уравнения метода диффузной границы описывают включения высшей коразмерности?
- Каково возможное развитие моделей?



- [1] К. С. Pitike и W. Hong. “Phase-field model for dielectric breakdown in solids”. *Journal of Applied Physics* (2014).
- [2] Е. В. Зипунова, А. А. Кулешов и Е. Б. Савенков. “Численное исследование модели фазового поля для описания развития канала электрического пробоя в неоднородной среде”. 2024.
- [3] А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. “Устойчивость стационарных решений в модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»”. 2024.
- [4] Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. “О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности”. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша* (2020).
- [5] А. С. Пономарев, Е. В. Зипунова и Е. Б. Савенков. “Численное исследование обобщения модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»”. 2024.



Спасибо за внимание!

