

# 統合数学環境

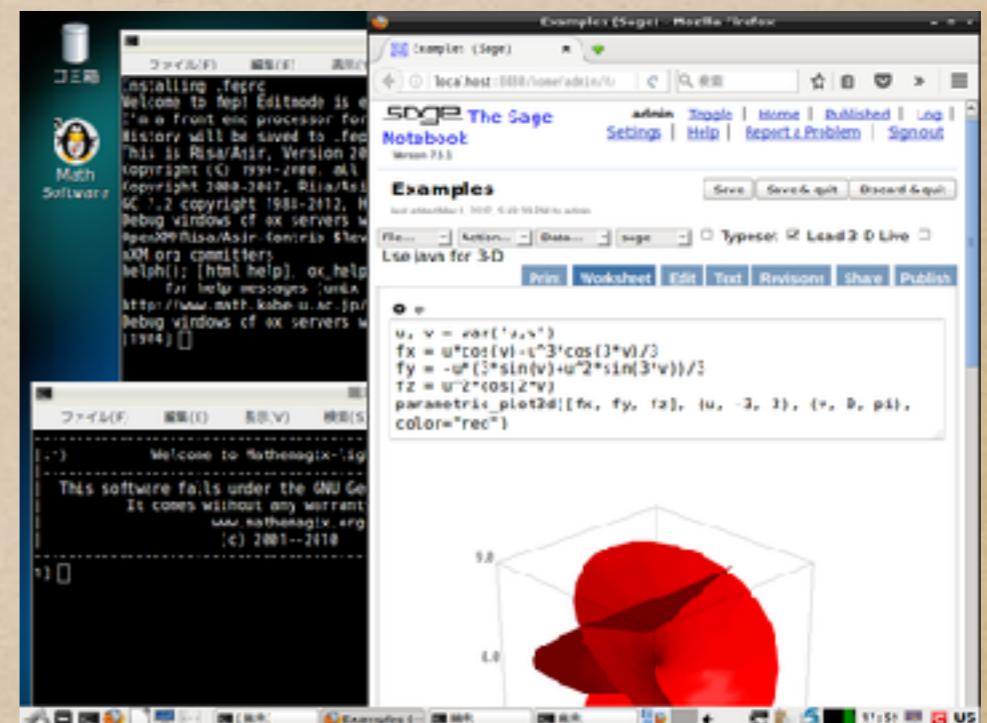
## SageMathへの招待

MathLibre Project

横田 博史

# MathLibre紹介

- Debian LiveがベースのLinux
  - KNOPPIXベースのときはKNOPPIX/Math
  - DVDやUSBメモリ(8GB以上推奨)から起動可能
- フリーの数学ソフト, 日本語文献等を収集
  - Risa/Asir, PARI/GP, Maxima, SageMath, Singular
  - GNU Octave, SciLab, GNU R
  - TeXLive, LibreOffice
- 関連サイト：
  - <http://www.mathlibre.org>
  - <https://github.com/knxm/mathlibre>



# 数学アプリケーション

- ◆ 数式処理
  - ◆ Maple, Mathematica, Maxima, Reduce, SageMath, GAP, PARI/go, RISA/Asir, Singular
- ◆ 数値行列処理
  - ◆ MATLAB, GNU Octave, SciLab, Yorick, Numpy
- ◆ 統計処理
  - ◆ GNU R
- ◆ 可視化
  - ◆ Surfer, OpenDX, Paraview, matplotlib, tachyon
- ◆ 動的幾何学ソフトウェア
  - ◆ KSEG, Cinderella, GeoGebra
- ◆ 証明支援
  - ◆ coq
- ◆ 文書作成
  - ◆ TeX

# 数学アプリケーション

- ◆ 数式処理
  - ◆ Maple, Mathematica, Maxima, Reduce, SageMath, GAP, PARI/go, RISA/Asir, Singular
- ◆ 数値行列処理
  - ◆ MATLAB, GNU Octave, SciLab, Yorick, Numpy
- ◆ 統計処理
  - ◆ GNU R
- ◆ 可視化
  - ◆ Surfer, OpenDX, Paraview, matplotlib, tachyon
- ◆ 動的幾何学ソフトウェア
  - ◆ KSEG, Cinderella, GeoGebra
- ◆ 証明支援
  - ◆ coq
- ◆ 文書作成
  - ◆ TeX

# 数式処理で注意すること

- ◆ 不用意に任意精度で大きな行列の処理はご法度です。倍精度で十分ならMATLAB系言語やPython+Numpy、あるいはSageMathで。
- ◆ 入力式は整理しましょう。汚ければ汚いだけ時間がかかります
- ◆ 積分計算の結果は吟味してください。
- ◆ 計算結果も目的に応じて整理しましょう。  
多項式ならHorner法を使えば積を減らせる。

# MATLAB系言語で注意すること

- ◆ 行列計算では行列やベクトルの演算として処理する
  - ◆ BLASのルーチンにデータを渡す為、一度に渡した方がご利益が大きい
- ◆ 成分単位の計算はdot演算子( $.*$ ,  $./$ ,  $.^$ )を使う
  - ◆ ちゃんと用意されています
  - ◆ if文もboolean演算で置き換える

```
B=(A>=2)
```

```
C=A.*B.^2 + (-3)*(1-B).*A
```

# SageMath概要

- ◆ 開発者のモットー: 「車輪の再発明をしない」
- ◆ Pythonを基軸にMathematicaやMATLABの代替となるもの
- ◆ 数学上の概念をPythonのクラスとして表現
- ◆ 使えるOSSをシームレスに統合

オブジェクト指向？

# オブジェクト指向？

そういえば、イデアと関連があったような…

イデア論の哲学者ってプラトン… 古代ギリシャ！

# オブジェクト指向？

そういえば、イデアと関連があったような…

イデア論の哲学者ってプラトン… 古代ギリシャ！

古代ギリシャと云えば

- 哲学
- 科学
- 芸術
- 同性愛…？

# 神聖隊

- ◆ 古代ギリシャのテーバイの精銳歩兵部隊
  - ◆ 150組、300名のカップル(当然、漢)
- ◆ テーバイの霸権に大功
- ◆ カイロネイアの戦いで壊滅(254名, 127組?)
- ◆ ピリッポス2世の目にも涙

# 神聖隊

- ◆ 古代ギリシャのテーバイの精銳歩兵部隊
  - ◆ 150組、300名のカップル(当然、漢)
    - ◆ 恋人に無様な自分を見せられない!
    - ◆ 恋人を危険な目に合わせられない!
- ◆ テーバイの霸権に大功
- ◆ カイロネイアの戦いで壊滅(254名, 127組?)
- ◆ ピリッポス2世の目にも涙

# 神聖隊

- ◆ 古代ギリシャのテーバイの精銳歩兵部隊
  - ◆ 150組、300名のカップル(当然、漢)
    - ◆ 恋人に無様な自分を見せられない!
    - ◆ 恋人を危険な目に合わせられない!
- ◆ テーバイの霸権に大功
- ◆ カイロネイアの戦いで壊滅(254名, 127組?)
- ◆ ピリッポス2世の目にも涙



# 神聖隊

- ◆ 古代ギリシャのテーバイの精銳歩兵部隊
  - ◆ 150組、300名のカップル(当然、漢)
    - ◆ 恋人に無様な自分を見せられない!
    - ◆ 恋人を危険な目に合わせられない!
- ◆ テーバイの霸権に大功
- ◆ カイロネイアの戦いで壊滅(254名, 127組?)
- ◆ ピリッポス2世の目にも涙



# テルモピュライの戦い

旅人よ、行きて語れ、  
ラケダイモンの人々に。  
我等かのことばに従いて  
ここに伏すと

ὝΩ ξεῖν', ἀγγέλλειν  
Λακεδαιμονίοις ὅτι τῇδε  
κείμεθα, τοῖς κείνων  
ρήμασι πειθόμενοι.

シモーニデースのエピグラム



レオニダス1世



# テルモピュライの戦い

旅人よ、行きて語れ、  
ラケダイモンの人々に。  
我等かのことばに従いて  
ここに伏すと

ὝΩ ξεῖν', ἀγγέλλειν  
Λακεδαιμονίοις ὅτι τῇδε  
κείμεθα, τοῖς κείνων  
ρήμασι πειθόμενοι.

シモーニデースのエピグラム



レオニダス1世



# テルモピュライの戦い

旅人よ、行きて語れ、  
ラケダイモンの人々に。  
我等かのことばに従いて  
ここに伏すと

Ὥ ξεῖν', ἀγγέλλειν  
Λακεδαιμονίοις ὅτι τῇδε  
κείμεθα, τοῖς κείνων  
ρήμασι πειθόμενοι.

シモーニデースのエピグラム



レオニダス1世



# テルモピュライの戦い

旅人よ、行きて語れ、  
ラケダイモンの人々に。  
我等かのことばに従いて  
ここに伏すと

Ὥ ξεῖν', ἀγγέλλειν  
Λακεδαιμονίοις ὅτι τῇδε  
κείμεθα, τοῖς κείνων  
ρήμασι πειθόμενοι.

シモーニデースのエピグラム

媚びぬ！  
省みぬ！



レオニダス1世



# テルモピュライの戦い

旅人よ、行って語れ、  
ラケダイモンの人々に。  
我等かのことばに従いて  
ここに伏すと

ὝΩ ξεῖν', ἀγγέλλειν  
Λακεδαιμονίοις ὅτι τῇδε  
κείμεθα, τοῖς κείνων  
ρήμασι πειθόμενοι.

シモーニデースのエピグラム

媚びぬ！  
省みぬ！



レオニダス1世



# A is B

- ◆ 繋辞(copula)

「AはBである(A is B)」

主語：A, 述語：B

- ◆ Bが普遍である $\Leftrightarrow$

Bが複数の主語の述語になる

- ◆ たまはネコである。

みけはネコである。 $\Leftrightarrow$

「ネコ」は普遍



# カテゴリー(範疇)

- ◆ カテゴリー：コピュラ文 A is B で述語Bが取り得る形態。

アリストテレスはカテゴリーを10種類に分類

カテゴリー	例
まさにそれであるもの(本質的存在)	人間、犬
どれだけか(量)	88Kg、1.8Kg
どうのようか(性質, 質)	小太り、ふさふさ
何に対する(関係)	約50倍の体重、小さい
どこか(場所)	千代田公園、滑り台の前
何時か(時間)	昨日、19:20
置かれている(態勢)	立っている、お座り
持っている(所有)	リードを持っている、首輪がある
作用する(能動)	撫でる、舐める
作用を受ける(受動)	舐められる、撫でられる

# 語ること

- ◆ それが何であるか
- ◆ それがどのようなものであるか

# 語ること

- ◆ それが何であるか

- ◆ 類 → 上位概念
- ◆ 種 → 下位概念

- ◆ それがどのようなものであるか

# 語ること

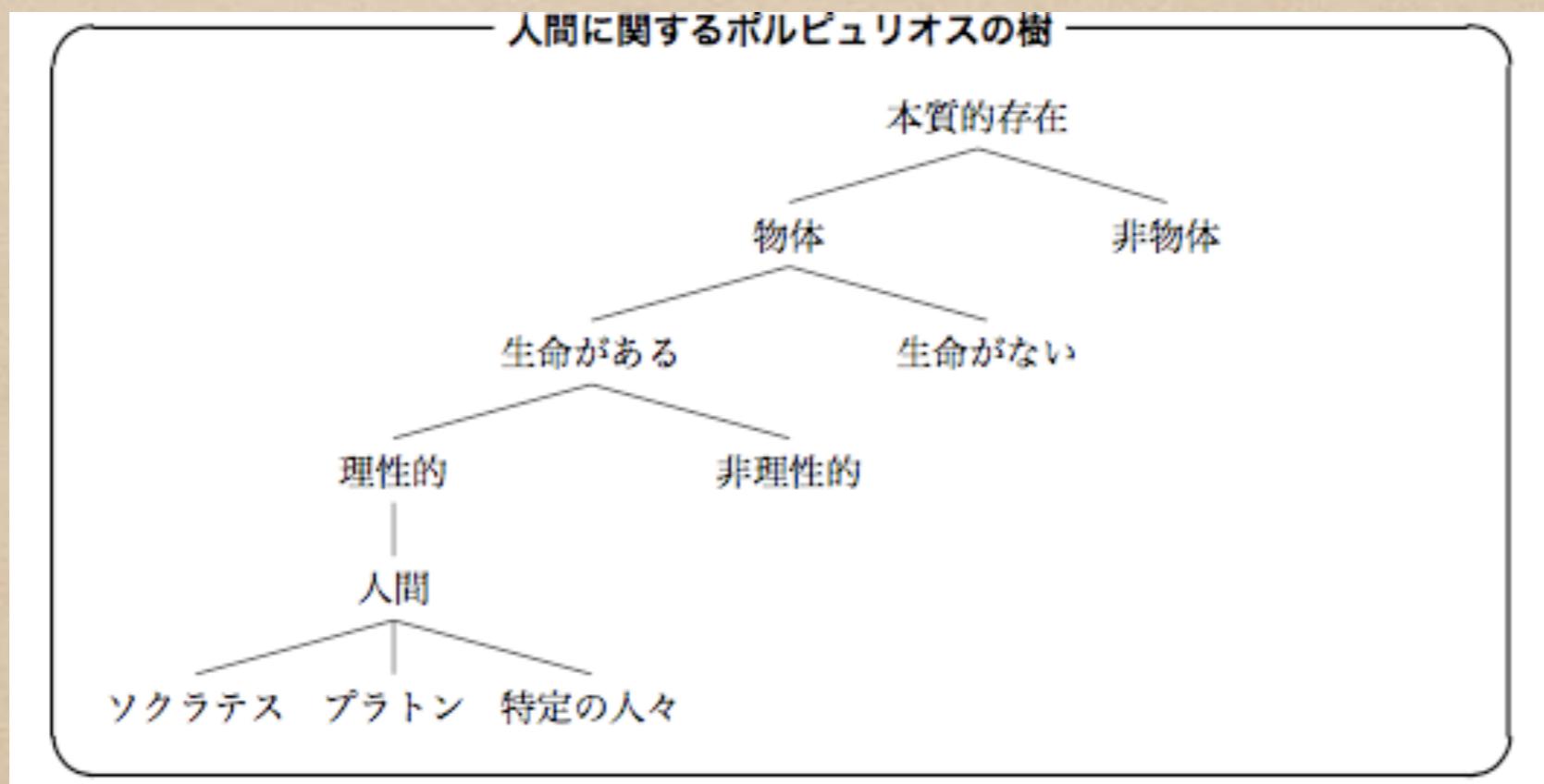
- ◆ それが何であるか

- ◆ 類 → 上位概念
- ◆ 種 → 下位概念

- ◆ それがどのようなものであるか

- ◆ 種差 → 種を区分するもの
- ◆ 偶有性 → 程度を示せるもの
- ◆ 特有性 → そのものを指し示すことができるもの

# ポルピュリオスの樹



- ◆ 範疇論の入門書「手引(イサゴーゲー)」の例を可視化したもの
- ◆ 概念の階層構造を可視化したものである

# 概念

- ◆ イデア：抽象性から具象性
  - 対象はイデアの像
- ◆ 概念：具象性から抽象性
  - 普遍性、ロゴス(説明規定)



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

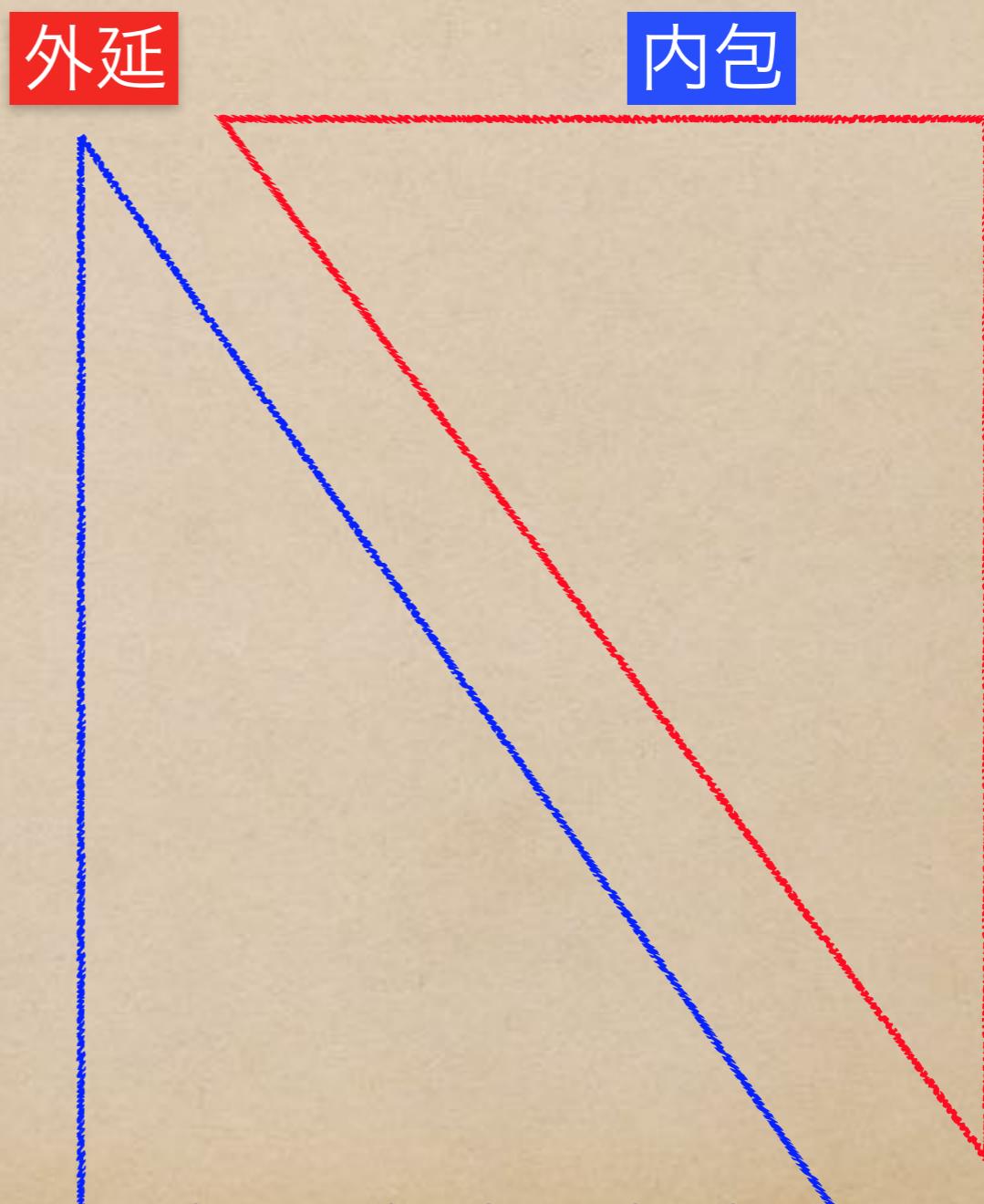
ある概念が持つ性質

- ◆ 外延

具体的な成員

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

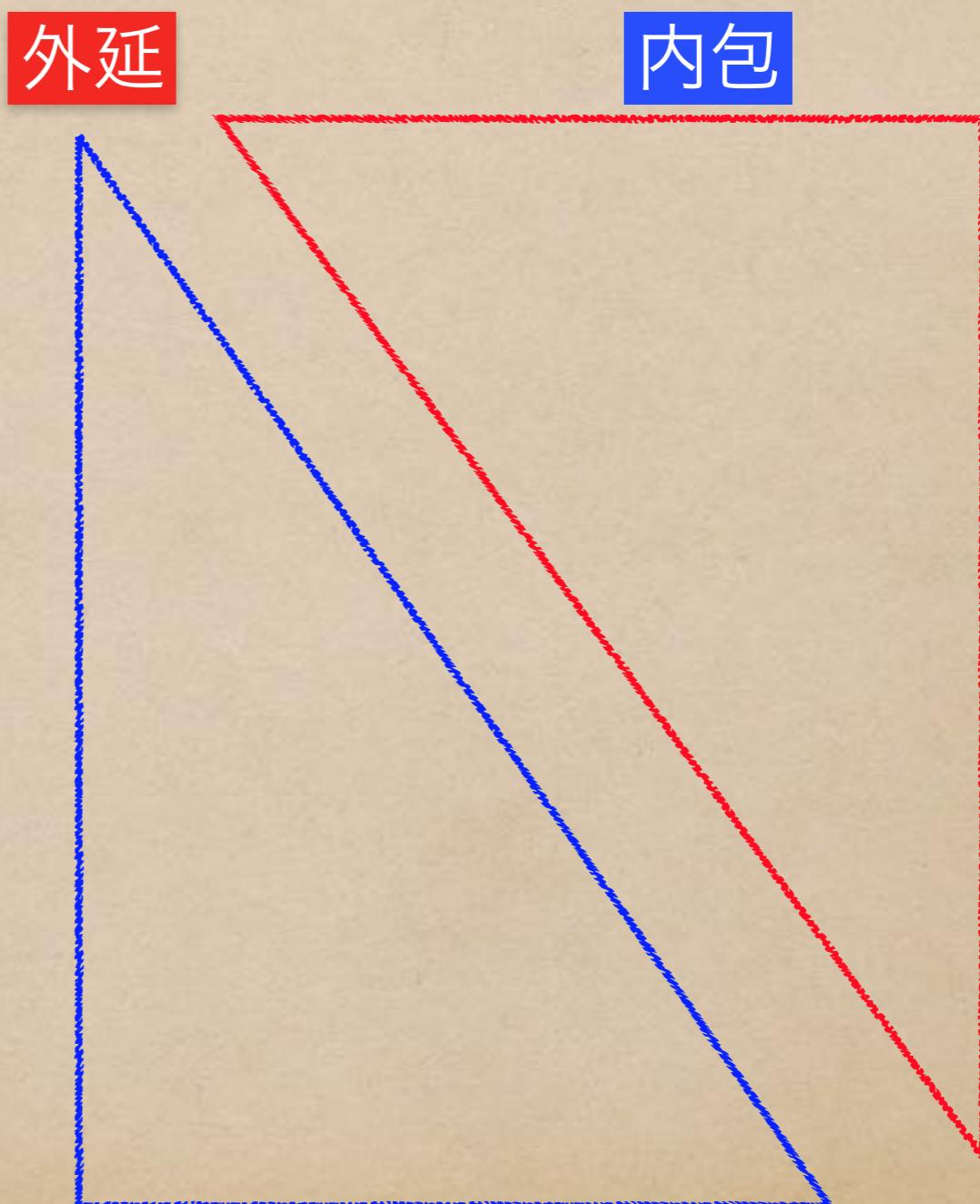
```
[2*i-1 for i in [1,2,3,4]]
```

- ◆ 外延

具体的な成員

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

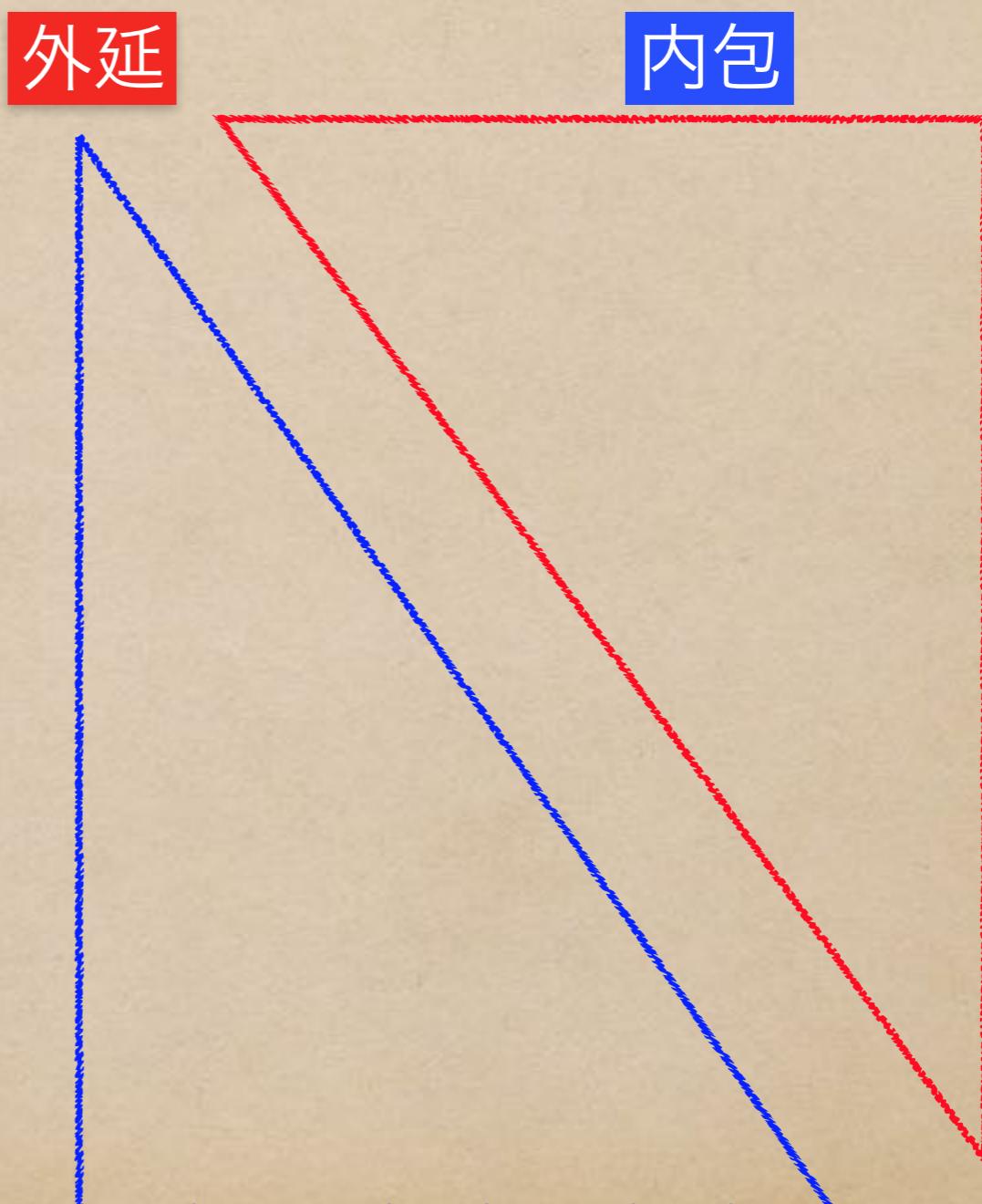
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

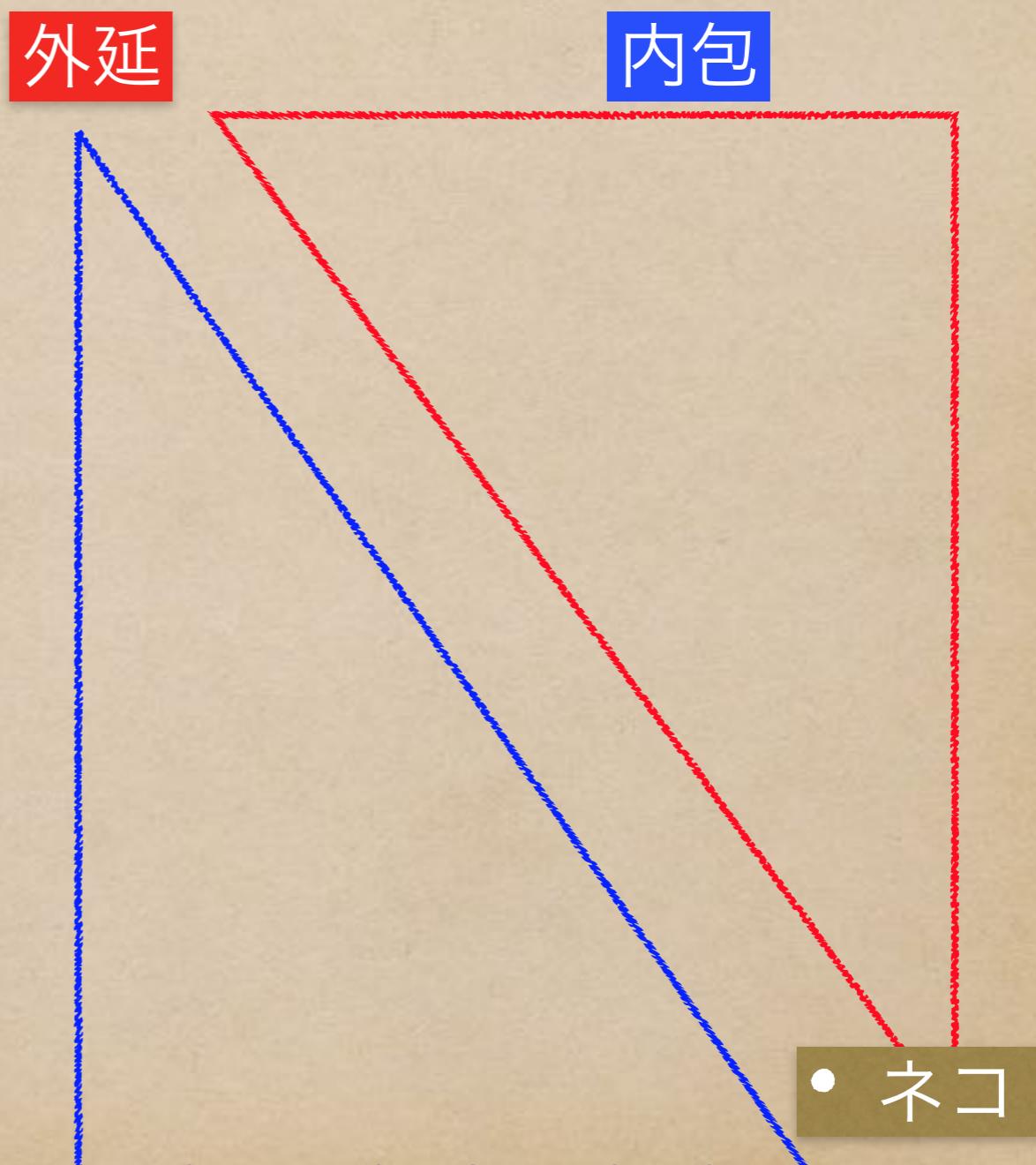
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

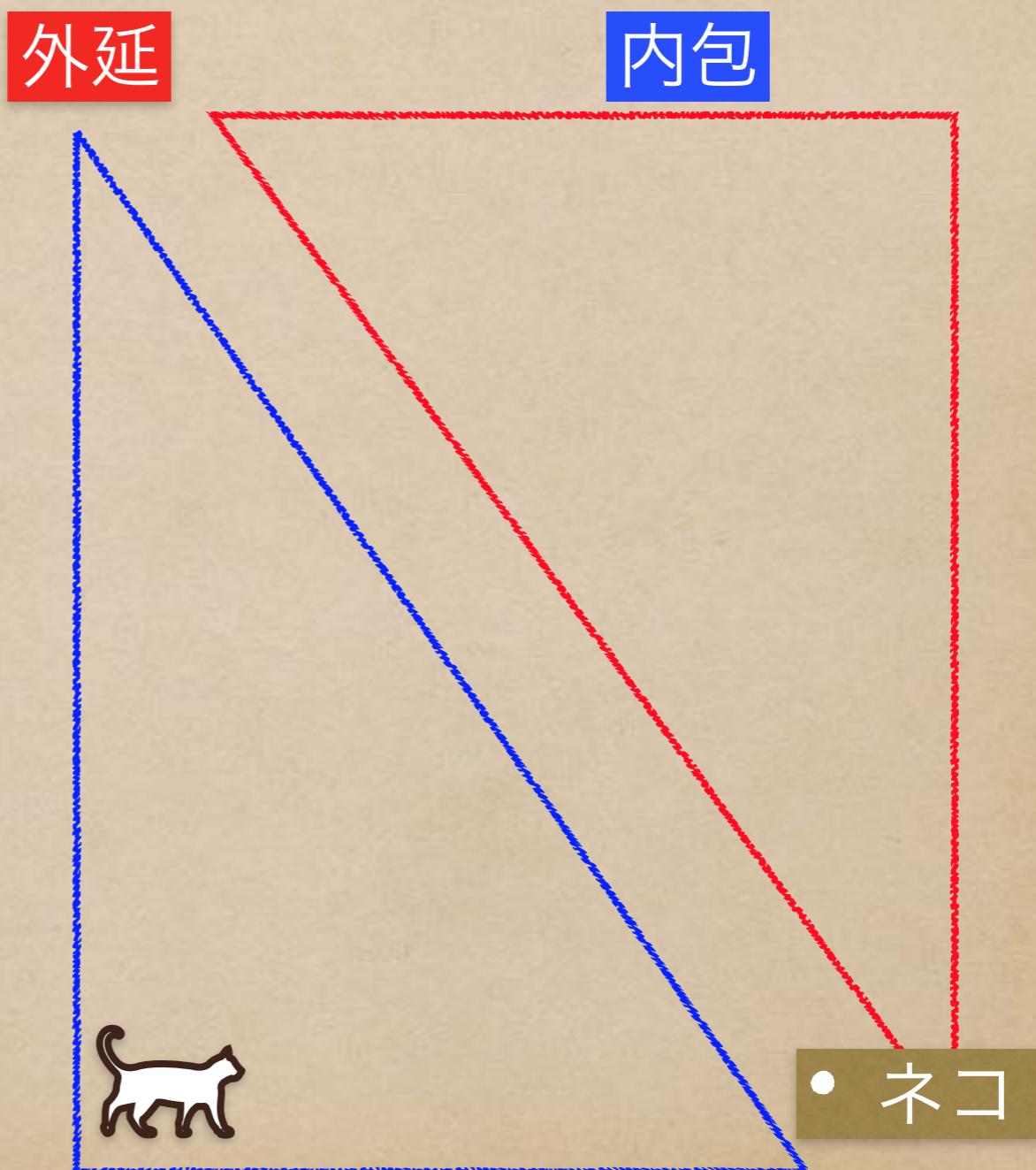
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

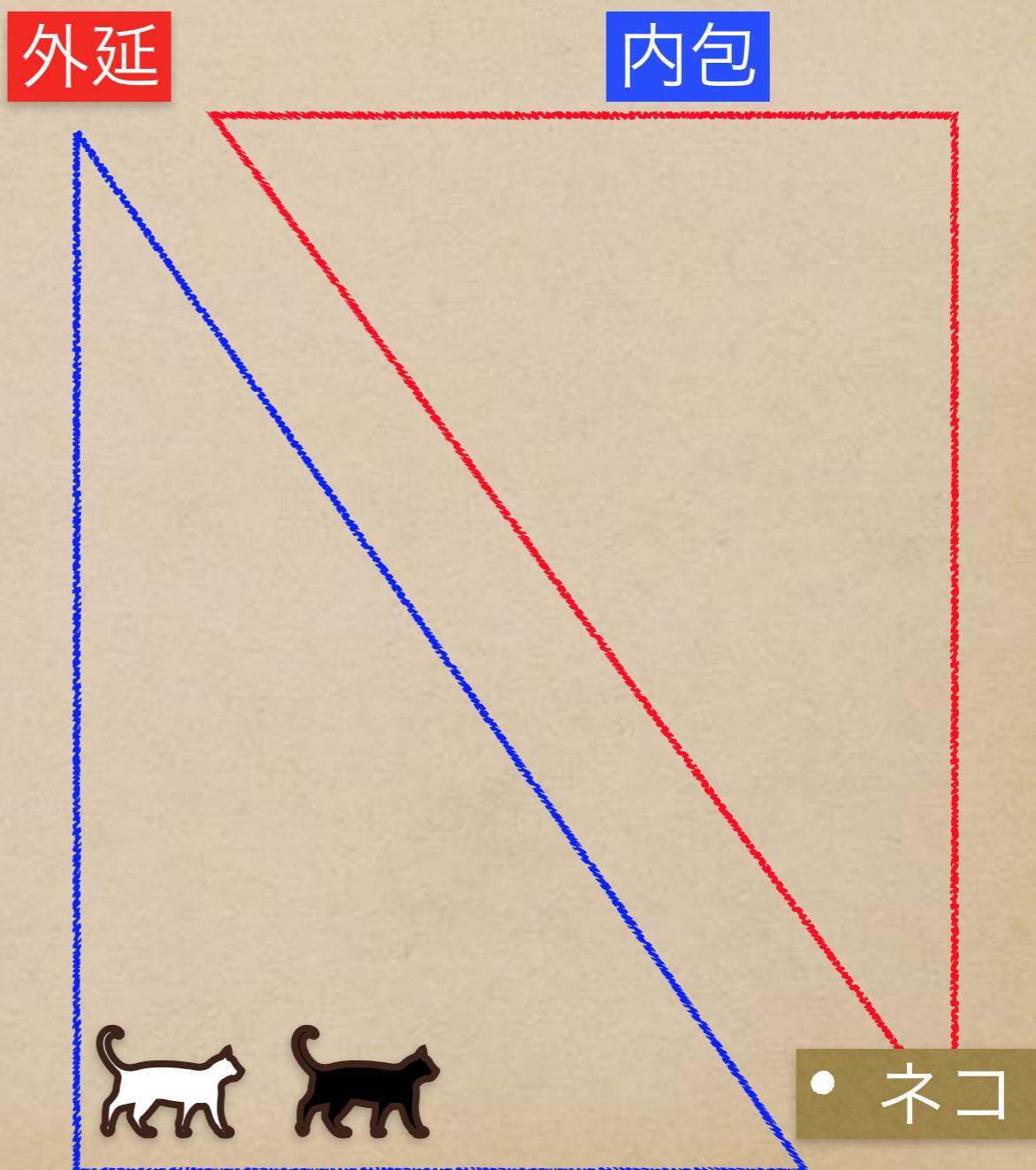
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

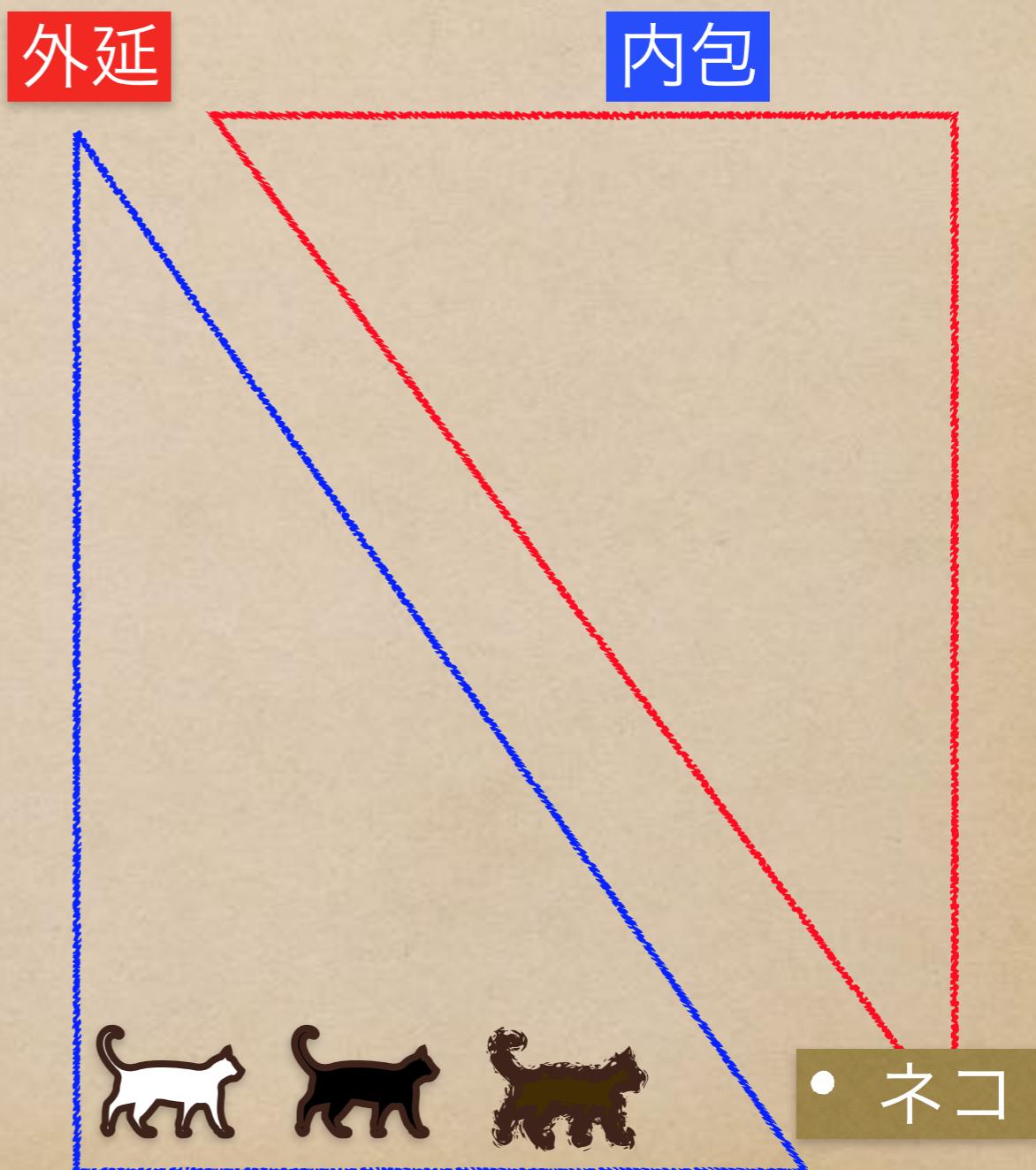
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

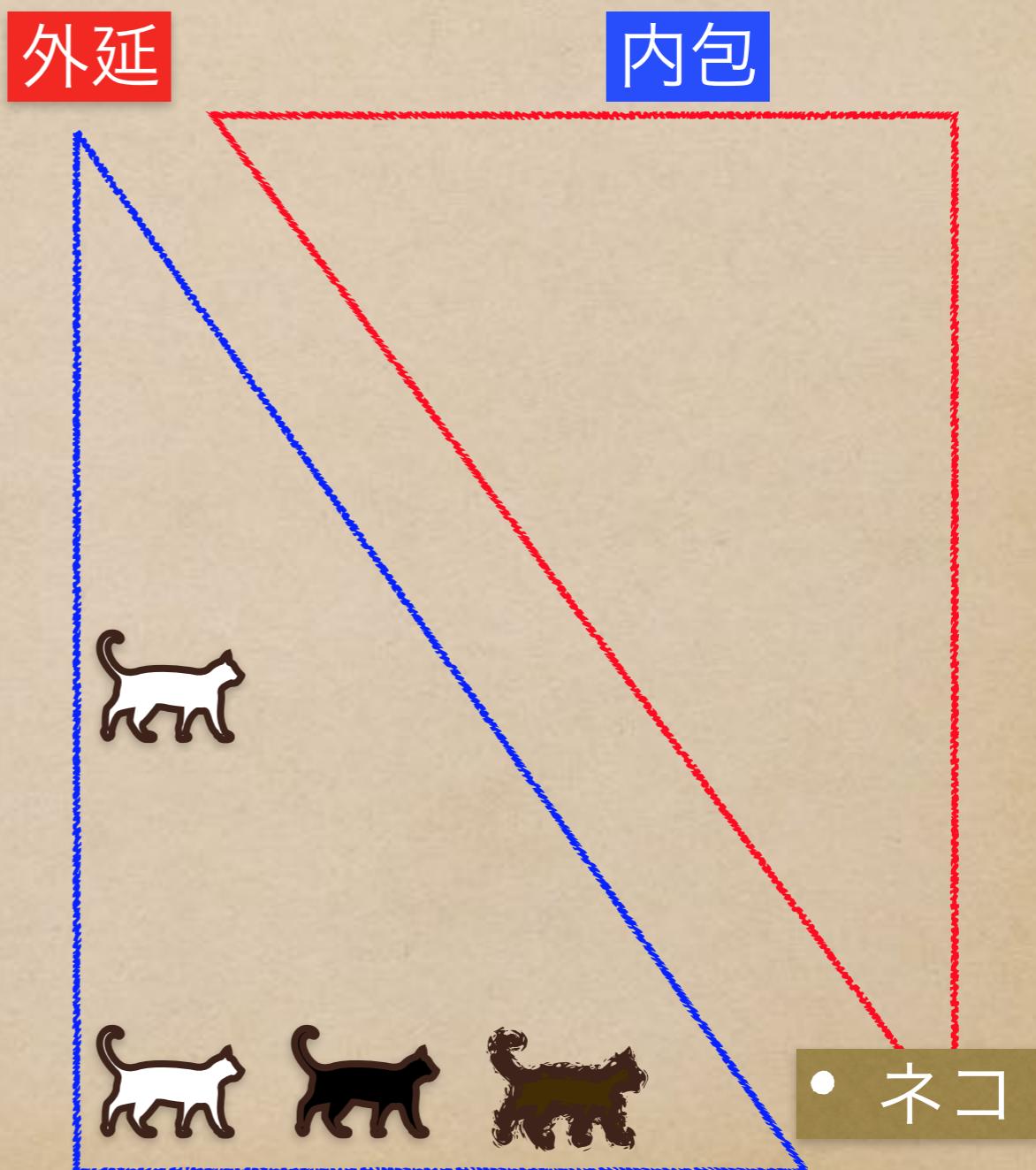
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

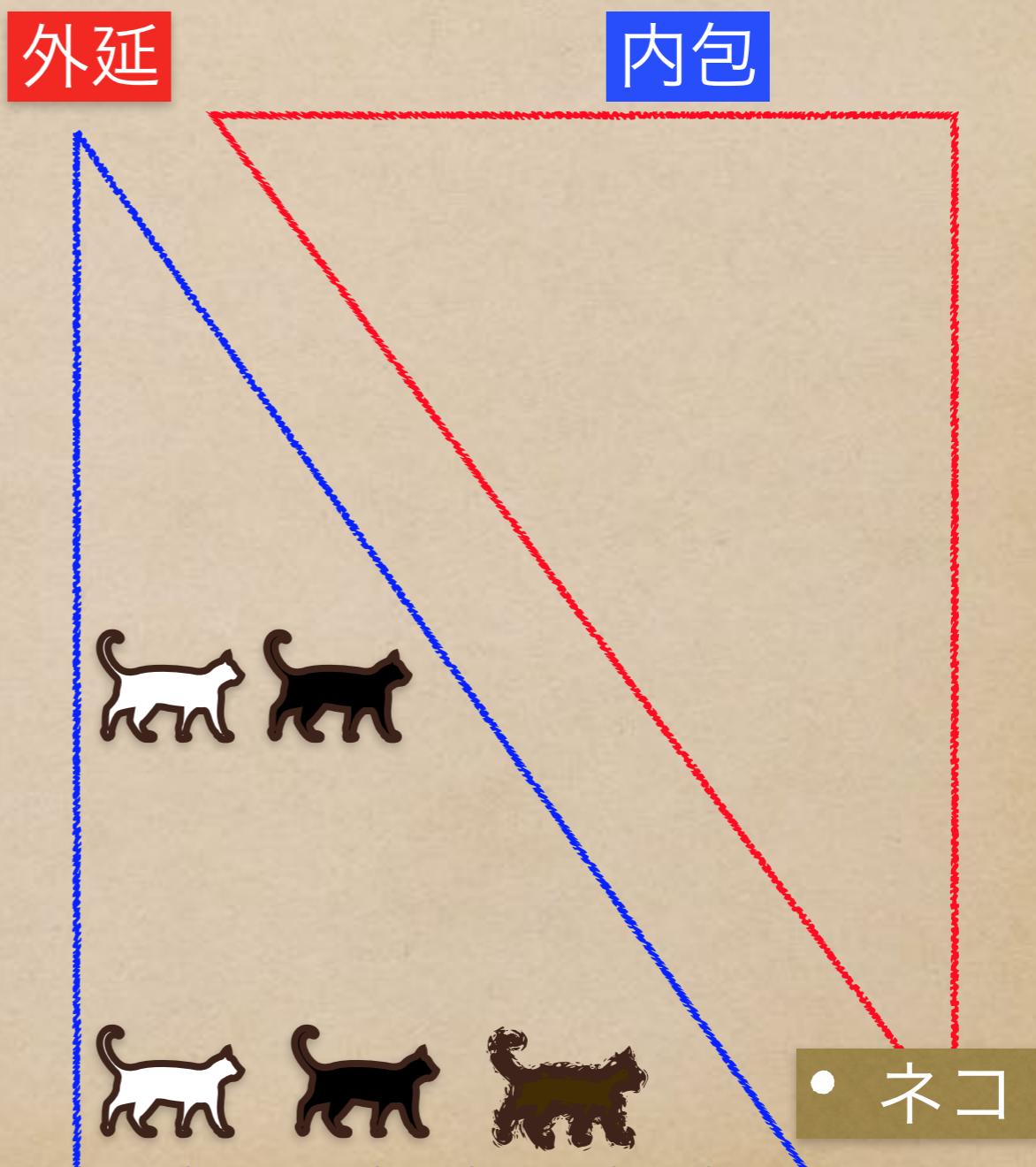
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

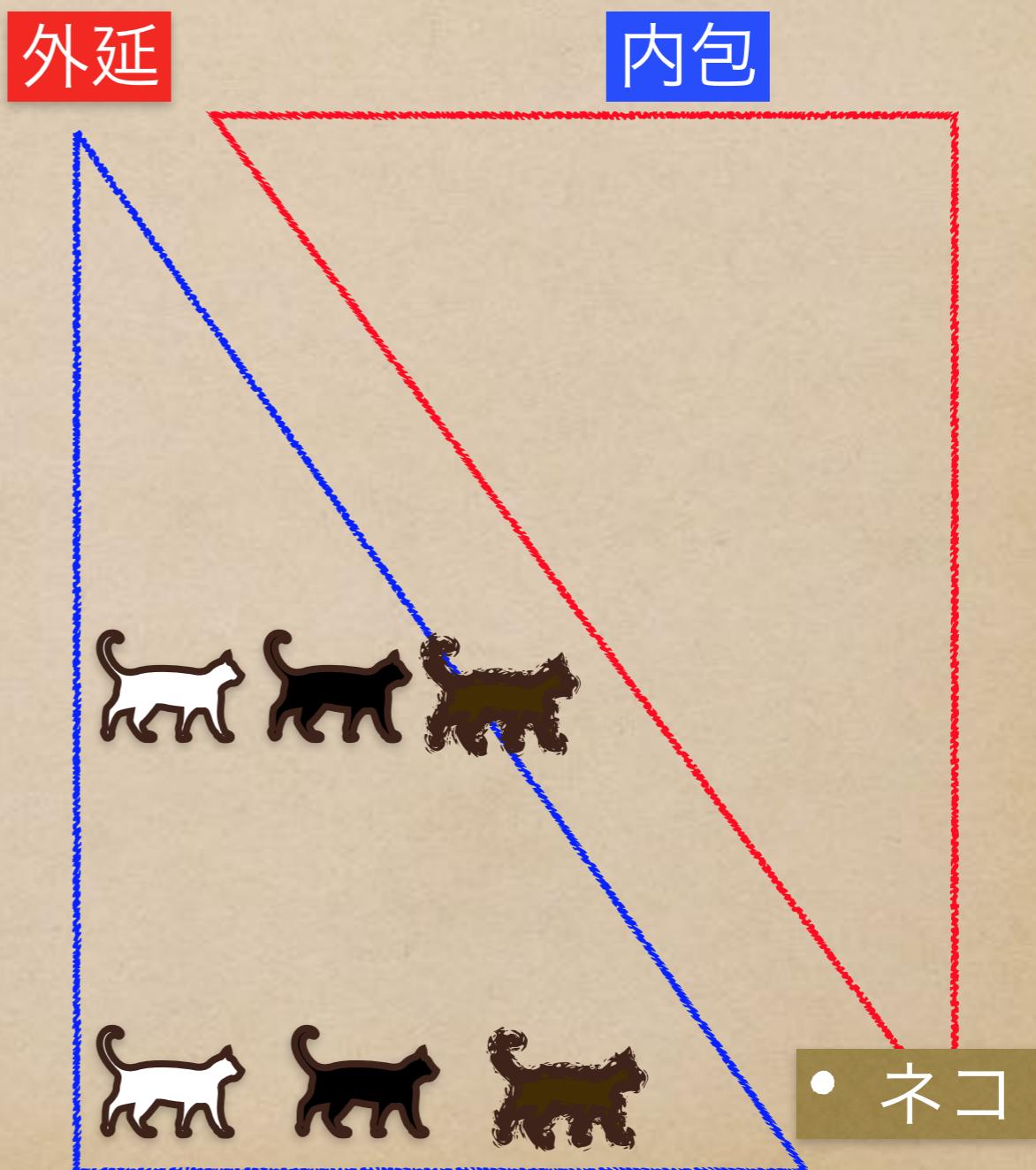
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

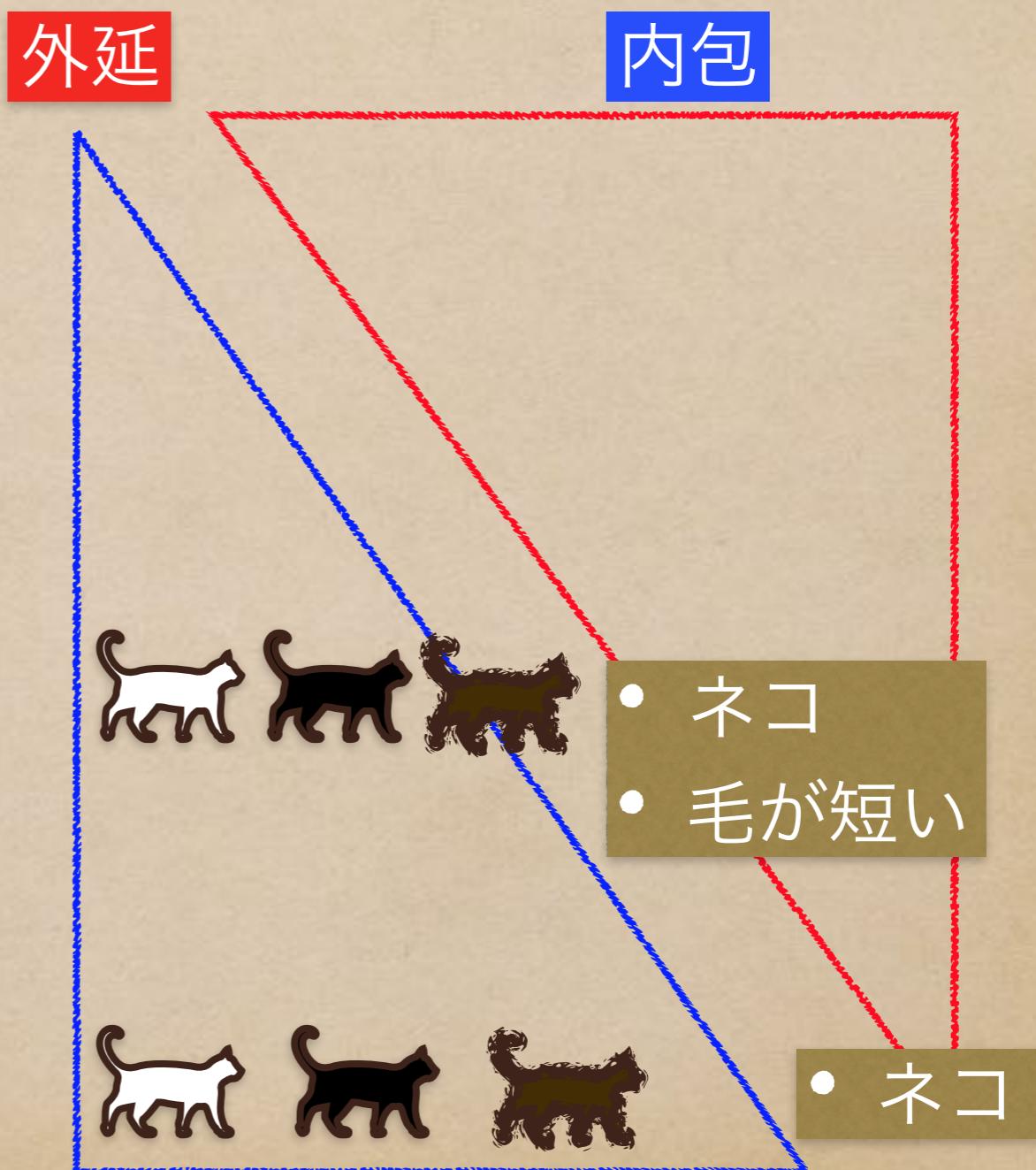
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

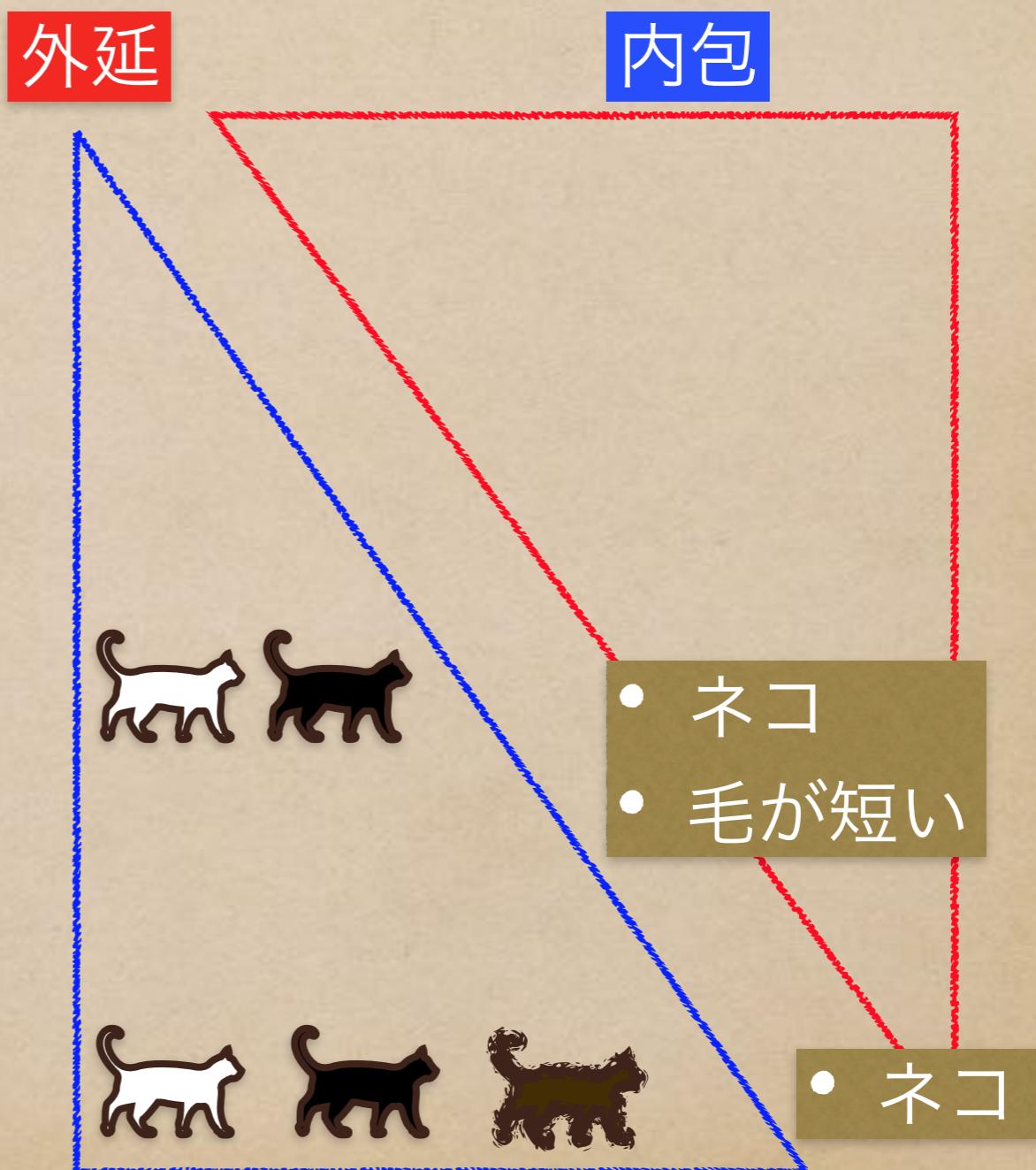
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

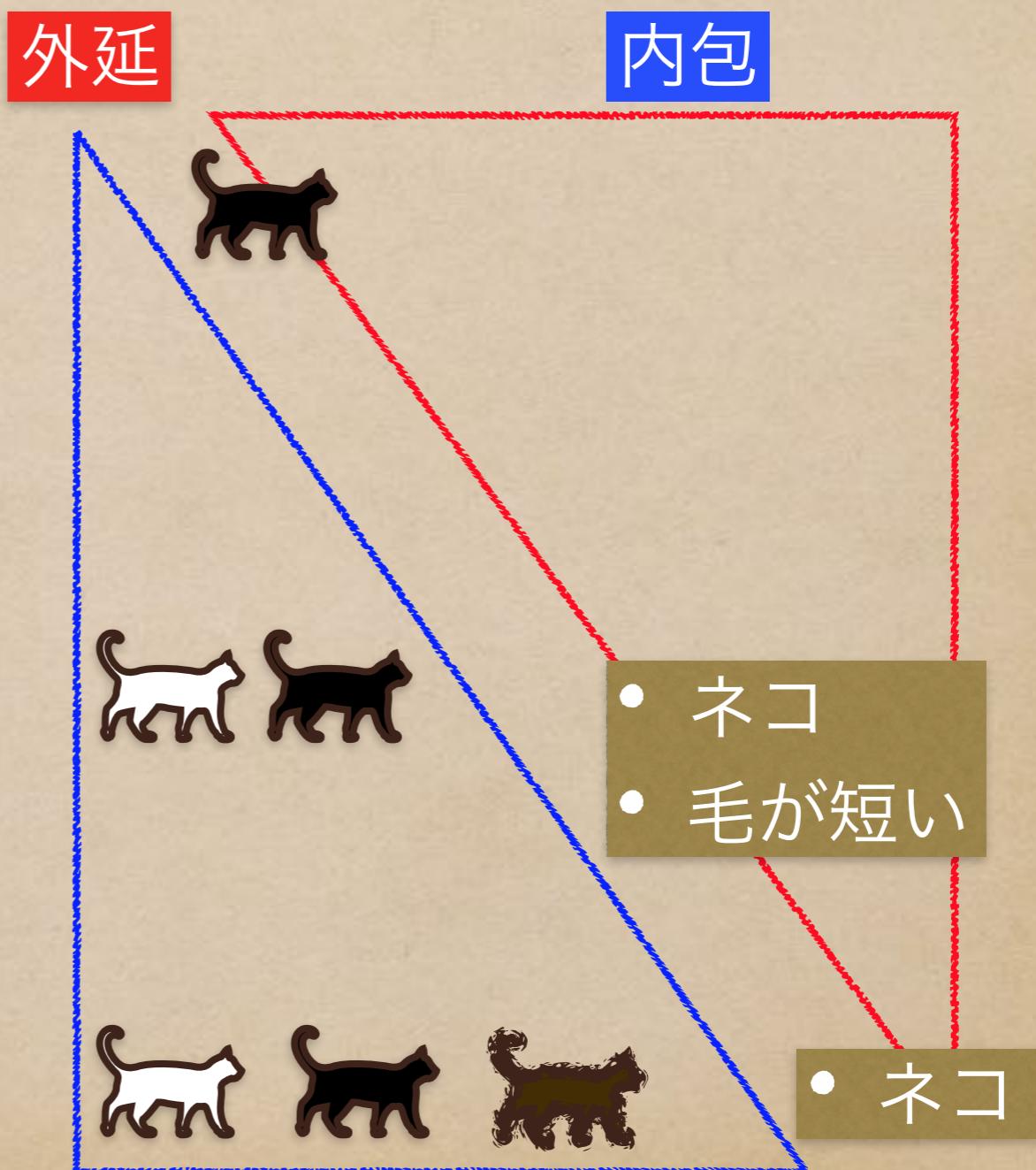
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[ $2^{*i-1}$  for  $i$  in [1,2,3,4]]

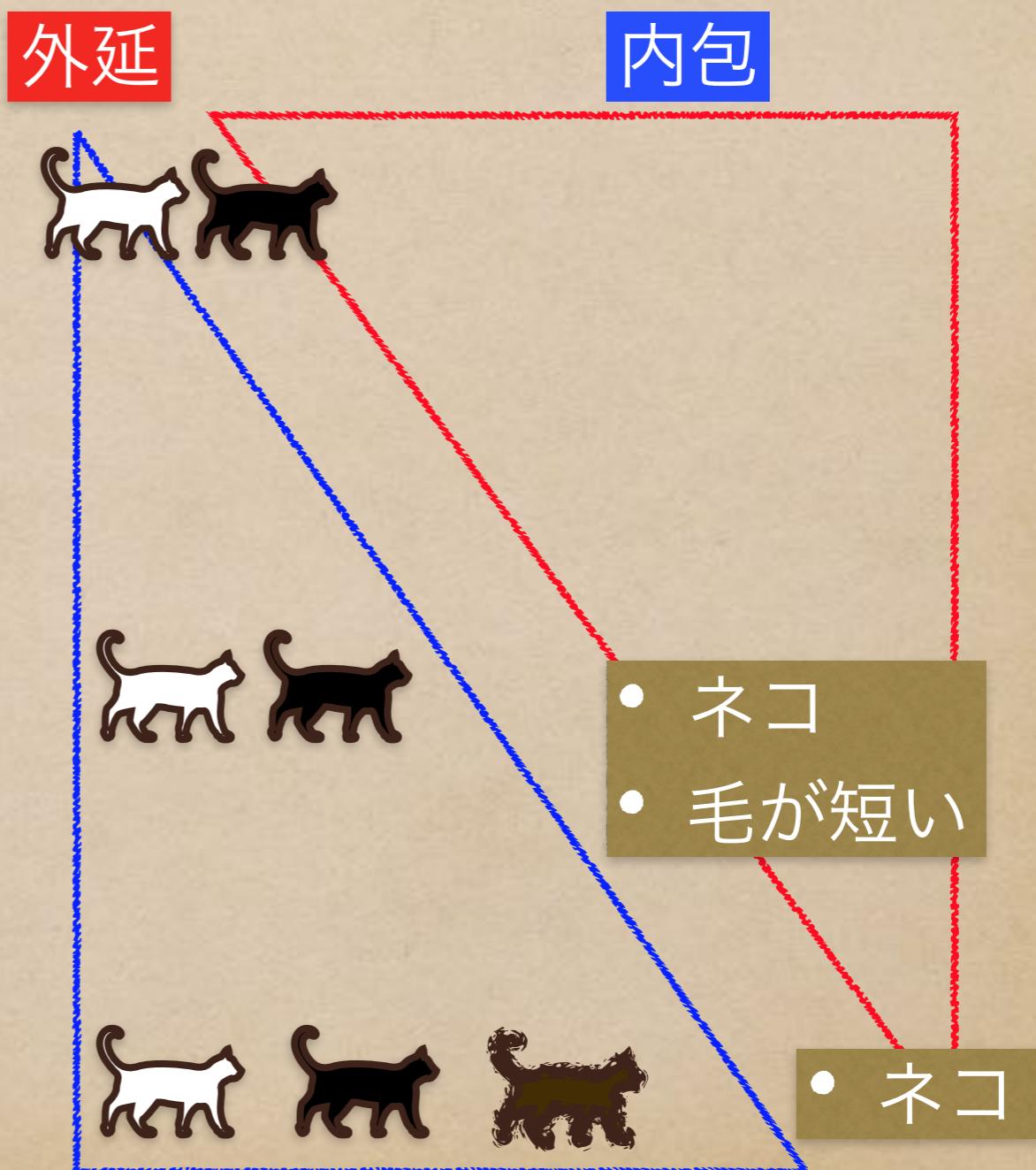
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[2\*i-1 for i in [1,2,3,4]]

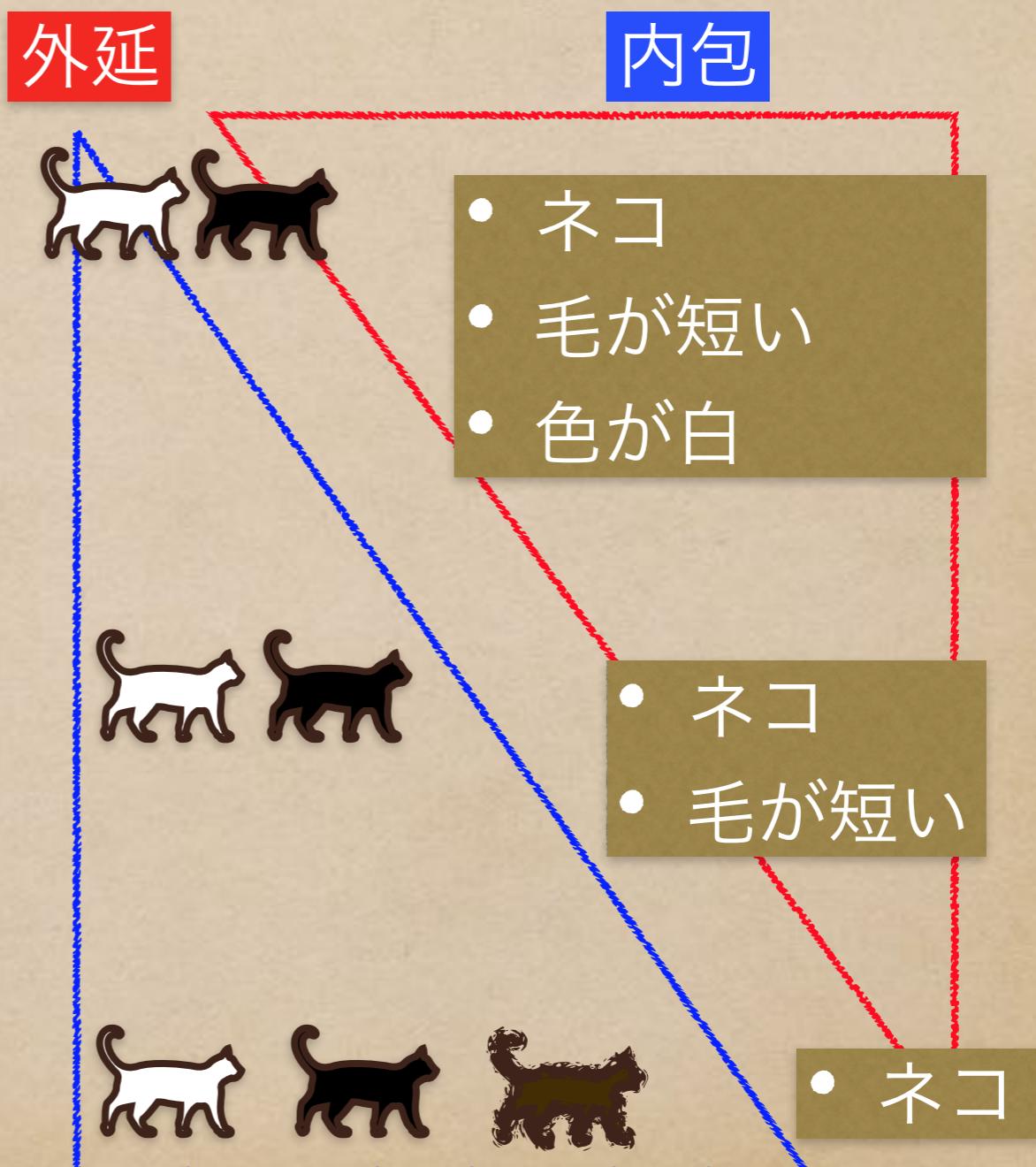
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# 内包外延反比例増減の法則

- ◆ 内包

ある概念が持つ性質

[2\*i-1 for i in [1,2,3,4]]

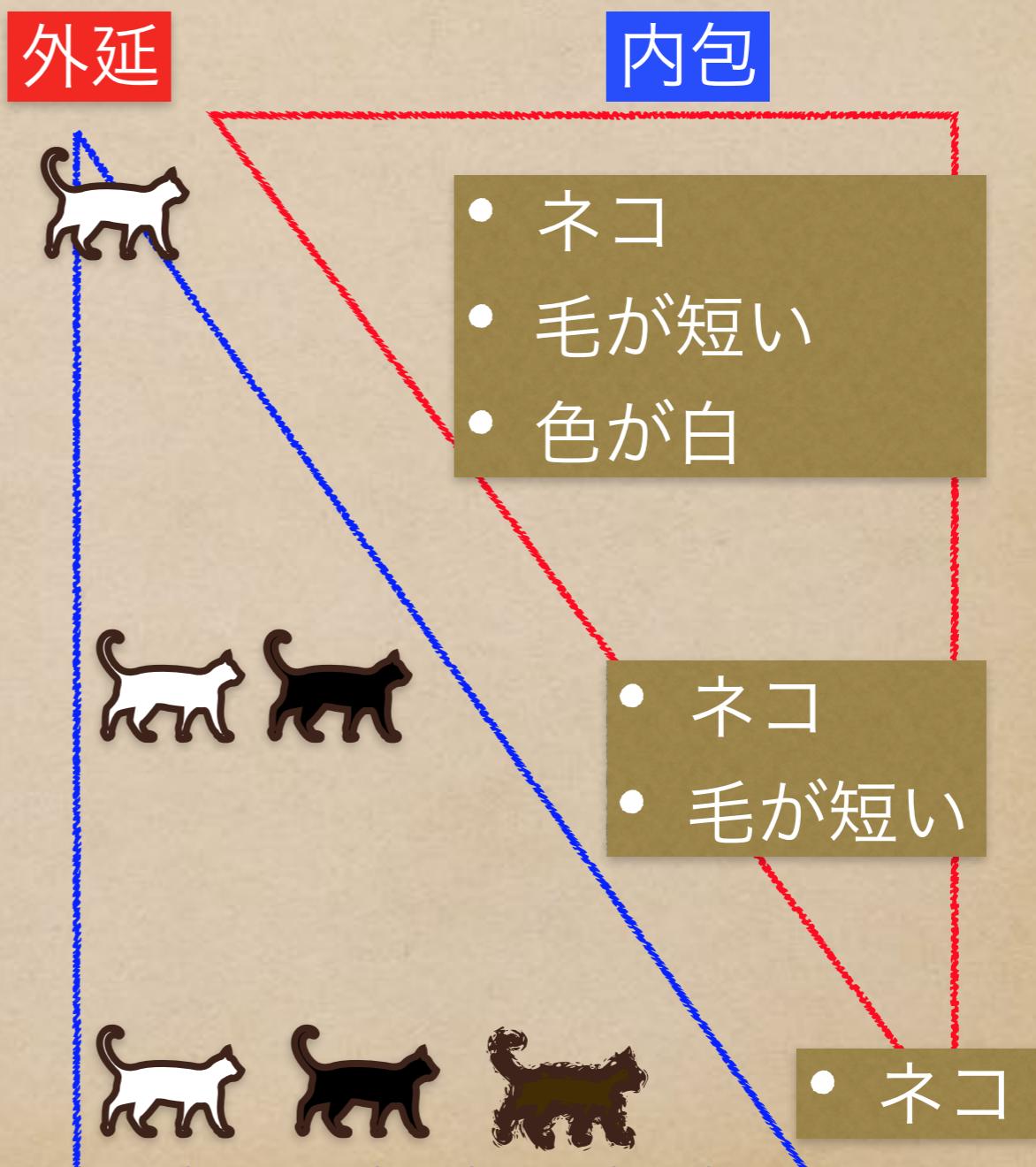
- ◆ 外延

具体的な成員

[1, 3, 5, 7]

- ◆ 内包外延半比例増減の法則

内包と外延が反比例の関係にあること



# プラトンの人間の定義



プラトン

# プラトンの人間の定義



プラトン

人間とは

- 二本足で
- 羽根を持たない

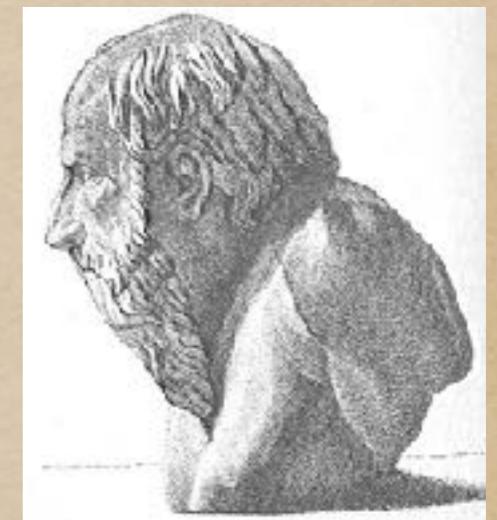
# プラトンの人間の定義



プラトン

人間とは

- 二本足で
- 羽根を持たない



ディオゲネス

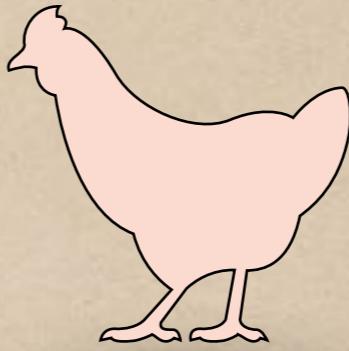
# プラトンの人間の定義



プラトン

人間とは

- 二本足で
- 羽根を持たない



ディオゲネス

# プラトンの人間の定義

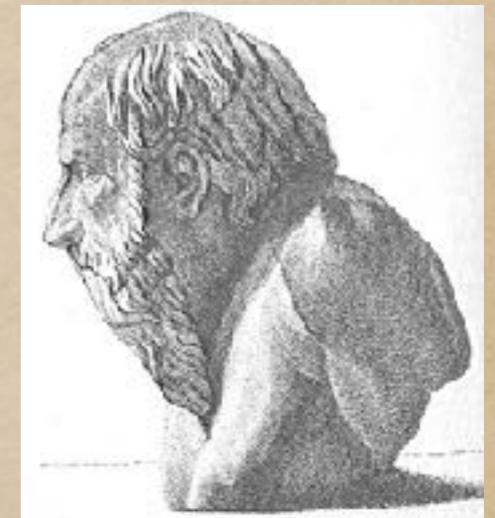
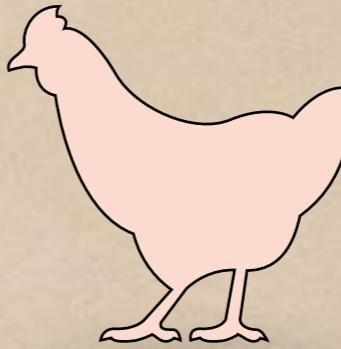


プラトン

人間とは

- 二本足で
- 羽根を持たない

これがお前の人間だ！



ディオゲネス

# プラトンの人間の定義

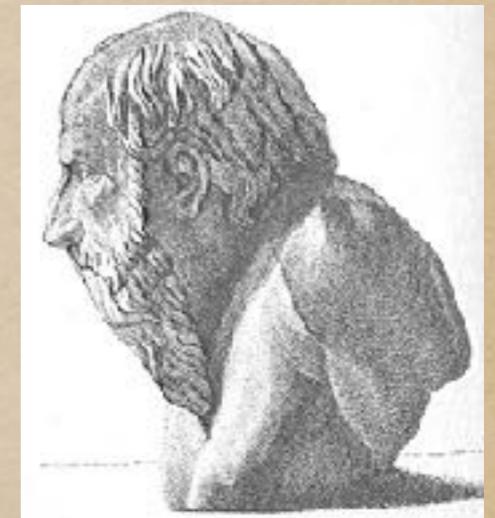
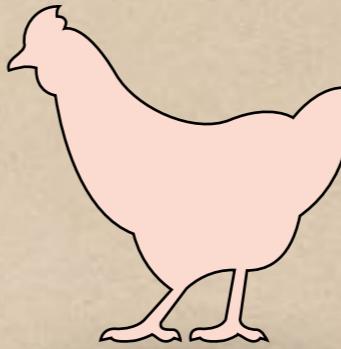


プラトン

人間とは

- 二本足で
- 羽根を持たない

これがお前の人間だ！



ディオゲネス

# プラトンの人間の定義

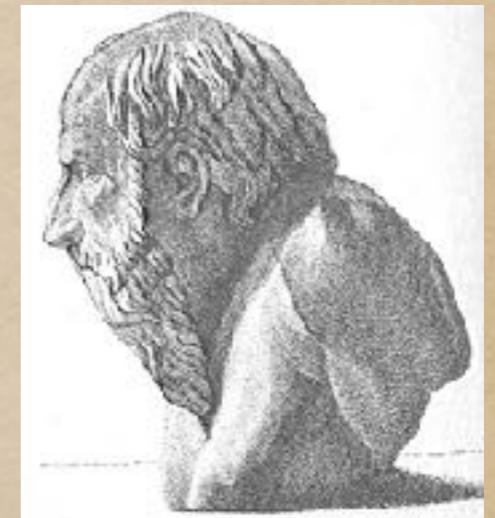
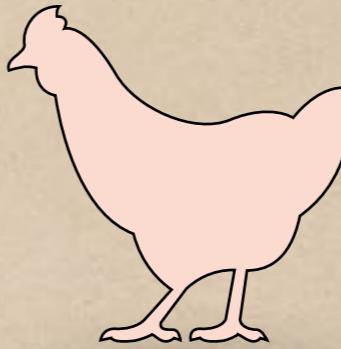


プラトン

人間とは

- 二本足で
- 羽根を持たない

これがお前の人間だ！



ディオゲネス

# プラトンの人間の定義

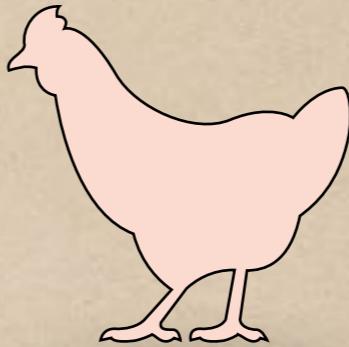


プラトン

人間とは

- 二本足で
- 羽根を持たない

これがお前の人間だ！



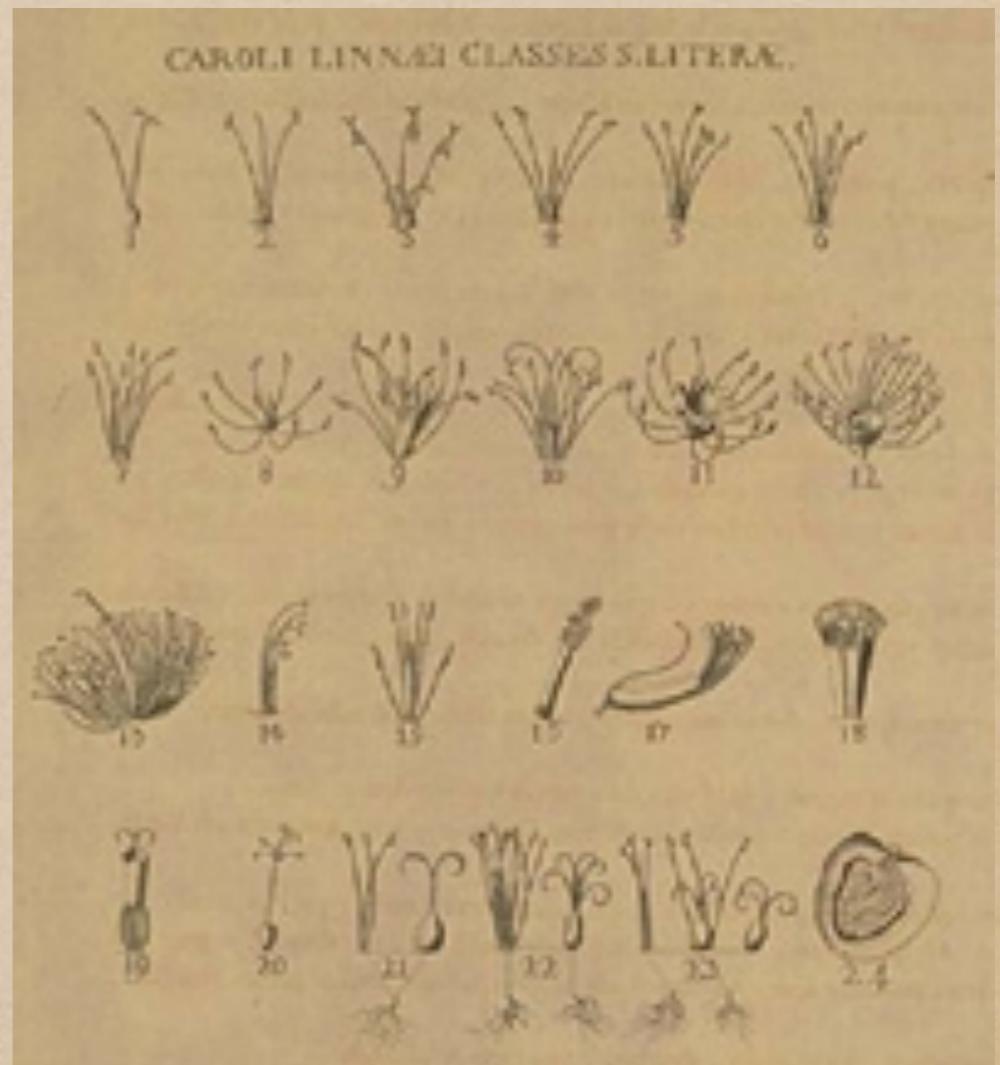
ディオゲネス

人間とは

- 二本足で
- 羽根を持たない
- 平たい爪を持つ

# リンネの二名式命名法

- ◆ リンネは植物の学名で先頭に「類」、その次に「種」を配置する二名式命名法を採用
- ◆ 動物や植物の分類等で幅広く用いられている
- ◆ リンネは植物の分類を雄蕊の数で行なっている



# 本草学と博物学

- ◆ 山海経
  - ◆ 様々な動物(怪物)の効用を列記
- ◆ 本草学
  - ◆ 薬学として発展
  - ◆ 医者でなければ数寄者(木内石亭)
    - ◆ 収集することへの情熱(対象を愛する)
- ◆ 博物学
  - ◆ 収集することへの情熱+分類することへの情熱

# 本草学と博物学

- ◆ 山海経
  - ◆ 様々な動物(怪物)の効用を列記
- ◆ 本草学
  - ◆ 薬学として発展
  - ◆ 医者でなければ数寄者(木内石亭)
    - ◆ 収集することへの情熱(対象を愛する)
- ◆ 博物学
  - ◆ 収集することへの情熱 + 分類することへの情熱



# 本草学と博物学

- ◆ 山海経
  - ◆ 様々な動物(怪物)の効用を列記
- ◆ 本草学
  - ◆ 薬学として発展
  - ◆ 医者でなければ数寄者(木内石亭)
  - ◆ 収集することへの情熱(対象を愛する)
- ◆ 博物学
  - ◆ 収集することへの情熱 + 分類することへの情熱

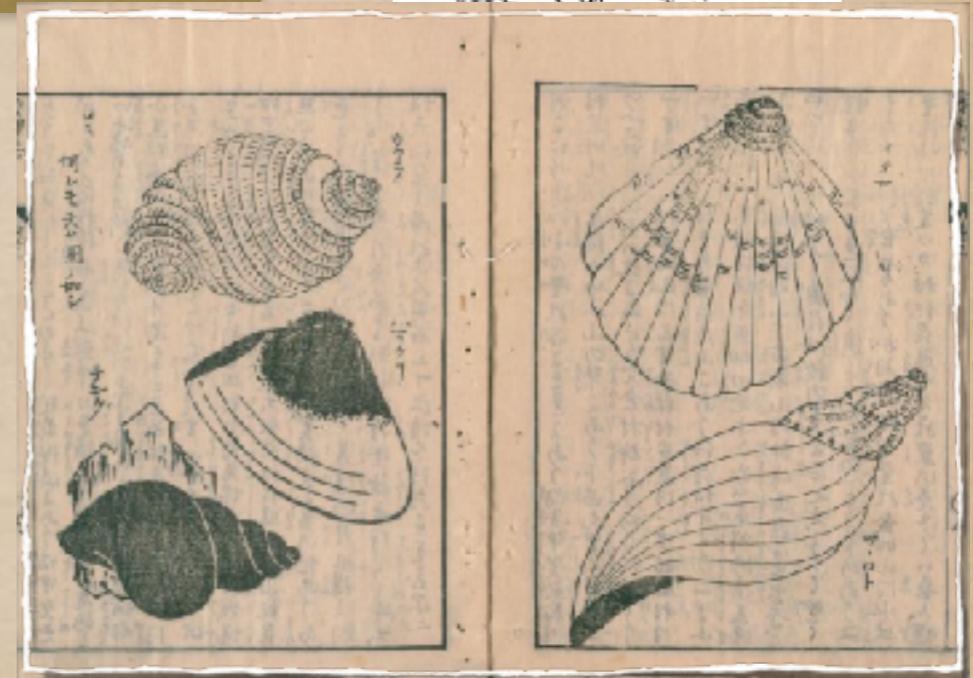
南山経より  
「有獸焉，其狀如  
禺而白耳，伏行人  
走，其名曰狌狌，  
食之善走」



# 本草学と博物学

- ◆ 山海經
  - ◆ 様々な動物(怪物)の効用を列記
- ◆ 本草学
  - ◆ 藥学として発展
  - ◆ 医者でなければ数寄者(木内石亭)
  - ◆ 収集することへの情熱(対象を愛する)
- ◆ 博物学
  - ◆ 収集することへの情熱+分類することへの情熱

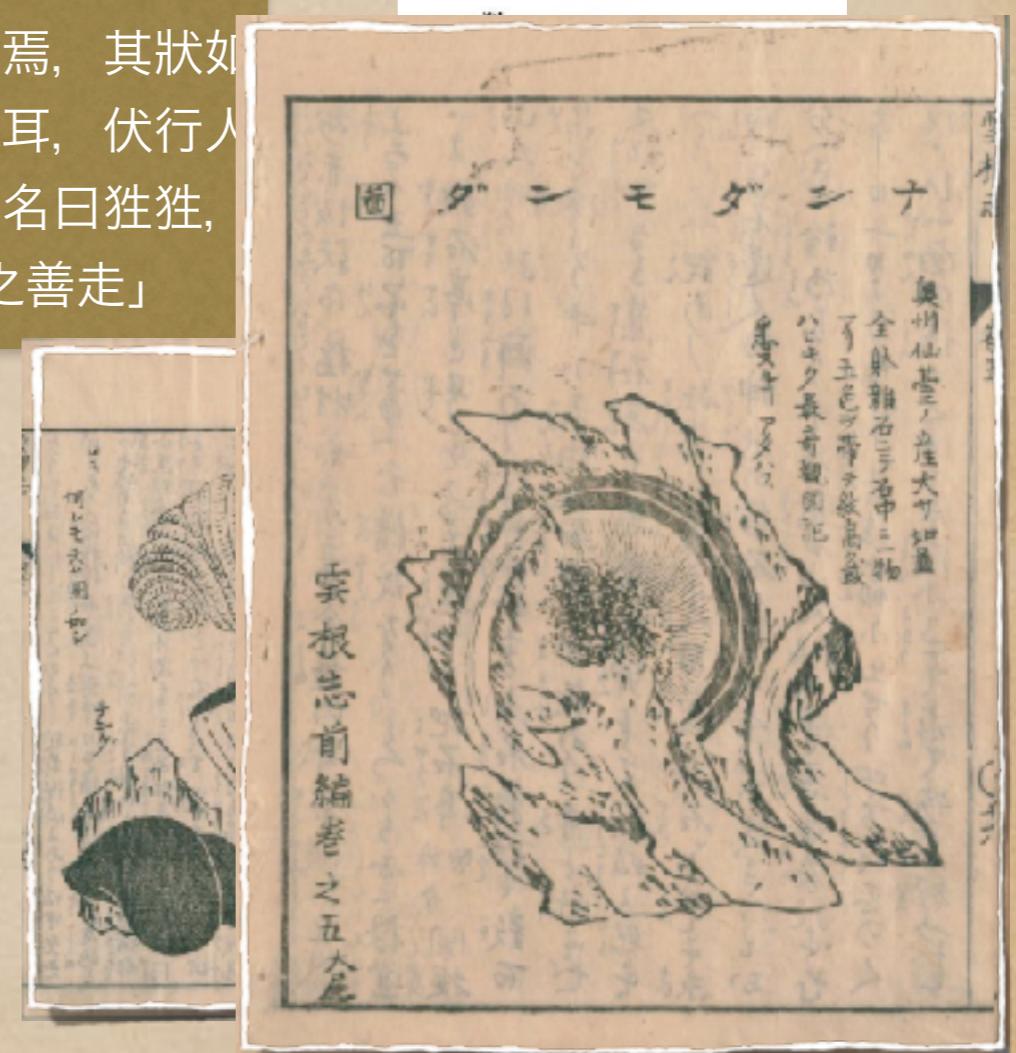
南山經より  
「有獸焉，其狀如  
禺而白耳，伏行人  
走，其名曰狌狌，  
食之善走」



# 本草学と博物学

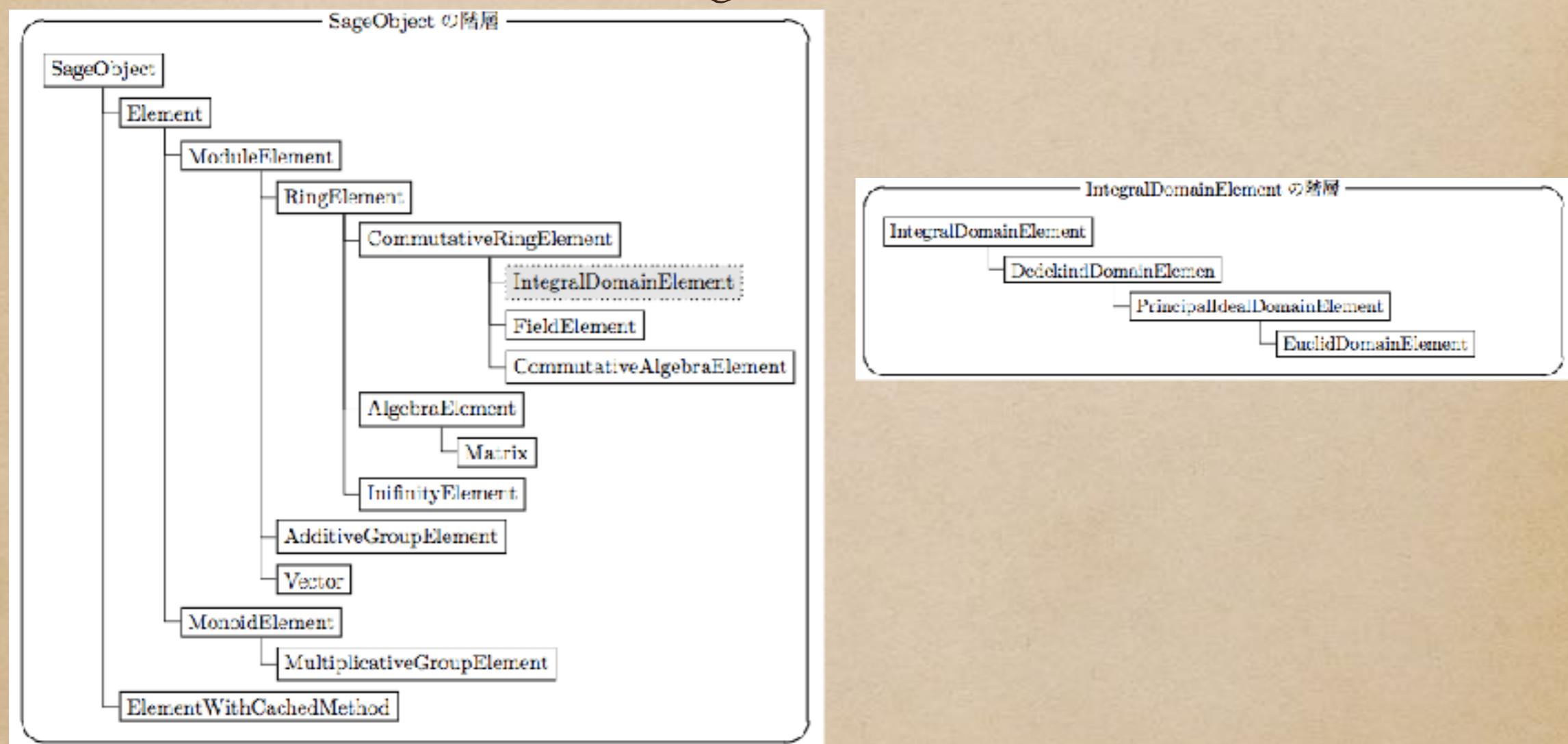
- ◆ 山海經
  - ◆ 様々な動物(怪物)の効用を列記
- ◆ 本草学
  - ◆ 藥学として発展
  - ◆ 医者でなければ数寄者(木内石亭)
  - ◆ 収集することへの情熱(対象を愛する)
- ◆ 博物学
  - ◆ 収集することへの情熱+分類することへの情熱

南山經より  
「有獸焉，其狀如  
禺而白耳，伏行人  
走，其名曰狌狌，  
食之善走」



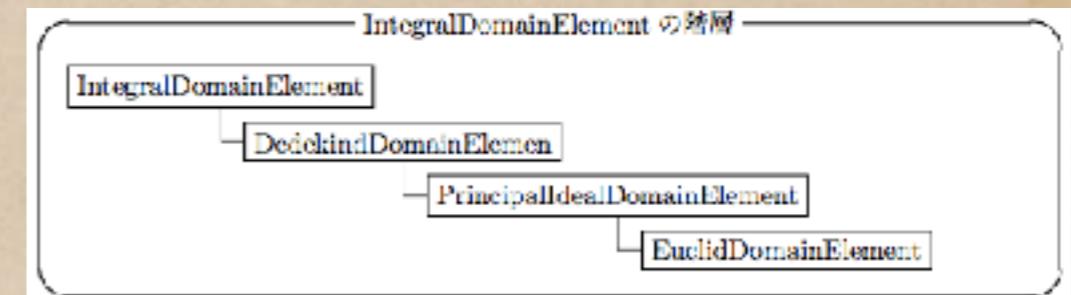
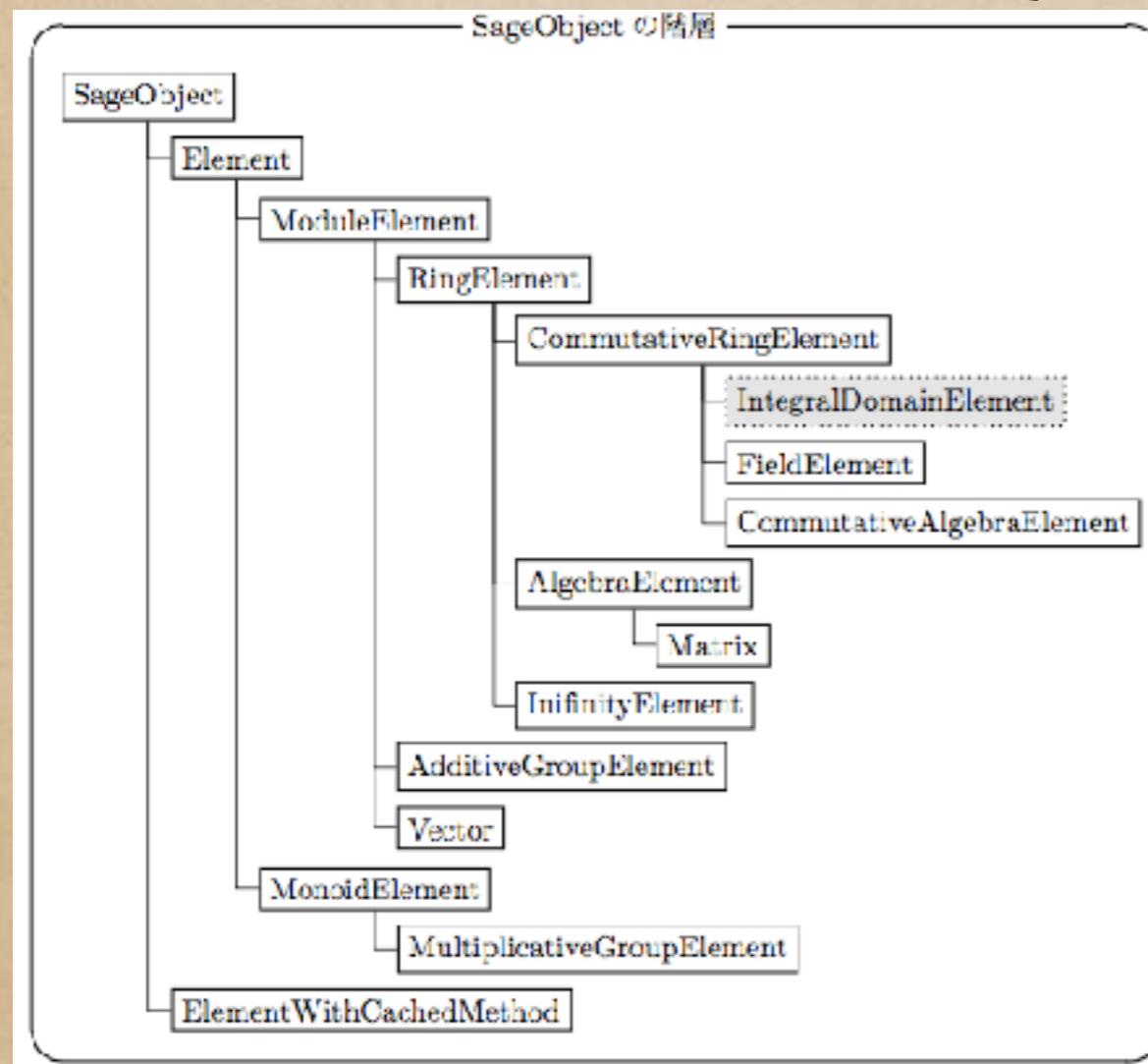
# 統合環境としてのSageMath

- ◆ 数学的概念や対象をPythonのクラスとして表現



# 統合環境としてのSageMath

- ◆ 数学的概念や対象をPythonのクラスとして表現



単にアプリケーションを纏めたものではない

# SageMath/Pythonのイメージ



# SageMath/Pythonのイメージ

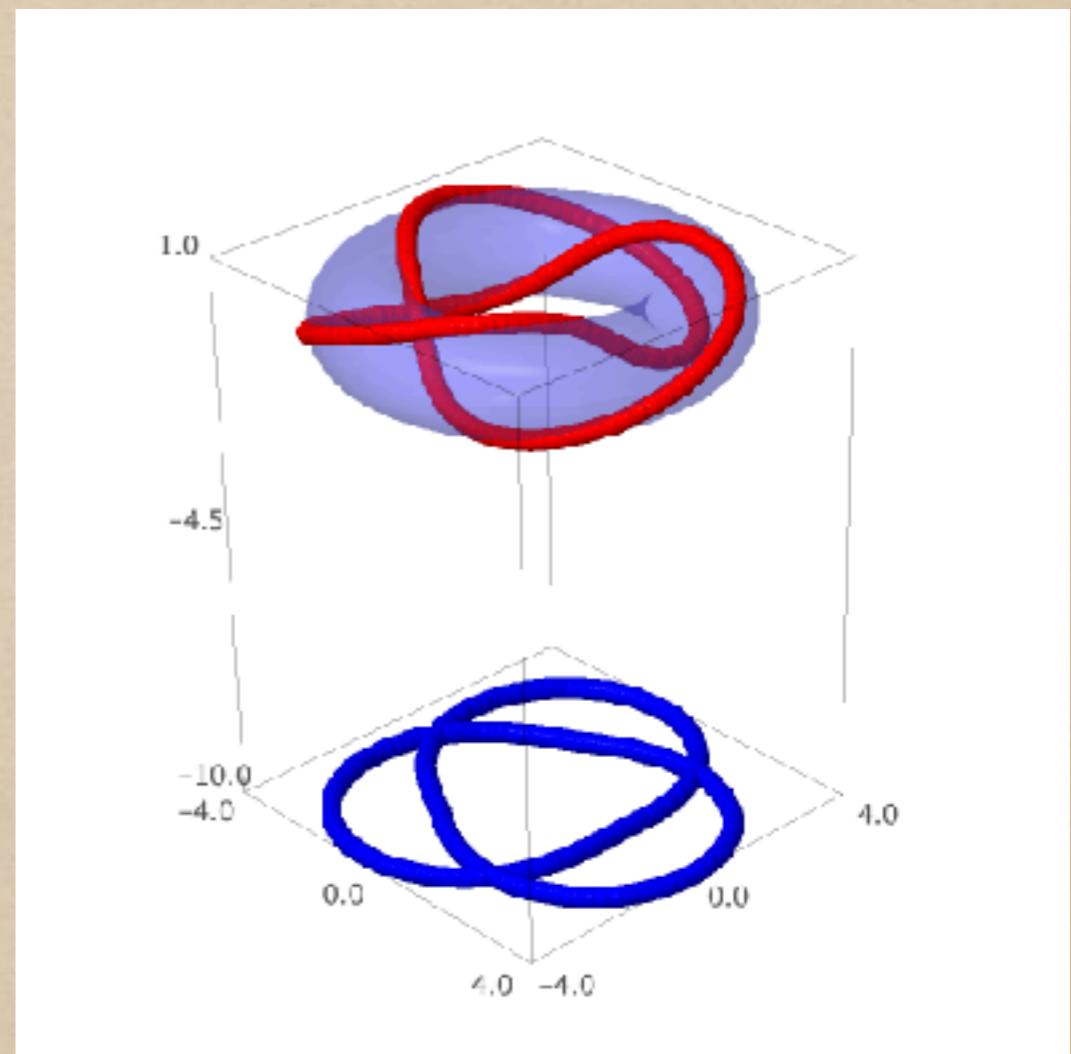


# SageMath/Pythonのイメージ



# SageMathの実例(1)

- ◆ 結び目理論への適用
  - ◆ 結び目の多項式不变量の計算
- ◆ 結び目とは
  - ◆ 円の三次元球面内部への埋め込み
- ◆ 平面への射影図で考察

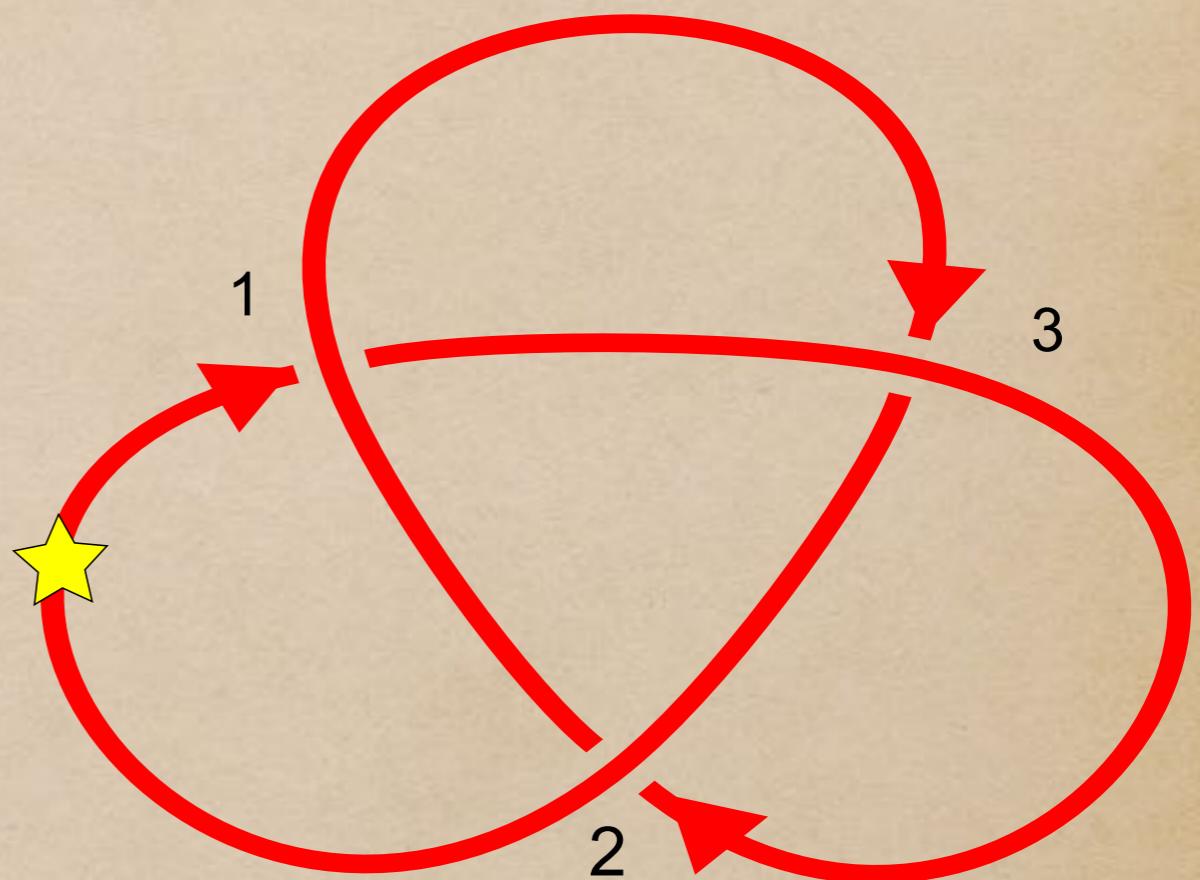


# SageMathの実例(2)

- ◆ 結び目/絡み目を交点のリストとして表現

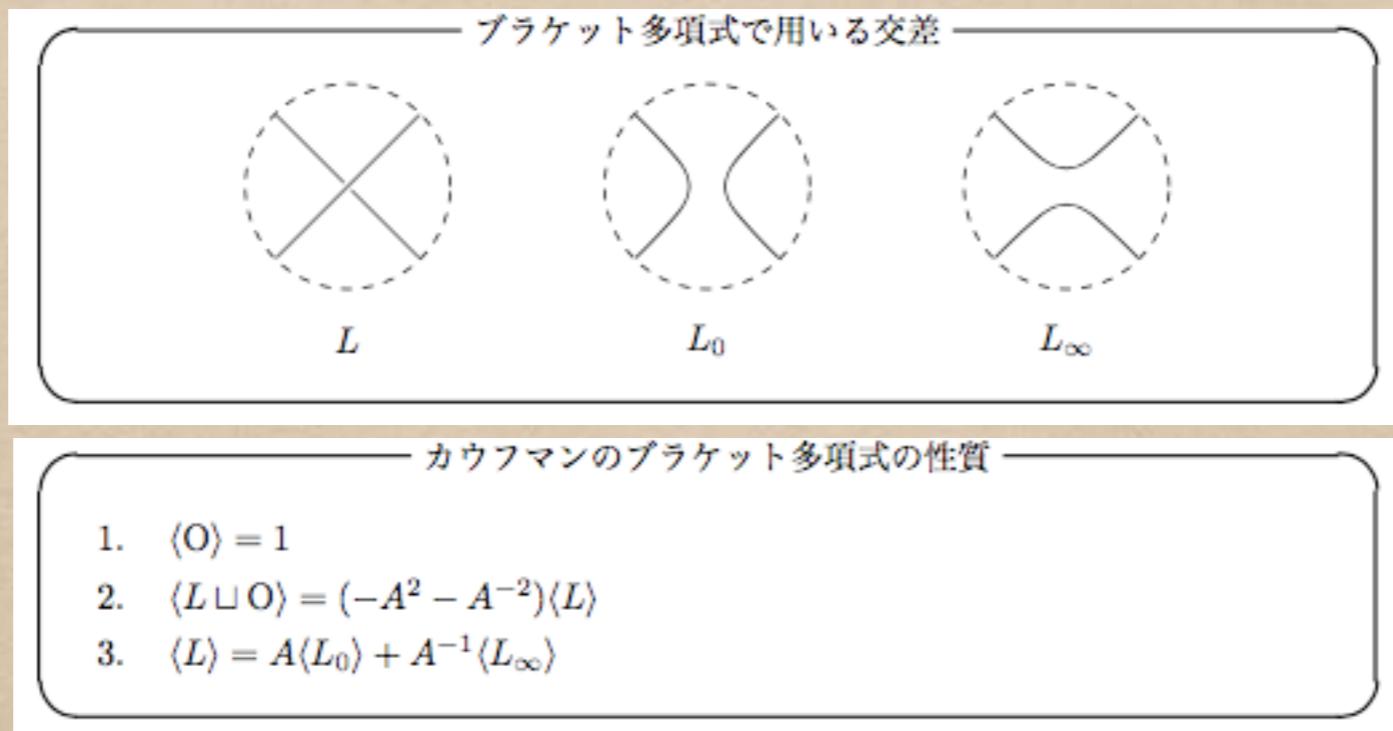
- ◆ 右の三葉結び目なら

$[-1, -3, -2, -1, -3, -2]$



# SageMathの実例(3)

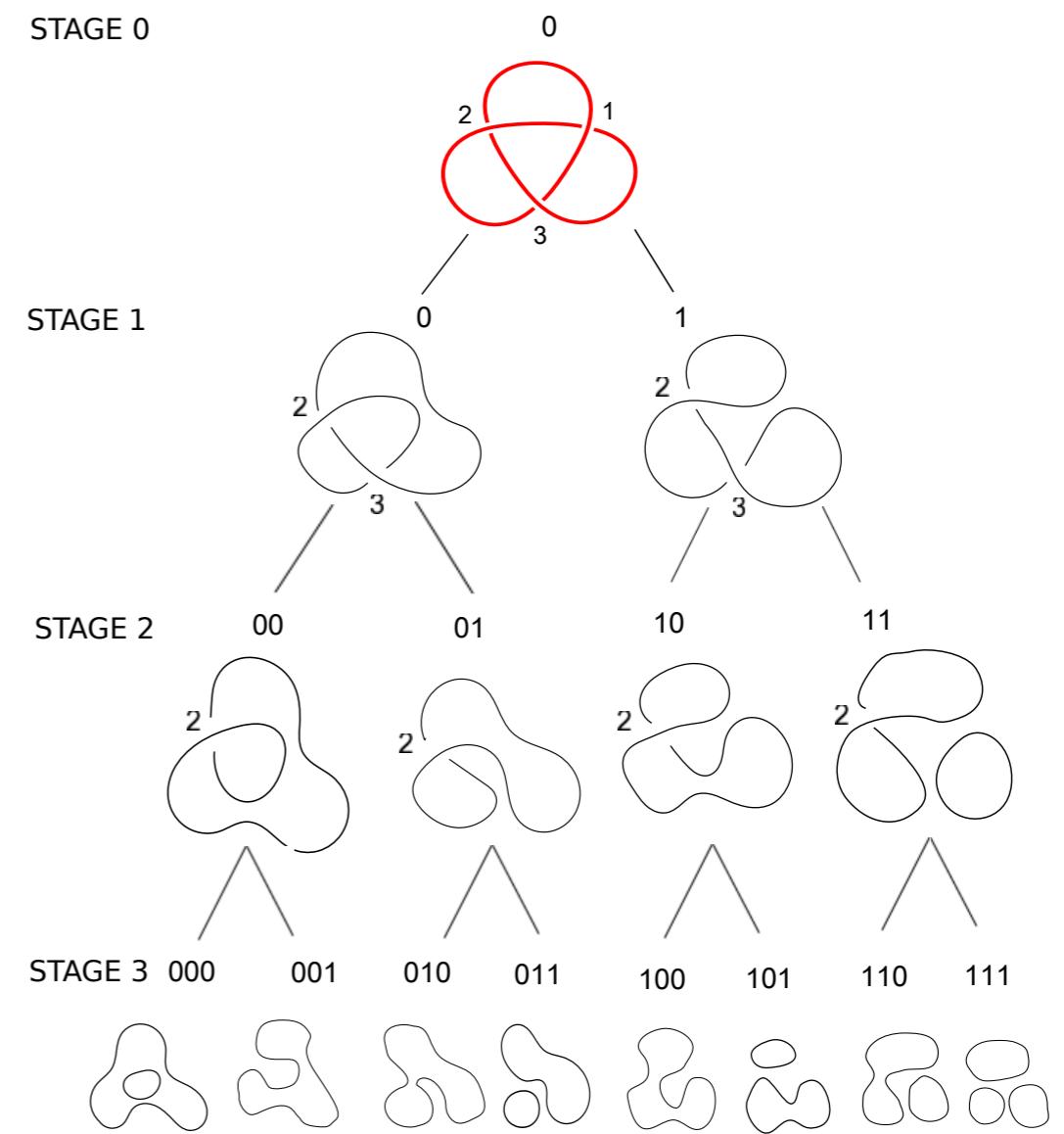
- ◆ スケイン多項式
- ◆ 結び目の局所的な交差の変更で成立する関係式



- ◆ 全ての交点で考察する必要がある為、膨大な中間データが発生する

# SageMathの実例(4)

- ◆ 三葉結び目でさえもこれだけの数になる
- ◆ そこでSQLiteを利用



# SageMathの実例(5)

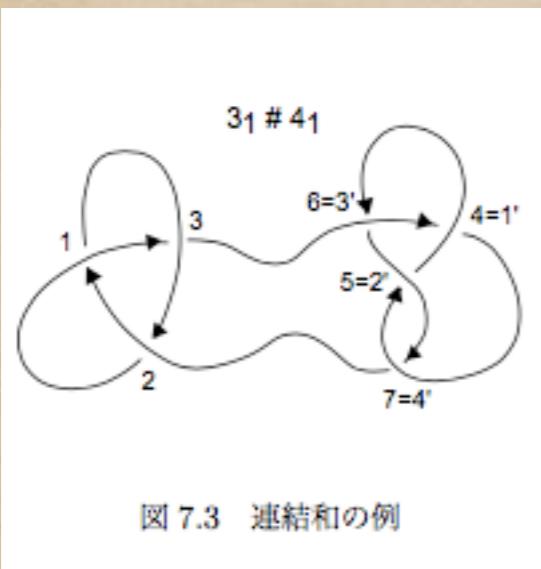


図 7.3 連結和の例

```
sage: K3_1 = LinkDiagram([[-1,3,-2,1,3,2]])
sage: kauffman_bracket(K3_1,DB="/Users/yokotahiroshi/MyKnotDB.db",LinkName="Trefoil")
-A^5 -1/A^3 +1/A^7

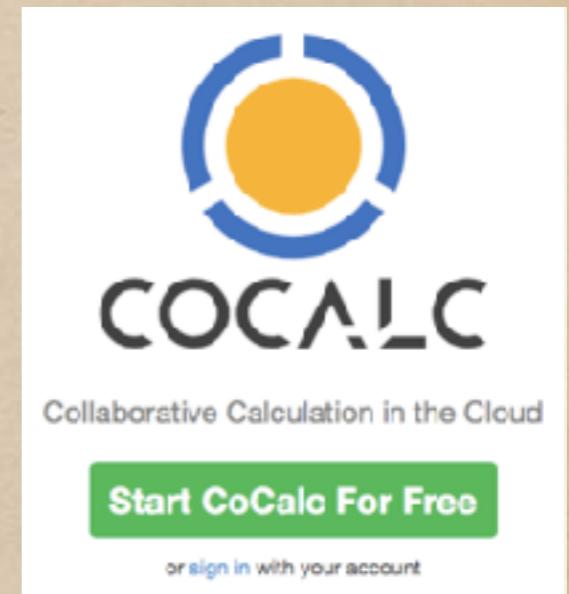
sage: conn=sqlite3.connect("/Users/yokotahiroshi/MyKnotDB.db")
sage: cur1 = conn.cursor()
sage: bf1 = cur1.execute("select * from diagrams")
sage: ans=bf1.fetchall()
....: for i in ans:
....:     print i
....:
(u'Trefoil', 0, u'', u'[[ -1, 3, -2, 1, -3, 2 ]]', u'[1, 3, 2]')
(u'Trefoil', 1, u'O', u'[[3, -2], [-3, 2]]', u'[3, 2]')
(u'Trefoil', 1, u'I', u'[[ -3, 2, -2, 3 ]]', u'[-3, -2]')
(u'Trefoil', 2, u'OO', u'[[ -2, 2 ]]', u'[2]')
(u'Trefoil', 2, u'OI', u'[[ -2, 2 ]]', u'[-2]')
(u'Trefoil', 2, u'IO', u'[[ -2, 2 ]]', u'[-2]')
(u'Trefoil', 2, u'II', u'[[2, -2], [], []]', u'[-2]')
(u'Trefoil', 3, u'OOO', u'[[[], []]]', u'[]')
(u'Trefoil', 3, u'OOI', u'[[[], []]]', u'[]')
(u'Trefoil', 3, u'OIO', u'[[[], []]]', u'[]')
(u'Trefoil', 3, u'OII', u'[[[], []]]', u'[]')
(u'Trefoil', 3, u'IOO', u'[[[], []]]', u'[]')
(u'Trefoil', 3, u'IOI', u'[[[], []]]', u'[]')
(u'Trefoil', 3, u'IIO', u'[[[], []]]', u'[]')
(u'Trefoil', 3, u'III', u'[[[], [], []]]', u'[]')

sage: bf1 = cur1.execute("select * from diagrams where Stage==2")
sage: ans=bf1.fetchall()
sage: for i in ans:
....:     print i
....:
(u'Trefoil', 2, u'OO', u'[[ -2, 2 ]]', u'[2]')
(u'Trefoil', 2, u'OI', u'[[ -2, 2 ]]', u'[-2]')
(u'Trefoil', 2, u'IO', u'[[ -2, 2 ]]', u'[-2]')
(u'Trefoil', 2, u'II', u'[[2, -2], [], []]', u'[-2]')

sage: bf2 = cur1.execute("select * from kauffman_bracket_table")
sage: ans2 = bf2.fetchall()
sage: for i in ans2:
....:     print i
(u'Trefoil', 2, u'[[[], [], []]]', u'[[[], [], []]]', u'-A^5 -1/A^3 +1/A^7')
```

# CoCalc

- ◆ <https://cocalc.com>
- ◆ Cloud環境のSageMath
- ◆ GNU Octave, Terminal等のアプリケーション
- ◆ TeXとMarkdownの編集環境
- ◆ 無課金と課金のサービスがある



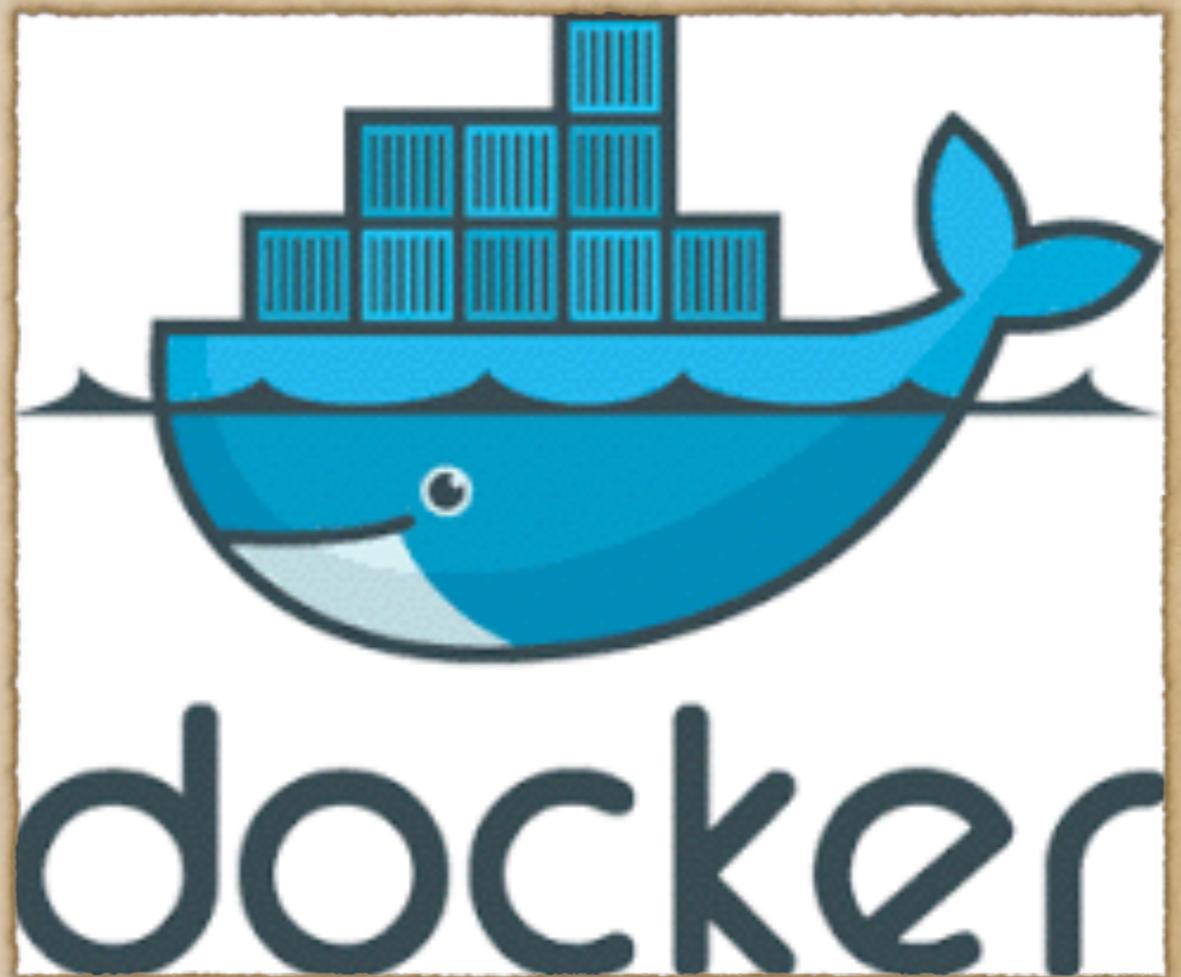
# CoCalcによるTeX文書作成

- ◆ CoCalcはTeX, Markdown 文書の編集環境を持つ
- ◆ スマートフォンでも利用可能(BlueToothキーボード推奨)



# CoCalc Image

- ◆ Docker向けCoCalcのImage(8GB必要)
- ◆ SageMath+TeX, Markdown文書編集環境
- ◆ Cloud版と比べ現時点は縮小したもの(Jupyter KernelはPython2, GNU R, SageMathのみ)



# SageMath/CoCalcについて

- ◆ 関連するアプリケーションを揃えただけではなく、内部的にも統合化された数学に関する作業を行うための環境。

- ◆ 数式処理の古株はMacsyma(Maxima)とReduceです。Macsymaの開発はProject MACにてMACLispの開発と並行して行われています。そのこともあってMaximaには文脈があり、整数の問題に落とし込んでしまえば推論も可能です。そして、Maxima自体、2000年代の初頭はMACLisp由来の機能が多く、CommonLispへの移植が不十分な面もありました。このMaximaがSageMathの数式処理のコアです。MathLibreに私の書いた1200頁の駄文がありますのでよければどうぞ。しばらく、見ていない為、嘘や古くなったものが放置状態です。
- ◆ MATLABも当初は学生にFORTRANで記述されたライブラリを使わせる為に開発された言語です。当初、フリーソフトとして公開されていた為、数値処理行列ソフトの多くがMATLAB流儀の行列操作を取り入れており、その意味でも「業界標準」のアプリケーションです。ただし、学生向けの簡易的な言語であった為にMATLAB言語の出来はそんなに良いものではありません。そして、本質的に行列処理言語である為、多次元配列の操作は寧ろ貧弱です。この多次元配列の扱いではYorickが非常にユニークです。配列の添字として平均値、最大値といった言葉を指定するだけで、その添字での最大値や平均値を求めてみたり、テンソルの表記が非常に容易に行えたりします。詳細は私の全く売れなかったYorick本を参照してください。MathLibreにも原稿が収録されています。PythonはこのYorick程奇抜ではありませんが、その多次元配列の扱いはMATLAB系の言語よりは良いものだと思います。
- ◆ 数値行列を専門に扱うアプリケーションの多くは何らかのBLASを裏で用いています。BLASは行列のメモリへの格納や各CPUに合わせてデータの転送も含めて効率化が図られています！だから、多少行列の準備に時間をかけても、行列計算はBLASのルーチンを用いなければ大損です。安易な気分でfor文やif文を行列演算で用いると、BLASのルーチンを使わなかったり、それが効率的に使われていない羽目になり、その結果処理速度は半端でないほど低下する可能性があります。ちなみにAnacondaの恐ろしいところはIntel謹製のMKLを標準で備えていることです。一般的にMKL>OpenBLAS>ATLASの順で、MKLがあらゆる局面で良い成績を出します。また、OpenBLASはGotoBLAS(後藤BLAS)の後継で、奇抜な最適化は行なっていないことですが、場合によってはMKLを上回る性能を出していました。

- ◆ Surfは代数曲面の描画で幅広く用いられていましたが、その作者が大学を卒業してから面倒を誰も見られずに放置状態になっていたという稀有のアプリケーションです。Surferはsurfのエンジン部分を利用するアプリケーションです。
- ◆ GeoGebraは海外の教育現場で幅広く用いられていますが、日本国内ではそれ程でもありません。グラフ電卓の為でしょうか？いずれにせよ教育界の保守さ加減やそのような新しいものを取り入れる現場の余裕のなさが気になります。少なくともScratchと同程度に扱われて良い筈です。
- ◆ 「オブジェクト指向？」以降は、私がPythonを理解する上で必要になった哲学的側面を述べています。特に若い人にですが、アリストテレスは何らかの形でも目を通すべきです。「カテゴリー論」は、クラスの話に直結し、「形而上学」を見るとデデキントの切断と同様の連續の説明があります。この講演では述べませんでしたが、取るに足らない素材(ヒュレー)が形相(エイドス)によって実体化する話は、計算機のビットがプログラムという形相によって意味を持ったデータとして現れる話としても興味深いものです。本当に「万物の祖」であることが分かります。こういったものは若い時期でなければ時間がなくて読めません!! 因みに私はラッセルの権威としてのアリストテレスの哲学を皮肉るエッセイに影響されて、古臭い考え方一瞥もしました。しかし、過去、2000年以上も超絶的な天才たちを引きつけていた哲学者であることを忘れてはいけません。彼の観察や思想から、全く新しい概念が生じるかもしれません。たとえば、圏論のトポスのように。古典は容易に汲み尽くせない深遠な泉です。
- ◆ 神聖隊は中村さんのリクエストです。ちなみにレリーフはアルノ・ブレーカーという第三帝国で売れっ子だった芸術家です。ヒトラーの芸術家の友達の一人として、ヒトラーのパリ訪問のお供をしています。彼の回想録(最近、日本語訳が出ました)にその時の話が出ています。このレリーフのシリーズは何故か裸にマント姿で、何が何だかわかりませんが、兎に角格好が良いものです。第三帝国では同性愛はご法度で、強制収容所送りになります。もっとも、レームが「長いナイフの夜」で肅清されるまでは突撃隊で同性愛は公認で寧ろ勧められていた程です。ヴィスコンティの「地獄に墮ちた勇者ども(The Damned)」にもその描写があります。なお、古代ギリシャの同性愛で、そのカップルは年長者と年少者の組み合わせで、年長者が年少者をポリスの一員として教育するという目的もあったとのことで、実態は、現代のその手の人々とは勝手が異なるのではないかと思います。

- ◆ 神聖隊の300名はレオニダス王の率いた300名の由来するものかもしれません。因みに私の子供に神聖隊のことを話し、死んだのが254名と言うと中一の長男は「ふーん」、小五の長女は「にやにや」でした。
- ◆ シモーニデースのエピグラムの訳は「伝えよ」を「語れ」とわざと置き換えていました。原文でἄγγελλειν, *gg*は*ng*と読みます)とありますが、この単語は*angel*の語源で、天使は神のための伝令だからです。あと、「ひ、退かぬ、媚びぬ！省みぬ！」は中村さんが熱くITエンジニア必須と語られている「北斗の拳」の「聖帝サウザー様」のセリフです。
- ◆ 「A is B」は「普遍」という言葉を導入したくて入れています。因みに伝統的論理学では、「たまは猫」としたときに、たまという実体が存在してそれが「猫」であれば真です。このように主語には「存在する」という隠れた主張があり、これを存在含意といいます。では、「猫は動物である」が真であるということは「猫」という概念が存在しなければならないということです。ただし、ここでの「存在」とは「そこら辺の野良猫のような実体を持った存在」なのかイデアの様な超越的な存在か、それとも単に「名辞的な存在」なのかといった問題になります。これが中世の普遍論争です。また、伝統的論理学は推論の規則に当てはめる為に命題を、推論規則に合わせ易い同値な命題へと置き換えて処理します。これをパラフレーズと呼びますが、19世紀あたりになると伝統的論理学はその形式的さ加減とややこしさで蔑視されます。ただ、この伝統的論理学は西ヨーロッパ言語の文法のモデルとして各言語を鍛える役割を果たしてきた様に思えます。しかし、日本語は、日本が系統的に西ヨーロッパの学問を導入する頃には伝統論理学が弱体化したこともある、その文法が鍛えられることもなく、また、その本質を理解されることもなく、その結果、西ヨーロッパの言語の文法を導入してもうまく表現できない影の理由ではないかと私は勝手に思っています。だから、AIと騒ぐ前に「語ること」や「言葉そのもの」を深く考えなければならない時だと思います。そして、口ゴス、マントラ（真言）、言霊に思いを馳せる様にならない限り、AIはもっともらしいことを際限なく喋る仕組みで終わると素人ながら思っています。
- ◆ カテゴリーは私が高校生のときは「はあ、それがどうしたの？」でしたが、ここまで整理したということは驚くべきことです。結局、このカテゴリーの話だけでも「オブジェクトの分析」、「話し方教室」、「文章の書き方」と様々な教室ができると一人で悦に入っています。

- ◆ 「語ること」では口ゴス(説明規定)の方法について述べています。
- ◆ 「ポルピュリオスの樹」についてですが、まず、アリストテレスは類一種差による階層構造を主張しています。これが類一種の階層構造になるのはポルピュリオスがカテゴリー論を含めたアリストテレスの哲学への入門書「手引(イサゴーゲ)」の影響の様です。この手引は西ローマ帝国崩壊後に西ヨーロッパ世界で残った二、三の哲学書のうちのひとつで、これには西ローマ帝国崩壊前後で、ラテン語もギリシャ語も使えたボエティウスが原文のギリシャ語からラテン語に翻訳し、二編の註釈を残したことが幸いしています。因みに、ローマ帝国はヘレニズム文化圏を帝国内に包含してから暫くすると、上流階級はギリシャ語を中心に使う様になります。因みにハンニバルの好敵手大スキピオがギリシャ臘ももたが、その時代はまだ、ローマの支配者階級は質実剛健を旨としておりかなり批判的ですが、ローマのギリシャ熱は皇帝ネロ辺りから顕著で、実際、悲劇を演じてみたり歌を歌ってみたりオリンピックに参加して(おそらく買収等で)優勝したりと芸術家気取りでいます。そして最後の言葉も「この偉大な芸術家が..」だとか。そして、五賢帝の3番目の皇帝ハドリアヌスになるとギリシャ臘ももたがや軟弱とも呼ばれなくなり、寧ろ、指導者層ではそれが当たり前になっています。やがて、ローマ帝国の中心は東のコンスタンティノープルへと移り、ボエティウスの頃になるとイタリア近辺は蛮族が跋扈する時代になっています。その時代になるとローマではギリシャ語を解する人は少数派になっており、そこでボエティウスがいくつかの哲学書をラテン語に翻訳することになります。なお、ポルピュリオスは新プラトン主義の創始者とも言えるプロティノスの弟子ですが、比較的、アリストテレス的なものの見方をしており、そのことが本質的に異なるプラトンとアリストテレスの哲学を結びつけることに成功しています。この手引は新プラトン主義の哲学を学ぶ上で最初に読むべき本とされ、このことが西ヨーロッパに残った数少ない哲学書の一つになった理由です。なお、キリスト教はその母体であるユダヤ教が黙示的な宗教であったのに対し、ヘレニズム世界の新プラトン主義の影響を強く受けプラトン的な宗教に変貌します。これはゲーテのファウストの終章に色濃く現れています。ここでファウストは最後の審判を経ずに影の世界である現世からイデア界へと回帰しています。ただし、ゲーテのファウストはある種の女性原理(グレートヘン、母たち、ヘネー、聖母マリア)への畏敬を私は感じます。つまり、ファウストは永遠の中二病で、だからこそ、母なる存在に畏敬の念を持つのではないかと思います。
- ◆ 「概念」についてはイデアと概念の違いを大雑把に記載したものです。要するにイデアは人間の認識とは無関係、即ち、超越的に存在しますが、概念はそのものを説明する、即ち、語るものであり、口ゴスとは説明し規定するもの(説明規定)です。だからこそ人間の知覚や考察に依存し、イデアの様な超越物ではありません。宗教は神話や神像が博物館に安心して展示される様になって時点がその宗教の死であり、生きている限り、奇跡、神話、聖人を生成するものです。概念も、それが語られ尽くすまでは暫定的なもので、見方が変わることでそのもの自体が変化することもあります。その意味で受験勉強や教科書に記載された概念は「古人の糟粕」です。

- ・ 内包外延反比例増減の法則は題名通りです。概念は階層化され個体に最も近い概念を個体概念と呼びますが、その個体の属性を列記することで得られます。その列記の度合いは個体を判別するに十分なだけの属性があれば良いことになります。
- ・ プラトンの人間の定義は私が子供の時は単なる笑い話と思っていました。ここで重要なことは反例が見つかればそれを除外する条件を付け足せるかどうかということです。
- ・ 「リンネの二名式命名法」はリンネが始めた学名の付け方で、要は上位概念である類を先頭に下位概念である種を下に置くという表記です。この表記を提唱したリンネの植物の分類は雄蕊によるもので現在で用いられるものではありません。ただ、この分類の理由は花という生殖器官で最も特徴的なものとして雄蕊を使ったもので、進化論無き時代ではそれなりの説得力があります。この場合は先程のプラトンの人間の定義の様に属性を追加することで学説を延命できなかった例と言えます。ただ、西ヨーロッパではアリストテレスの影響で物事を語ることへの熱意が伝統的にあると思います。
- ・ 「本草学と博物学」は江戸時代にそれなりの隆盛を見せた本草学のことを述べたくて追加しました。薬学から発達した本草学は江戸時代には博物学的な側面を持ちます。ただ、これは個体の観察に留まり、体型的な視点が欠けていた様に思います。また、熱中した人々には、ある意味現在の「オタク」に対応する数寄者が多数存在し、本を出したり、コレクションを公開したりしますが、個々の物を愛するレベルです。木内石亭には神域の島から石を持ち帰る話がありますが、これも「石亭」であるが故の行為で、それを自分のコレクションと比較してどのように違うか、また、どこが一致するのかといった観察や考察がありません。どうも日本人は昔から「軽チャー路線」であり、アイドルや収集、どうでも良いいわく話に明け暮れる特性がある様です。この点、原理主義的な中国人とは異なります。実際、王陽明は竹の中にある理を見出そうと思索に耽り、ノイローゼになったと言います。だからこそ、原理主義ではなく徹底的に軽チャーに邁進する方法もあると思いますが、どんなものでしょうか？
- ・ 「統合環境としてのSageMath」はSageObjectの外観を示したものです。代数的な概念がPythonのクラスとして表現されていることが分かります。このことを利用して結び目理論への応用では、可換環を継承することで結び目の連結和を定義しています。この様に SageMathでは代数的概念がPythonのクラスとして表現されている為、考察する対象がどの様な代数的構造を持っているかを明瞭にするだけで、SageMathの類似するクラスを導入すれば良い訳です。これを本草学の後に置いた理由は、幾ら数寄者が寄って集っていようが、やがて体系的なものに取って代わられる可能性があることです。私はAnacondaを念頭に置いて書いています。

- ◆ 子供の絵は説明不要でしょう。感じてください。私はぐったりもトレーニングPythonも好きです。
- ◆ 結び目理論へ応用ですが、これは1年前に作成したプログラムのため、ちょっと怪しいところがあります。ただ、SQLiteの導入は解析業務で手軽に使えるDBが欲しかったという欲求がありました。こちらの細かい話はSageMath本(USO800版, SageBook.pdf)を参照してください。  
<https://github.com/ponpokozcyber/SageBook>
- ◆ CoCalcのDockerはSageMathの一つの将来かなと思っています。SageMathは膨大なライブラリとアプリケーションを組み合わせるために一切合切を纏めて配布しています。また、Windows環境では仮装計算機が必要になる訳で、これらの手間を一般の利用者から解放する意義は非常に大きなことです。