Н. Е. Фёдорова
М. В. Ткачёва

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические рекомендации

10

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Н. Е. Фёдорова
М. В. Ткачёва

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 класс

Методические рекомендации

Пособие для учителей общеобразовательных организаций

Москва • Просвещение • 2015

УДК 372.8:[512 + 517]
ББК 74.262.21
Ф33

16+

Фёдорова Н. Е.

Ф33 Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10 класс : пособие для учителей общеобразоват. организаций / Н. Е. Фёдорова, М. В. Ткачёва. — М. : Просвещение, 2015. — 224 с. : ил. — ISBN 978-5-09-028110-2.

Книга содержит методические рекомендации учителям, преподающим алгебру и начала математического анализа в 10 классе по учебнику авторов Ю. М. Колягина и др. Пособие написано в соответствии с концепцией обучения алгебре и началам математического анализа по этому учебнику, а также в соответствии с его содержанием и структурой. В нём даны как общие, так и конкретные советы по изучению каждой темы.

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-028110-2

Предисловие

Уважаемые коллеги, курс алгебры и начал математического анализа для 10—11 классов авторов Ю. М. Колягина, М. В. Ткачёвой, Н. Е. Фёдоровой, М. И. Шабунина даёт возможность учителю работать по одному и тому же учебнику как в классах с различными уровнями математической подготовки, так и в классах с учащимися, обладающими различными математическими способностями. Это обеспечивается организацией учебного материала по принципу содержательного вложения:

1) учащиеся, ориентированные на продолжение обучения в вузах, требующих глубокой физико-математической подготовки, должны изучать весь теоретический материал учебника и научиться решать все типы предложенных в нём задач;

2) учащиеся, предполагающие продолжать обучение в вузах естественно-научных специальностей, технических и экономических вузах, должны освоить весь теоретический материал учебника за исключением текстов, выделенных значком «М», и задач, помещённых на синей плашке;

3) учащиеся, чья дальнейшая специализация не будет связана с активным применением математических знаний, должны освоить теоретический материал учебника, не выделенный значками «У» и «М», а также научиться решать задачи и упражнения «до черты» (задачи «после черты», не подчёркнутые и не выделенные плашкой, являются в основном комбинированными заданиями, но требуют применения знаний и умений обязательного уровня).

Основными концептуальными принципами учебников являются:

1) высокая научность в сочетании с доступностью изложения учебного материала;

2) практико-прикладная ориентация содержания обучения;

3) личностно ориентированный и дифференцированный подход в организации и содержании обучения.

На страницах данного пособия вы найдёте:

— основные характеристики содержания и цели изучения каждой главы учебника;
— тематическое планирование изучаемого курса;
— обязательные требования к результатам обучения по всем темам курса;
— конкретные методические рекомендации по изучению каждого параграфа учебника;
— варианты распределения учебного материала параграфов (теоретического и задачного) по урокам с рекомендациями по организации самостоятельной работы учащихся;
— решения всех нестандартных и сложных задач учебника;
— рекомендации по организации творческой и исследовательской работы учащихся;
— варианты проверочных и контрольных работ по темам.

Глава I Алгебра 7—9 (повторение)

Материал данной главы состоит из двух принципиально разных частей. Первая часть (§ 1—10) посвящена повторению традиционного содержания курса алгебры основной школы (этот материал инвариантен относительно действующих учебников алгебры для 7—9 классов). Вторая часть (§ 11—13) содержит новые для основной школы разделы («Статистика», «Множества», «Логика»), включаемые в стандарты математического образования.

Традиционное содержание излагается следующим образом: каждый параграф посвящён повторению большой темы; в нём приводятся основные теоретические положения, рассматриваются решения задач на применение этих положений, предлагается система упражнений для восстановления практических умений.

В § 11 отражена часть содержания новой для отечественной школы стохастической линии (основными составляющими этой линии являются комбинаторика, вероятность и статистика). В учебнике для 10 класса предложен для повторения материал лишь вопросов статистики, так как в учебнике алгебры и начал математического анализа для 11 класса будут изложены вопросы комбинаторики и теории вероятностей.

В главу I включено краткое изложение элементов теории множеств (§ 12) и логики (§ 13). Эти темы присутствуют в новых стандартах образования базовой школы, однако конкретизация предполагаемых к изучению вопросов будет ещё уточняться в ближайшие годы.

Выбрать вариант организации повторения курса алгебры учитель должен, исходя из особенностей класса. В слабом **общеобразовательном** классе учитель может отвести на повторение в начале года 3—6 ч, рассматривая на каждом уроке от одного до трёх параграфов этой главы (за исключением трёх последних параграфов). В сильном **общеобразовательном** классе можно в течение первой учебной недели фронтально повторить с учащимися отдельные вопросы программы 7—9 классов, предлагая бóльшую часть материала § 1—10 рассматривать школьникам дома самостоятельно. Можно организовать систематическое повторение ранее пройденного материала в ходе всего учебного года (без повторения в начале года), учитывая потребности актуализации знаний при изучении новых разделов курса математики для 10—11 классов.

В тех классах, где учитель не планирует организацию вводного повторения, на первом уроке учебного года можно провести диагностическую самостоятельную работу по заданиям рубрики «Проверь себя!» (приведённым в конце главы), а затем спланировать индивидуальную работу с учащимися по повторению слабо усвоенных разделов курса алгебры основной школы.

В классах с **углублённым** изучением математики повторение ранее пройденного в начале учебного года на уроках не планируется. Учитель вправе предлагать учащимся материал главы I для самостоятельного повторения дома (самостоятельная работа с учебной литературой учащихся таких классов — одна из основных форм их обучения). Часть материала этой главы можно использовать и для самостоятельной работы учащихся на уроке. При наличии времени в классах с **углублённым** изучением математики учитель может на уроке разобрать с учащимися материал двух последних параграфов. В классах с **математическим** уклоном рассмотрение этих параграфов обязательно (после каждого из этих параграфов приводятся теоретические вопросы для самопроверки учащихся).

Для облегчения изучения материала § 12 и 13 (при наличии дополнительного времени) ниже приведём краткие методические рекомендации.

§ 12. Множества (0/2 ч)

Предметные цели изучения параграфа — знакомство с основными понятиями теории множеств, с элементарными действиями с множествами; метапредметные цели — развитие логического мышления; усвоение универсальных множественных понятий, применимых для создания моделей различных явлений природы, общественных явлений; овладение устным и письменным математическим языком, применимым при изучении предметов естественно-математического цикла; личностные цели — развитие творческих способностей, интуиции, навыков самостоятельной деятельности.

Желательно рассказать учащимся о том, что понятие множества лежит в основе многих математических дисциплин (в том числе знакомой учащимся геометрии). Сообщить о том, что раздел математики, изучающий множества, называется *теорией множеств*. Её основоположником является немецкий математик Георг Кантор (1845—1918), который говорил: «Множество есть многое, мыслимое как единое».

Понятия *множество* и *элемент множества* считаются основными понятиями математики и не сводятся к другим математическим или логическим понятиям путём введения формального определения. Эти два понятия и их взаимные связи поясняются достаточно точно приведёнными ниже замечаниями для того, чтобы эти понятия можно было однозначно применять:

— согласно так называемой *наивной* точке зрения, элементами множества могут быть любые предметы; каждое множество считается самостоятельной, осмысленной вещью, как бы осмысленной оболочкой его элементов;

— множество считается известным, если заданы его элементы; множество определяется раз и навсегда заданием его элементов; множества не зависят от времени.

Все эти замечания суммируются в основном законе теории (являющемся аксиомой): *множество однозначно определяется его элементами*. При доказательстве теорем относительно множеств ссылаются на эту аксиому и законы логики[1].

В изданной в 1974 г. книге «Дополнительные главы по курсу математики» главу, посвящённую теории множеств, написал Н. Я. Виленкин. В ней можно найти интересную подборку вопросов и заданий, имеющих прикладное значение. Приведём некоторые примеры, которые могут послужить учителю отправной точкой для конструирования подобных вопросов.

1) Какие названия применяются для обозначения множества животных? кораблей?

2) Как называют множество артистов, работающих в одном театре? цветов в одной вазе?

3) Как называется множество точек земной поверхности, равноудалённых от Северного полюса? имеющих одинаковую долготу?

4) Коза привязана верёвкой длиной l к колечку, которое может скользить по другой верёвке, натянутой между колышками A и B. Каково множество точек луга, до которых может дотянуться коза?

При введении понятия *пустое множество* необходимо подчеркнуть, что пустое множество одно — нет разных пустых множеств. При введении понятия *подмножество* желательно рассмотреть примеры различных по своей природе подмножеств. Например: 1) множество прямоугольников есть подмножество множества всех четырёхугольников; 2) множество учащихся 10 класса есть подмножество множества всех учащихся школы. Желательно просить учащихся аналогично иллюстрировать вводимые понятия: *разность* множеств, *дополнение* множества, *объединение* и *пересечение* множеств.

Для демонстрации широкой применимости теории множеств в различных научных отраслях желательно напомнить учащимся, что задание множества характеристическим свойством (п. 1 параграфа) применяется в геометрии. Там множество точек, обладающих некоторым характеристическим свойством, называют *геометрическим местом точек* с данным свойством. Например, в планиметрии биссектриса угла — это геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от его сторон. Учащиеся самостоятельно могут привести ряд примеров геометрических мест точек на плоскости и в пространстве.

При рассмотрении п. 3 «Числовые множества» полезно соотнести записи числовых интервалов с помощью неравенств и с помощью множественных символов.

---

[1] См.: Малая математическая энциклопедия / Э. Фрид, И. Пастор, И. Рейман и др. — Будапешт: Изд-во Академии наук Венгрии, 1976. — С. 536.

Например, если заданы числа a и b, причём $a < b$, то:

1) множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x \leqslant b$, называют *числовым отрезком* (или просто *отрезком*) и обозначают $[a;\ b]$;

2) множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называют *интервалом* и обозначают $(a;\ b)$;

3) *полуинтервалами* $[a;\ b)$ и $(a;\ b]$ обозначают все числа, удовлетворяющие соответственно неравенствам $a \leqslant x < b$ и $a < x \leqslant b$;

4) *числовыми лучами* называют множества чисел, удовлетворяющих неравенствам $x < a$, $x \leqslant a$, $x > a$, $x \leqslant a$, которые соответственно обозначаются $(-\infty;\ a)$, $(-\infty;\ a]$, $(a;\ +\infty)$, $[a;\ +\infty)$.

Числовые отрезки, интервалы и полуинтервалы имеют конечную длину, а числовой луч имеет бесконечную длину.

Запись ответов при решении уравнений и неравенств может быть оформлена в любой из двух предложенных форм (обычно учащиеся используют предлагаемую в учебнике символику).

Объяснение материала можно проводить в соответствии с текстом параграфа, а распределение его по урокам (при наличии дополнительного времени) отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	пп. 1—3	200—207	206 (3); охарактеризовать множество точек M на плоскости, таких, что: 1) $\{M\colon \angle AMB = 90°\}$, 2) $\{M\colon AM = BM = CM\}$	
2	п. 4	208—212, 214, 216	215, 217	213, 218, 223

В результате изучения параграфа учащиеся должны знать ответы на вопросы в конце параграфа, а также уметь выполнять упражнения типа **202**, **203**, **205**, **206**, **208**.

Решение упражнений

210. $[1;\ 7] \cap [5;\ 8] = [5;\ 7]$; $[1;\ 7] \cup [5;\ 8] = [1;\ 8]$.

211. $[0;\ 3] \cap [5;\ 7] = \varnothing$; $[0;\ 3] \cup [5;\ 7] = [0;\ 3] \cup [5;\ 7]$.

212. $\{-10;\ 1\}$ — множество корней уравнения $x^2 + 9x - 10 = 0$; $\{1;\ 2\}$ — множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$; $\{-10;\ 1\} \cap \{1;\ 2\} = \{1\}$, $\{-10;\ 1\} \cup \{1;\ 2\} = \{-10;\ 1;\ 2\}$.

216. $A = \{x\colon |x| < 5,\ x \in Z\} = \{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{x\colon |x - 1| < 7,\ x \in N\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$; $A \cap B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

217. $A = \{x\colon x^2 - 6x + 9 \leqslant 0\} = \{3\}$, $B = \{x\colon |x| \leqslant 1,\ x \in Z\} = \{-1;\ 0;\ 1\}$; $A \cup B = \{-1;\ 0;\ 1;\ 3\}$.

218. 1) Множество $A \cup B \cup C$ состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B или C, и только из них. Поэтому $A \cup B \cup C = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

Множество $A \cap B \cap C$ состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A, B и C. Поэтому $A \cap B \cap C = \{-1;\ 0;\ 2;\ 3\}$.

2) Нахождению объединения и пересечения трёх множеств поможет изображение на координатной оси промежутка $x \leqslant 1$ (множество A), точек -1; 0; 1 (множество B) и отрезка $-2 \leqslant x \leqslant 0$ (множество C).

Ответ. $A \cup B \cup C = (-\infty;\ 1]$ или $A \cup B \cup C = \{x\colon\ x \leqslant 1\}$; $A \cap B \cap C = [-1;\ 0]$ или $A \cap B \cap C = \{x\colon\ -1 \leqslant x \leqslant 0\}$.

220. 1) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 16 = 0, \\ 25 - x^2 = 0 \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} x - 4 = 0, \\ x + 4 = 0, \\ 5 - x = 0, \\ 5 + x = 0. \end{array}\right.$

Ответ. $\{-4;\ 4;\ -5;\ 5\}$.

221. 1) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 3 > 0, \\ 2x - 1 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 < 0, \\ 2x - 1 < 0, \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -3, \\ x > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ x < \dfrac{1}{2}, \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{2}, \\ x < -3. \end{array}\right.$

Ответ. $(-\infty; -3) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

222. 1) $\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ. $\left\{-2; -\dfrac{1}{2}; 1\right\}$.

223. 1) $\left[\begin{array}{l} -7 \leqslant x \leqslant 7, \\ -3 \leqslant x \leqslant 3. \end{array}\right.$

Ответ. $[-7;\ 7]$.

§ 13. Логика (0/2 ч)

Предметные цели изучения параграфа — знакомство с основными понятиями и законами логики, принципами конструирования и доказательства теорем; формирование представлений о методах математики, о математике как универсальном языке науки; метапредметные цели — развитие логического мышления и исследовательских умений, умений обосновывать свои выводы, формулировать отрицания высказываний, проводить доказательные рассуждения; личностные цели — формирование требовательности к построению своих высказываний и опровержению высказываний.

Так называемая *формальная логика*, описанная в трудах Аристотеля (384—322 гг. до н. э.), занимается анализом суждений, построением умозаключений, объяснением того, как осуществляется их аргументация. Речевая практика ещё в древности привела к формулировке определённых требований, предъявляемых к *высказываниям*. Они были обобщены Аристотелем и сегодня известны как основные законы *формальной логики*. Перечислим эти законы.

1. *Закон тождества*. Каждый из объектов, о которых идёт речь, должен оставаться неизменным (в противном случае уже в ходе самого рассуждения истинные высказывания могут стать ложными и из них нельзя будет извлечь надёжную информацию).

2. *Закон противоречия*. Одно и то же нельзя одновременно и утверждать, и отрицать.

3. *Закон исключения третьего*. Каждое высказывание обязательно должно быть либо истинным, либо ложным.

В действительности закон исключения третьего представляет собой определённую идеализацию — стремление к строго двузначной оценке истинных значений любых высказываний. Двузначность в восприятии мира закрепилась и в языке, и в человеческом мышлении, о чём свидетельствуют лингвистические пары: большой — маленький, хорошо — плохо, тепло — холодно и т. п. Подобной парой является и пара *истина — ложь*.

В данном параграфе рассматриваются азы так называемой *математической логики*, оформившейся в 1847 г. в трудах английского математика Джона Буля (1815—1864). Математическая логика, исходя из основных законов формальной логики, исследует закономерности логических процессов, применяя математические методы. Великий немецкий математик Х. Д. Гильберт (1862—1943) в книге «Основы теоретической логики» написал: «...Логические связи, которые существуют между суждениями, понятиями и т. д., находят своё выражение в формулах, толкование которых свободно от неясностей, какие легко могли бы возникнуть при словесном выражении».

Действительно, математический (символический) язык оказался для выражения таких связей весьма подходящим.

Каждое высказывание имеет два значения: смысловое и истинностное. В математической логике (алгебре логики) отвлекаются от смысловых значений высказываний и учитывают только их истинностные значения. Составные высказывания здесь рассматриваются только с точки зрения их логической структуры. Основным является то, что высказывания, имеющие одинаковую структуру, подчиняются одинаковым законам при определении истинности их значений. Будет ли составное высказывание истинным или ложным, зависит только от его структуры и от истинности значений элементарных высказываний, его составляющих (конкретный смысл элементарных высказываний роли не играет).

Многие знаки для конструирования формальных высказываний используются и другими науками. Основные из этих знаков — это *знаки логических связок*: $\wedge$ (конъюнкция, «и»), $\vee$ (дизъюнкция, «или»), $\Rightarrow$ (импликация, «если..., то...»), $\rceil$ или $\overline{}$ (отрицание, «неверно, что...»), $\Leftrightarrow$ (эквивалентность, «тогда и только тогда»), а также *кванторы*: $\forall$ (общности, «для всех») и $\exists$ (существования, «существует»). Дополнительно смысл логических связок разъясняется так называемыми *таблицами истинности*. Эти таблицы показывают, будет ли сложное высказывание, составленное из простых высказываний A и B и логических связок, истинным (и) или ложным (л) в зависимости от истинности составляющих его высказываний (см. таблицу).

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\overline{A}$
и	и	и	и	и	и	л
и	л	л	и	л	л	л
л	и	л	и	и	л	и
л	л	л	л	и	и	и

В учебнике рассматриваются лишь две логические связи: отрицание и импликация. С их помощью удаётся проиллюстрировать логические принципы конструирования прямой, обратной, противоположной и обратной противоположной теорем; ввести понятия необходимых и достаточных условий. Материал данного параграфа не ставит своей целью знакомство учащихся с построением формальных систем, конструированием сложных логических высказываний, специальным изучением логических законов. Содержание параграфа носит иллюстративно-прикладной характер, но в дальнейшем (если новыми стандартами это будет предусмотрено) может быть расширено до близкого к традиционной алгебре логики, которую рассматривают в физико-математических классах, на факультативных занятиях и в специальных вузовских курсах. Однако авторы учебника не считают полезным для учащихся общеобразовательных классов и классов с углублённым изучением математики освоение в большом объёме алгебры логики, тем более в отрыве от контекста изучаемых в школе конкретных дисциплин. Естественная логическая грамотность учащихся формируется в ходе изучения большинства школьных учебных предметов (в значительной степени курсов геометрии и алгебры).

Распределение материала параграфа по урокам (при наличии дополнительного времени) отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	пп. 1, 3	224—228	226 (3, 4), 228 (3)	
2	пп. 4—6	229—233	230 (3), 232 (3)	234

В результате изучения параграфа учащиеся должны уметь строить отрицание предложенного высказывания (упр. **224**); находить множество истинности предложения с переменной (упр. **226**); понимать смысл записей, использующих кванторы общности и существования (упр. **227**); опровергать ложное утверждение, приводя контрпример (упр. **232**); формулировать теорему, обратную данной (упр. **230**); осмысленно использовать термины «необходимо» и «достаточно»; отвечать на вопросы, приведённые в конце параграфа.

Решение упражнений

233. 1) С помощью контрпримера (например, чисел 2 и 3) опровергается утверждение; 2) доказательство верности высказывания: «Пусть это числа n, $n+1$ и $n+2$, где $n \in N$, их сумма $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$ делится на 3 при любом натуральном n.

234. 1) При любом k; 2) при $k=0$; 3) при $k=0$; 4) при любом k.

Глава II Делимость чисел

Теория чисел — это раздел математики, изучающий свойства чисел. Главное из них — *делимость* (на множестве целых чисел).

Говорят, что целое число a делится на целое число $b \neq 0$, если частное $a : b$ является целым числом (т. е. существует целое число c, такое, что $a = bc$). Слова о делимости (нацело) числа a на число b часто заменяют словами «a кратно b» или «b — делитель числа a».

В данной главе рассматриваются основные свойства делимости целых чисел на натуральные числа и решаются задачи на определение факта делимости чисел с опорой на эти свойства и признаки делимости.

Развитие идеи делимости в математике привело к понятию *сравнения*: два целых числа a и b называют сравнимыми по модулю m, если разность $a-b$ кратна натуральному числу m. Этот факт записывают в виде $a \equiv b \pmod m$.

Например: $7 \equiv 3 \pmod 2$, $-10 \equiv 4 \pmod 7$, $35 \equiv 0 \pmod 5$.

Значительный вклад в развитие идеи сравнений внёс крупнейший русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894), защитивший в Санкт-Петербурге докторскую диссертацию на тему «Теория сравнений».

Сравнения облегчают решение большого класса задач, в которых достаточно исследовать число с точностью до кратных некоторых чисел. К таким задачам относятся, например, задачи на отыскание последней цифры степени числа (суммы, произведения степеней чисел). Для решения этих задач используют сравнения по модулю 10.

В данной главе (§ 4) рассматриваются свойства сравнений. Так как сравнение по модулю m есть не что иное, как «равенство с точностью до кратных m», то многие свойства сравнений схожи со свойствами знакомых учащимся равенств (сравнения по одному модулю почленно складывают, вычитают, перемножают). Введение в теорию сравнений не является обязательным для изучения, однако при наличии времени желательно познакомить учащихся классов с углублённым изучением математики с его содержанием.

Первые задачи, которые решала теория чисел, связаны с разложением чисел на простые множители. Основная теорема арифметики, используемая в теории чисел, звучит так: «Любое натуральное число раскладывается на простые множители, причём единственным образом (с точностью до порядка их расположения в произведении)». Имея разложения на простые множители двух чисел, легко определить, делится ли одно из них на другое. Однако до сих пор остаётся нелёгкой задача выяснения, простым или составным является какое-либо большое натуральное число. Поэтому исследование делимости таких чисел на другие числа проблематично.

Ещё со времён Пифагора математики интересовались законами, по которым в ряду натуральных чисел возникают простые числа.

Известно, что в некоторых местах числового ряда простыми числами являются соседние нечётные числа (например, 5 и 7, 17 и 19, 8 004 119 и 8 004 121), в некоторых появляются большие промежутки с отсутствующими в них простыми числами (например, между числами 317 и 331, 887 и 907 простых чисел нет).

Если подсчитать количество простых чисел от 1 до 10 000, то окажется, что от 1 до 10 имеется четыре простых числа (40% от всех чисел); от 1 до 100 имеется 25 простых чисел (25% от всех чисел); от 1 до 1000 имеется 168 простых чисел (16,8% от всех чисел); от 1 до 10 000 имеется 1239 простых чисел (12,4% от всех чисел).

Таким образом, чем большее количество натуральных чисел, начиная от 1, рассматривается, тем относительно меньше среди них простых чисел.

В 1809 г. французский математик А. Лежандр (1752—1833) обозначил количество простых чисел, не превосходящих n, через $\pi(n)$. Он рассмотрел простые числа до 1 000 000 и обнаружил, что при любом $n \leqslant 10^6$ число $\pi(n)$ очень мало отличается от числа $\frac{n}{\ln n - 1{,}08366}$[1]. Через 50 лет после этого П. Л. Чебышеву удалось доказать неравенство

$$0{,}92 < \frac{\pi(n)\ln n}{n} < 1{,}06,$$

после доказательства которого функцию $\pi(n)$ стали называть *функцией Чебышева.*

Помимо функции Чебышева, в теории чисел исследовались и следующие функции: функция Эйлера $\varphi(n)$ — количество чисел от 1 до n, взаимно простых с числом n; $\alpha(n)$ — количество делителей числа n; $\tau(n)$ — сумма всех делителей числа n.

Задачи на исследование делимости чисел в теории чисел считаются менее сложными, чем задачи, возникающие при сложении и умножении натуральных чисел. К таким задачам, например, относится *теорема Ферма* о представлении n-й степени числа в виде суммы n-х степеней двух других чисел. К таким задачам относятся и *проблемы Гольдбаха*, сформулированные немецким математиком Х. Гольдбахом (1690—1764) в переписке с Л. Эйлером в 1742 г.:

1) можно ли всякое чётное число $n \geqslant 4$ представить в виде суммы двух простых чисел (*бинарная* проблема Гольдбаха);

2) можно ли каждое нечётное число $n \geqslant 7$ представить в виде суммы трёх простых чисел (*тернарная* проблема Гольдбаха)? Лишь через полтора столетия тернарную проблему Гольдбаха решил российский математик И. М. Виноградов (1891—1983). Он не просто доказал, что каждое нечётное число $n \geqslant 7$ можно представить в виде суммы трёх простых чисел, но также вывел формулу, позволяющую определить число таких различных представлений. Для решения этой проблемы И. М. Виноградов создал один из ведущих ныне методов теории чисел — метод тригонометрических сумм.

Рассказывая учащимся о проблемах теории чисел, желательно сообщить, что решению уравнений в целых и рациональных числах (так называемых *Диофантовых уравнений*) посвящён большой раздел теории чисел.

К задачам теории чисел относится и достаточно старая задача представления числа в виде суммы квадратов других чисел. При решении этой задачи учёными были доказаны, например, следующие утверждения:

---

[1] Исследовать функции, содержащие натуральные логарифмы, с учащимися желательно при изучении главы VII.

1) каждое натуральное число можно представить в виде суммы четырёх квадратов целых чисел (например, $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, $11 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$); 2) каждое простое число вида $4n + 1$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел (например, $13 = 3^2 + 2^2$); 3) каждое простое число, кроме чисел вида $8n - 1$, можно представить в виде суммы квадратов трёх целых чисел (например, $57 = 5^2 + 4^2 + 4^2$).

Рекомендуем учителю в классах с углублённым изучением математики при изучении как данной главы, так и всех последующих активно использовать в учебном процессе *дидактические материалы* (авторов М. И. Шабунина, М. В Ткачёвой, Н. Е. Фёдоровой, О. Н. Добровой). В таблицах распределения учебного материала по урокам номерам задач из дидактических материалов предшествует аббревиатура ДМ. Рекомендуем также рассматривать с учащимися *примеры с решениями*, приводимые ко всем параграфам ДМ.

Предметные цели изучения главы (только в классах с **углублённым** изучением математики):
- — обобщение свойств целых чисел, повторение признаков делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10;
- — обоснование признака делимости на 11;
- — знакомство с методами решения задач теории чисел, связанных с понятием делимости;
- — развитие представлений о делимости чисел, делимости суммы и произведения чисел;
- — обучение методам решения задач в целых числах;
- — знакомство с понятием *сравнение* и демонстрация удобства применения теории сравнений для решения задач на делимость чисел.

Метапредметные цели:
- — развитие методологии построения математических моделей для решения задач практики и смежных дисциплин;
- — обучение созданию моделей в виде уравнений, неравенств и их систем, решаемых в целых числах, — средств решения задач линейного программирования, внутрипредметных и межпредметных задач;
- — развитие аналитических и синтетических качеств мышления, навыков оптимизации решения проблем, комбинаторного стиля мышления.

Личностные цели:
- — развитие качеств личности и качеств мышления, необходимых для решения прикладных задач и для овладения будущей профессиональной деятельностью.

В результате изучения главы учащиеся должны знать ответы на вопросы, предложенные в конце главы, а также уметь выполнять упражнения типа **235—237**, **243** (2), **244**, **252**, **254**, **263** (2), **264** (1), **265**.

§ 1. Понятие делимости. Деление суммы и произведения (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — развитие представления учащихся о делимости чисел, систематизация свойств делимости и применение их при решении задач.

Первый урок желательно начать с вводной беседы о теории чисел и месте теории делимости в ней. Материал для беседы можно взять из введения к методике изучения данной главы.

Во вводной части параграфа учебника повторяются знакомые учащимся ещё из курса арифметики понятия, рассматриваются свойства делимости сумм и произведений чисел, о делимости каждого из которых что-то уже известно (в дальнейшем эти свойства применяются при решении задач параграфа). В книге доказывается лишь свойство 1, по аналогии учащиеся могут самостоятельно доказывать и остальные (учитель может доказательства свойств 2—7 рассматривать как дополнительные задачи к параграфу).

При рассмотрении задач текста параграфа для обоснования выводов важно ссылаться на соответствующие свойства. Например, при решении задачи **3** тот факт, что число $5(8n + 3) - 8(5n + 1)$ делится на m, следует обосновать ссылкой на свойство 2. Идея решения задачи **3** заключается в том, что составляется выражение (по свойству 2 делящееся на m), в котором взаимно уничтожаются одночлены, содержащие n, а оставшееся число — простое.

В задачах **1**, **2** (и аналогичных им) требование доказательства делимости числа a на натуральное число m понимается (по определению) как требование представить число a в виде $a = mp$.

При решении задачи **4** следует сослаться на свойство 1. Формировать у учащихся умение решать подобные задачи не следует, так как на данном этапе обучения возможно их решение лишь подбором множителя перед двучленом, делящимся на заданное число.

При решении задачи **5** и упражнения **235** (2) применяется часто используемый в теории делимости метод перебора вариантов представления неизвестных чисел в виде чётных или нечётных.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	Упражнения: для самостоятельной работы в классе	Упражнения: дополнительные
1	§ 1 до задачи 2	235		239; ДМ № 1
2	Задачи 2—5	236—238 (1), 240	Доказать, что $3^{53} + 9^{25}$ делится на 7	238 (2); ДМ № 2

В результате изучения параграфа учащиеся должны уметь применять свойства делимости чисел при выполнении упражнений типа **235—237**.

Решение упражнений

235. 1) $(2n)^3 = 8n^3$; 2) $(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 4(n^2 - m^2) + 4(n-m) = 4(n-m)(n+m+1) = A$.

Если числа n и m оба чётные или оба нечётные, то $n-m$ — чётное число, а число A делится на $4 \cdot 2 = 8$; если одно из них нечётное, а другое чётное, то $n+m+1$ — чётное число.

236. $16^{20} + 2^{76} = 2^{80} + 2^{76} = 2^{76}(2^4+1) = 2^{76} \cdot 17$.

237. Число $7(5n+1) - 5(7n+2) = 35n + 7 - 35n - 10 = -3$ делится на натуральное $m > 1$. Такое число единственное, это $m = 3$.

238. 1) $57x + 78y = 5(7x+9y) + 11(2x+3y) = 11k$.

2) По условию $m + n = 7k$, откуда $m = 7k - n$, тогда $2m^2 + 5mn + 3n^2 = 2(7k-n)^2 + 5(7k-n)n + 3n^2 = 98k^2 - 28kn + 2n^2 + 35kn - 5n^2 + 3n^2 = 98k^2 + 7kn = 7(14k^2 + kn)$.

239. $555^{777} + 777^{555} = (5 \cdot 3 \cdot 37)^{777} + (7 \cdot 3 \cdot 37)^{555} = 37^{555}k$.

240. Если m и n одновременно чётные или нечётные числа, то $3m + 7n + 2$ — чётное, тогда $(3m+7n+2)^7$ делится на $2^7 = 128$, т. е. делится на 64. Если одно из чисел m и n чётное, другое — нечётное, то чётным будет число $m + 5n + 7$ и $(m+n+7)^6$ будет делиться на $2^6 = 64$.

241. $n(n+3)(n+1)(n+2) + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1 = k(k+2) + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$, где $k = n^2 + 3n$.

242. 1) $16^3 + 31^4 - 2 = 16^3 - 1 + 31^4 - 1 = (16-1)(16^2+16+1) + (31^2-1)(31^2+1) = 15k + (31-1)(31+1)(31^2+1) = 15k + 30p = 15a$.

2) $10^{10} + 28^3 - 2 = 10^{10} - 1 + 28^3 - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{10\text{ цифр}} + 27(28^2 + 28 + 1) = 9(\underbrace{11\ldots1}_{10\text{ цифр}} + 3k)$, где $k = 28^2 + 28 + 1$.

3) $36^3 + 19^3 - 16 = 36^3 - 2^3 + 19^3 - 2^3 = (36-2)(36^2 + 36 \cdot 2 + 4) + (19-2)(19^2 + 19 \cdot 2 + 4) = 34k + 17n = 17m$.

§ 2. Деление с остатком (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — обучение решению задач, связанных с нахождением остатков от деления числовых значений различных числовых выражений (в частности, степеней) на натуральные числа.

Целостное повторение и обоснование признаков делимости чисел будет проведено в следующем параграфе (будет выведен и признак делимости на 11), однако при решении отдельных задач этого параграфа используется знание школьниками признаков делимости на 5 и на 4.

Если при решении задачи **1** кому-то из учащихся не будет ясно, почему остаток от деления числа, заканчивающегося числом 50, на число 4 такой же, как от деления 50 на 4, можно показать следующую запись:

$$\overline{a50} : 4 = (100a + 50) : 4 = 25a + 12 \text{ (2 ост.)}.$$

(Запись числа с помощью черты над значащими цифрами будет введена в следующем параграфе, но при желании учитель может начать пользоваться этой символикой в любое подходящее время.)

После разбора задачи **1** текста параграфа решается упражнение **243 (1)**, после задачи **2** — упражнение **243** (2—5), после задачи **3** — упражнение **246**, после задачи **5** — упражнения **244**, **245**, **247**.

В ходе обсуждения решения задачи **5** желательно выявить закономерности в появлении той или иной последней цифры при возведении в натуральные степени всех однозначных чисел.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 2 до задачи 4	243 (1), 243 (2—5), 246	243 (3)	ДМ № 1
2	Задачи 4—5	244, 245, 247	Задача 4 текста параграфа	ДМ № 2, 3; задача 6 текста параграфа; 251

В результате изучения параграфа учащиеся классов с **углублённым** изучением математики должны уметь решать упражнения типа **243** (2), **244**.

Решение упражнений

243. 1) Последняя цифра значения выражения 9^{2k} равна 1; остаток от деления 39^{46} на 5 равен 1;

2) $64^{29} = (7 \cdot 9 + 1)^{29} = 7k + 1$;

3) $103^{15} = (17 \cdot 6 + 1)^{15} = 17k + 1$;

4) $10^{10} - 1 = \underbrace{99...9}_{10 \text{ цифр}}$, это число делится на 3; $28^3 = (27 + 1)^3 = 27k + 1 = 3p + 1$; остаток равен 1;

5) $7 \cdot 10^{30} = 7(9 + 1)^{10} = 7(9k + 1) = 9p + 7$; остаток равен 7.

244. Последняя цифра числа 12^{39} такая же, как у 2^3 (т. е. 8); последняя цифра 13^{41} такая же, как у 3^1 (т. е. 3); последняя цифра заданной суммы равна последней цифре числа $11 = 8 + 3$, т. е. равна 1.

245. Остаток от деления числа на 10 совпадает с последней цифрой числа. Последняя цифра любой степени числа 36 (как и числа 6) равна 6. Последняя цифра любой степени числа 21 (как и числа 1) равна 1. Последняя цифра у 7^8 такая же, как у 7^4, т. е. 1. Последняя цифра суммы $36^{24} + 21^{45} + 7^8$ равна $6 + 1 + 1 = 8$.

246. Если число не делится на 3, то его можно представить либо в виде $3n + 1$, либо в виде $3n + 2$, где $n \in N$ или $n = 0$. Тогда $(3n + 1)^2 - 1 = 9n^2 + 6n + 1 - 1 = 3(3n^2 + 2n)$ — делится на 3; $(3n + 2)^2 - 1 = 9n^2 + 12n + 4 - 1 = 3(3n^2 + 4n + 1)$ — делится на 3.

248. 1) Можно показать, что остатки от деления на 11 числа вида $2k$ повторяются с периодом 10 (при делении на 11 чисел 2, 2^2, ..., 2^{10} остатки разные и равны соответственно 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1, а при делении числа 2^{11} остаток снова равен 2 и т. д.). Следовательно, остаток от деления числа 2^{2002} на 11 такой же, как и при делении на 11 числа 2^2, так как $2002 = 10 \cdot 200 + 2$, и он равен 4.

Остатки от деления чисел вида 3^k на 11 повторяются с периодом 5 (при делении на 11 чисел 3, 3^2, ..., 3^5 остатки соответственно равны 3, 9, 5, 4, 1, а при делении на 11 числа 3^6 остаток снова равен 3 и т. д.). Поэтому остаток от деления на 11 числа 3^{2002} такой же, как и при делении на 11 числа 3^2, т. е. равен 9.

Остаток от деления числа a на 11 равен остатку от деления на 11 суммы $4 + 9 = 13$, т. е. равен 2.

249. Указание. Доказывается методом от противного, рассмотрением комбинаций «по остаткам» $m = 3k + 1$, $m = 3k + 2$ и $n = 3p + 1$, $n = 3p + 2$, где $k \in N$ или $k = 0$, $p \in N$ или $p = 0$. Убеждаются в том, что ни при какой из них $m^2 + n^2$ не делится на 3.

251. $a = \frac{n^4 + n^2 - (n^3 + n) + n^2 + 1 + n - 1}{n^2 + 1} = n^2 - n + 1 + \frac{n - 1}{n^2 + 1}$. Так как $n^2 - n + 1$ — целое число, то число a будет целым тогда и только тогда, когда целым будет $\frac{n-1}{n^2+1}$. Это возможно лишь при $n = -1$, $n = 0$ и $n = 1$.

§ 3. Признаки делимости (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — повторение известных признаков делимости; обоснование признаков делимости на 9 и на 3; демонстрация применимости признаков и свойств делимости при решении разнообразных задач.

Если при решении задачи **1** предыдущего параграфа учитель не провёл обоснование признака делимости на 4, то это можно сделать, например, после решения задачи **3** этого параграфа следующим образом.

Любое число $a = \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0} = \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_2} \cdot 100 + \overline{a_1a_0} = \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_2} \cdot 25 \cdot 4 + \overline{a_1a_0}$; очевидно, что эта сумма делится на 4, если на 4 делится число $\overline{a_1a_0}$.

Задача **3** параграфа при решении использует знание как признака делимости числа на 3, так и свойств 7 и 1 из § 1. В задаче **4** иллюстрируется удобство записи числа «с чертой», заменяющей запись его в виде суммы разрядных слагаемых, а также применимость свойства 1 (§ 1) делимости суммы (разности) чисел.

До выполнения упражнения **256** желательно сформулировать признак делимости числа на 8. Обосновать его можно следующим образом.

Любое число $a = \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_3a_2a_1a_0} = \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_3} \cdot 1000 + \overline{a_2a_1a_0} =$ $= \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_3} \cdot 125 \cdot 8 + \overline{a_2a_1a_0}$. Эта сумма делится на 8 тогда и только тогда, когда число $\overline{a_2a_1a_0}$ делится на 8.

В конце второго урока по материалу § 1—3 можно провести проверочную самостоятельную работу (15 мин).

1. Доказать, что число $a = 3^9 + 9^3$ $[a = 4^6 - 2^8]$ делится на 14 [15].

2. Найти последнюю цифру числа a, если $a = 2^{259} + 5^{320}$ $[a = 3^{206} + 4^{129}]$.

3. Доказать, что число $b = 5624^5 - 1908^3$ $[b = 1251^4 + 2556^5]$ делится на 4 [9].

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 3 до задачи 4	252, 253, 256	Доказать, что число $2 \cdot 351^7 - 288^6 + 522^5$ делится на 9	258; ДМ № 2
2	Задача 4	255, 257, 254	Проверочная самостоятельная работа	Задачи 5 и 6 текста § 3; 259; ДМ № 4

В результате изучения параграфа учащиеся должны научиться применять признаки делимости и свойства делимости при решении заданий типа **252, 254, 255**.

Решение упражнений

254. $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = n^3(n + 2) - n(n + 2) = (n + 2)n(n^2 - 1) =$ $= (n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ — произведение четырёх последовательных натуральных чисел, среди которых два чётных числа, причём одно из них делится на 4, т. е. это произведение делится на 8. Среди множителей хотя бы один делится на 3. Так как числа 3 и 8 взаимно простые, то такое произведение делится на $3 \cdot 8 = 24$.

255. $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+2)$. Если $n(n^2+2)$ делится на 3, то заданное число будет делиться на $3\cdot 3=9$. Возможны три случая: 1) при $n=3k$ число $n(n^2+2)=3k(9n^2+2)$ делится на 3; 2) при $n=3k+1$ число $n(n^2+2)=(3k+1)((3k+1)^2+2)=$ $=(3k+1)(9k^2+6k+3)=3(3k+1)(3k^2+2k+1)$ делится на 3; 3) при $n=3k+2$ число $n(n^2+2)=(3k+2)((3k+2)^2+2)=(3k+2)(9k^2+$ $+6k+6)=3(3k+2)(3k^2+2k+2)$ делится на 3.

256. Число $a=10^2\cdot 5^{45}=5^{45}\cdot 100$ оканчивается числом 500, остаток от деления исходного числа совпадает с остатком от деления числа 500 на 8 (см. признак делимости на 8). Это число 4.

257. 1) Число $3n^2+3=3(n^2+1)$ делится на 3. Для того чтобы исходное число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы число n^3+5n делилось на 3. При $n=3k$ число n^3+5n, очевидно, делится на 3. При $n=3k+1$ число $n^3+5n=(3k+1)^3+5(3k+1)=$ $=3p+1+3m+5=3q+6=3(q+2)$ делится на 3. При $n=3k+2$ число $n^3+5n=(3k+2)^3+5(3k+2)=3p+8+3m+10=3q+18=$ $=3(q+6)$ делится на 3.

2) $a=2n^3-3n^2+n=(n-1)n(2n-1)$. Из двух чисел n и $n-1$ одно чётное, т. е. число a делится на 2. При $n=3k$ число a делится на 3; при $n=3k+1$ число $n-1=3k$ и число a делится на 3; при $n=3k+2$ число $a=(3k+1)(3k+2)(6k+3)=3(3k+1)\times$ $\times(3k+2)(2k+1)$ делится на 3. Таким образом, число a делится и на 2, и на 3, т. е. делится на $2\cdot 3=6$.

258. Пятая степень (а также степень вида n^{4k+1}) любого числа n оканчивается той же цифрой, что и число n, поэтому последняя цифра числа $a=n^5-n$ — нуль, т. е. число a делится на 5.

259. 1) $6^{12}-1=(6^6+1)(6^6-1)=((6^2)^3+1^3)(6^6-1)=(6^2+1)(6^4+$ $+6^2+1)(6^6-1)=37k$.

2) $2^{48}-1=(2^{24}-1)(2^{24}+1)=(2^{12}-1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)=(2^6+1)\times$ $\times(2^6-1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)=65k$.

3) $3^{17}-3=3(3^{16}-1)=3(3^8-1)(3^8+1)=3(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)=$ $=3(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)=3\cdot 8\cdot 10k=240k$.

4) $10^{12}+263=10^{12}+(11\cdot 24-1)=(10^{12}-1)+11\cdot 24$ — это число делится на 11, так как $10^{12}-1=\underbrace{99...9}_{12\text{ цифр}}$ делится на 11 и $11\cdot 24$ делится на 11.

5) $10^{24}-298=10^{24}-(3\cdot 99+1)=(10^{24}-1)-3\cdot 99$ — это число делится на 99, так как $10^{24}-1=\underbrace{99...9}_{24\text{ цифры}}$ делится на 99 и $3\cdot 99$ делится на 99.

§ 4. Сравнения

Цель изучения параграфа — в **математических** классах (и в классах с **углублённым** изучением математики — при наличии дополнительного времени) знакомство с теорией сравнений, демонстрация удобства этой теории для решения ряда задач делимости (в частности, доказательства признака делимости на 11).

На изучение материала параграфа желательно отвести не менее 2 ч. Часть задач параграфа, содержащих «подзадачи», можно перенести на самостоятельное рассмотрение учащимися в классе и дома.

Желательно сначала рассмотреть идеи решения всех задач параграфа, затем перейти к выполнению упражнений (выбор их учитель осуществляет по своему усмотрению).

Решение упражнений

260. 1) $91 \equiv 1 \pmod{18}$, откуда $91^{40} \equiv 1 \pmod{18}$; $55 \equiv 1 \pmod{18}$, откуда $55^{35} \equiv 1 \pmod{18}$, тогда $91^{40} - 55^{35} \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{18}$, т. е. делится на 18.

2) $84 \equiv -1 \pmod{17}$, а $84^{20} \equiv 1 \pmod{17}$; $101 \equiv -1 \pmod{17}$, $101^{19} \equiv -1 \pmod{17}$, тогда $84^{20} + 101^{19} \equiv 0 \pmod{17}$, т. е. делится на 17.

3) $75 \equiv -1 \pmod{19}$, $39 \equiv 1 \pmod{19}$, откуда $75^{10} \cdot 39^{10} \equiv$ $\equiv 1 \pmod{19}$; $94 \equiv -1 \pmod{19}$, $58 \equiv 1 \pmod{19}$, откуда $94^{15} \cdot 58^{15} \equiv$ $\equiv -1 \pmod{19}$, тогда $(75 \cdot 39)^{10} + (94 \cdot 58)^{15} \equiv 0 \pmod{19}$.

4) $10 \equiv -1 \pmod{11}$, $10^{327} \equiv -1 \pmod{11}$, $56 \equiv 1 \pmod{11}$, откуда $10^{327} + 56 \equiv 0 \pmod{11}$.

5) $4 \equiv 1 \pmod{3}$, $4^{15} \equiv 1 \pmod{3}$, $233 \equiv 2 \pmod{3}$, тогда $4^{15} + 233 \equiv 1 + 2 = 3 \pmod{3}$, т. е. делится на 3.

261. 1) $25 \equiv 1 \pmod{3}$, $25^{26} \equiv 1 \pmod{3}$; $29 \equiv -1 \pmod{3}$, $29^{26} \equiv$ $\equiv 1 \pmod{3}$; $25^{26} + 29^{26} \equiv 1 + 1 = 2 \pmod{3}$, т. е. остаток от деления на 3 равен 2.

2) $2^4 \equiv -1 \pmod{17}$, откуда $(2^4)^{91} = 2^{364} \equiv -1 \pmod{17}$; $2^{367} =$ $= 8 \cdot 2^{364} \equiv -8 \pmod{17}$; $43 \equiv 9 \pmod{17}$, тогда $2^{367} + 43 \equiv -8 + 9 =$ $= 1 \pmod{17}$, т. е. остаток от деления на 17 равен 1.

3) $2 \equiv -1 \pmod{3}$, $2^{1995} \equiv -1 \pmod{3}$; $10^3 \equiv 1 \pmod{3}$, $5 \cdot 10^3 \equiv 5 \equiv 2 \pmod{3}$, тогда $2^{1995} + 5 \cdot 10^3 \equiv -1 + 2 = 1 \pmod{3}$, т. е. остаток от деления на 3 равен 1.

4) $2^3 \equiv -1 \pmod{9}$, $2^{75} = (2^3)^{25} \equiv -1 \pmod{9}$, $2^{76} = 2^{75} \cdot 2 \equiv$ $\equiv -2 \pmod{9}$; $10^{18} \equiv 1 \pmod{9}$, $3 \cdot 10^{18} \equiv 3 \pmod{9}$, тогда $2^{76} + 3 \cdot 10^{18} \equiv -2 + 3 = 1 \pmod{9}$, т. е. остаток от деления исходного числа на 9 равен 1.

262. 1) $20 \equiv 1 \pmod{19}$, $20^{15} \equiv 1 \pmod{19}$, $28 \equiv 9 \pmod{19}$, откуда $28 \cdot 20^{15} \equiv 9 \pmod{19}$; $18 \equiv -1 \pmod{19}$, $18^{13} \equiv -1 \pmod{19}$, $10 \cdot 18^{13} \equiv -10 \equiv 9 \pmod{19}$, тогда $28 \cdot 20^{15} - 10 \cdot 18^{13} \equiv 9 - 9 =$ $= 0 \pmod{19}$, т. е. данное число делится на 19.

2) $23 \equiv -3 \pmod{13}$, $23^8 \equiv 3^8 \pmod{13}$, $3^3 \cdot 23^8 \equiv 3^{11} \pmod{13}$, но $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$, $3^9 \equiv 1 \pmod{13}$, $3^{11} = 3^9 \cdot 3^2 \equiv 9 \pmod{13}$, тогда $3^3 \cdot 23^8 \equiv 9 \pmod{13}$; $5^2 \equiv -1 \pmod{13}$, $5^8 \equiv 1 \pmod{13}$, $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{13}$, $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, $2^{14} = 2^{12} \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{13}$, следовательно, $5^8 \cdot 2^{14} \equiv 4 \pmod{13}$; таким образом, $3^3 \cdot 23^8 + 5^8 \times$ $\times 2^{14} \equiv 9 + 4 = 13 \equiv 0 \pmod{13}$, т. е. делится на 13.

3) $5^4 = 625 \equiv 5^2 \pmod{600}$, $5^8 \equiv 5^4 \equiv 5^2 \pmod{600}$, $5^{16} \equiv 5^4 \equiv$ $\equiv 5^2 \pmod{600}$, $5^{32} \equiv 5^2 \pmod{600}$, $5^{64} \equiv 5^2 \pmod{600}$, $5^{72} \equiv 5^{64} \cdot 5^8 \equiv$

$\equiv 5^4 \equiv 5^2 \pmod{600}$, $125^{24} = 5^{72} \equiv 5^2 \pmod{600}$, $1825 \equiv 5^2 \pmod{600}$, поэтому $125^{24} - 1825 \equiv 5^2 - 5^2 = 0 \pmod{600}$.

4) $100 \equiv 2 \pmod{49}$, $100^{20} \equiv 2^{20} \pmod{49}$; $50 \equiv 1 \pmod{49}$; $50 \cdot 16^5 \equiv 50 \cdot 2^{20} \equiv 2^{20} \pmod{49}$, поэтому $100^{20} - 50 \cdot 16^5 \equiv 2^{20} - 2^{20} = 0 \pmod{49}$.

5) $42 \equiv 2 \pmod{5}$, $42^{365} \equiv 2^{365} \pmod{5}$, но $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$, $2^{365} \equiv (2^4)^{91} \cdot 2 \equiv 2 \pmod{5}$; $53 \equiv 3 \pmod{5}$, $53^{241} \equiv 3^{241} \pmod{5}$, но $3^2 \equiv -1 \pmod{5}$, $3^{241} \equiv (3^2)^{120} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{5}$, поэтому $42^{365} + 53^{241} \equiv 2 + 3 \equiv 0 \pmod{5}$.

6) $71 \equiv 1 \pmod{7}$, $71^{325} \equiv 1 \pmod{7}$; $41 \equiv -1 \pmod{7}$, $41^{135} \equiv -1 \pmod{7}$, поэтому $71^{325} + 41^{135} \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{7}$.

§ 5. Решение уравнений в целых числах (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство со способами решения уравнений первой и второй степеней с двумя неизвестными в целых числах.

Теория решения в целых числах уравнений вида $ax + by = c$ (1) излагается учителем. При желании доказательство второй и третьей частей теоремы учитель может либо не проводить, либо проводить, но не требовать от учащихся их воспроизведения. Доказательство первой части теоремы требует знания алгоритма Евклида, не входящего в программу. Поэтому существование хотя бы одного целочисленного решения уравнения (1) при взаимно простых a и b принимается учащимися на веру. И в задаче **2** одно из решений данного уравнения угадывается или находится после перебора значений y в выражении $x = \frac{1 - 15y}{7}$ таким образом, чтобы $(1 - 15y)$ было кратно 7. Все остальные решения находятся уже с применением рассмотренной теоретической части параграфа, в частности с помощью замечания к теоремам.

Задача **1** параграфа может быть рассмотрена дважды: сначала до изучения теоремы (так как обоснование отсутствия целочисленных решений уравнения основывается на элементарных логических рассуждениях); повторно после изучения теоремы, ссылаясь на её второй пункт. Действительно, так как наибольший общий делитель чисел 42 и 66 равен $6 \neq 1$, то уравнение $42x + 66y = 13$ (согласно второму пункту теоремы 2) не имеет решений.

При решении задачи **3** анализируются возможные случаи равенства произведения двух чисел простому числу. В задаче **4** используется уже знакомая учащимся идея исследования значения выражения в зависимости от чётности или нечётности значений входящих в него букв. Эти идеи полезно закрепить при выполнении упражнений **264**, **265**.

В ходе изучения этого параграфа можно заниматься повторением ранее изученного материала, используя для этого упражнения к главе. Полезно на одном из этих уроков провести *тест 1* (из сборника «Тематических тестов» для 10 класса авторов М. В. Ткачёвой и Н. Е. Фёдоровой) для определения уровня готовности учащихся к выполнению контрольной работы.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 5 до задачи 3	263, 276	Найти все целочисленные решения уравнения $-5x + 4y = 9$	268; ДМ № 1
2	Задачи 3, 4	264, 265	Найти все целочисленные решения уравнения $x^2 - xy = 3$; тест 1	270; ДМ № 2, 3, 7

В результате изучения параграфа учащиеся должны знать подходы к решению в целых числах уравнений типа **263** (2), **265**, уметь обосновывать отсутствие целочисленных решений в уравнениях типа **264** (1).

Решение упражнений

264. 1) Запишем уравнение в виде $(x + y)(x - y) = 30$.

а) Пусть числа x и y являются одновременно либо чётными, либо нечётными. Тогда $x + y$ и $x - y$ — чётные числа, и поэтому левая часть уравнения делится на 4, а правая не делится на 4.

б) Если одно из чисел x и y является чётным, а другое — нечётным, то левая часть уравнения — нечётное число, а правая — чётное.

Таким образом, никакая пара целых чисел $(x; y)$ не может обратить уравнение в верное равенство.

2) Запишем уравнение в виде $3(7x^2 - 3) = 7y^2$, откуда следует, что уравнение может иметь целочисленные решения только в том случае, когда $y = 3m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Но тогда $3(7x^2 - 3) = 63m^2$, $7x^2 = 3(1 + 7m^2)$, откуда следует, что полученное уравнение может иметь целочисленные решения только тогда, когда $x = 3p$, $p \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому $63p^2 = 3(1 + 7m^2)$, $21p^2 = 7m^2 + 1$. Последнее равенство не может быть верным ни при каких целых p и m. Действительно, его левая часть делится на 3, а правая может делиться на 3 только в случае, когда m не делится на 3. Но тогда $m = 3q \pm 1$, $q \in \boldsymbol{Z}$, откуда $m^2 = 3r + 1$, $r \in \boldsymbol{N}$, $7m^2 + 1 = 31r + 2$. Это число не делится на 3. Итак, ни при каких целых x, y исходное равенство не может быть верным.

265. 1) Записав уравнение в виде $(x+y)(x-y)=21$, сведём задачу к решению следующих систем:

$$\begin{cases} x+y=21, \\ x-y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1, \\ x-y=21, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-21, \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-1, \\ x-y=-21, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=7, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-7, \\ x-y=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=-7. \end{cases}$$

Отсюда находим четыре целочисленных решения: (5; 2), (5; −2), (−5; −2), (−5; 2).

2) Запишем уравнение в виде $x(y+1)=5$ и сведём задачу к нахождению на множестве $\boldsymbol{Z}$ решений следующих систем:

$$\begin{cases} x=5, \\ y+1=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-5, \\ y+1=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y+1=5, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1, \\ y+1=-5. \end{cases}$$

Ответ. (5; 0), (−5; −2), (1; 4), (−1; −6).

266. 1) Умножив уравнение на 3, получим $9xy+30x-39y-105=0$, а затем преобразуем полученное уравнение к виду $(3x-13)(3y+10)=-25$. Задача сводится к нахождению на множестве $\boldsymbol{N}$ решений следующих систем:

$$\begin{cases} 3x-13=25, \\ 3y+10=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-13=-25, \\ 3y+10=1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-13=1, \\ 3y+10=-25, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-13=-1, \\ 3y+10=25, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-13=5, \\ 3y+10=-5, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-13=-5, \\ 3y+10=5. \end{cases}$$

Ответ. (6; −5), (4; 5), (−4; −3).

2) Умножив обе части уравнения на 3, получим $9xy+57x+30y+165=0$, $(3x+10)(3y+19)=25$.

Ответ. (−5; −8), (−3; 2), (5; −6).

3) Преобразуем уравнение к виду $x^3-6x^2+13x+7=y(x-3)$, откуда

$$y=\frac{x^3-6x^2+13x+7}{x-3}=\frac{x^3-3x^2-3x^2+9x+4x-12+19}{x-3},$$

$$y=x^2-3x+4+\frac{19}{x-3}. \qquad (*)$$

Отсюда следует, что $y \in \boldsymbol{Z}$ тогда и только тогда, когда $\frac{19}{x-3}$ — целое число. Это имеет место при $x=4;\ 2;\ 22;\ -16$. Из уравнения (*) найдём соответствующие значения y.

Ответ. (4; 27), (2; −17), (22; 423), (−16; 307).

4) Приведём уравнение к виду $x^3-7x+23=y(x-2)$, откуда

$$y=\frac{x^3-7x+23}{x-2}=\frac{x^3-2x^2+2x^2-4x-3x+6+17}{x-2}=x^2+2x-3+\frac{17}{x-2}.$$

Дробь $\frac{17}{x-2}$ принимает целые значения при $x=3;\ 1;\ 19;\ -15$.

Ответ. (3; 29), (1; −17), (19; 397), (−15; 191).

267. 1) Запишем уравнение в виде $(2x - 3y)(x + 4y) = 6$ и заметим, что делителями числа 6 являются числа ±1; ±2; ±3; ±6. Задача сводится к отысканию таких $x \in \boldsymbol{N}$, $y \in \boldsymbol{N}$, которые удовлетворяют следующим системам:

$$\begin{cases}2x - 3y = 1,\\ x + 4y = 6,\end{cases}\quad \begin{cases}2x - 3y = 2,\\ x + 4y = 3,\end{cases}\quad \begin{cases}2x - 3y = 3,\\ x + 4y = 2,\end{cases}\quad \begin{cases}2x - 3y = 6,\\ x + 4y = 1.\end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решение (2; 1), другие не имеют решений на множестве $\boldsymbol{N}$.

2) Запишем уравнение в виде $(2x + y - 4)(x - y + 3) = 16$. Искомые решения содержатся среди решений на множестве $\boldsymbol{N}$ следующих систем:

$$\begin{cases}2x + y - 4 = 2,\\ x - y + 3 = 8,\end{cases}\quad \begin{cases}2x + y - 4 = 8,\\ x - y + 3 = 2,\end{cases}\quad \begin{cases}2x + y - 4 = 4,\\ x - y + 3 = 4,\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x + y - 4 = 1,\\ x - y + 3 = 16,\end{cases}\quad \begin{cases}2x + y - 4 = 16,\\ x - y + 3 = 1.\end{cases}$$

Только третья система имеет решение (3; 2) на множестве $\boldsymbol{N}$.

Урок обобщения и систематизации знаний (0/1 ч)

На этом уроке по результатам анализа *теста 1* (проведённого на одном из двух предыдущих уроков) повторяются основные положения теории делимости и теории решения уравнений в целых числах; решаются задачи из упражнений к главе II; обсуждаются ответы на вопросы к главе II. Разумно на уроке предлагать учащимся повторное рассмотрение решений задач из текста § 1—3, 5. Учащиеся готовятся к контрольной работе, выполняя задания рубрики «Проверь себя!».

Решение упражнений к главе II

280. По условию $8n + 3 \equiv 0 \pmod m$ и $7n + 1 \equiv 0 \pmod m$, откуда $8n \equiv -3 \pmod m$, $7n \equiv -1 \pmod m$, $56n \equiv -21 \pmod m$, $56n \equiv -8 \pmod m$, $21 \equiv 8 \pmod m$ или $13 \equiv 0 \pmod m$; $m = 13$.

284. 1) Указание. Записать уравнение в виде $x^2 - (y + 2) = 4$ или $(x + y + 2)(x - y - 2) = 4$.

2) Запишем уравнение в виде $x^3 - 3x^2 - 8x + 27 = y(x + 2)$, откуда

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 - 8x + 27}{x+2} = \frac{x^3 + 2x^2 - 5(x^2 + 2x) + 2(x+2) + 23}{x+2} = x^2 - 5x + 2 + \frac{23}{x+2},$$

$x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 21$, $x_4 = -25$. Далее находятся соответствующие значения y.

3) Указание. Умножить обе части уравнения на 3 и преобразовать к виду $(3x + 13)(3y + 16) = 25$.

4) Указание. Умножить обе части уравнения на 3 и привести к виду $(3x + 16)(3y - 10) = -25$.

285. По условию стороны выражены взаимно простыми числами, поэтому оба катета не могут выражаться чётными числами. Значит, либо они одновременно нечётные, либо разной чётности.

Предположим, что оба катета a и b выражены нечётными числами, т. е. $a = 2n + 1$, $b = 2m + 1$, где n и m — некоторые натуральные числа. Тогда квадрат гипотенузы равен $a^2 + b^2 = (2n + 1)^2 + (2m+1)^2 = 2(2n^2 + 2m^2 + 2n + 2m + 1)$. Очевидно, что полученное число чётное, но не делящееся на 4, т. е. не являющееся квадратом целого числа. Таким образом, катеты могут быть выражены только числами разной чётности. Пусть $a = 2n$, $b = 2m + 1$, тогда $a^2 + b^2 = 4n^2 + 4m^2 + 4m + 1 = 2(2n^2 + 2n^2 + 2m) + 1$ — число нечётное. Раз квадрат гипотенузы выражен нечётным числом, значит, и сама гипотенуза выражается числом нечётным.

Ответы на вопросы к главе II

4. 1) Если $a = m^3 + n^3$, то $a = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$ делится на $m + n$.

2) Если $a = m^5 + n^5$, то $a = (m + n)(m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)$ делится на $m + n$.

3) Если $a = m^6 - n^6$, то $a = (m^2 - n^2)(m^4 + m^2n^2 + n^4) = (m + n) \times (m - n)(m^4 + m^2n^2 + n^4)$ делится на $m + n$.

4) Если $a = \dfrac{m^8 - n^8}{m^2 + n^2}$, то $a = \dfrac{(m^4 - n^4)(m^4 + n^4)}{m^2 + n^2} = (m^2 - n^2)(m^4 + n^4) = (m + n)(m - n)(m^4 + n^4)$ делится на $m + n$.

6. 1) Число a делится на 6 тогда и только тогда, когда a — чётное число и сумма его цифр делится на 3.

2) a делится на 8 тогда и только тогда, когда число, полученное из данного отбрасыванием всех цифр, кроме трёх последних, делится на 8 (a — это n-значное число, $n \geqslant 3$).

3) a делится на 12 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа a делится на 3 и число, образованное двумя последними цифрами числа a, делится на 4 (a — это n-значное число, $n \geqslant 2$).

4) n-значное число a делится на 15 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3, а его последняя цифра 0 или 5.

5) n-значное число a делится на 125 тогда и только тогда, когда число, полученное из данного отбрасыванием всех цифр, кроме трёх последних, делится на 125.

Контрольная работа № 1

1. Найти остаток от деления числа 485638 [728362] на 5 [4], не выполняя деления.

2. Найти последнюю цифру числа $3^{57} + 4^{25}$ [$9^{63} + 2^{39}$].

3. Доказать, что число $9^{15} - 3^{27}$ [$2^{36} + 4^{16}$] делится на 26 [17].

4. Натуральные числа $8n + 1$ и $5n + 2$ [$6n + 5$ и $7n + 5$] делятся на натуральное число $m \neq 1$. Найти m.

5. Доказать, что уравнение $26x + 39y = 15$ [$36x + 45y = 11$] не имеет целочисленных решений.

6. Доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = 230$ не имеет целочисленных решений. [Доказать, что число $a = (x - y)^2(x + y + 1)^2$ делится на 4 при любых целых x и y.]

7. (*Дополнительно для изучавших теорию сравнений.*) Доказать, что число $a = 36^{43} + 41^{15}$ [$25^{54} + 40^{31}$] делится на 7 [13].

Глава III Многочлены. Алгебраические уравнения

В этой главе, которая изучается только со школьниками, обучающимися по стандартам углублённого уровня, продолжается изучение многочленов, алгебраических уравнений и их систем, которые рассматривались в курсе алгебры основной школы. От рассмотрения линейных и квадратных уравнений учащиеся переходят к алгебраическим уравнениям общего вида $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n. В связи с этим вводятся понятия степени многочлена и его корня.

Роль многочленов в математике очень велика. Их легко дифференцировать и интегрировать (в этом ученики убедятся в 11 классе). Многочленом можно сколь угодно хорошо приблизить любую непрерывную функцию на заданном отрезке, причём значения могут отличаться менее чем на 10^{-3}. Если взять бесконечно малую окрестность некоторой точки из области определения функции, то приближение функции многочленом в этой окрестности позволяет выяснять характер поведения функции в этой точке (возрастание, убывание или экстремум). Широкую известность получили многочлены Чебышева, которые имеют наименьший возможный максимум на отрезке [−1; 1] среди многочленов вида $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$. Он интересовался созданием механизмов, которые движутся по тем или иным кривым, что привело его к изучению проблемы наилучшего приближения произвольных кривых кривыми того или иного класса. (Эти кривые могут быть реализованы соответствующими механизмами.) Отсюда и пошло решение задачи о приближении произвольной функции многочленами. Были выведены различные классы многочленов, которые осуществляли это приближение лучше всего.

Отыскание корней многочлена осуществляется разложением его на множители. Для этого сначала подробно рассматривается алгоритм деления многочленов уголком аналогично тому, который использовался в арифметике при делении рациональных чисел.

На конкретных примерах показывается, как получается формула деления многочленов $P(x) = M(x)Q(x)$ и как с её помощью можно проверить результаты деления многочленов. Иногда эта формула принимается в качестве определения операции деления многочленов по аналогии с делением натуральных чисел, с которым учащиеся знакомились в курсе арифметики.

Деление многочленов обычно выполняется уголком или по схеме Горнера. Иногда это удаётся сделать разложением делимого и делителя на множители. Схема Горнера не является обязательным материалом для всех учащихся, но, как показывает опыт, она легко усваивается и её можно рассмотреть, не требуя от всех умения её применять. Можно также использовать метод неопределённых коэффициентов, о котором также идёт речь в главе.

Например, разделим таким способом многочлен $P(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$ на многочлен $Q(x) = x^2 - 1$. По формуле деления с остатком имеем $P(x) = M(x)Q(x) + R(x)$, где $M(x) = Ax + B$, $R(x) = ax + b$, т. е.

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = (Ax + B)(x^2 - 1) + ax + b.$$

После преобразований получаем $2x^3 - x^2 + x + 3 = Ax^3 + Bx^2 + (a - A)x + b - B$, откуда $A = 2$, $B = -1$, $a - A = 1$, $b - B = 3$, т. е. $A = 2$, $B = -1$, $a = 3$, $b = 2$. Итак,

$$2x^3 - x^2 + x + 3 = (2x - 1)(x^2 - 1) + 3x + 2.$$

Способ решения алгебраического уравнения разложением его левой части на множители фактически опирается на *следствия из теоремы Безу*: «Если x_1 — корень уравнения $P_n(x) = 0$, то многочлен $P_n(x)$ делится на двучлен $x - x_1$». Эта теорема изучается, формулируются следствия из неё, являющиеся необходимым и достаточным условием деления многочлена на двучлен. Её применение сводит решение уравнения степени n к решению уравнения степени $n - 1$ и т. д.

В учебнике рассматривается первый способ нахождения целых корней алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, если такие корни есть, их следует искать среди делителей свободного члена. Для учащихся, интересующихся математикой, приводится пример отыскания рациональных корней многочлена с первым коэффициентом, отличным от 1. Среди уравнений, сводящихся к алгебраическим, рассматриваются рациональные уравнения. Хотя при решении рациональных уравнений могут появиться посторонние корни, они легко обнаруживаются проверкой. Поэтому понятия равносильности и следствия уравнения на этом этапе не являются необходимыми; эти понятия вводятся в главе V перед рассмотрением иррациональных уравнений и неравенств.

Решение систем нелинейных уравнений проводится как известными учащимся способами (подстановкой или сложением), так и делением уравнений и введением вспомогательных неизвестных.

Предметные цели изучения данной главы следующие:

— обобщение и систематизация полученных в основной школе знаний учащихся о многочленах завершение формиро-

вания умений выполнять арифметические действия над многочленами, возводить двучлен в степень с натуральным показателем;
— развитие представлений о понятии многочлена как математической модели, позволяющей описывать и изучать разные процессы;
— развитие умений использовать алгоритмы преобразований многочленов с обоснованием каждого шага, в частности деление многочленов;
— формирование умений решать алгебраические уравнения n-й степени, применяя изученные приёмы и методы;
— развитие умений применять различные методы решения систем алгебраических уравнений, обосновывая преимущество применения выбранного метода, и проводить при этом доказательные рассуждения в ходе решения системы.

Метапредметные цели изучения главы:
— формирование умений самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать свою деятельность при выполнении преобразований многочленов и решении уравнений и систем уравнений;
— развитие навыков познавательной деятельности;
— формирование умений самостоятельно оценивать и принимать решения в процессе выполнения коллективных работ.

Личностные цели изучения главы:
— воспитание патриотизма, гордости за свою Родину на примере жизни и деятельности отечественных учёных-математиков;
— формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню науки;
— развитие готовности к самообразованию как условию успешного достижения поставленных целей в выбранной сфере деятельности.

В результате изучения главы III учащиеся должны уметь выполнять деление многочленов уголком, находить целые корни алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, находить разложение бинома, решать алгебраические уравнения и уравнения, сводящиеся к ним, а также системы уравнений и текстовые задачи при выполнении упражнений **348**, **370**, **379—381**, **390**, **392** и из рубрики «Проверь себя!».

§ 1. Многочлены от одного переменного (0/2 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление учащихся с понятием многочлена n-й степени и свойствами делимости многочленов; обучение применению алгоритма деления многочлена на многочлен и разложению на множители многочленов с помощью этого алгоритма; формирование готовности к самостоятельному поиску решения задач и новых знаний с опорой на уже известные.

Учащиеся знакомятся с понятием степени многочлена, которое является ключевым в данной теме: формулы деления многочленов и деления с остатком, алгоритм деления многочленов уголком не могут быть восприняты осознанно без уверенного владения понятием степени многочлена.

Запись многочлена n-й степени и формулы деления многочленов с остатком воспринимается учащимися непросто. Важно, чтобы учащиеся на конкретных примерах могли назвать степени делимого, делителя, частного, остатка и увидеть связь между ними.

Следует иметь в виду, что при изучении материала параграфа происходит логическое завершение линии преобразования многочленов и идёт активная подготовка к изучению приёмов решения алгебраических уравнений. Выполняя такие действия с многочленами, как сложение, вычитание, умножение, учащиеся в качестве компонентов действий имели дело как с одночленами, так и с многочленами. При выполнении действия деления в качестве делителя до сих пор школьники встречались только с одночленом. Рассмотрение многочлена в качестве делителя позволяет завершить знакомство учащихся с арифметическими операциями над многочленами.

Введение тождественного равенства многочленов подкрепляется решением задачи **1**, в которой находятся коэффициенты многочленов исходя из определения их равенства. При изучении теоремы Безу учащиеся познакомятся с другим определением равенства многочленов, эквивалентность которого данному в первом параграфе можно доказать. Со свойствами делимости многочленов учащихся достаточно только ознакомить: они будут легче восприниматься, если провести параллель со свойствами чисел и предложить учащимся попытаться самостоятельно сформулировать аналогичные свойства многочленов.

Материал параграфа можно распределить по урокам следующим образом: на первом уроке рассмотреть весь теоретический материал параграфа, а второй урок посвятить решению задач.

В качестве упражнений для актуализации знаний можно использовать, например, такие задания, которые желательно зафиксировать на доске:

1. Какой из двух многочленов $P(a) = 2a^2a - 3a + a^2 - a$ и $Q(a) = a^4 - a^3 + 2a - 3$ представлен в стандартном виде? Ответ обосновать.

2. Выполнить действие и сделать проверку:

1) $74{,}8 - 31{,}3$;
2) $702 : 9$;
3) $38 : 3$;
4) $2a^3 - 3a - (3a^3 - 2a^2)$;
5) $2a^4 - 3a - (3a^3 - 2a + 4)$;
6) $(8a^3 + 6a^2 + 2a) : 2a$.

3. Разложить многочлен на множители и сделать проверку:

1) $18b^4 + 9b^3 + 3b$;
2) $a - b + a^2 - b^2$.

4. Сократить дробь:

1) $\dfrac{a^2b+ab^2}{ab}$; 2) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$.

Каждое из упражнений выполнять устно. Желательно оставить на доске результат решения примеров **2 (6)** и **4 (2)**, чтобы обратить внимание учащихся на то, что с проблемой деления многочлена на многочлен (в данном случае на двучлен) они уже встречались.

Выполнение упражнений учебника полезно начинать с выяснения степени многочленов делимого и делителя и обсуждения вопроса, какова же может быть степень многочлена-частного. Такие рассуждения помогут подготовиться к решению алгебраических уравнений.

Например, перед выполнением упражнений **287** и **288** учебника можно вернуться к заданию **2 (6)**, приведённому выше, и выяснить степень многочлена делимого, степень одночлена делителя и степень частного. В качестве дополнительного вопроса к этим упражнениям учебника можно предложить записать формулу деления данных многочленов.

Например, решение следующего упражнения можно записать так:

$$
\begin{array}{rrl|l}
\text{делимое} & -\,6x^4+x^3-6x^2+1 & & 2x^2+x-1 \quad \text{делитель}\\
\cline{4-4}
 & \underline{6x^4+3x^3-3x^2} & & 3x^2-x-1 \quad \text{частное}\\
 & -\,-2x^3-3x^2+1 & & \\
 & \underline{-2x^3-\ \ x^2+x} & & \\
 & -\,-2x^2-x+1 & & \\
 & \underline{-2x^2-x+1} & & \\
 & 0 & &
\end{array}
$$

Формула деления:

$$6x^4+x^3-6x^2+1=(2x^2+x-1)(3x^2-x-1).$$

Перед выполнением упражнения **289** можно вернуться к заданию **2 (3)**, приведённому выше, и записать результат деления 38 : 3 в разных видах:

$$38:3=12\frac{2}{3}=12\cdot3+2$$

делимое частное делитель остаток

Оформить результат решения упражнения **289 (3)** можно так. Формула деления:

$$x^3-x^2+4=(x^2-3x+6)(x+2)-8$$

делимое частное делитель остаток

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, задачи 1—5	287, 288; ДМ № 1—3	288 (2), 289 (1)	294
2	§ 1	289—292; ДМ № 4, 5	290 (3), 292 (3)	Задачи 6, 7; 296; ДМ № 7

В результате изучения параграфа учащиеся классов с **углублённым** изучением математики должны овладеть алгоритмом деления многочленов при выполнении упражнений типа **288**, **290**, **292**.

Решение упражнений

293. 1) Так как $Q(x) = x^2 + x - 6$, то $R(x) = ax + b$, $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. При $x = -3$ получим $P(-3) = 24$, $P(2) = -6$. Формула деления $P(x) = M(x)Q(x) + ax + b$, отсюда

$$P(-3) = M(-3) \cdot 0 + a \cdot (-3) + b,$$
$$P(2) = M(2) \cdot 0 + a \cdot 2 + b.$$

Пришли к системе уравнений $\begin{cases} 24 = -3a + b, \\ -6 = 2a + b, \end{cases}$ которую решим способом сложения: $a = -6$, $b = 6$, т. е. $R(x) = -6x + 6$.

296. Выделив целую часть, например, делением уголком, получим $3n - 19 + \dfrac{93}{n+4}$. Делителями числа 93 являются числа ±1, ±3, ±31, ±93. Выберем такое целое значение n, при котором $3n - 19 + \dfrac{93}{n+4}$ есть число натуральное: $n + 4 = 3$ при $n = -1$, тогда $(-3 - 19 + 31) \in \boldsymbol{N}$; $n + 4 = 31$ при $n = 27$, $(3 \cdot 27 - 19 + 3) \in \boldsymbol{N}$; $n + 4 = 1$ при $n = -3$, $(3 \cdot (-3) - 19 + 93) \in \boldsymbol{N}$. При остальных значениях делителей значение дроби не будет натуральным.

§ 2. Схема Горнера (0/1 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление учащихся со схемой Горнера и её применением для отыскания коэффициентов многочлена-делимого; формирование умений самостоятельно определять цели учебной деятельности.

Материал параграфа не является обязательным для глубокого освоения учащимися. Тем не менее желательно ознакомить всех учащихся с достаточно простым приёмом определения коэффициентов многочлена, получаемого в результате деления. Решение алгебраических уравнений часто упрощается за счёт использования схемы Горнера при применении разложения многочлена на множители в ходе решения уравнений. При наличии времени целесообразно ознакомить школьников с разложением многочлена по степеням разности $x - c$, которое может быть в дальнейшем использовано при разложении дроби, знаменатель которой есть степень линейного двучлена, на простейшие дроби.

Для любого многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и любого числа c можно написать разложение $P(x)$ по степеням разности $(x - c)$ так: $b_0(x - c)^n + b_1(x - c)^{n-1} + \ldots + b_{n-1}(x - c) + b_n$. Чтобы определить коэффициенты этого разложения, нужно разделить с остатком многочлен $P(x)$ на $x - c$, получив в остатке b_n, а частное будет многочленом $M_1(x)$. Разделим многочлен $M_1(x)$ на $(x - c)$, в остатке получится b_{n-1}, а в частном — многочлен $M_2(x)$ и т. д. Вычисление коэффициентов удобно выполнять по схеме Горнера.

Например, разложение многочлена $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 9$ по степеням двучлена $x - 3$ можно записать так:

	1	−5	−3	0	9
3	1	−2	−9	−27	−72
	1	1	−6	−45	
	1	4	6		
	1	7			
	1				

Таким образом,

$$P(x) = (x - 3)^4 + 7(x - 3)^3 + 6(x - 3)^2 - 45(x - 3) - 72.$$

Желательно, чтобы все учащиеся могли выполнять такие упражнения, как **298** (3).

Решение упражнений

299. Формула деления данных многочленов: $x^3 + ax + 1 = M(x) \times$ $\times (x - a) + 3$. Коэффициенты частного и остаток можно найти по схеме Горнера:

	1	0	a	1
a	1	$0 + a \cdot 1 = a$	$a + a^2$	$1 + a(a + a^2)$

По условию остаток должен быть равен 3, следовательно, $1 + a^2 + a^3 = 3$, $a^3 + a^2 - 2 = 0$. При $a = 1$ $a^3 + a^2 - 2 = 0$, значит, $a = 1$. Проверка показывает, что при $a = 1$ многочлен $x^3 + x + 1$ при делении на $(x - 1)$ даст в остатке 3.

§ 3. Многочлен $P(x)$ и его корень. Теорема Безу (0/1 ч)

Цели изучения параграфа — обучение применению теоремы Безу для отыскания остатка при делении многочлена на линейный двучлен; формирование стремления к самостоятельной информационно-познавательной деятельности.

Материал параграфа призван подготовить учащихся к изучению решения алгебраических уравнений с использованием следствий из теоремы Безу. Задачи **1** и **2** текста мотивируют введение теоремы и позволяют актуализировать необходимые умения для её усвоения. Задача **3** демонстрирует применение теоремы. Все эти задачи достаточно простые и могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения.

Нахождение остатка при делении на двучлен с коэффициентом при x, отличным от 1, является необязательным материалом для всех учащихся. Разъяснение теоремы о числе корней многочлена, тождественно не равного нулю, желательно провести учителю, чтобы учащиеся могли осознанно воспринимать решение алгебраических уравнений n-й степени и понимать определение равенства многочленов. По результатам этой беседы полезно предложить учащимся провести исследование жизни и деятельности Э. Безу и Р. Декарта (об этом много говорилось в основной школе), останавливаясь на различных сторонах их интересов. На заключительном уроке по изучению главы заслушать сообщение с результатами исследования.

Упражнения **300**, **301**, **304** предназначены для отработки навыка владения теоремой Безу; упражнение **302** — необязательное, упражнение **303** желательно задать на дом (решение его простым разложением на множители позволит на следующем уроке мотивировать введение следствий из теоремы Безу). Для самостоятельной работы в классе или дома можно использовать № 6—8 из дидактических материалов.

В результате изучения параграфа учащиеся должны знать теорему Безу и уметь применять её при решении упражнений, таких, как **300**, **301**.

Решение упражнений

307. Так как при делении на $x+2$ остаток равен 0, то по теореме Безу $P(-2)=(-2)^5+a(-2)^3+b(-2)^2+c=0$, $-32-8a+4b+$ $+c=0$. Разделим $(x^5+ax^3+bx^2+c)$ на x^2-1 (например, уголком), получим $x^5+ax^3+bx^2+c=(x^3+(a+1)x+b)(x^2-1)+(a+1)\times$ $\times x+b+c$. Следовательно, остаток равен $(a+1)x+b+c=-3x+3$, откуда $a+1=-3$, $b+c=3$. Таким образом, получим систему уравнений $\begin{cases} a+1=-3, \\ b+c=3, \\ 4b+c-8a-32=0, \end{cases}$ решив которую получим $a=-4$, $b=-1$, $c=4$.

§ 4. Алгебраическое уравнение. Следствия из теоремы Безу (0/1 ч)

Цели изучения параграфа — введение понятия алгебраического уравнения и обучение решению алгебраических уравнений с использованием следствий из теоремы Безу; формирование умений продуктивно взаимодействовать в процессе совместной деятельности.

Мотивом к введению понятия алгебраического уравнения, как уже указывалось выше, может быть проверка решения упражнения **303**. Отыскание корней многочлена приводит к решению уравнения, в левой части которого стоит многочлен n-й степени, а в правой — нуль, т. е. к алгебраическому уравнению. Пока учащиеся решают его привычным способом группировки для разложения многочлена на множители. Но в задаче **1** текста § 4 с этой целью используется уже деление многочлена уголком на двучлен $x - 1$, где 1 — корень многочлена в левой части уравнения. Этот корень легко угадывается в данном примере, но именно теперь и встаёт вопрос о возможности использования метода разложения на множители, если корень угадать не так легко. Таким образом, учащиеся подводятся к мысли о необходимости использования некоторых утверждений, позволяющих отыскать такой корень, если он вообще имеется, т. е. идёт подготовка к изучению следующего параграфа и формулируются следствия из теоремы Безу. Пока учащиеся могут проверить делением на двучлен $x - a$, является ли $x = a$ корнем многочлена (или соответственно корнем уравнения), далее они узнают, как подобрать такие корни.

Следствия из теоремы Безу представляют собой необходимое и достаточное условия деления многочлена n-й степени нацело на линейный двучлен. Полезно напомнить эти понятия и выяснить, насколько учащиеся осознают, что первое следствие является необходимым условием, а второе — достаточным. Для этого можно выделить условие p: «$x = a$ — корень уравнения $P_n(x) = 0$» — и заключение q: «многочлен $P_n(x)$ делится нацело на двучлен $x - a$, т. е. остаток равен нулю». Желательно, чтобы учащиеся вспомнили, что если $p \Rightarrow q$ истинно, то q — необходимое условие для p, если $q \Rightarrow p$ истинно, то q — достаточное условие для p.

Задача **315**, решение которой можно предложить учащимся, интересующимся математикой, также напомнит и различную терминологию, соответствующую необходимым и достаточным условиям, и требования к решению подобных задач.

Задачи **1—3** текста параграфа учащиеся могут решать самостоятельно или пользуясь учебником, работая индивидуально или в группах.

Задачу **4** целесообразно разобрать в классе, предложив кому-то из учащихся или группе подготовить это обсуждение. Здесь повторяется теорема Безу, и учащиеся ещё раз убеждаются в разнообразии форм её применения.

На уроке и дома решаются упражнения **308—310**, причём **309 (3)**, **310** можно предложить решить полностью самостоятельно. Дополнительно можно использовать упражнения **312**, **313**, а также задачи из дидактических материалов № 13, 14.

В результате изучения параграфа учащиеся должны знать следствия из теоремы Безу и уметь их применять при решении упражнений типа **309—310**.

Решение упражнений

314. Формулы деления могут быть записаны так:

$$x^5 + bx^4 + cx^3 = M(x)(x + 2),$$
$$x^5 + bx^4 + cx^3 = N(x)(x - 3).$$

По теореме Безу $P(-2) = (-2)^5 + b(-2)^4 + c(-2)^3 = 0$, $P(3) = 243 + 81b + 27c = 0$.

Можно записать систему уравнений $\begin{cases} -32 + 16b - 8c = 0, \\ 243 + 81b + 27c = 0. \end{cases}$

Упростив каждое из уравнений, получим $\begin{cases} 4 - 2b + c = 0, \\ 9 + 3b + c = 0, \end{cases}$ откуда $b = -1$, $c = -6$.

315. Докажем, что если $x^9 + bx^8 + cx^7$ делится на $x + a_1$ и на $x + a_2$, где $a_1a_2 \neq 0$, то $b = a_1 + a_2$, $c = a_1a_2$. По теореме Безу $P(-a_1) = -a_1^9 + ba_1^8 - ca_1^7 = 0$, $P(-a_2) = -a_2^9 + ba_2^8 - ca_2^7 = 0$. Так как $a_1a_2 \neq 0$, то

$$\begin{cases} a_1^7(-a_1^2 + ba_1 - c) = 0, \\ a_2^7(-a_2^2 + ba_2 - c) = 0, \end{cases} \qquad \frac{\begin{cases} -a_1^2 + ba_1 = c, \\ -a_2^2 + ba_2 = c, \end{cases}}{a_2^2 - a_1^2 - b(a_2 - a_1) = 0,}$$

$b = a_2 + a_1$. Подставив значение b в первое уравнение, получим $c = a_1a_2$.

Докажем, что если $b = a_2 + a_1$, $c = a_1a_2$, где $a_1a_2 \neq 0$, то $x^9 + bx^8 + cx^7$ делится на $(x + a_2)$ и на $(x + a_1)$. Подставив значения b и c в многочлен, получим $x^9 + (a_1 + a_2)x^8 + a_1a_2x^7 = x^9 + a_1x^8 + a_2x^8 + a_1a_2x^7$. По теореме Безу найдём остаток от деления на $x + a_1$: $P(-a_1) = (-a_1)^9 + a_1(-a_1)^8 + a_2(-a_1)^8 + a_1a_2(-a_1)^7 = -a_1^9 + a_1^9 + a_1^8a_2 - a_1^8a_2 = 0$. Аналогично $P(-a_2) = 0$, следовательно, многочлен делится на $(x + a_1)$ и на $(x + a_2)$.

§ 5. Решение алгебраических уравнений разложением на множители (0/3 ч)

Цели изучения параграфа — обучение учащихся решению алгебраических уравнений n-й степени методом разложения на множители и методом замены неизвестного; формирование навыков познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов при овладении новыми методами решения уравнений.

Изложение теоретического материала параграфа организовано таким образом, что знакомство с обоснованием решения алгебраического уравнения методом разложения на множители сначала происходит в общем виде, а затем подкрепляется в ходе решения конкретных уравнений (задачи **1** и **2**). Приводится доказательство теоремы о целом корне уравнения. Теорема о рациональном корне целочисленного многочлена формулируется, но не доказывается, а применение её демонстрируется на примере задачи **4** (этот материал также рассчитан на учащихся, интересующихся математикой). Важные выводы, которые должны усвоить все учащиеся:

— степень уравнения можно понизить, зная хотя бы один его корень;

— рациональными корнями приведённого многочлена (а следовательно, уравнения) могут быть лишь целые числа;

— один из корней многочлена равен нулю, если свободный член равен нулю.

Изложение теоретического материала рекомендуется вести в соответствии с текстом параграфа. Учащиеся должны понимать, что корнем алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ называют фактически корень многочлена, стоящего в левой части уравнения.

Анализируя условие и заключение теоремы 1, важно подчеркнуть, что только наличие целого корня уравнения даёт возможность утверждать, что этот корень можно найти среди делителей свободного члена. Именно поэтому целые корни и находят среди делителей свободного члена. Желательно, чтобы учащиеся это осознавали.

Рекомендуется теоретический материал изложить в форме лекции (первый урок), а затем провести 2 урока-практикума, на которых и будет вырабатываться умение решать уравнения степени выше второй методами разложения на множители и введения нового неизвестного.

Работу можно организовать так, чтобы учащиеся индивидуально или группами выполняли решения либо только чётных, либо только нечётных номеров в каждом из упражнений, затем проверяли решения друг у друга, не указывая на ошибки, а только оценивая результат. Ошибки должен искать и исправлять сам исполнитель задания.

В ходе л е к ц и и учитель сам повторяет весь необходимый материал. План лекции может быть, например, таким:

1. Линейные и квадратные уравнения и способы их решения.

2. Повторение определения алгебраического уравнения, теоремы Безу, следствий из теоремы Безу.

3. Понижение степени алгебраического уравнения.

4. Теорема о целых корнях многочлена с целочисленными коэффициентами.

5. Теорема о рациональном корне целочисленного многочлена (на усмотрение учителя).

6. Примеры применения теорем для решения алгебраических уравнений.

Уроки-практикумы желательно начать с повторения содержания лекции (устного или письменного).

Для устной работы можно использовать, например, такие задания:

1. Назвать целые делители каждого из чисел:

$$1;\ 2;\ -7;\ 10;\ 12;\ -15;\ 17.$$

2. Решить уравнение:

$$9(x^3-1)=8(x^3-1); \quad 3x^5+2=3x^5+3; \quad 5x(x+2)=10x+5x^2.$$

3. Угадать хотя бы один корень уравнения:

$$x^3-10x+9=0; \quad x^4-8x+7=0.$$

4. Решить уравнение разложением на множители:

$$x^2-6x+9=0; \quad x^2+4x-5=0; \quad x^3-3x^2-x+3=0; \quad x^3-8=0.$$

5. Делится ли квадратный трёхчлен x^2-5x+6 на двучлен $x-2$? Ответ обосновать.

6. Найти хотя бы один корень уравнения

$$6x^5-5x^4+4x^3-3x^2-x=0.$$

На уроках-практикумах все учащиеся сначала должны выполнить упражнения **316—317** и, например, задания 1, 2 из дидактических материалов и лишь только потом переходить к более трудным. Теорему Виета для кубического уравнения (упр. **322**) можно заранее дать для самостоятельного решения учащимся, интересующимся математикой, а в конце третьего урока обсудить его со всем классом. Упражнения **323** и **324** (2) выполняются при условии, что учитель счёл необходимым разобрать на лекции задачу **4** текста параграфа.

Решение упражнений рекомендуется записывать так, как это сделано в учебнике. Если ученик, не вычисляя, определяет, что значение многочлена при конкретном значении делителя не равно нулю, то нет необходимости заставлять его находить точное значение многочлена.

Так как на уроках-практикумах и дома предположительно будут выполняться все упражнения учебника, рекомендуется домашнее задание сообщить сразу после лекции к обоим урокам, при этом включить задания из дидактических материалов.

На третьем уроке можно провести проверочную работу по материалам предыдущих параграфов, например, такого содержания:

1. Выполнить деление многочлена $P(x)=x^5-3x^4+x^3+2x^2-5x+3$ $[P(x)=x^4-2x^3+4x^2+x+2]$ на многочлен $Q(x)=x^2-3x+1$ $[Q(x)=x^2-2x+3]$. Записать формулу деления многочленов.

2. Найти остаток от деления многочлена

x^3+x^2-x $[x^4+2x^3+x]$ на двучлен $(x-2)$ $[(x+1)]$.

3. Найти корни многочлена
$x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ $[x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6]$.

4. Решить алгебраическое уравнение
$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 1$ $[(x^2 + 8x + 15)(x^2 + 8x + 7) = -15]$.

Распределение материала параграфа по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5	Лекция		
2	§ 5, практикум	316—319; ДМ № 1—4	314; ДМ № 4	ДМ № 5—8; 325
3	§ 5, практикум	320, 321; ДМ № 5—7	Самостоятельная работа в тексте пособия	323, 324, 322, 327, 329

В результате изучения параграфа учащиеся должны знать теорему о целых корнях целочисленного многочлена и уметь решать упражнения, такие, как **316—318**.

Решение упражнений

325. Пусть корень уравнения $x = \frac{p}{q}$, где $|q| \neq 1$ и дробь $\frac{p}{q}$ — несократимая. Тогда равенство $\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ — верное. Умножив обе части уравнения на q^{n-1}, получим $\frac{p^n}{q} + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + a_3p^{n-3}q^2 + \ldots + a_nq^{n-1} = 0$. Но данное равенство неверное: $\frac{p^n}{q}$ — дробь несократимая, все остальные слагаемые целые, и сумма не может быть равна нулю.

327. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, разделим его на x^2. Получим уравнение $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$, $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$. Выполним замену неизвестного $x + \frac{1}{x} = t$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, и уравнение примет вид $at^2 + bt + c - 2a = 0$.

329. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 4$. Разложим левую часть на линейные множители: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 4$. В произведении первого и четвёртого членов, как и второго и третьего, коэффициенты при x^2 и x равны, т. е. $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=4$, и можно ввести новое неизвестное $x^2-5x+4=t$. Получим уравнение $t(t+2)=4$, $t^2+2t-4=0$, $t_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}$, откуда: 1) x^2-5x+ $+5+\sqrt{5}=0$, $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{5-4\sqrt{5}}}{2}$ — решения нет, так как $5-4\sqrt{5}<0$;

2) $x^2-5x+5-\sqrt{5}=0$, $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2}$.

§ 6. Делимость двучленов $x^m \pm a^m$ на $x \pm a$
§ 7. Симметрические многочлены
§ 8. Многочлены от нескольких переменных (0/2 ч)

Материал этих параграфов будет полезен учащимся, интересующимся математикой, но целесообразно ознакомить с их содержанием всех учащихся.

Целями изучения этих параграфов совместно является расширение и углубление знаний учащихся о многочленах в комплексе. При этом учащиеся сами могут выбирать уровень изучения темы, тем самым развивая умение самостоятельно определять цели своей учебной деятельности и осуществлять её планирование.

В § 6 учащиеся знакомятся ещё с несколькими следствиями из теоремы Безу, применение которых значительно облегчает деление двучлена $x^m \pm a^m$ на двучлен $x \pm a$. Учащиеся быстрее поймут теоретический материал параграфа, если самостоятельно выполнят деление и проведут анализ его результатов, например, выполняя самостоятельную работу с требованием выполнить деление.

***В*. 1.** 1) $(x^5-32):(x-2)$; 2) $(x^5+32):(x-2)$.

***В*. 2.** 1) $(x^4-81):(x\pm 3)$; 2) $(x^4+81):(x\pm 3)$.

***В*. 3.** 1) $(x^5+32):(x+2)$; 2) $(x^5-32):(x+2)$.

Деление уголком позволит получить многочлен степени, на единицу меньшей делимого, причём коэффициенты всех членов частного будут представлять собой повышающиеся на единицу степени второго члена двучлена, а степень x будет понижаться на единицу, например:

$$x^5-32=x^5-2^5=(x-2)(x^4 2^0+x^3 2^1+x^2 2^2+x^1 2^3+x^0 2^4).$$

Анализ выполнения всех упражнений с помощью деления уголком, а затем применение теоремы Безу покажут наличие в каждом конкретном случае остатка, величина которого либо равна нулю, либо от него отличается. После этого можно сформулировать следствия из теоремы Безу, пользуясь учебником. Задачи **1** и **2** можно оставить для домашнего чтения, а упражнения **330 (4)** и **331** полезно решить в классе.

В упражнении **330 (4)** главное — показать, что каждое слагаемое делимого есть степень соответствующего слагаемого делителя. Действительно, $3\frac{3}{8}a^6 = \left(\frac{3}{2}a^2\right)^3$; $8b^{12} = (2b^4)^3$, следовательно, далее можно применить правило, сформулированное выше.

Анализ условия упражнения **331** показывает, что наша цель — выявить возможность деления суммы одинаковых степеней двух чисел 10^n и 1^n на сумму их оснований, т. е. на $11 = 10 + 1$. Применив следствие 4, получим, что показатель степени должен быть нечётным числом.

Многочлены $(x + y)$, $(x^n + y^n)$, с которыми мы имели дело, не изменяются при перестановке переменных, такими же многочленами можно считать, например, $x^3 + y^3 + z^3$, $xy + yz + xz$, ..., но если предыдущие многочлены были от двух переменных, то последние — уже от трёх переменных. Таким образом, переходим к рассмотрению многочленов от нескольких переменных, прежде всего многочленов симметрических (§ 7).

Материал, представленный в задаче **1** (§ 7), хорошо известен учащимся, его можно предложить для самостоятельного решения или работы с книгой, после чего ввести понятие симметрических многочленов. Формулы Виета учащиеся могут увидеть сами, если проведут анализ выполненных по вариантам заданий, например таких:

«Представить в виде суммы произведение двучленов

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ [a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)]$$

и выписать коэффициенты при одинаковых степенях переменной x».

Таким образом, учащиеся углубляют знания о решении алгебраических уравнений: формулы Виета устанавливают соотношения между корнями уравнения $P_n(x) = 0$ и его коэффициентами (см. формулы (1)). Полезно разобрать задачу **4** (§ 7), в которой демонстрируется возможность применения формул Виета для решения системы трёх уравнений с тремя неизвестными.

Своеобразной «симметричностью» обладают, например, многочлены $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ и $ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$. Действительно, коэффициенты членов многочлена, стоящие на одинаковом расстоянии от концов, равны. Если приравнять эти многочлены к нулю, получим алгебраическое уравнение, которое называют *возвратным*. Такое уравнение можно решать заменой неизвестного $x + \frac{1}{x} = t$.

Покажем вышеизложенное на примере уравнения $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$. Так как $x = 0$ не является корнем данного уравнения, деление на x^2 не приведёт к потере корней, т. е. получим

$$6x^2 - 35x + 62 - 35\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} = 0, \qquad 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Сделаем замену неизвестного $x+\frac{1}{x}=t$. Тогда $x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2$ (вот оно — применение умений, полученных при знакомстве с простейшими симметрическими многочленами), отсюда $x^2+\frac{1}{x^2}=$ $=t^2-2$ и уравнение сводится к уравнению

$$6t^2-12-35t+62=0,\ 6t^2-35t+50=0,$$

откуда $t_1=\frac{10}{3}$, $t_2=\frac{5}{2}$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем совокупность двух уравнений: $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ и $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, откуда получаем корни $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2; 3.

Для самостоятельного решения можно предложить уравнения: 1) $x^4-2x^3-22x^2-2x+1=0$; 2) $x^4+x^3-18x^2+x+1=0$.

В § 8 учащиеся знакомятся с однородными многочленами и разложением многочленов от нескольких переменных на множители.

Распределение материала § 6—8 по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	Упражнения: для самостоятельной работы в классе	Упражнения: дополнительные
1	§ 6, задачи 1, 2; § 7, задачи 1, 2	330 (4), 331, 334, 336; ДМ § 6 № 1, § 7 № 1	Самостоятельная работа в тексте пособия	Задача 5, § 7; 333, 342
2	§ 7, задачи 3, 4; § 8, задачи 1, 2	338, 339, 343; ДМ § 7 № 2, § 8 № 1	Самостоятельная работа в тексте пособия	345, 341, 347

Решение упражнений

332. В соответствии со следствием 1 из теоремы Безу 7^n-1^n делится на 7^1-1^1 при любом натуральном n, следовательно, 7^n-1 делится на 6 при любом $n\in N$.

Если n нечётное, то 7^n-1 не делится на 7^1+1. При n чётном 7^n-1 делится и на 7^1+1, и на 7^1-1.

Ответ. $n=2k$, где $k\in N$.

333. $n-1$, n, $n+1$ — последовательные натуральные числа, значит, одно из них кратно 3, а одно или два — чётные. Тот из двучленов x^n-1, $x^{n-1}-1$, $x^{n+1}-1$, у которого n — чётное, делится на x^2-1; у которого n кратно 3, разделится на x^3-1, и третий разделится на $x-1$ при любом $n \in \boldsymbol{N}$ (см. следствия из теоремы Безу).

337. $2x^2-3xy+2y^2=2(x^2+y^2)-3xy$. По условию $x+y=3$, следовательно, $(x+y)^2=9$, $x^2+y^2=9-2xy$. Отсюда $2(9-2xy)-3xy=18-7xy$. По условию $xy=-2$, значит, $18-7(-2)=32$.

Ответ. 32.

339. $x^4+x^2y^2+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-2x^2y^2+x^2y^2=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$.

341. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — корни данного уравнения, по формулам Виета $x_1+x_2+x_3+x_4=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+...+x_3x_4=-16$, $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_2x_3x_4=2$, $x_1x_2x_3x_4=15$. Тогда коэффициент a_1 при x^3 искомого уравнения равен $-(-x_1-x_2-x_3-x_4)=-2$ (сумма корней, противоположных данным), аналогично $a_2=-16$, $a_3=2$, $a_4=15$. Уравнение примет вид $x^4-2x^3-16x^2+2x+15=0$.

342. Один из корней уравнения равен $(-\sqrt{2})$, что легко проверить. Действительно, по формулам Виета $x_1x_2x_3=-\sqrt{2}$, а по условию произведение двух корней равно 1. Тогда, разделив $(x^3+3\sqrt{2}x^2+5x+\sqrt{2})$ на $(x+\sqrt{2})$, получим трёхчлен $x^2+2\sqrt{2}x+1$, корни которого $x_{1,2}=-\sqrt{2}\pm 1$. Произведение этих корней $(-\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}-1)=1$.

345. Так как x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+px+q=0$, то их сумма равна коэффициенту при x^2 с противоположным знаком (формулы Виета), следовательно, $x_1+x_2+x_3=0$ и $x_1=-x_2-x_3$. Подставим выражение для x_1 в сумму $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(-x_2-x_3)^3+x_2^3+x_3^3=(-x_2)^3-3x_2x_3(x_2+x_3)-x_3^3+x_2^3+x_3^3=-3x_2x_3(x_2+x_3)=3x_2x_3x_1$.

347. Примем $x=-y$ и разложим x^5+y^5 на множители, для чего выполним деление $(x^5-(-y)^5):(x-(-y))$. По следствиям из теоремы Безу остаток будет равен нулю. В частном получим $x^4+(-y)\cdot x^3+(-y)^2x^2+(-y)^3x+(-y)^4$, значит, $x^5+y^5=(x+y)\times(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$. Теперь в левой части равенства можно вынести за скобку двучлен $x+y$, получив $(x+y)^5-(x^5+y^5)=(x+y)((x+y)^4-(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4))=(x+y)((x^2+2xy+y^2)^2-(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4))$. После возведения квадратного трёхчлена в квадрат и приведения подобных членов получим $(x+y)5xy(xy+x^2+y^2)$.

§ 9. Формулы сокращённого умножения для старших степеней. Бином Ньютона (0/2 ч)

Цели изучения параграфа — обучение учащихся возводить двучлен в натуральную степень, пользуясь треугольником Паскаля; нахождение биномиальных коэффициентов по формуле; формирование стремления к самостоятельному поиску методов решения практических задач.

Изучение теоретического материала начинается с повторения формул сокращённого умножения, известных учащимся из основной школы. Затем выводятся последовательно формулы степени бинома до пятой включительно. Вся эта работа может быть проделана школьниками самостоятельно. Введение учителем треугольника Паскаля позволит сравнить коэффициенты биномиальных разложений, полученные в ходе самостоятельной работы со значениями из треугольника. После такого анализа применение треугольника Паскаля для записи коэффициентов разложения бинома шестой или седьмой степени будет более осознанным. Доказательство свойств биномиальных коэффициентов — материал, необязательный для всех школьников (о них будем говорить в 11 классе при изучении комбинаторики), но желательно, чтобы учащиеся, интересующиеся математикой, изучили его. Формулой общего члена разложения бинома должны уметь пользоваться все учащиеся.

В этом параграфе учащиеся ещё раз возвращаются к следствиям из теоремы Безу (§ 6): теперь имеется теоретический материал, который можно использовать для доказательства хотя бы некоторых из них.

Распределение материала параграфа по урокам может быть следующим:

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 9, задачи 1, 3, 4, свойства биномиальных коэффициентов (без доказательства)	348, 349; ДМ № 3, 4	348 (2); ДМ № 2 (1, 2)	352; ДМ № 7
2	§ 9, материал после задачи 4	350, 351, 353; ДМ № 5	349 (3)	354, 356; ДМ № 8

В результате изучения параграфа учащиеся должны знать биномиальную формулу Ньютона, формулу общего члена разложения и уметь выполнять упражнения типа **348, 349**.

Решение упражнений

354. По формуле общего члена $T_{n+1}=C_{12}^n(\sqrt[3]{x})^{12-n}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, $T_{n+1}=C_{12}^n x^{\frac{24-5n}{6}}$. Член разложения, содержащий $\frac{1}{x}$, должен иметь x^{-1}, т. е. $\frac{25-5n}{6}=-1$, $n=6$. Следовательно, $T=C_{12}^6x^{-1}$.

356. Коэффициент третьего члена разложения равен 66, следовательно, $T_3 = C_m^2\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^{m-2}\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^2$, $C_m^2 = 66$, $\frac{m!}{2!(m-2)!} = 66$, $\frac{m(m-1)}{2} = 66$, $m^2 - m - 132 = 0$, $m = 12$.

$$T_5 = C_{12}^4\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^8\left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^4 = \frac{12!}{4!8!}\cdot\frac{a^8}{x^4}\cdot\frac{x^2}{a^4} = 495\cdot\frac{a^4}{x^2}.$$

§ 10. Системы уравнений (0/3 ч)

Цели изучения параграфа — повторение методов решения систем уравнений, известных учащимся из курса основной школы, и знакомство с методами решения более сложных систем двух уравнений с двумя неизвестными, степень которых может быть выше двух; формирование умений ясно, логично излагать свою точку зрения, овладевая новыми для себя методами решения систем уравнений и практических задач.

Изучение теоретического материала начинается со знакомого учащимся способа подстановки, который приводит, однако, к уравнению четвёртой степени (задача **1**). Здесь учащиеся впервые знакомятся с возможностью представления одного из уравнений системы как уравнения относительно другого неизвестного, решение которого позволяет перейти к совокупности систем, а затем и решить исходную систему.

В задачах **2** и **3** рассматривается применение умножения и деления уравнений системы друг на друга с предварительным исследованием возможности такого действия.

Равносильность систем уравнений пока не вводится, так как выполняемые требования равносильны, т. е. понятие равносильности не начинает работать активно. Однако учащиеся должны уметь обосновать, почему они имеют право применить то или иное преобразование. К сожалению, учащиеся недостаточно хорошо решают текстовые задачи, а именно это умение требуется для овладения решением прикладных задач. В связи с этим полезно для актуализации знаний перед решением задач предложить выполнить устно следующие задания:

1. Разность числа a и другого числа равна 7. Найти другое число.

2. Площадь прямоугольного треугольника равна 16, один из катетов равен t. Найти другой катет.

3. Один оператор может набрать на компьютере текст за x ч, а другой — за y ч ($x > 1$, $y > 1$). Какую часть текста они будут набирать за 1 ч при одновременной работе?

4. Одна труба может наполнить бассейн за x ч, другая опорожнить его за y ч ($x - y > 0$). Какая часть бассейна наполнится за 1 ч их совместной работы?

Распределение материала параграфа по урокам может быть следующим:

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 10, задачи 1—3	357—359	359	375
2	§ 10, задачи 1—3	360—362, 366, 368	362 (1), 366 (2)	376, 377
3	§ 10	365, 370, 402		373, 378

В результате изучения параграфа учащиеся должны уметь решать упражнения типа **359**, **360**, **362**, **370**.

Решение упражнений

375. Выполнив сложение уравнений системы, получим $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$. Выделим полные квадраты: $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0$, $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$, следовательно, $x = 2$, $y = -3$.

377. 1) Так как $x - y \neq 0$, $xy \neq 0$ (из условия), разделив первое уравнение на второе, получим $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{13}{6}$, откуда $6(x^2 + y^2) = 13xy$, $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0$. Решив полученное уравнение относительно x, получим $x_{1,2} = \frac{13y \pm \sqrt{169y^2 - 144y^2}}{12} = \frac{13y \pm 5y}{12}$, $x_1 = \frac{3}{2}y$, $x_2 = \frac{2}{3}y$. Подставим значение $x_1 = \frac{3}{2}y$ во второе уравнение системы: $\frac{3}{2}y^2 \cdot \frac{1}{2}y = 6$, $3y^3 = 24$, $y^3 = 8$, $y = 2$. При $x_2 = \frac{2}{3}y$ второе уравнение системы примет вид $\frac{2}{3}y^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}y\right) = 6$, $-2y^3 = 54$, $y^3 = -27$, $y = -3$, следовательно, решения системы: (3; 2), (−2; −3).

378. Пусть x км/ч — скорость пешехода на подъёме, тогда на спуске она составляет $(x + a)$ км/ч. Обозначим y ч — время, потраченное пешеходом на подъёме AB, тогда расстояние $AB = xy$ (км), а расстояние BC составляет $(s - xy)$ км, откуда время пешехода на пути BC равно $\frac{s - xy}{x + a}$. По условию задачи время, затраченное на путь AC, равно t ч, следовательно, $y + \frac{s - xy}{x + a} = t$. На обратном пути пешеход сначала шёл со скоростью x и потратил $\frac{s - xy}{x}$ (ч), а затем со скоростью $x + a$ и потратил $\frac{xy}{x + a}$ (ч), что составляет всего $\frac{t}{2}$, следовательно, $\frac{s-xy}{x}+\frac{xy}{x+a}=\frac{t}{2}$. Выполнив преобразования уравнений, получим систему

$$\begin{cases} ay+s=xt+ta, \\ tx^2+(ta-2s+2ay)x-2sa=0. \end{cases}$$

Выразив y из первого уравнения, подставим его во второе и получим квадратное уравнение $3tx^2+(3ta-4s)x-2sa=0$, откуда

$$x=\frac{1}{6t}(4s-3at+\sqrt{9a^2t^2+16s^2}).$$

Урок обобщения и систематизации знаний (0/1 ч)

В ходе изучения данной главы завершается развитие двух содержательных методических линий, ведущих в курсе алгебры основной школы: деление многочленов, возведение двучлена в натуральную степень завершают линию преобразования многочленов. В ходе изучения алгебраических уравнений обобщаются и систематизируются знания учащихся о решении уравнений первой степени и квадратных. Новые сведения о решении уравнений расширяют представления и о решении систем алгебраических уравнений. Таким образом, весь материал главы является обобщением курса алгебры основной школы. Эта главная идея и должна быть отражена на данном уроке.

Решив отдельные задания из упражнений **379**, **380**, целесообразно перейти к теореме Безу и её следствиям, которые позволяют решать упражнения самого разного рода, например **386**, **388**, **393**. В ходе самостоятельной работы можно решить по одному из уравнений **389**, **390** и систему, например **392**. Текстовые задачи из упражнений к главе целесообразно решать в дальнейшем в течение учебного года. Если останется время, желательно прослушать результат исследования деятельности математиков Э. Безу и Р. Декарта, о которых говорилось при изучении § 3.

Решение упражнений

401. Вычтем из первого уравнения второе: $x^2-y^2+5x-5y=0$, $x^2+5x-(y^2+5y)=0$. Решим квадратное уравнение относительно x, получив $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+4(y^2+5y)}}{2}=\frac{-5\pm(2y+5)}{2}$, $x_1=y$, $x_2=-5-y$. Если $x_1=y$, то $9y^2-4y^2+5y+10=0$, $5y^2+5y+10=0$, $y^2+y+2=0$, уравнение решений не имеет, так как $D<0$. Если $x=-5-y$, то (подставим во второе уравнение системы) $8(-5-y)^2-3y^2+5y+10=0$, $5y^2+85y+210=0$, $y^2+17y+42=0$, $y_{1,2}=\frac{-17\pm11}{2}$, $y_1=-3$, $y_2=-14$. Если $y=-3$, то $x=-5-(-3)=-2$; если $y=-14$, то $x=-5-(-14)=9$. Итак, решения системы: $(-2; -3)$, $(9; -14)$.

402. По условию пункт A (0; 0; 0) находится от точки M (x; y; z) на расстоянии 60, следовательно, $x^2 + y^2 + z^2 = 60^2$ (1). Пункт B (12; 0; 0) удалён от M на расстояние 60, т. е. $(x - 12)^2 + y^2 + z^2 = 60^2$ (2). Пункт C (6; 18; 0) удалён от M на 51, значит, $(x - 6)^2 + (y - 18)^2 + z^2 = 51^2$ (3). Таким образом

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3600, \\ (x - 12)^2 + y^2 + z^2 = 3600, \\ (x - 6)^2 + (y - 18)^2 + z^2 = 2601. \end{cases}$$

Из уравнения (1) вычтем второе, получим $24x = 144$, $x = 6$. Из уравнения (2) вычтем (3), получим $-12x + 108 + 36y - 324 = 999$, $-12x + 36y = 1215$. Найдём y из уравнения $-72 + 36y = 1215$, $36y = 72 + 1215$, $36y = 1287$, $y = 35{,}75$. Подставляя значения x и y в уравнение (1), получим $z^2 = 3600 - 36 - 1278{,}0625$, $z^2 = 2285{,}9375$, учитывая, что $z > 0$, $z \approx 48$.

Ответ. $x = 6$, $y = 35{,}75$, $z \approx 48$.

403. Пусть x кг — норма выдачи сена, норма выдачи соломы; y кг — норма выдачи силоса, тогда

$$\begin{cases} 0{,}41x + 0{,}19x + 0{,}16y = 7{,}4, \\ 0{,}85x + 0{,}85x + 0{,}28y = 17{,}5. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим результат: по 7 кг сена и соломы, 20 кг силоса.

404. Пусть масса первого сплава x кг, а второго y кг, тогда в первом сплаве меди $x \cdot \frac{p}{100}$ кг, а во втором $y \cdot \frac{q}{100}$ кг. В новом сплаве меди должно быть $x \cdot \frac{p}{100} + y \cdot \frac{q}{100} = \frac{xp + yq}{100}$ кг, а его масса $(x + y)$ кг, следовательно, концентрация меди в новом сплаве составит $\frac{(xp + yq)100}{(x + y)100} = r$, откуда $xp + yq = xr + yr$, $y(q - r) = x(r - p)$ и их отношение равно $\frac{q - r}{r - p}$.

Контрольная работа № 2

1. Выполнить деление многочлена $x^4 + 3x^3 - 21x^2 - 43x + 60$ [$x^4 - 9x^3 + x^2 + 81x + 70$] на многочлен $x^2 + 2x - 3$ [$x^2 - 4x - 5$].
2. Не выполняя деления, найти остаток от деления многочлена $x^4 + x^3 + 7x^2 + x + 3$ [$2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x$] на двучлен $(x - 2)$ [$(x - 1)$].
3. Решить уравнение $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$ [$3x^3 - 10x^2 - 9x + 4 = 0$].
4. Найти член разложения бинома $\left(x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^{15}$ $\left[\left(2x^2 - \frac{a}{2x^3}\right)^{10}\right]$, не содержащий x.

5. Решить уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=168x^2$
$[(x-1)(x-3)(x+2)(x+6)=72x^2]$.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=4, \\ 2x^2+3y^2=14 \end{cases}\right].$$

Глава IV Степень с действительным показателем

В этой главе расширяются и систематизируются известные учащимся из курса алгебры основной школы сведения о действительных числах и действиях над ними, об извлечении корня из чисел и возведении чисел в степень, а также пополняются сведения о прогрессиях. Сведения, содержащиеся в этой главе, будут широко использоваться в дальнейшем при решении уравнений и неравенств, изучении свойств функции.

Необходимость расширения множества натуральных чисел до множества целых, рациональных, действительных и, наконец, комплексных чисел мотивируется возможностью выполнять действия, обратные сложению, умножению и возведению в степень, а значит, возможностью решать уравнения $x+a=b$, $ax=b$, $x^a=b$.

Постепенное расширение числовых множеств осуществляется так, чтобы сохранились основные свойства действий сложения и умножения (коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности). Это даёт возможность существенно не менять практику вычислений.

Отметим, что действие возведения в степень не обладает свойством коммутативности (например, $2^3 \neq 3^2$), и потому существуют **два** действия, ему обратные: извлечение корня и логарифмирование.

Напомним, что каждое рациональное число можно представить в виде либо обыкновенной дроби, либо бесконечной периодической десятичной дроби.

Рассмотренный в начале главы способ обращения бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную обосновывается свойствами сходящихся числовых рядов, в частности нахождением суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Например, обратим дробь 0,3(2) в обыкновенную.

Пусть $x=0{,}3(2)$, т. е.

$$x=0{,}3+\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\ldots+\frac{2}{10^n}+\ldots .$$

Найдём разность $100x - 10x$:

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{l} 100x = (30+2) + \dfrac{2}{10} + \ldots + \dfrac{2}{10^{n-2}} + \ldots \\ \quad 10x = 3 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{10^2} + \ldots + \dfrac{2}{10^{n-1}} + \ldots \end{array} \\
\hline
90x = 29 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array},
$$

откуда $x = \dfrac{29}{90}$.

Обратим теперь дробь 0,(7) в обыкновенную другим способом.

Последовательность $\dfrac{7}{10}$, $\dfrac{7}{10^2}$, $\dfrac{7}{10^3}$, ... является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, у которой $b_1 = \dfrac{7}{10}$, $q = \dfrac{1}{10}$. Поэтому

$$S = 0{,}(7) = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}.$$

Напомним, что *иррациональным* числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь. Например, дробь 0,2525525552..., в записи которой количество цифр 5 между соседними двойками каждый раз увеличивается на одну, — пример иррационального числа.

Доказано, что числа π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ (квадратные корни из натуральных чисел, не являющихся квадратами натуральных чисел) являются иррациональными числами. В школьном курсе это только постулируется. Иногда лишь доказывается, что, например, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Приведём это доказательство.

○ Предположим, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, т. е. $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, где $\dfrac{m}{n}$ — несократимая положительная дробь. Тогда должно выполняться равенство $\dfrac{m^2}{n^2} = 2$, но числа m и n не имеют общих делителей, и поэтому $\dfrac{m^2}{n^2}$ — несократимая дробь, не равная целому числу, т. е. $\dfrac{m^2}{n^2} \neq 2$. Полученное противоречие доказывает утверждение. ●

Действия над иррациональными числами строго не определяются, а заменяются действиями над их приближёнными значениями — рациональными числами.

В итоге делается вывод, что действительные числа — это числа рациональные и иррациональные, т. е. множество всех десятичных дробей. Полезно помнить, что числа, являющиеся корними уравнения вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = c$, где a_0, a_1, ..., a_n — целые числа, называют *алгебраическими*. Если $a_0 = 1$, то корень уравнения называют целым *алгебраическим числом*. Например, корень уравнения $x^3 = 7$, т. е. $x = \sqrt[3]{7}$ — число алгебраическое. Так как каждое рациональное число является корнем уравнения вида $ax - b = 0$, то оно тоже есть число алгебраическое. Все числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*. Например, число π — трансцендентное. Все трансцендентные числа иррациональны.

В связи с рассмотрением последовательных рациональных приближений иррационального числа на интуитивном уровне вводится понятие предела последовательности с записью $x_n \to x$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Точное определение предела последовательности формулируется, но более подробное изучение его предполагается в 11 классе. Предел используется при выводе формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Например, считается, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - q^n) = 1$ при $q = \frac{1}{2}$ и т. д.

Арифметический корень $\sqrt[n]{a}$ натуральной степени $n \geqslant 2$ из неотрицательного числа a и его свойства излагаются традиционно. Корень нечётной степени $\sqrt[2k+1]{a}$ из отрицательного числа a определяется формулой $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$, поэтому его свойства получаются из свойств арифметического корня. Например, $\sqrt[3]{-4} \cdot \sqrt[3]{-2} = (-\sqrt[3]{4})(-\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{8} = 2$. В дальнейшем обозначение корня нечётной степени используется для обозначения функции, обратной к функции $y = x^{2k+1}$.

Расширение понятия степени проводится последовательно в зависимости от её показателя (натурального, целого, рационального, действительного). Оно осуществляется так, чтобы сохранились все основные свойства степени с натуральным показателем. Это возможно лишь тогда, когда основание степени положительно. Например, степень с дробным показателем определяется так: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$, m — целое число, n — натуральное число, $n \geqslant 2$, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь.

Иногда (в других книгах) степень с рациональным нецелым показателем определяют и для отрицательного основания. Но тогда может оказаться, что выражение $a^{\frac{m}{n}}$ не имеет смысла и для него не выполняются некоторые свойства степени. Так, нельзя определять степень числа $a < 0$ с дробным показателем $\frac{m}{n}$

формулой $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, так как при нечётном m и чётном n выражение $\sqrt[n]{a^m}$ не имеет смысла (например, $\sqrt{(-3)^3}$). Также нельзя считать, что $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$, так как $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, т. е. должно выполняться равенство $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}}$, но $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2$.

Степень с иррациональным показателем поясняется на конкретном примере: число $3^{\sqrt{2}}$ рассматривается как последовательность его рациональных приближений $3^{1,4}$, $3^{1,41}$, ... Здесь же формулируются свойства степени с действительным показателем, которые будут использоваться при решении уравнений, неравенств и исследовании функции.

Предметные цели изучения главы:

— развитие понятия действительного числа как результата выстраивания научной теории действительных чисел на основании понятия предела числовой последовательности;
— формирование понятия степени с действительным показателем как основы для изучения степенной, показательной, логарифмической функций;
— развитие умений применять свойства степени с действительным показателем при моделировании и изучении математических моделей, описывающих процессы с помощью степени с действительным показателем;
— формирование умений применять методы доказательств и алгоритмы решений практических задач, опираясь на изученные теоремы и следствия.

Метапредметные цели изучения главы:

— развитие умений самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность в процессе обобщения, систематизации и расширения знаний, полученных в основной школе;
— развитие способностей к самостоятельному поиску методов решения практических и прикладных задач, применяя изученные методы;
— формирование умений ясно и точно излагать свою точку зрения как устно, так и письменно, грамотно пользуясь языком математики.

Личностные цели изучения главы:

— формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню науки;
— формирование основ самовоспитания в процессе выполнения работ разного уровня сложности, требующих ответственного и творческого отношения;
— развитие способности и готовности вести диалог с другими людьми в процессе совместной деятельности.

В результате изучения IV главы все учащиеся должны знать определения, свойства и формулы, относящиеся к действительным числам, геометрической прогрессии, корню натуральной степени и степени с действительным показателем; уметь решать упражнения типа **510—515**, **517—519**, **524**, **525** и из рубрики «Проверь себя!» (первые 6 заданий), а также отвечать на вопросы 1, 2, 4—7 и 9 к главе IV. Учащиеся классов с **углублённым** изучением математики дополнительно должны уметь выполнять упражнения типа **516**, **521**, **522**, **526**, **527**, отвечать на все вопросы к главе и выполнять все задания из рубрики «Проверь себя!».

§ 1. Действительные числа (1 ч)

Цели изучения параграфа — обобщение и систематизация знаний учащихся о расширении множества чисел (от натуральных до действительных); ознакомление с понятием предела последовательности; развитие умений пользоваться различными источниками информации, критически оценивать информацию, получаемую из разных источников.

При изучении материала параграфа желательно, чтобы учащиеся принимали активное участие в восстановлении последовательности расширения множеств (классов) изученных чисел и тех операций, которые приводили к потребности этого расширения. Этот процесс учитель может иллюстрировать на доске с помощью кругов Эйлера, можно предложить учащимся вспомнить соответствующий материал из курса 9 класса, используя, например, главу I или справочники. Желательно, чтобы в ходе устного обсуждения темы учащиеся проговаривали определения каждого из видов чисел, например: «Рациональное число — это число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число»; «Натуральные числа — это числа счёта: 1, 2, 3, 4, ...» и т. д. Напомним, что введение в 8 классе понятия «действительные числа» было обусловлено невозможностью всегда выполнять операцию извлечения квадратного корня из числа на множестве неотрицательных рациональных чисел (множество рациональных чисел дополнялось множеством иррациональных чисел — бесконечными непериодическими дробями). Необходимо повторить обозначения латинскими буквами всех изученных множеств чисел: $\boldsymbol{N}$ — натуральные, $\boldsymbol{Z}$ — целые, $\boldsymbol{Q}$ — рациональные, $\boldsymbol{R}$ — действительные.

При рассмотрении действий с приближёнными значениями иррациональных чисел (задача **1**) желательно вспомнить правила округления числа до определённого разряда, а также правила округления результатов сложения (вычитания) и умножения (деления) приближённых значений чисел (учебник для 8 класса, глава II).

Сразу после решения задачи **1** происходит первое знакомство с понятием предела числовой последовательности. Учитель не должен добиваться глубокого усвоения этого понятия в общеобразовательных классах, не следует пока и акцентировать внимание учащихся на символике, связанной с этим понятием. Желательно показать на рисунке, используя экран компьютера или просто миллиметровую бумагу, изображение точек, соответствующих рациональным приближениям действительного числа, чтобы учащиеся почувствовали уменьшение расстояния между изображениями каждого последующего из приближений и самого действительного числа, получая, таким образом, первое представление о пределе числовой последовательности.

В классах с **углублённым** изучением математики необходимо рассмотреть строгое определение предела последовательности, не добиваясь выучивания его наизусть. О теории пределов более подробно учащиеся узнают в 11 классе. На данном же этапе понятие предела необходимо для того, чтобы учащиеся осознанно восприняли определение степени с иррациональным показателем, а следовательно, и дальнейшее введение степенной, показательной и логарифмической функций.

В задаче **2** рассматривается применение определения предела последовательности для доказательства того, что данная последовательность имеет предел. Достаточно, чтобы учитель сам показал решение этой задачи или предложил ученикам, интересующимся математикой, разобрать доказательство и обсудить его на уроке. Важно, что результат этой задачи используется при выводе формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, поэтому этот результат полезно знать всем.

Распределение материала параграфа по урокам:

Общеобразовательные классы

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 1 до слов «Рассмотрим подробнее...»	405—411; ДМ § 2 № 1—4	408 (3), 410 (1, 3)	412; ДМ № 7—9

Классы углублённого уровня

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 1	407, 408, 411, 413; ДМ № 6, 7	412 (3)	416 (1); ДМ № 9

При наличии времени в конце урока в **общеобразовательных** классах учитель может провести самостоятельную работу.

1. Представить в виде бесконечной периодической дроби обыкновенную дробь $7\frac{5}{11}\left[3\frac{2}{9}\right]$.

2. Какое из равенств

$|4-2\sqrt{3}|=4-2\sqrt{3}$ или $|4-2\sqrt{3}|=2\sqrt{3}-4$

$[|4-3\sqrt{2}|=4-3\sqrt{2}$ или $|4-3\sqrt{2}|=3\sqrt{2}-4]$

является верным?

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение действительного числа, уметь выполнять упражнения типа **406—408, 410.**

Учащиеся классов **углублённого уровня** должны уметь выполнять упражнения типа **411, 413.**

Решение упражнений

415. Предположим, что $a+b=c$, т. е. сумма рационального и иррационального чисел является числом рациональным. Тогда $b=c-a$, но разность рациональных чисел является числом рациональным, следовательно, наше предположение было неверным и сумма рационального и иррационального чисел есть число иррациональное.

416. 2) Пусть $\varepsilon>0$. Найдём такое N, чтобы для всех $n\geqslant N$ выполнялось неравенство $|x_n-0|<\varepsilon$, т. е. $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|<\varepsilon$ и $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$.

В качестве N можно взять, например, целое число $\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$, т. е. $n>N\geqslant\frac{1}{\varepsilon^2}$.

§ 2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (2 ч)

Цели изучения параграфа — продолжить формирование представления о пределе числовой последовательности на примере изучения бесконечно убывающей геометрической прогрессии и нахождения её суммы с помощью предела; формирование умений самостоятельно находить необходимую информацию по теме, пользуясь учебниками, справочниками, другими источниками информации.

Накануне изучения данного параграфа полезно в домашнее задание включить повторение знакомого учащимся материала о геометрической прогрессии, используя учебник для 9 класса, главу I данного учебника, другие источники.

В классах с **углублённым** изучением математики можно предложить самостоятельно прочитать и определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а также придумать примеры такой прогрессии.

На первом уроке в тетрадях **всех** учащихся должно быть зафиксировано следующее:

— краткая запись определения геометрической прогрессии и формула её общего члена;

— формула суммы n первых членов геометрической прогрессии;

— краткая запись определения бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

— примеры бесконечно убывающих геометрических прогрессий (отличных от приведённых в учебнике примеров). Прежде чем вносить пример в тетрадь, необходимо обосновать принадлежность данной последовательности к бесконечно убывающим геометрическим прогрессиям.

Эту работу можно включить и в домашнее задание, данное накануне, и объяснить цель этого задания — обучение конспектированию учебной и научной литературы.

Материал параграфа не носит принципиально нового характера, в классе **углублённого уровня** его можно изложить в форме лекции и основное время посвятить выполнению упражнений по теме.

В **общеобразовательном** классе целесообразно на двух уроках чередовать рассмотрение теоретического материала с демонстрацией его применения при выполнении практических заданий.

Распределение материала на уроках при таком варианте изучения параграфа отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 2 до слов «На рисунке 53» (с. 144)	417—420, 425; ДМ § 3 № 1, 2	420 (3)	428
2	§ 2 от слов «На рисунке 53» (с. 144) и до конца	421—424, 426, 427; ДМ § 3 № 3, 6	423 (1), 424 (3)	429, 430

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2 до задачи 5	417, 419, 420, 425; ДМ № 1—3	425 (1, 3)	428
2	Задачи 5, 6	423, 424, 426, 427, 429; ДМ № 4, 6, 7	426 (1), 427 (1)	430, 434; ДМ № 10, 9

В результате изучения параграфа на примере бесконечно убывающей геометрической прогрессии **все** учащиеся должны получить представление о существовании сходящихся числовых последовательностей, уметь находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии и с помощью задачи **4** обращать бесконечную периодическую дробь в обыкновенную, а также выполнять упражнения типа **422, 423, 424.** Учащиеся классов **углублённого уровня** должны уметь выполнять упражнения типа **425, 427.**

Решение упражнений

428. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2^n}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2^n}-1\right)=-1;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+2}+2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(9+\dfrac{2}{3^n}\right)=9.$

430. Пусть C_1, C_2, C_3, ... — центры первого, второго, третьего и т. д. кругов (рис. 1).

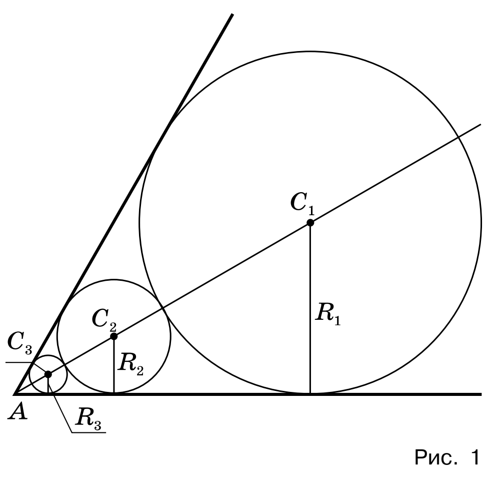


Рис. 1

1) $C_1C_2 = R_1 + R_2$, $C_2C_3 = R_2 + R_3$ и т. д. Но $AC_1 = C_1C_2 + C_2C_3 + ... = R_1 + R_2 + R_2 + R_3 + R_3 + R_4 + ... = R_1 + 2(R_2 + R_3 + ... + R_n + ...)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Можно заметить, что $AC_1 = 2R_1$, тогда $2R_1 = R_1 + 2(R_2 + R_3 + ... + R_n + ...)$, откуда $R_2 + R_3 + ... + R_n + ... = \frac{1}{2}R_1$.

2) Пусть C_n и C_{n+1} ($n \geqslant 1$) — центры любых двух соседних окружностей (рис. 2), тогда

$$AC_n = 2R_n,\ AC_{n+1} = 2R_{n+1}.$$

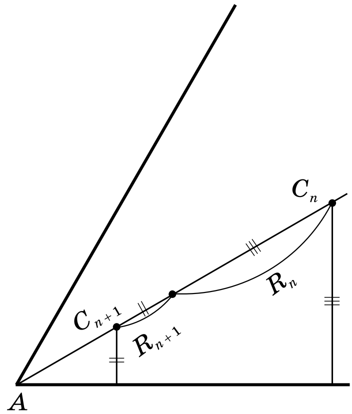


Рис. 2

Так как $AC_n = AC_{n+1} + R_{n+1} + R_n$, то $2R_n = 2R_{n+1} + R_{n+1} + R_n$, т. е. $R_n = 3R_{n+1}$, откуда $R_{n+1} = \frac{1}{3}R_n$, значит, последовательность радиусов — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{3}$ и $R_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}R_1$.

431. По условию $b_2 = 6$, $8S = S^2$, где S^2 — сумма квадратов членов прогрессии, т. е. b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, ..., значит, знаменатель этой прогрессии равен q^2, если q — знаменатель данной прогрессии. Составим систему уравнений $\begin{cases} q = \dfrac{b_2}{b_1}, \\ 8 \cdot \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{b_1^2}{1-q^2}. \end{cases}$ Преобразовав второе уравнение, получим $\dfrac{(8b_1 + 48 - b_1^2)b_1^2}{b_1^2 - 36} = 0$, откуда $b_1 = 12$, $q = \frac{1}{2}$.

432. Если $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, $S^2 = \dfrac{b_1^2}{1-q^2}$, $S^3 = \dfrac{b_1^3}{1-q^3}$, то можно составить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{b_1^3}{1-q^3} : \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 3, \\ \dfrac{b_1}{1-q} : \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = \dfrac{3}{7}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} \dfrac{b_1(1+q)}{1+q+q^2} = 3, \\ \dfrac{1+q}{b_1} = \dfrac{3}{7}. \end{cases}$

Выразив из второго уравнения b_1 и подставив его в первое уравнение, после преобразований получим уравнение $2q^2 - 5q + 2 = 0$, откуда $q = \frac{1}{2}$, $b_1 = 3{,}5$.

433. По условию $S=\frac{16}{3}$, $b_n=\frac{1}{6}$. Тогда сумму членов, стоящих до b_n, можно найти по формуле $S_{n-1}=\frac{b_1-b_1q^{n-1}}{1-q}=\frac{b_1-b_n}{1-q}=$ $=\frac{6b_1-1}{6(1-q)}$. Сумму членов, начиная с b_{n+1}, найдём по формуле $S'=\frac{b_{n+1}}{1-q}=\frac{b_nq}{1-q}=\frac{q}{6(1-q)}$. Составим систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{6b_1-1}{6(1-q)}:\frac{q}{6(1-q)}=30,\\ \frac{b_1}{1-q}=\frac{16}{3},\end{cases}\quad \text{откуда} \quad \begin{cases}\frac{6b_1-1}{q}=30,\\ \frac{b_1}{1-q}=\frac{16}{3}.\end{cases}$$

Выразив q из первого уравнения и подставив во второе, получим $\frac{30b_1}{31-6b_1}=\frac{16}{3}$, $b_1=\frac{8}{3}$, $q=\frac{1}{2}$.

434. Сумма квадратов первых n членов (S_n^2) равна $S_n^2=\frac{b_1^2(1-q^{2n})}{1-q^2}$. Сумма первых $2n$ членов (S_{2n}) равна $S_{2n}=\frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q}$. Сумма кубов первых n членов $S_n^3=\frac{b_1^3(1-q^{3n})}{1-q^3}$, а сумма первых $3n$ членов $S_{3n}=\frac{b_1(1-q^{3n})}{1-q}$. Составим систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{b_1^2(1-q^{2n})}{1-q^2}=\frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q},\\ \frac{3b_1^3(1-q^{3n})}{1-q^3}=\frac{b_1(1-q^{3n})}{1-q}, \quad b_1\neq 0,\ 1-q^{2n}\neq 0,\end{cases}\quad \text{поэтому} \quad \begin{cases}\frac{b_1}{1-q^2}=\frac{1}{1-q},\\ \frac{3b_1^2}{1-q^3}=\frac{1}{1-q}.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{1}{2}$, и, следовательно, $S=\frac{1}{3}$.

§ 3. Арифметический корень натуральной степени (3/4 ч)

Цели изучения параграфа — обобщение знаний, полученных в 9-летней школе, о корнях и арифметических корнях; подготовка к изучению понятия степени с действительным показателем; формирование умений продуктивно общаться в процессе совместной деятельности по изучению нового материала, в процессе доказательства новых утверждений разными методами.

При изучении материала параграфа в классе могут быть использованы различные источники информации по темам «Квадраты чисел», «Натуральные степени числа 2», «Натуральные степени числа 3», «Формулы сокращённого умножения», «Модуль числа», «Свойства арифметического корня n-й степени».

В устной работе полезными могут оказаться следующие задания:

1. Возвести в квадрат числа: 0; 7; $-\frac{3}{8}$; $1\frac{2}{3}$; 0,2; 0,6; −1,1; 0,08.

2. Представить в виде квадрата числа: 1; $\frac{49}{16}$; 0,0001; 42^4; $1{,}5^6$.

3. Представить в виде куба числа: $\frac{8}{27}$; −0,001; $(-2)^6$; $(-2)^9$; -2^3.

4. Упростить выражения: $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$; $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$; $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Так же как и материал предыдущих параграфов (основой которых являются знакомые учащимся сведения), теоретический материала § 3 в **общеобразовательных** классах может быть изложен полностью на первом уроке (доказательство свойств корней для учащихся этих классов необязательно). Второй и третий уроки можно отвести на вычисление корней и применение свойств арифметических корней для преобразования выражений. Возможен вариант изучения небольших порций теоретического материала путём чередования их с рассмотрением практического применения (такой подход рекомендуется осуществлять в классах с невысоким уровнем успеваемости или с детьми, отличающимися быстрой утомляемостью).

В классах с **углублённым** изучением математики при изучении теоретического материала можно применить частично поисковый метод: доказательство единственности арифметического корня натуральной степени и его свойств полезно провести с помощью учащихся или полностью самостоятельно в процессе индивидуальной работы с последующим обсуждением. Задачи **7—9** достаточно трудные, но желательно, чтобы с ними ознакомились все школьники профильного класса. В решении этих задач используются приёмы, которые будут полезны в дальнейшем, в частности при решении уравнений. В этих классах часть упражнений, например **438**, **439**, **441**, выполняется устно, что позволит высвободить время для решения более трудных задач.

В конце третьего урока в **общеобразовательном** классе и четвёртого урока в классе **углублённого уровня** желательно провести проверочную работу на 15—20 мин следующего содержания:

1. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{-125}-\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; 2) $\sqrt[5]{7^5\cdot 2^5}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$; 4) $\sqrt{\sqrt{16}}$

[1) $\sqrt[3]{-64}+\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$; 2) $\sqrt[7]{3^7\cdot 5^7}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$].

2. Упростить выражение при $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ m > 0,\ n > 0$:

1) $\sqrt[3]{2a^2b}\cdot\sqrt[3]{4ab^2}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{8m^2}{n}}:\sqrt[5]{\frac{n^9}{4m^3}}$

[1) $\sqrt[5]{8a^3b^2}\cdot\sqrt[5]{4a^2b^3}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{2m^2}{n}}:\sqrt{\frac{n^2}{8m^4}}$].

3. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt[6]{x^2-2x}$ [$\sqrt[8]{3x-x^2}$]?

---

4. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}+1}}\right]$.

5. Сравнить числа $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$ и $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ [$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}+1$].

6. Упростить выражение $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ $\left[\left(\sqrt{\frac{a+b^2}{b}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{b^2+a}{b}+2\sqrt{a}}\right)\right]$, если $\sqrt{a}>b$.

Задания **1—3** обязательны для выполнения **всеми** учащимися, задание **4** обязательно только для учащихся классов **углублённого уровня**. Задания **4—6** являются дополнительными для учащихся общеобразовательных классов, а **5—6** являются дополнительными для классов **углублённого уровня**, и учащиеся могут получить две оценки (за каждую часть).

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, включая задачу 4	435—440	437 (1, 3), 439 (1, 3)	ДМ § 4 № 9
2	От задачи 4 до задачи 5	441, 442, 444, 445, 447, 448, 450, 451, 457	446 (1, 3)	ДМ § 4 № 11, 12; 459, 461
3	Задача 6 и весь материал параграфа	443, 449, 452, 453, 460	Самостоятельная работа из текста пособия	466; ДМ § 4 № 42

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3 до задачи 7	436—438, 441, 444, 447, 448	440 (3)	462; ДМ № 5, 6
2	§ 3 до задачи 7	439, 450—452, 454, 455, 458, 459	455 (3, 5), 456	466; ДМ № 12, 13
3	Задачи 7—9	453, 460	446 (1, 3), 449 (1, 3)	466; ДМ № 15, 16
4	Весь материал параграфа	457, 461, 463, 464	Самостоятельная работа из текста пособия	466, 465; ДМ № 18

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение арифметического корня n-й степени и его свойства; уметь выполнять действия с корнями в упражнениях типа **437, 438, 443, 444, 449—451.**

Учащиеся классов **углублённого уровня** должны уметь доказывать свойства корня натуральной степени и выполнять упражнения типа **456—458, 460.**

Решение упражнений

463. 1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}-$
$-(\sqrt{3}-1)=2.$

2) Пусть $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=a$, тогда

$a^3=(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})^3=9+\sqrt{80}+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})^2(9-\sqrt{80})}+$
$+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})^2}+9-\sqrt{80}=18+3(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})=$
$=18+3a$, т. е. $a^3=18+3a$.

Уравнение $a^3-3a-18=0$ имеет корень $a=3$. Покажем, что других действительных корней нет.

$$a^3-3a-18=a^3-3a^2+3a^2-9a+6a-18=$$
$$=a^2(a-3)+3a(a-3)+6(a-3)=(a-3)(a^2+3a+6).$$

Уравнение $a^2+3a+6=0$ не имеет действительных корней, поэтому $a-3=0$, т. е. $a=3$.

464. 1) $\sqrt{43+30\sqrt{2}}+\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{5^2+(3\sqrt{2})^2+2\cdot 15\sqrt{2}}+$

$+\sqrt{5^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot 15\sqrt{2}}=\sqrt{(5+3\sqrt{2})^2}+\sqrt{(5-3\sqrt{2})^2}=$

$=|5+3\sqrt{2}|+|5-3\sqrt{2}|=5+3\sqrt{2}+5-3\sqrt{2}=10.$

2) $\sqrt{109+12\sqrt{3}}-\sqrt{109-12\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{108})^2+2\cdot(6\sqrt{3})+1}-$

$-\sqrt{(6\sqrt{3})^2-2\cdot(6\sqrt{3})+1}=\sqrt{(6\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(6\sqrt{3}-1)^2}=|6\sqrt{3}+1|-$

$-|6\sqrt{3}-1|=6\sqrt{3}+1-6\sqrt{3}+1=2.$

465. 1) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{(1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{3}-1)}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2\sqrt[3]{9}-4}=\dfrac{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4)}{2(\sqrt[3]{9}-2)(\sqrt[3]{9^2}+2\sqrt[3]{9}+4)}=$

$=\dfrac{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4)}{2}.$

3) $\dfrac{1\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt[4]{xy})}{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt[4]{xy})}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt[4]{xy}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-\sqrt{xy}}=$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt[4]{xy})(x+y-\sqrt{xy})}{(x+y+\sqrt{xy})(x+y-\sqrt{xy})}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt[4]{xy})(x+y-\sqrt{xy})}{x^2+y^2+xy}$, где $x\geqslant 0$,

$y\geqslant 0$, $x^2+y^2\neq 0$.

466. 1) $\dfrac{\sqrt{(x+3)^2-12x}}{\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}}=\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^4}-3}$. Если $x-3>0$, $x>3$, тогда

$\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=x-3$ и $\dfrac{(x-3)\sqrt[4]{x}}{x-3}=\sqrt[4]{x}$.

Если $x-3<0$, т. е. $0<x<3$, то $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=3-x$,

$\dfrac{(x-3)\sqrt[4]{x}}{x-3}=-\sqrt[4]{x}.$

2) $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}=\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}{\sqrt{a^2-4a+4}}=$

$=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}}{\sqrt{(a-2)^2}}=\dfrac{|\sqrt{a-1}-1|+|\sqrt{a-1}+1|}{|a-2|}$, $\sqrt{a-1}+1>0$

при $a\geqslant 1$, $\sqrt{a-1}-1\geqslant 0$ при $a>2$.

Следовательно, при $a>2$

$$\frac{|\sqrt{a-1}-1|+|\sqrt{a-1}+1|}{|a-2|}=\frac{\sqrt{a-1}-1+\sqrt{a-1}+1}{a-2}=\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}.$$

$\sqrt{a-1}-1<0$ при $1\leqslant a<2$.

$$\frac{|\sqrt{a-1}-1|+|\sqrt{a-1}+1|}{|a-2|}=\frac{1-\sqrt{a-1}+\sqrt{a-1}+1}{2-a}=\frac{2}{2-a}.$$

466. 5) $$\left(\sqrt[3]{\frac{x^3+2ax^2+a^2x}{x-a}}-\sqrt[3]{\frac{x^3-2ax^2+a^2x}{x+a}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\sqrt[3]{\frac{x(x+a)^2}{x-a}}-\sqrt[3]{\frac{x(x-a)^2}{x+a}}\right)^{-1}=\left(\frac{\sqrt[3]{x(x+a)^3}-\sqrt[3]{x(x-a)^3}}{\sqrt[3]{x^2-a^2}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{(x+a)\sqrt[3]{x}-(x-a)^3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-a^2}}\right)^{-1}=\left(\frac{\sqrt[3]{x}\cdot 2a}{\sqrt[3]{x^2-a^2}}\right)^{-1}=\frac{\sqrt[3]{x^2-a^2}}{2a\sqrt[3]{x}};$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-a^2}}{2a\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{a}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{x}{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2-a^2}}{2a\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{a}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2-x^2}{a^2x}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2-a^2}\cdot\sqrt[3]{a^3}+a\sqrt[3]{a^2-x^2}}{2a\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a^2}}=0.$$

§ 4. Степень с рациональным и действительным показателями (3/4 ч)

Цели изучения параграфа — расширение понятия степени до степени с рациональным и действительным показателями; формирование навыков действий со степенями с рациональными показателями; изучение свойств степени с действительным показателем; развитие умений самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности, осознавая стратегическую важность изучаемого материала для будущего изучения элементарных функций и начал математического анализа.

При рассмотрении материала п. 1 следует акцентировать внимание учащихся на том, что от записи $\sqrt[n]{a^m}$ можно перейти к записи $a^{\frac{m}{n}}$ только для $a>0$, а также на том, что $0^{\frac{m}{n}}=0$ по определению только при $\frac{m}{n}>0$ (m — целое число, n — натуральное число).

Известно, что теоретический материал по этой теме учащимися усваивается недостаточно хорошо.

Например, распространены следующие **ошибки**: 1) уравнение $x^{\frac{2}{3}}=1$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=-1$; 2) $\sqrt[3]{(-8)^2}=(-8)^{\frac{2}{3}}$; 3) $0^{-\frac{1}{2}}=0$; 4) $0^0=1$; 5) $0^0=0$.

Полезно требовать от учащихся пояснения сути каждой из ошибок в приведённых примерах.

В ходе изучения параграфа и при выполнении упражнений необходимо вспомнить, что $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, где $a>0$, n — целое число, а также повторить формулы сокращённого умножения и способ вынесения за скобки общего множителя.

При изучении п. 1 учителю целесообразно предложить учащимся самостоятельно определить, следует ли перед выполнением упражнений на применение того или иного свойства степени самому ученику разбирать решение аналогичной задачи из текста параграфа. В классе с **углублённым** изучением математики можно часть упражнений (например, из номеров **469—471**) выполнять устно.

При изучении п. 2 подчёркивается, что определение степени с действительным показателем таково, что все свойства, сформулированные для степени с рациональным показателем (с. 159), переносятся на степень с действительным показателем. Поэтому можно эти свойства ещё раз не записывать ни на доске, ни в тетрадях. Свойство 6 степени с действительным показателем (сформулированное, но не доказанное на с. 162) желательно проиллюстрировать конкретными примерами:

$$1{,}01^2=1{,}0001>1; \quad 1{,}21^{\frac{1}{2}}=1{,}1>1 \text{ и т. п.,}$$

которые могут привести и сами учащиеся.

Доказательства теоремы и следствий из неё учитель либо проводит, делая записи на доске, либо предлагает учащимся разобрать их по учебнику. В классах **углублённого уровня** учащиеся могут доказать следствия и рассмотреть применение их на примерах самостоятельно. В **общеобразовательных** классах после изучения как теоремы, так и следствий необходимо проиллюстрировать их применение на конкретных примерах: после доказательства теоремы разобрать задачу **8**, после рассмотрения следствия 1 — задачу **9**, следствия 2 — задачу **10**, следствия 3 — задачу **11**. Доказывать теорему и следствия из неё учащимися **общеобразовательных** классов необязательно. Однако добиться осознанного восприятия и теоремы и следствий необходимо от **всех** учащихся: изучение степенной, показательной и логарифмической функций и их свойств будет опираться именно на эти свойства.

Р а с п р е д е л е н и е   м а т е р и а л а   п а р а г р а ф а по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 4, п. 1 до задачи 4	467—474, 476, 478; ДМ § 5 № 2—8	469 (3), 470 (3), 472 (3)	500, 501
2	п. 2, задачи 6—9	480—485; ДМ § 5 № 23, 26, 27	483 (1), 484 (3), 485 (3, 5)	496; ДМ § 5 № 44
3	Задача 10 и весь материал параграфа	486, 487, 490, 491, 497; ДМ § 5 № 36—42	488 (2, 3); тест 3	499; ДМ § 5 № 45

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	п. 1 до задачи 4	469—472, 474, 488, 491	474 (1—4)	503, 494
2	п. 1, задачи 4 и 5	475—477, 489, 490, 492, 495, 507, 508	478 (1, 2), 490 (1, 3)	504; ДМ № 8, 9
3	п. 2 до конца	482—485, 487	Тест № 3	505; ДМ № 11
4	Весь материал параграфа	480, 481, 493, 496, 498—500; ДМ № 1—4	493 (1, 2), 496 (2, 3), 497 (1, 2)	506, 495; ДМ № 12, 13

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать свойства степени с действительным показателем и уметь их применять при выполнении упражнений типа **469—472, 474, 481, 482;** знать свойство 6, теорему и следствия из неё, сформулированные на с. 162—163, и уметь их применять при выполнении упражнений типа **484, 485, 487.**

Учащиеся классов **углублённого уровня** должны уметь доказывать свойства степени 1—5, теорему и следствия из неё и выполнять упражнения типа **488, 490, 496, 499.**

Решение упражнений

502. $x^3 = (\sqrt[3]{4\sqrt{5}+4} - \sqrt[3]{4\sqrt{5}-4})^3 = 4\sqrt{5}+4-$

$-3(\sqrt[3]{4\sqrt{5}+4}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{5}-4})(\sqrt[3]{4\sqrt{5}+4}-\sqrt[3]{4\sqrt{5}-4}) - 4\sqrt{5}+4=$

$=8-3\sqrt[3]{80-16}\,(\sqrt[3]{4\sqrt{5}+4}-\sqrt[3]{4\sqrt{5}-4}) = 8-12x;$

$x^3+12x = 8-12x+12x = 8.$

503. 1) $\left(x+a^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}\left(1-\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{(x-a)^3}=$

$$=\left(\frac{(\sqrt{x})^3+(\sqrt{a})^3}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{x-\sqrt{ax}+a}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{(x-a)^3}=$$

$$=\left(\frac{((\sqrt{x})^3+(\sqrt{a})^3)\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{\sqrt{x}(x-\sqrt{ax}+a)}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{(x-a)^3}=(x-a)^{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{(x-a)^3}=\sqrt{x-a},$$

где $x > a > 0$.

504. $x^3=\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}\right)^3=$

$$=-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}+$$

$$+3\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}\right)=$$

$$=-b-a\cdot\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{a}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}\right).$$

Подставим в выражение

$$x^3+ax+b=-b-a\cdot\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}\right)+$$

$$+a\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}\right)+b=0.$$

505. Возведём выражение для x в квадрат и получим $x^2 = a^2 \cdot \dfrac{m^2 + n^2}{2mn}$, тогда $(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(a^2 \cdot \dfrac{(m+n)^2}{2mn}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)}$, так как $n > m > 0$. Аналогично $(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(a^2 \cdot \dfrac{(m-n)^2}{2mn}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)}$.

Найдём сумму и разность этих выражений:

$$\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)} + \frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)} = \frac{\sqrt{2mn} \cdot 2n}{a(n^2 - m^2)};$$

$$\frac{\sqrt{2mn}}{a(m+n)} - \frac{\sqrt{2mn}}{a(n-m)} = \frac{-2m\sqrt{2mn}}{a(n^2 - m^2)}.$$

Частное полученных выражений равно

$$\frac{\sqrt{2mn} \cdot 2n}{a(n^2 - m^2)} \cdot \frac{a(n^2 - m^2)}{(-2m\sqrt{2mn})} = -\frac{n}{m}; \quad \left(-\frac{n}{m}\right)^{-2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Урок обобщения и систематизации знаний (1 ч)

На этом уроке совершенствуются умения в применении свойств арифметического корня и степени с действительным показателем. При ответах у доски следует требовать от учащихся обоснований выполняемых действий (ссылок на конкретные свойства).

Можно на этом уроке пользоваться таблицами со всеми изученными свойствами степени с действительным показателем (теорема и следствия из неё также являются свойствами степени).

Практические задания учитель выбирает из «Упражнений к главе». Например, для **общеобразовательных** классов упражнения **513—515, 517, 518, 521—524, 536, 545—547**; для классов **углублённого уровня** упражнения **526, 527, 530, 535, 537, 540, 548, 549**, дополнительно **544**. Задания «Проверь себя!» могут быть использованы для самостоятельной работы учащихся в классе или дома.

Решение упражнений

534. 1) Очевидно, что $\sqrt{24} < \sqrt{25}$, т. е. $2\sqrt{6} < 5$. Прибавив 5 к обеим частям этого неравенства, получим $5 + 2\sqrt{6} < 10$, или $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 < 10$. Согласно следствию 3 (§ 4) верно неравенство

$$((\sqrt{2} + \sqrt{3})^2)^{\frac{1}{2}} < 10^{\frac{1}{2}}, \text{ или } \sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}.$$

541. 1) Возведём обе части равенства в квадрат, при $a > 0$ и $a^2 \geqslant b > 0$ получим в правой части $(\sqrt{a + \sqrt{b}})^2 = a + \sqrt{b}$. Левая

часть примет вид $\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+2\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-b})(a-\sqrt{a^2-b})}{4}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=$
$=a+\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b})^2}=a+\sqrt{b}$. Равенство верно.

542. 1) Левая часть равенства после преобразования выражения $\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}=|\sqrt{7}+1|=\sqrt{7}+1$ примет вид $\sqrt{10+\sqrt{7}-(\sqrt{7}+1)}=3$. После аналогичных преобразований в правой части получим $1+\sqrt{3-\sqrt{6}+(\sqrt{6}+1)}=3$.

543. 1) $(x^2+9)^{-0,5}=\left(\frac{9(a^2+b^2)}{2ab}+9\right)^{-0,5}=\frac{\sqrt{2ab}}{3(a+b)}$; если $a>b$, то $(x^2-9)^{-0,5}=\left(\frac{9(a^2+b^2)}{2ab}-9\right)^{-0,5}=\frac{\sqrt{2ab}}{3(a-b)}$; если $a<b$, то $(x^2-9)^{-0,5}=$
$=\frac{\sqrt{2ab}}{3(b-a)}$.

При $a>b$ числитель равен $\frac{\sqrt{2ab}}{3(a+b)}+\frac{\sqrt{2ab}}{3(a-b)}=\frac{2a\sqrt{2ab}}{3(a^2-b^2)}$, знаменатель равен $\frac{\sqrt{2ab}}{3(a+b)}-\frac{\sqrt{2ab}}{3(a-b)}=\frac{-2b\sqrt{2ab}}{3(a^2-b^2)}$, частное $\frac{2a\sqrt{2ab}}{3(a^2-b^2)}:$
$:\left(\frac{-2b\sqrt{2ab}}{3(a^2-b^2)}\right)=-\frac{a}{b}$.

При $a<b$ числитель равен $\frac{2b\sqrt{2ab}}{3(b^2-a^2)}$, знаменатель равен $\frac{-2a\sqrt{2ab}}{3(b^2-a^2)}$, частное равно $-\frac{b}{a}$.

Ответ. $-\frac{a}{b}$ при $a>b$, $-\frac{b}{a}$ при $a<b$.

544. Пусть $a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, тогда $a^3=14-3a$, так как $(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})=-1$. Уравнение $a^3+3a-14=0$ имеет единственный корень $a=2$.

Контрольная работа № 3

Базовый уровень

1. Вычислить:

1) $2^{-3}\cdot 64^{\frac{1}{2}}-64^{\frac{1}{3}}:2^{-4}$ $[8^{\frac{1}{3}}:2^{-1}+3^{-2}\cdot 81^{\frac{1}{4}}]$;

2) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$ $[\sqrt[5]{17-\sqrt{46}}\cdot\sqrt[5]{17+\sqrt{46}}]$.

2. Упростить выражение при $a > 0,\ b > 0$:

1) $\dfrac{a^{-3}\sqrt[3]{a^6b^2}}{\sqrt[3]{b}}$ $\left[\dfrac{\sqrt[4]{a}}{b^{-4}\sqrt[4]{b^8a^3}}\right]$;

2) $\left(\dfrac{1}{a^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} \cdot a^{\sqrt{2}+1}$ $\left[(b^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}+1} \cdot \dfrac{1}{b^{4+\sqrt{3}}}\right]$.

3. Сократить дробь $\dfrac{a-7\sqrt{a}}{a-49}$ $\left[\dfrac{8\sqrt{b}+b}{b-64}\right]$.

---

4. Сравнить числа:

1) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{7}{8}\right)^3}$ и $\sqrt[4]{\left(\dfrac{15}{16}\right)^3}$ $\left[\sqrt[5]{\left(\dfrac{3}{7}\right)^4}\ \text{и}\ \sqrt[5]{\left(\dfrac{5}{14}\right)^4}\right]$;

2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ и 1 $\left[1\ \text{и}\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\pi}\right]$.

5. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = \dfrac{1}{2},\ b_3 = \dfrac{2}{9}$.

[Найти второй член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма её членов равна $1\dfrac{1}{3}$, а знаменатель равен $\dfrac{3}{4}$.]

Углублённый уровень

1. Вычислить:

1) $2^{-3} \cdot 64^{\frac{1}{2}} - 64^{\frac{1}{3}} : 2^{-4}$ $[8^{\frac{1}{3}} : 2^{-1} + 3^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}]$;

2) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$ $[\sqrt[5]{17-\sqrt{46}} \cdot \sqrt[5]{17+\sqrt{46}}]$.

2. Упростить выражение при $a > 0,\ b > 0$:

1) $\dfrac{a^{-3}\sqrt[3]{a^6b^2}}{\sqrt[3]{b}}$ $\left[\dfrac{\sqrt[4]{a}}{b^{-4}\sqrt[4]{b^8a^{-3}}}\right]$;

2) $\left(\dfrac{1}{a^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} \cdot a^{\sqrt{2}+1}$ $\left[(b^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}+1} \cdot \dfrac{1}{b^{4+\sqrt{3}}}\right]$.

3. Сократить дробь при $a > 1$: $\dfrac{\sqrt{a^3}-a}{a-2a^{\frac{1}{2}}+1}$ $\left[\dfrac{a+4\sqrt{a}+4}{a^{\frac{3}{2}}+2a}\right]$.

4. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}\right]$.

5. Упростить выражение

$$\left(\frac{3}{a+3a^{\frac{1}{2}}}+\frac{a\sqrt{a}}{9-a}:\frac{a^{1,5}}{3-a^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}\left[\left(\frac{2}{a^{\frac{3}{4}}+2\sqrt[4]{a}}+\frac{\sqrt{a}}{4-a}:\frac{a^{0,25}}{2-a^{0,5}}\right)^{-4}\right].$$

6. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии первый член на 9 больше второго. Сумма прогрессии, составленной из членов данной прогрессии с нечётными номерами, на 12 больше суммы прогрессии, составленной из членов данной прогрессии с чётными номерами. Найти эту прогрессию.

[Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех её членов, стоящих на нечётных местах, в 4 раза больше суммы всех её членов, стоящих на чётных местах, а сумма первых трёх членов прогрессии равна 63.]

Глава V Степенная функция

Напомним, что первое знакомство со степенной функцией произошло ещё в основной школе. При рассмотрении степенной функции учащиеся познакомились с такими понятиями, как: область определения и множество значений функции, аналитический признак монотонности, чётность и нечётность функции. Было выявлено, что степенная функция $y=x^r$, где r — заданное число, определена для тех значений x, при которых выражение x^r имеет смысл. Свойства и графики степенной функции рассматривались на примерах функций: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$. Были также рассмотрены примеры простейших иррациональных уравнений.

Знакомство со степенной функцией продолжается в старших классах. Изучать в общем виде степенную функцию $y=x^p$, где p — заданное действительное число, достаточно сложно.

При основании $x>0$ вопрос решается просто: если показатель степени положителен, то значение функции равно значению степени; если показатель степени отрицателен, то значение функции находится после перехода к положительному показателю; если показатель степени равен нулю, то значение функции равно единице. Например, $3^2=9$, $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$, $3^0=1$.

Однако основание степени x^p может быть и числом отрицательным. Для таких значений x свойства степенной функции зависят от того, каким числом является показатель p. Отметим, что в этом случае степенная функция существует только тогда, когда показатель — целое число.

Если основание степени равно нулю, то степень определена только для положительного показателя.

Рассмотрение свойств степенных функций и их графиков проводится поэтапно, в зависимости от того, каким числом является показатель: 1) чётным натуральным числом; 2) нечётным натуральным числом; 3) числом, противоположным чётному; 4) числом, противоположным нечётному; 5) положительным нецелым числом; 6) отрицательным нецелым числом.

Обоснования свойств степенной функции в этой главе не проводятся, они следуют из свойств степени с действительным показателем, рассмотренных в IV главе. Например, возрастание функции $y = x^p$ на промежутке $x > 0$, где p — положительное нецелое число, следует из свойства: «Если $0 < x_1 < x_2$, то $x_1^p < x_2^p$».

В этой же главе рассматриваются функции, называемые взаимно обратными. Важно обратить внимание на то, что не всякая функция имеет обратную; обратную функцию имеет только обратимая, т. е. такая, которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между областью определения и множеством значений.

У взаимно обратных функций области определения и множества значений «меняются местами», а отсюда следует, что их графики симметричны относительно прямой $y = x$. По этой же причине для нахождения функции, обратной данной, выражают из данной формулы x через y, а затем в найденной формуле меняют обозначения. Заметим, что не для всякой обратимой функции, рассматриваемой в школе, учащиеся могут найти формулу обратной функции. Например, учащиеся не смогут решить уравнение $y = x^3 + x$ относительно x, поэтому не смогут найти функцию, обратную функции $y = x^3 + x$.

Изучение сложной функции начинается сразу после знакомства с взаимно обратными функциями. Вводятся разные термины для обозначения сложной функции (суперпозиция, композиция), но употребляется лишь один. Важно обратить внимание учащихся на отыскание области определения сложной функции и промежутков её монотонности. Доказательство теоремы о промежутках монотонности опирается на определение возрастающей или убывающей функции, и метод доказательства позволяет изложить суть алгоритма доказательства монотонности сложной функции.

В этой же главе происходит знакомство с дробно-линейными функциями. Ещё в основной школе учащиеся учились строить график функции $y = \frac{k}{x}$ и функций, которые получались сдвигами этого графика. Выделение целой части из дробно-линейного выражения функции и приводит к знакомому учащимся виду.

Рассмотрение равносильности уравнений, неравенств и систем уравнений возникает в связи с предстоящим изучением иррациональных уравнений, неравенств и систем иррациональных уравнений. В ходе решения иррациональных уравнений переходят к уравнению-следствию, которое может иметь, помимо корней данного уравнения, и посторонние корни. Так, уравнение $\sqrt{x+2}=x$ имеет один корень $x=2$, а уравнение-следствие $x+2=x^2$ имеет два корня $x=-1$ и $x=2$.

Выявление приобретённых посторонних корней осуществляется проверкой найденных значений. В то же время при решении уравнений важно не потерять корни. Потеря корней может, например, произойти при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное. Например, если уравнение $(x+2)(x-2)=$ $=7(x-2)$ разделить на $x-2$, то будет потерян корень $x=2$.

Основным методом решения иррациональных уравнений является возведение обеих частей уравнения в степень с целью перехода к рациональному уравнению-следствию данного.

С помощью графиков решается вопрос о наличии корней и их числе, а также о нахождении приближённых корней, если аналитически решить уравнение трудно.

Иррациональные неравенства не являются обязательными для изучения всеми учащимися. В учебнике для учащихся **общеобразовательных** классов рассмотрены лишь простые примеры неравенств, содержащих неизвестное под знаком только квадратного корня, причём сначала такие, как $\sqrt{x-2}>3$, а затем $\sqrt{x-2}>x$. Основным способом их решения является сведение к системе рациональных неравенств, равносильной данному неравенству.

Предметные цели изучения главы V:

— введение понятия степенной функции; изучение её свойств аналитическими и графическими методами;
— изучение понятия обратной функции; обобщение понятия обратной функции с использованием ранее изученных зависимостей; формирование умения аналитической записи функции, обратной данной, а также умения построения графика обратной функции;
— введение понятия сложной функции;
— рассмотрение свойств и графика дробно-линейной функции; демонстрация применимости дробно-линейной функции как модели решения прикладных задач;
— введение определений равносильных уравнений (неравенств, систем) и уравнений (неравенств, систем) — следствий;
— введение понятия области определения уравнения (неравенства, системы);
— применение при решении уравнений (неравенств, систем) свойств равносильных преобразований;
— обучение решению иррациональных уравнений и неравенств.

Метапредметные цели:

— обучение интерпретации явлений процессов, протекающих по степенной зависимости;
— развитие умений самостоятельно определять цели деятельности по изучению элементарных функций и их применению, использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей;
— формирование способности и готовности к самостоятельному поиску методов решения практических задач;
— развитие критичности мышления в процессе оценки и интерпретации информации, получаемой из различных источников;
— развитие умений взаимодействия в процессе поиска решения проблем.

Личностные цели изучения главы:

— формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки;
— развитие стремлений к самостоятельной творческой и ответственной деятельности;
— развитие стремлений к самообразованию, сознательному отношению к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

В результате изучения главы V **все** учащиеся должны знать свойства степенной функции с натуральным показателем, определение взаимно обратных функций, определения равносильных уравнений, неравенств, систем уравнений, уравнения-следствия; понимать причины появления посторонних корней и потери корней; уметь отвечать на вопросы 1—4, 6, 7 к главе, а также решать упражнения типа **635—638**, **641**, **642** и из рубрики «Проверь себя!». Учащиеся классов **углублённого уровня** должны уметь отвечать на все вопросы к главе, выполнять упражнения, такие, как **644**, **645**, **647—649**, и все задания из рубрики «Проверь себя!».

§ 1. Степенная функция, её свойства и график (3/3 ч)

Цели изучения параграфа — знакомство учащихся с понятием ограниченной функции, со свойствами и графиками различных (в зависимости от показателя степени) видов степенной функции; развитие навыков самостоятельного поиска методов решения практических и прикладных задач.

До начала изучения материала параграфа полезно вспомнить определение функции и восстановить умение учащихся читать графики функций. С этой целью, например, по рисунку 3 можно задать следующие вопросы:

1) Какова область определения функции $y = f(x)$?
2) Каково множество значений функции $y = f(x)$?
3) Является ли функция чётной? нечётной?

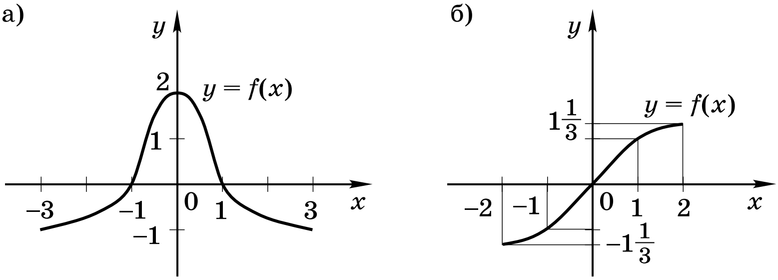


Рис. 3

4) На каких промежутках функция возрастает? убывает?

5) При каких значениях x функция принимает значение, равное нулю? положительные значения? отрицательные значения?

6) Каково значение функции при $x = 0$? $x = 2$?

При рассмотрении графиков функций на том же рисунке полезно вспомнить и определения возрастания и убывания функции. Полезно предложить несколько вариантов для подобного исследования функций с последующим обсуждением, например, с помощью КП.

Материал параграфа желательно рассматривать в соответствии с логикой его изложения: сначала ознакомить учащихся с новым понятием ограниченности функции и определить понятия наибольшего и наименьшего значений, с которыми на уровне чтения графиков школьники встречались в основной школе, затем приступить к ознакомлению со свойствами степенной функции. Подготовить десятиклассников к восприятию ограниченности функции можно, используя рисунок 3, *а*, изобразив две прямые, например $y = 2$ и $y = -2$, отметив, что весь график расположен между этими прямыми. Затем дать определение функции, ограниченной сверху и снизу (с помощью рисунков учебника 56, 57). Для осознанного восприятия данного понятия этого будет достаточно. В классах с **углублённым** изучением математики желательно рассмотреть понятие неограниченной функции, определение которой строится как отрицание ограниченной и затем применяется при доказательстве неограниченности степенной функции с нечётным натуральным показателем на примере функции $y = x^3$.

При знакомстве со степенной функцией желательно привлекать знания учащихся о свойствах и графиках изученных в 9-летней школе функций. Так, например, при рассмотрении п. 1 (показатель p — число чётное натуральное) можно использовать изображение графика функции $y = x^2$ и при его анализе перенести свойства этой функции на функцию $y = x^{2n}$, где n — натуральное число (с помощью рисунка 60 учебника); п. 2 (p — нечётное число) можно изучать по рисунку 61 с графиком функции

$y = x^3$; п. 3 — по рисунку 62; п. 4 — по рисунку 63; п. 5 — по изображению графика функции $y = \sqrt{x}$ и по рисунку 64 учебника. При обобщении свойств степенной функции подчёркивается, что графики всех рассматриваемых функций проходят через точку с координатами (1; 1). Поэтому построение графика степенной функции желательно начинать с построения на координатной плоскости этой точки.

Свойства функции не доказываются, но в классе **углублённого** уровня учитель должен провести обоснование свойства возрастания (убывания) конкретной функции, опираясь на теоретический материал § 4 (гл. IV), и доказать свойства ограниченности или неограниченности функции, приведённые в учебнике. В данном параграфе впервые появляется понятие асимптоты при знакомстве с графиком функции $y = x^{-2n}$; точное определение будет дано позже, в 11 классе, а пока учащиеся должны увидеть на графике, как уменьшается расстояние между точками графика и прямой, но график и прямая никогда не будут иметь общих точек в заданной области.

Задачу **1** текста параграфа желательно рассмотреть после выполнения упражнений **550** (1, 3, 5), **551** (1, 2). Схематическое изображение и чтение графиков подготовят учащихся к восприятию идеи нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке с использованием других свойств функции (возрастание, убывание). В задаче **2** следует напомнить о построении графиков с помощью сдвигов.

В задаче **3** фактически доказывается элементарными методами поведение функции на отрезке [0; 1], начинает формироваться понятие выпуклости, позже учащиеся смогут доказывать это свойство с помощью второй производной. Решение задачи **5** очень важно для осознания разницы между функцией $y = \sqrt[3]{x}$ и функцией $y = x^{\frac{1}{3}}$.

При выполнении упражнения **561** единицу следует представить в виде степени с нулевым показателем и основанием, равным основанию рассматриваемой степени. После этого сравнение степеней свести к сравнению значений возрастающей или убывающей функции. Желательно убедиться в верном результате сравнения с помощью схематического изображения графика соответствующей функции.

Упражнение **565 (1)** может быть перенесено в домашнюю работу последнего урока по теме, так как оно может послужить основой для разговора о взаимно обратных функциях при изучении следующего параграфа.

Прикладные задачи **571** и **572** полезно рассмотреть на последнем из трёх уроков, а при недостатке времени предложить для домашней работы и разобрать решение одной из них на уроке обобщения в конце темы. Задача **570** может быть предложена для решения и в общеобразовательном классе. Полезно предложить учащимся самостоятельно подобрать прикладные задачи, моделью которых являются степенные функции, и обсудить их на последнем уроке по теме.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 1 до п. 3	550 (1, 2), 551 (1, 2), 552 (1), 554 (1—4)	550 (3), 554 (2, 3); ДМ § 6 № 7—10	570; ДМ § 6 № 55, 56
2	§ 1, пп. 3, 4, задачи 1, 2	550 (4, 5), 553 (1, 3), 554 (5—6), 558 (3)	555 (1, 3), изобразить схематически график функции $y = x^{-6}$	568 (3); ДМ § 6 № 50
3	Задачи 3, 4	555 (2, 4), 556, 557	565 (2, 3)	568 (2, 6)

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 1 до п. 5, задача 1	550—556	551—553, 555 (третьи номера)	570
2	§ 1, пп. 5, 6, задачи 3, 4	558—564	560 (1, 2), 564 (3, 4), 565 (2)	ДМ № 2, 3
3	Задачи 5, 6	565 (3), 566, 568, 569, 571	568 (3, 5)	572

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь схематически строить график степенной функции в зависимости от принадлежности показателя степени (в аналитической записи рассматриваемой функции) к одному из рассмотренных числовых множеств (см. пп. 1—4) и перечислять её свойства, решать упражнения типа **550—554**.

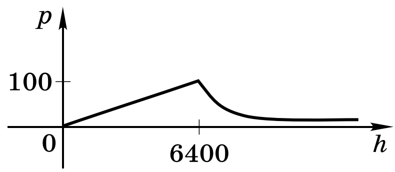
Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь исследовать функцию и строить её график, выполняя такие упражнения, как **558**, **565**, **568** (2, 3, 6).

Решение упражнений

570. По условию скорость движения должна быть равна $\frac{1}{2}$ с. Следовательно, изменение массы тела находим по формуле $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{4}\right) \cdot \frac{1}{c^2}}} = m_0\sqrt{\frac{4}{3}}$; $m = \frac{m_0 2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}55m_0$.

571. 1) См. рис. 4.

2) В соответствии с условием на расстоянии $\frac{1}{4}R$ от центра Земли (1600 км) вес тела составит $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25$ (кг). Над поверхностью Земли вес тела будет изменяться по закону $p = \frac{k}{d^2}$, где d — расстояние от центра Земли. Следовательно, для $d = 6400$ км (на поверхности Земли) получим $100 = \frac{k}{(6400)^2}$, $k = (6{,}4)^2 \cdot 10^8$. Значит, для веса 25 кг имеем $25 = \frac{(6{,}4)^2 \cdot 10^8}{d^2}$, $d^2 = (6{,}4)^2 \cdot 4 \cdot 10^6 \approx 1{,}64 \cdot 10^8$, откуда $d \approx 1{,}28 \cdot 10^4 = 12\,800$. Расстояние над поверхностью Земли $12\,800 - 6400 = 6400$ (км).



p — вес тела
h — расстояние от центра Земли

Рис. 4

572. 1) См. рис. 5.

2) Так как вес уменьшился вдвое, то расстояние h найдём по закону $\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \frac{1}{2}$, откуда $h = \frac{R(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 6400(\sqrt{2}-1) \approx$
≈ 2650 (км).

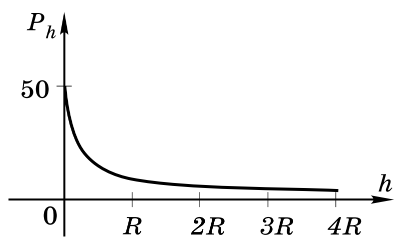


Рис. 5

§ 2. Взаимно обратные функции. Сложные функции (2/3 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление с понятиями взаимно обратных функций и сложных функций; развитие умений ясно и точно излагать свою точку зрения, используя различные языковые средства математики, как аналитические, так и графические.

Исследуя элементарные функции элементарными методами, учащиеся сталкиваются с уже знакомыми задачами отыскания области определения и множества значений функции, промежутков монотонности, интервалов знакопостоянства и т. д. Существуют приёмы, которые значительно облегчают такую работу, делают её более интересной. Например, чтобы найти множество значений некоторой функции, можно найти область определения обратной к ней функции, свести построение графика функции к построению графика, симметричного графику обратной функции относительно прямой $y = x$, и пр. Поэтому изучение данной темы необходимо для учащихся классов с **углублённым** изучением математики.

Учащихся **общеобразовательных** классов можно лишь ознакомить с материалом параграфа. От всех учащихся умения находить функцию, обратную к данной, достаточно только для линейной функции. Необходимо, чтобы учащиеся, глядя на график функции, смогли сказать, является ли эта функция обратимой, и знали, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Степень глубины изложения материала учитель выбирает сам в зависимости от готовности класса к его восприятию.

Актуализацию знаний и подготовку к изучению новой темы желательно начать с проверки упражнения **565 (1)** из домашнего задания. Непосредственно из анализа полученных графиков можно сделать вывод о связи свойств этих функций и о симметрии их графиков при $x > 0$ и ввести понятие взаимно обратных функций. Осознанному восприятию этих связей будут способствовать задания, аналогичные упражнению **575**.

Практика показывает, что большинство учащихся без особых усилий справляются с упражнениями типа **573—576**. Но при выполнении упражнения типа **575 (3)** возникают трудности при нахождении множества значений данной функции: ученики не осознают, что наличие в числителе дроби числа, отличного от нуля, не допускает возможности обращения в нуль самой дроби, т. е. $y \neq 0$. Если же записать функцию, обратную данной, как $y = \frac{3}{x} + 4$, то её область определения учащиеся находят легко, а следовательно, становится понятнее выражение множества значений данной функции. Учащимся классов **углублённого** уровня полезно предложить групповую работу с использованием задания 1 из дидактических материалов или аналогичного, добавив требование подкрепить ответ на вопрос изображением графика соответствующей функции. Такое собеседование по теме внутри группы позволит высказаться и обосновать свою точку зрения большинству учащихся. Учитель в этом случае будет исполнять роль арбитра, если возникнут споры.

Понятие сложной функции для учащихся **общеобразовательных** классов можно ввести, но не выполнять упражнения сложнее, чем **577**, **578**. Для учащихся классов **углублённого** уровня эти упражнения очень важны, так как умение выделить внутреннюю и внешнюю функции будет необходимо при исследовании сложных функций, примеры которых приведены в задачах **3** и **4**, и в дальнейшем при отыскании производных.

Может вызвать трудности отыскание множества значений сложной функции, поэтому при рассмотрении задачи **4** обратите особое внимание учащихся на п. 4, где находятся промежутки монотонности функции. Точка $x = 1$ является точкой максимума (об этом будем говорить позже), т. е. на промежутке $(-2;\ 1]$ функция возрастает, а затем на промежутке $[1;\ 4)$ убывает, следовательно, при $x \in (-2;\ 4)$ функция принимает значения меньшие, чем $y(1) = -\frac{1}{9}$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 2, п. 1	573—576	573 (3, 5), 576 (1)	ДМ § 7 № 2, 4
2	§ 2, п. 2 до теоремы 3	ДМ § 7 № 1 (1), 5 (1); 577, 578	581 (1)	ДМ § 7 № 6, 7

Классы углублённого уровня

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 2, п. 1	573—576, 579	579 (1, 3)	
2	§ 2, п. 2, задача 3	ДМ № 1; 580, 577, 578	577 (3), 578 (3)	ДМ № 3 (1, 3)
3	Задача 4	581, 582	ДМ № 2 (1, 3)	ДМ № 4 (1, 3)

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать, какая функция называется обратимой, и уметь выполнять упражнения, такие, как **575, 576**. Учащиеся классов **углублённого** уровня должны знать формулировки всех теорем параграфа, уметь доказывать теоремы 1 и 2 и выполнять упражнения, такие, как **574, 575, 577, 578, 581** (1, 3).

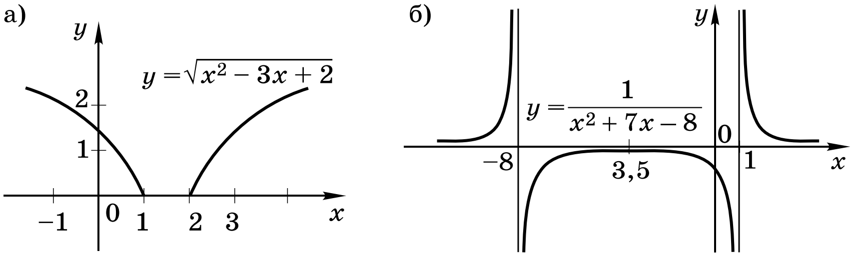


Рис. 6

Решение упражнений

582. 1) См. рис. 6, *а*; 3) см. рис. 6, *б*.

§ 3. Дробно-линейная функция (1 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление учащихся с дробно-линейной функцией, демонстрация применения функции на примере прикладной задачи; развитие навыков исследования прикладных задач и поисков их решения с использованием различных методов.

Материал параграфа не является принципиально новым для учащихся, поэтому и начинается он с задачи **1**, решение которой знакомо школьникам. При решении задач на построение графиков дробно-линейных функций продолжается формирование понятий горизонтальной и вертикальной асимптот, закрепляются умения выполнять выделение целой части, выполнять преобразования графиков.

В **общеобразовательных** классах на уроке и дома достаточно решить упражнения **583** (в качестве повторения и подготовки к новому материалу), **584** (в качестве подготовки к выполнению одного из заданий упражнения **587**). В классах **углублённого** уровня желательно рассмотреть примеры решения всех упражнений и задания 1 из дидактических материалов. В качестве дополнительного материала использовать дидактические материалы № 3.

Материал параграфа является лишь ознакомительным для учащихся, и учитель вправе выбрать уровень изучения данной темы, ориентируясь на возможности класса.

§ 4. Равносильные уравнения и неравенства (2/3 ч)

Цели изучения параграфа — введение понятий равносильных уравнений, неравенств, систем уравнений, а также уравнения-следствия; формирование у учащихся потребности при решении уравнений выполнять лишь те преобразования, которые не приводят к потере корней, а при решении неравенств осуществлять лишь равносильные преобразования; развитие умений самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать свою деятельность.

Материал этого параграфа является одним из самых важных в курсе алгебры как для формирования теоретической грамотности учащихся, так и для успешной их практической деятельности при решении самых разнообразных уравнений, неравенств и их систем.

Теоретический материал параграфа следует рассматривать неотрывно от практических иллюстраций вводимых понятий и представлений. К 10 классу у большинства учащихся уже сформированы зрелые аналитико-синтетические мыслительные умения, поэтому полезно после рассмотрения текста параграфа сделать обобщённые выводы об известных учащимся равносильных преобразованиях уравнений и неравенств, активно привлекая к этой работе самих учащихся. В классах **углублённого** уровня эту работу можно провести устно, подчеркнув, что все уравнения, не имеющие корней, между собой равносильны.

В **общеобразовательном** классе обобщение можно провести в ходе заполнения, например, следующей таблицы:

Преобразования, приводящие к равносильному уравнению	**Примеры равносильных**	
	уравнений	**неравенств**
Перенос членов уравнения (неравенства) из одной части в другую с противоположными знаками	$4x - 3 = 2x + 5$ и $4x - 2x = 5 + 3$	$x^2 > 1$ и $x^2 - 1 > 0$
Умножение или деление обеих частей уравнения (неравенства) на одно и то же число, отличное от нуля, или на выражение, имеющее постоянный знак при всех действительных значениях неизвестного	$\frac{x^2}{4} = 1$ и $x^2 = 4$	$2x > 6$ и $x > 3$; $-2x > 6$ и $x < -3$
	$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$ и $x^2 - 4 = 0$	$\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ и $x - 3 < 0$
Замена части уравнения (неравенства) тождественно равным ему выражением	$x^2 + 3x = 0$ и $x(x + 3) = 0$	$x^2 + 2x + 2 > 0$ и $(x + 1)^2 + 1 > 0$; $\sqrt{x^2} - 3 < 2$ и $\lvert x\rvert - 3 < 2$

Понятие уравнения-следствия вводится после рассмотрения уравнения (например, $\sqrt{x} = x - 2$), в ходе решения которого обе его части возводятся в квадрат и в результате получается уравнение ($x^2 - 5x + 4 = 0$), имеющее, помимо корня исходного уравнения ($x = 4$), ещё один корень ($x = 1$), который называют посторонним. В параграфе рассматриваются два вида преобразований уравнений, в результате которых могут появиться посторонние корни: возведение в квадрат обеих частей уравнения и умножение их на выражение, содержащее неизвестное. Учитель должен быть готов к вопросу учащихся о том, всегда ли эти преобразования приводят к приобретению посторонних корней. Можно привести примеры уравнений, при решении которых этого не происходит.

Например, если обе части уравнения $\frac{x-3}{x-2} = 0$ умножить на $x - 2$, получится уравнение $x - 3 = 0$, равносильное исходному; если обе части уравнения $\sqrt{x-1} = 2$ возвести в квадрат, то полученное уравнение $x - 1 = 4$ также будет равносильно исходному. Однако возможность появления посторонних корней при выполнении преобразований этих двух видов обязывает выполнять проверку полученных корней.

Вообще учащиеся должны понять, что любое уравнение B, равносильное уравнению A, можно считать и следствием уравнения A. Тогда особое практическое значение приобретает содержание абзаца на с. 199 учебника: «При решении уравнений главное — не потерять корни, а наличие посторонних корней можно устранить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего».

Действительно, в реальном учебном процессе в основном только сильные учащиеся всегда могут контролировать наличие или отсутствие в цепочке преобразований уравнений таких видов преобразований, которые могут привести к приобретению посторонних корней. Обычно эти учащиеся уверенно могут говорить о том, что, например, все сделанные ими преобразования были равносильными, поэтому все полученные корни являются корнями исходного уравнения. Большинство же учащихся при решении уравнений, осуществляя переходы к уравнениям-следствиям (в частности, к равносильным уравнениям), следят за тем, чтобы не произошла потеря корня, а после нахождения корней последнего в цепочке преобразований уравнения делают проверку найденных корней, подставляя их в первое (исходное) уравнение.

Использовать знаки $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ при решении школьных упражнений не рекомендуется: как показала практика, нередко учащиеся, не задумываясь, например, ставят в цепочке преобразований после каждого уравнения знак $\Leftrightarrow$ и в итоге не делают проверку полученных корней, зачастую включая в ответ и посторонние корни. Лучше приучать школьников в цепочке преобразований уравнения фиксировать (например, с помощью восклицательного знака) то место, где было выполнено преобразование, которое могло привести к появлению посторонних корней, с тем чтобы не забывать сделать проверку всех найденных корней.

При решении неравенств следует подчеркнуть, что в большинстве случаев из-за невозможности проверки всех решений неравенства, полученного в результате преобразований исходного неравенства, необходимо пользоваться только равносильными преобразованиями (чтобы быть уверенным, что все решения последнего в цепочке преобразований неравенства или системы неравенств (системы высказываний) являются всеми решениями исходного неравенства).

В классе **углублённого** уровня желательно показать замену неравенства равносильной ему системой (например, неравенство $\frac{x-7}{\sqrt{x+2}} \leqslant 0$ равносильно системе $\begin{cases} x+2>0, \\ x-7 \leqslant 0 \end{cases}$). Однако следует помнить, что аналогичные замены будут рассмотрены в учебнике при решении иррациональных и логарифмических неравенств.

Упражнения **588**, **589**, **591** выполняются по схеме: 1) решаются оба уравнения (неравенства); 2) сравниваются их множества корней (решений); 3) делается вывод о равносильности или неравносильности уравнений (неравенств) в упражнениях **588**, **589** или устанавливаются уравнения-следствия в упражнении **591**.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4, п. 1	587, 589, 591, 592	589 (3), 591 (2), 592 (3)	596—598
2	§ 4, пп. 2, 3	589, 593, 590; ДМ § 8 № 4, 7, 10—12	Решить неравенства $x^4 - x \geqslant 0$, $\frac{x^2-4}{x+1} \leqslant 0$	596—598

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4, п. 1	587, 588, 595, 596; ДМ № 1	594, 597	600
2	§ 4, пп. 2, 3	589, 593, 590; ДМ № 4, 5	Решить неравенство $\frac{x^2+2x-15}{x^2-x-6} \geqslant 0$	601
3	§ 4	591, 592, 598; ДМ № 2, 6	Решить систему $\begin{cases} \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=3\frac{1}{3}, \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$	599; ДМ № 7

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь при решении уравнений выполнять преобразования, приводящие к уравнениям-следствиям, и не забывать делать проверку полученных корней; понимать, что при решении неравенства можно выполнять только равносильные преобразования; знать, что следует избегать деления обеих частей уравнения (неравенства) на выражение с неизвестным; знать определение равносильности систем уравнений; уметь выполнять упражнения типа **588—593**. Учащиеся классов **углублённого** уровня должны знать, какие преобразования уравнений (неравенств), систем уравнений приводят к равносильным уравнениям (неравенствам), системам, а какие преобразования уравнений приводят к уравнениям-следствиям; уметь выполнять упражнения, такие, как **589, 590, 594, 596**.

Решение упражнений

599. 1) $(x^3-3x^2+2x-6 > 2x^3-x^2+4x-2) \Leftrightarrow (x^3+2x^2+2x+4 < 0) \Leftrightarrow ((x+2)(x^2+2) < 0) \Leftrightarrow (x < -2)$.

§ 5. Иррациональные уравнения (2/3 ч)

Цели изучения параграфа — обучение решению иррациональных уравнений возведением обеих его частей в одну и ту же натуральную степень; ознакомление с приёмами решения систем, содержащих иррациональные уравнения; формирование навыков познавательной рефлексии как оснований для осознания границ своего знания и незнания.

Начать первый урок можно с устного выполнения следующих заданий:

1. Среди пар уравнений найти пары равносильных:

1) $5x + 10 = 0$ и $x + 2 = 0$; 2) $x = 5$ и $x^2 = 25$;

3) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$ и $|x - 1| = 3$; 4) $\sqrt{x} = -4$ и $x^2 + 1 = 0$.

2. Определить, какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $x^2 = 9$ и $x = -3$; 2) $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$;

3) $\frac{x^2 - 3x}{x} = 0$ и $x^2 - 3x = 0$; 4) $\frac{x - 7}{x} = 0$ и $x - 7 = 0$.

Рассматривая задание **2 (4)** из предложенных выше, учащиеся должны понять, что так как уравнения $\frac{x - 7}{x} = 0$ и $x - 7 = 0$ равносильны (оба имеют корень $x = 7$), то каждое из них является следствием другого.

После повторения понятия уравнения-следствия можно переходить к изучению материала параграфа, делая акцент на практическом применении сформулированного на с. 205 учебника свойства иррациональных уравнений.

Говоря о том, что обе части уравнения можно неоднократно возводить в одну и ту же натуральную степень (в задаче **1** это проделано дважды), следует отметить, что лучше стремиться к нахождению наиболее рациональных способов решения любых уравнений. Так, например, решая уравнения в упражнениях **605** (2) и **607** (2), можно до возведения обеих частей в квадрат выполнить равносильное преобразование: сгруппировать члены уравнения так, чтобы не содержащие радикалов члены были в одной части уравнения, а единственный радикал — в другой. Это даст возможность обойтись только одним возведением обеих частей уравнения в квадрат. Такой приём показан в задаче **4**, но в более усложнённом виде: здесь «уединение» радикала приводит к уравнению, где левая и правая части неотрицательны, а возведение в квадрат приводит к равносильному уравнению. При решении той же задачи вводится новое неизвестное. Этот метод применяется и при решении задач **5** и **6**, которые рассчитаны на учащихся классов **углублённого** уровня, так же как и задача **4**. Однако задачу **4** при наличии времени целесообразно разобрать и в **общеобразовательных** классах.

Прежде чем переходить к решению задачи **7**, целесообразно повторить материал предыдущего параграфа (п. 3), с тем чтобы учащиеся осознавали, в каком случае они имеют дело с равносильными преобразованиями системы.

При рассмотрении задачи **10** текста параграфа можно поговорить о том, что так называемый графический метод решения уравнений фактически даёт лишь возможность высказать предположение о количестве корней уравнения, а также в ряде случаев найти их приближённые значения. Для того чтобы убедиться, не является ли найденное таким способом приближённое значение x точным значением корня уравнения, нужно сделать проверку: найденное число подставить вместо x в исходное уравнение.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 5, задачи 1—3	602—605, 607, 612	605 (1, 3)	ДМ § 9 № 13, 14; задача 4
2	§ 5, задачи 7, 9	609, 610, 606, 614; ДМ § 9 № 16, 18	610 (3), 606 (1)	615, 616 (1)

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 5, задачи 1—3	603—605, 608, 612, 613, 615 (1, 2)	608 (3), 612 (3), 613 (1)	618
2	§ 5, задачи 4—6	609—611, 615 (3, 4), 616	610 (2), 616 (1)	619
3	§ 5, задачи 7—9	606, 617, 614; ДМ № 10	614 (2, 3)	622; ДМ № 9

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь решать иррациональные уравнения и системы уравнений, аналогичные упражнениям **603—607**. Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь решать упражнения типа **609—613, 615, 617** (1).

Решение упражнений

618. 1) Пусть $\sqrt{6x-9}=t$, тогда $x=\dfrac{t^2+9}{6}$ и уравнение примет вид $\sqrt{\dfrac{t^2+9}{6}+t}+\sqrt{\dfrac{t^2+9}{6}-t}=\sqrt{6}$. Это уравнение равносильно уравнениям $\sqrt{t^2+9+6t}+\sqrt{t^2+9-6t}=6$, $|t+3|+|t-3|=6$. Так как $t>0$, то $t+3>0$ и $t+3+t-3=6$, $t=3$, если $t\geqslant 3$; при $0<t<3$ $t+3-t+3=6$ — верно. $\sqrt{6x-9}=3$, $x=3$.

619. Область определения уравнения $-3\leqslant x<0$, $0<x\leqslant 3$. Пусть $\sqrt{3+x}=t$, тогда $x=t^2-3$ и исходное уравнение примет вид $\dfrac{t+\sqrt{6-t^2}}{t-\sqrt{6-t^2}}=2$, откуда $t+\sqrt{6-t^2}=2t-2\sqrt{6-t^2}$, $3\sqrt{6-t^2}=t$; $10t^2-54=0$, $t^2=\dfrac{54}{10}$, $x=\dfrac{54}{10}-3$, $x=\dfrac{12}{5}$ принадлежит области определения.

622. 1) Уравнение может иметь корни, удовлетворяющие условию $x\geqslant 2$ при $a\geqslant 0$. При этих условиях уравнение равносильно уравнению $x^2-x-2-a^2=0$, откуда $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+4(2+a^2)}}{2}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{1+4(2+a^2)}}{2}$. Корень x_1 не удовлетворяет условию $x\geqslant 2$, а x_2 удовлетворяет ему. Итак, при $a\geqslant 0$ уравнение имеет корень $x_1=\dfrac{1+\sqrt{1+4(2+a^2)}}{2}$; при $a<0$ корней нет.

2) Считая, что $x\geqslant 0$, $a\geqslant 1$, заменим данное уравнение на ему равносильное $x^2+2x-(a-1)^2=0$, откуда $x_1=-1-\sqrt{1+(a-1)^2}$, $x_2=-1+\sqrt{1+(a-1)^2}$, где $x_1<x_2$. При $a\geqslant 1$ уравнение имеет корень $x_2=-1+\sqrt{a^2-2a+2}$; при $a<1$ корней нет.

§ 6. Иррациональные неравенства (0/1 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление с примерами решения иррациональных неравенств; развитие умений самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности.

В **общеобразовательных** классах, где изучение этого материала не обозначено стандартом, параграф рассматривается лишь в случае наличия дополнительного времени. Учитель сам выбирает степень глубины усвоения материала и максимальный уровень сложности решаемых неравенств. При желании учащиеся могут самостоятельно познакомиться с решениями задач **1—4**, попробовать выполнить некоторые из упражнений **623—627** и обсудить решения в классе на уроке обобщения и систематизации знаний. В классах **углублённого** уровня материал этого параграфа рассматривается с целью введения понятия иррационального неравенства, а также демонстрации применения следствия 3 о возведении в степень неравенств с положительными членами к решению иррациональных неравенств.

В классе **углублённого** уровня можно после рассмотрения решений задач **1—8** параграфа вывести учащихся на теоретическое обобщение решения иррациональных неравенств, содержащих единственный корень второй степени (с. 216 учебника).

1) Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

2) Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ заменяется решением двух систем (совокупностью двух систем):

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Упражнения по решению иррациональных неравенств **623—631** при желании и возможности учащихся можно дополнить рассмотрением задач **9** и **10** параграфа, в котором показаны разные методы и приёмы решения иррациональных неравенств.

Решение упражнений

632. 1) Область определения неравенства: $x < 1$, $x > 2$. При $x + 3 < 0$, $x < -3$ неравенство верно для всех x из области определения, $x < 1$. При $x + 3 > 0$, $x > -3$ $x^2 - 3x + 2 > (x + 3)^2$, $9x < -7$, $x < -\frac{7}{9}$. Ответ. $x < -\frac{7}{9}$.

634. 1) При $a \leqslant 0$ неравенство не имеет решений, так как его левая часть неотрицательна, а неравенство является строгим. Пусть $a > 0$, тогда при $x \geqslant 1$ неравенство равносильно неравенству $x - 1 < a^2$, откуда $x < 1 + a^2$. Итак, $1 \leqslant x < 1 + a^2$.

Ответ. $1 \leqslant x < 1 + a^2$ при $a > 0$; при $a < 0$ решений нет.

2) Построим эскизы графиков функций $y = \sqrt{2ax - x^2}$ и $y = a - x$ (рис. 7), где $a < 0$ (при $a = 0$ неравенство имеет единственное решение $x = 0$). Эти графики имеют одну общую точку A с абсциссой x_0, где x_0 — корень уравнения $2ax - x^2 = (a - x)^2$, такой, что $2a < x_0 < a$. Находим корни уравнения $x_1 = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $x_2 = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

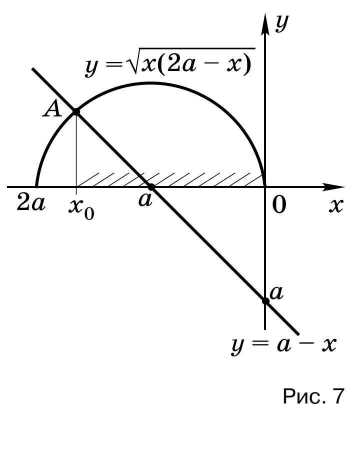


Рис. 7

Тогда $x_0 = x_2$, а множество решений неравенства — отрезок $[x_0;\ 0]$, т. е. $a\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant x \leqslant 0$.

652. 1) Область определения неравенства находится из условия $19x - x^2 - 78 > 0$, $x^2 - 19x + 78 < 0$, $(x-13)(x-6) < 0$, откуда $6 < x < 13$. Поэтому неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x^2 - 13x + 40 \leqslant 0, \\ 6 < x < 13. \end{cases}$ Решение первого неравенства — множество $[5;\ 8]$, а пересечение (общая часть) множеств $[5;\ 8]$ и $(6;\ 13)$ — полуинтервал $(6;\ 8]$, т. е. $6 < x \leqslant 8$.

2) I способ. Исходное неравенство равносильно неравенству $\frac{2\sqrt{2x^2+7x-4} - x - 4}{x+4} < 0$, которое равносильно следующим двум системам (совокупности систем):

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x^2+7x-4} < x+4, \\ x > -4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sqrt{2x^2+7x-4} > x+4, \\ x < -4. \end{cases}$$

Множество допустимых значений x для этих систем определяется условием $2x^2 + 7x - 4 \geqslant 0$, откуда $x \leqslant -4$, $x \geqslant \frac{1}{2}$. При $x > -4$ обе части первого неравенства первой системы положительны, а сама система равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} 4(2x^2+7x-4) < (x+4)^2, \\ x > -4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 8(x+4)\left(x-\frac{1}{2}\right) < (x+4)^2, \\ x > -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+4)(7x-8) < 0, \\ x > -4, \end{cases}$$

откуда $-4 < x < \frac{8}{7}$. С учётом О. О. Н. получаем $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{8}{7}$.

Значения $x < -4$ удовлетворяют первому неравенству второй системы, так как при $x < -4$ левая часть этого неравенства положительна, а правая — отрицательна. Следовательно, множество решений второй системы — промежуток $x < -4$.

II способ. Областью определения неравенства $\frac{2\sqrt{2x^2+7x-4} - x - 4}{x+4} < 0$ (1) является совокупность промежутков $x < -4$, $x \geqslant \frac{1}{2}$.

а) Если $x < -4$, то неравенство (1) является верным, так как $x + 4 < 0$, а $2\sqrt{2x^2+7x-4} > x+4$ (левая часть этого неравенства при $x < -4$ положительна, а правая — отрицательна).

б) Пусть $x \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда $x + 4 > 0$, а функции $y = 2\sqrt{2x^2 + 7x - 4}$ и $y = x + 4$ являются возрастающими при $x \geqslant \frac{1}{2}$ и имеют единственную общую точку A (рис. 8), абсцисса x_0 которой — положительный корень уравнения $4(2x^2 + 7x - 4) = (x + 4)^2$, или $8\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4) = (x + 4)^2$, откуда $x_0 = \frac{8}{7}$.

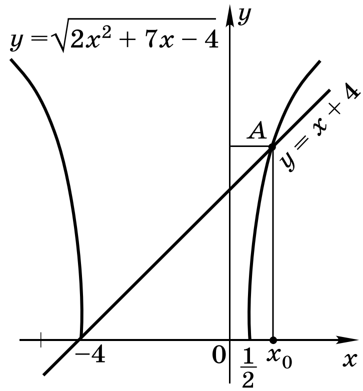


Рис. 8

При $x < \frac{8}{7}$ график функции $y = x + 4$ лежит выше, а при $x > \frac{8}{7}$ — ниже графика функции $y = 2\sqrt{2x^2 + 7x - 4}$. Поэтому при $x \geqslant \frac{1}{2}$ решением неравенства являются все числа из промежутка $\left[\frac{1}{2}; \frac{8}{7}\right)$, и только эти числа.

Итак, $x < -4$, $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{8}{7}$.

3) Область определения неравенства $\sqrt{3 + x} > |x - 3|$ — множество $x > -3$, при котором неравенство равносильно неравенству $x + 3 > x^2 - 6x + 9$, $x^2 - 7x + 6 < 0$, откуда $1 < x < 6$.

Уроки обобщения и систематизации знаний (2/1 ч)

Важно напомнить учащимся о том, как расширились их знания о степени и какими практическими действиями они овладели, начиная с момента изучения понятия степени с действительным показателем и заканчивая рассмотрением степенной функции и её свойств.

На этих уроках важно показать применение знаний степенной функции к решению прикладных задач (задачи **656—658**). Учащимся можно предложить провести исследовательскую работу по применению свойств элементарных функций в разных отраслях науки, техники, реальной жизни. Распространить эти исследования на последующие функции (показательную, логарифмическую), а затем по результатам провести конференцию. Готовиться к этой конференции учащиеся могут как по одному, так и группами. Результатом исследования может быть и сообщение о достижениях науки, и составленные задачники прикладных задач, и результаты собственных исследований или наблюдений.

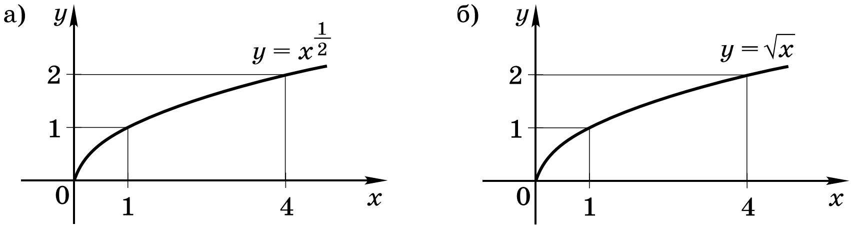


Рис. 9

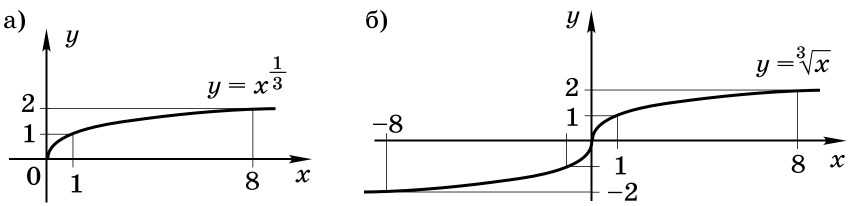


Рис. 10

Свойства степенной функции при различных показателях повторяются с помощью обобщения свойств ранее известных функций (материал § 1). При этом активно используются эскизы графиков функций, выполняются упражнения, аналогичные **635**, **636**, **643**.

Следует провести дифференциацию свойств степенных функций с дробными показателями и функций, в записи которых используется знак корня. Так, например, функции $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = \sqrt{x}$ имеют одинаковые свойства и графики (рис. 9), чего нельзя сказать о функциях $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 10). В результате этой работы нужно выполнить упражнения типа **638**.

Хотя понятия обратимой функции и обратной функции у большинства учащихся на уровне представлений не вызывают затруднений, не следует всё же со всеми учащимися отрабатывать эти понятия при выполнении упражнений типа **639**, **640**.

Значительное внимание на этих уроках необходимо уделить понятию равносильности (уравнений и неравенств), понятию уравнения-следствия (решая упражнения типа **641**) и алгоритму практических действий при решении различных уравнений типа **642**, **646** и неравенств типа **625**, **651**.

Знание поведения графика и свойств степенной функции при различных показателях степени позволяет учащимся определять количество корней достаточно сложных уравнений. Например, выполняя в одной системе координат эскизы графиков функций (левой и правой частей уравнения), учащиеся понимают, что

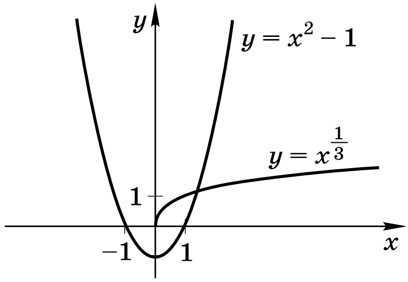


Рис. 11

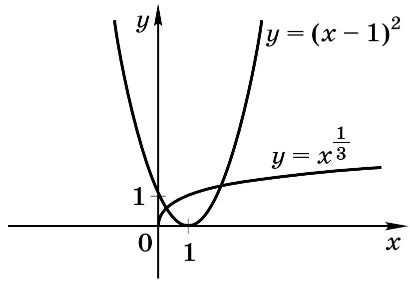


Рис. 12

уравнение $x^{\frac{1}{3}} = x^2 - 1$ имеет один корень (рис. 11), а уравнение $x^{\frac{1}{3}} = (x-1)^2$ — два корня (рис. 12).

Учащимся классов **углублённого** уровня можно предложить упражнения **650—655.**

На этих уроках можно выполнить самостоятельную работу с проверкой в классе, в которой нужно решить иррациональные уравнения, а если изучался § 6, то включить неравенства.

1. $\sqrt{x+11} + 1 = x \quad [\sqrt{x+10} + 2 = x]$.

2. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1 \quad [\sqrt{3x+4} - \sqrt{x} = 2]$.

3. $\sqrt{x-2} < 5 \quad [\sqrt{x-3} < 2]$.

4. $\sqrt{x-2} \leqslant x - 2 \quad [\sqrt{x+4} \leqslant x + 4]$.

Учащимся **общеобразовательных** классов предложить выполнить *тест 3* (задания 1—9, 17, 18, 22, 23). Анализ результатов этих работ послужит допуском к контрольной работе.

В результате этих уроков **все** учащиеся должны уверенно выполнять задания, аналогичные предложенным в рубрике «Проверь себя!».

Решение упражнений

650. 1) Пусть $\sqrt[4]{x+4} = t$, тогда $\sqrt{x+4} = t^2$ и уравнение примет вид $t^2 - 3t + 2 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Следовательно, $\sqrt{x+4} = 4$ или $\sqrt{x+4} = 1$, $x_1 = 12$, $x_2 = -3$. Так как $x \geqslant -4$ в этом уравнении, то оба корня являются решением.

652. 4) Область определения неравенства $-7 \leqslant x \leqslant 3$. Обе части неравенства положительны, следовательно, при возведении в квадрат получим равносильное неравенство $2\sqrt{(7+x)(10+x)} >$ $> -3x - 14$. Это неравенство верно при всех x из области определения, если $-3x-14<0$, $x>-\frac{14}{3}$, т. е. при $-\frac{14}{3}<x\leqslant 3$. Если $-3x-14\geqslant 0$, $x\leqslant -\frac{14}{3}$, то возведём в квадрат и получим неравенство $-5x^2-16x+84>0$. Его решение $-6<x<-\frac{14}{3}$. Следовательно, решение исходного неравенства $-6<x\leqslant 3$.

653. 1) Пусть $\begin{cases} x+y=u, \\ \sqrt{xy}=v, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} (x+y)^2=u^2, \\ xy=v^2, \end{cases}$ $x^2+y^2=u^2-2v^2$.

Следовательно, система примет вид

$$\begin{cases} u^2-2v^2+v^2=84, \\ u+v=14; \end{cases} \quad \begin{cases} u^2-v^2=84, \\ u+v=14; \end{cases} \quad \begin{cases} u-v=6, \\ u+v=14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=10, \\ v=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=10, \\ \sqrt{xy}=4. \end{cases}$$

Выполнив подстановку $x=10-y$, получим $\begin{cases} x=10-y, \\ \sqrt{(10-y)y}=4. \end{cases}$

Решение второго уравнения $y_1=8$, $y_2=2$. Значит, $x_1=2$, $x_2=8$.

Ответ. (2; 8), (8; 2).

655. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}<a$. Область определения неравенства $x\geqslant 6$, следовательно, при $a>2$ и $x\geqslant 6$ $(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6})^2<a^2$.

$$2x-8+2\sqrt{(x-2)(x-6)}<a^2, \quad 2\sqrt{x^2-8x+12}<a^2-2x-8,$$

$$4(x^2-8x+12)<(a^2-2x+8)^2,$$

$$4x^2-32x+48<a^4+4x^2+64-4a^2x+16a^2-32x,$$

$4a^2x-a^4-16a^2-16<0$, $6\leqslant x<\frac{a^4+16a^2+16}{4a^2}$. При $a\leqslant 2$ решений нет.

Контрольная работа № 4

Базовый уровень

1. Найти область определения функции
$y=\sqrt[4]{2+0{,}3x}$ $[y=\sqrt[3]{3x-7}]$.

2. Изобразить эскиз графика функции $y=x^7$ $[y=x^6]$ и перечислить её основные свойства. Пользуясь свойствами этой функции:

1) сравнить с единицей $(0{,}95)^7$ $[(1{,}001)^6]$;

2) сравнить $(-2\sqrt{3})^7$ и $(-3\sqrt{2})^7$ $[(-3\sqrt{5})^6$ и $(-5\sqrt{3})^6]$.

3. Решить уравнение:

1) $\sqrt[3]{x+2}=3$ $[\sqrt[5]{x+12}=2]$;

2) $\sqrt{1-x}=x+1$ $[\sqrt{x+1}=1-x]$;

3) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}=1$ $[\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+8}=1]$.

4. Установить, равносильны ли неравенства $\frac{x-7}{1+x^2}>0$ и $(7-x)(2+x^2)<0$ $\left[(3-x)(|x|+5)>0 \text{ и } \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2}}<0\right]$.

5. Найти функцию, обратную к функции $y=\frac{3}{x-3}$ $\left[y=\frac{2}{x+2}\right]$. Указать её область определения и множество значений. Является ли эта функция ограниченной?

Углублённый уровень

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{4-x^2}$ $[y=\sqrt{x+2}+\sqrt{5-4x-x^2}]$.

2. Изобразить эскиз графика функции $y=(x-1)^7+2$ $[y=(x+1)^4-3]$ и перечислить её основные свойства.

3. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+2}+1=0$ $[\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=-2]$;

2) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x^2+5}}=3$ $\left[\sqrt{11-\sqrt[3]{x^2+7}}=3\right]$;

3) $5-x-\sqrt{x+7}=0$ $[2-x-\sqrt{x+10}=0]$;

4) $\sqrt{3x^2+5x+1}+\sqrt{3x^2+5x+8}=7$

$[x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0]$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=3,\\ xy=5-x+y\end{cases} \quad \left[\begin{cases}x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{20}{x+y},\\ x^2+y^2=34\end{cases}\right].$$

5. Решить неравенство

$\sqrt{x^2+2x-8}>x-4$ $[\sqrt{8+2x-x^2}>6-3x]$.

Глава VI Показательная функция

В этой главе изучаются свойства показательной функции и их применение к решению показательных уравнений, неравенств и их систем; рассматриваются приложения показательной функции к описанию различных физических процессов.

В предыдущей главе была изучена степенная функция, с помощью которой могут быть описаны многие физические процессы, для которых характерно возрастание или убывание. Например, масса шара описывается степенной функцией его радиуса $m(R)=\frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Однако в физике и технике существуют процессы, в которых рост или убывание идёт существенно быстрее, чем в тех, которые описываются степенной функцией. Эти процессы описываются показательной функцией. Например, радиоактивный распад вещества описывается показательной функцией $m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Рост или убывание показательной функции называют *экспоненциальным*.

В 11 классе учащиеся узнают, что скорость возрастания (убывания) любой функции определяется её производной. Например, скорость возрастания линейной функции постоянна, квадратичной функции линейна.

Свойства показательной функции $y=a^x$ полностью следуют из свойств степени с действительным показателем. Например, возрастание функции $y=a^x$, если $a>1$, следует из свойства степени: «Если $x_1<x_2$, то $a^{x_1}<a^{x_2}$ при $a>1$».

Эскиз графика показательной функции легко строится с помощью её основных свойств: область определения — вся числовая прямая; множество значений — положительные числа; возрастает (или убывает); принимает значение 1 при $x=0$. Для более точного построения графика функции полезно составлять таблицу её значений при некоторых значениях x.

Решение простейших показательных уравнений $a^x=a^b$, где $a>0$, $a\neq 1$, основано на свойстве степени: «Если $a^{x_1}=a^{x_2}$, то $x_1=x_2$». Например, решая уравнение $2^x=8$, получаем $2^x=2^3$, откуда $x=3$. То, что решение уравнения закончено (оно имеет единственный корень $x=3$), следует из свойства монотонности показательной функции: «Если $x<3$, то $2^x<2^3$, а если $x>3$, то $2^x>2^3$». Попутно получается, что решениями неравенства $2^x<8$ является промежуток $x<3$, а неравенства $2^x>2^3$ — промежуток $x>3$.

Решение большинства показательных уравнений и неравенств сводится к решению простейших.

Решение уравнения $a^x=b$ и неравенств $a^x<b$ и $a^x>b$ нередко осуществляется логарифмированием; оно будет рассмотрено в следующей главе. Например, решая уравнение $2^x = 3$, находим $x = \log_2 3$; решая неравенство $2^x > 3$, находим $x > \log_2 3$ (по свойству возрастания логарифмической функции с основанием 2).

Так как в ходе решения предлагаемых в учебнике показательных уравнений равносильность не нарушается, то проверка найденных корней необязательна. В этой главе системы уравнений и неравенств решаются с помощью равносильных преобразований: подстановкой, сложением или умножением, заменой переменных и т. д.

Предметные цели изучения главы:
- введение понятия показательной функции; изучение свойств и построение графика показательной функции;
- обучение решению показательных уравнений (неравенств, систем) аналитическими и графическими способами.

Метапредметные цели изучения главы:
- моделирование явлений и процессов, протекающих по экспоненциальной зависимости, с помощью формул и графиков показательной функции;
- исследование реальных процессов и явлений, протекающих по законам показательной зависимости, с помощью свойств показательной функции.

Личностные цели изучения главы:
- развитие аналитических способностей и интуиции (в ходе наблюдения за поведением экспоненциальных зависимостей);
- развитие исследовательских умений, необходимых в освоении будущих творческих профессий;
- совершенствование культуры вычислительных и графических действий.

В результате изучения главы **все** учащиеся должны знать определение, свойства показательной функции; уметь строить её график и выполнять упражнения типа **726—735**, **743** и из рубрики «Проверь себя!». Учащиеся, изучающие математику на **углублённом** уровне, должны дополнительно развивать вычислительные навыки и графическую культуру при выполнении упражнений типа **668**, **711**, учиться решать прикладные задачи типа **674—678**.

§ 1. Показательная функция, её свойства и график (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятия показательной функции; демонстрация применения знаний о свойствах показательной функции к решению прикладных задач.

Для обоснования свойств показательной функции необходимо знание материала главы IV учебника о свойствах степени. Поэтому повторение этих свойств, компактно сформулированных в начале параграфа, можно провести в ходе устного выполнения следующих упражнений:

1. Представить в виде степени числа $a > 0$:

1) $a^3 a^{-5} a^{\frac{1}{2}}$; 2) $a^{3\sqrt{2}} : a^{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} \cdot a}{a^{\frac{2}{3}}}$; 4) $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; 5) $(a^6)^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-2}$.

2. Найти значение выражения: 1) $\dfrac{(2\pi)^7}{2^8\pi^7}$; 2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot 2^{-4} \cdot 3^5$.

3. Сравнить с единицей: 1) $1{,}3^{\sqrt{3}}$; 2) $0{,}7^{-5}$.

4. Сравнить: 1) $0{,}9^7$ и $0{,}9^6$; 2) $\pi^{\frac{1}{2}}$ и $\pi^{\frac{1}{3}}$.

Полезно повторить с учащимися выявление свойств функции по её графику. С этой целью можно, например, используя график функции на рисунке 13, найти:

1) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю;

2) координаты точки пересечения графика с осью ординат;

3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные (отрицательные) значения;

4) промежутки возрастания (убывания) функции.

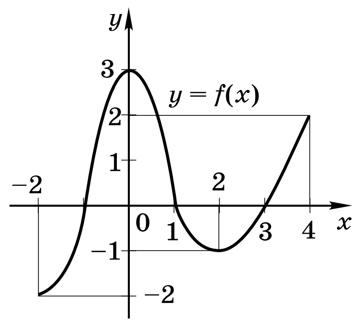


Рис. 13

Введение понятия показательной функции, обоснование её свойств, построение графиков и исследование поведения графиков, их особые точки рассматриваются в последовательности, предложенной в учебнике. После этого решается задача **1**.

Разбор решения этой задачи позволит учащимся выполнить упражнения **664** и **665** без построения графиков функции.

Задачу **2** желательно рассмотреть и с учащимися **общеобразовательных** классов. Они могут не производить вычисления на микрокалькуляторах, а принять на веру расчёты, предложенные в учебнике.

Задачу **3**, носящую исследовательско-прикладной характер, рекомендуется внимательно рассмотреть с учащимися, углублённо изучающими математику. Они должны использовать микрокалькуляторы для выполнения расчётов при решении задачи **2**, а также при выполнении упражнений **675—678**.

При желании учитель в классах **углублённого** уровня может давать учащимся задание по написанию программы вычислений значений выражений на микрокалькуляторе. Так, например, для решения задачи **2** вычисления на инженерном микрокалькуляторе МК-51 можно провести по следующей программе:

365 $\boxed{\div}$ 14 $\boxed{=}$ $\boxed{x \to \Pi}$ 0,5 $\boxed{y^x}$ $\boxed{\Pi \to x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 8 $\boxed{=}$.

С учащимися **углублённого** уровня учитель отрабатывает умение строить графики функций с помощью сдвигов вдоль координатных осей (упр. **668**). Понятие $|f(x)|$ закрепляется при построении графиков функций (упр. **673**) и выявлении различных свойств функций (упр. **669, 672**).

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 1 до задачи 1	659—663	661 (3), 662 (3)	668—671
2	§ 1: задача 1, формула $m(t)$ и другие примеры явлений, протекающих по законам показательной функции (последние четыре абзаца параграфа)	664—667	665 (3), 667 (3)	

Классы углублённого уровня

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	Теоретическая часть § 1, задача 1	659—667	661 (3), 662 (3), 664 (3), 666 (3), 667 (3)	670, 671; ДМ № 1
2	От задачи 2 до конца параграфа	668, 669, 672, 678, 674—677	669 (3), 676	673; ДМ № 7, 8

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны строить по точкам графики конкретных показательных функций, а также строить эскиз графика показательной функции $y = a^x$ в зависимости от значения основания a и пользоваться свойствами показательной функции при выполнении упражнений типа **662—667**. Учащиеся **углублённого** уровня должны строить графики функций сдвигом вдоль координатных осей (упражнения типа **668**) и решать прикладные задачи типа **674**.

Решение упражнений

666. 1) $0{,}3^{-x}=\left(\frac{10}{3}\right)^x=\left(3\frac{1}{3}\right)^x$; так как $3\frac{1}{3}>1$, то функция $y=\left(3\frac{1}{3}\right)^x$ — возрастающая.

671. $y=2^x$ — возрастающая функция, поэтому

$$y_{\max}=y(2)=4,\ y_{\min}=y(-1)=\frac{1}{2}.$$

672. 1) $y=2^{|x|}$ — чётная функция, возрастает на отрезке [0; 1] и убывает на отрезке [−1; 0].

$y_{\max}=y(1)=y(-1)=2,\quad y_{\min}=y(0)=1$ (см. рис. 14).

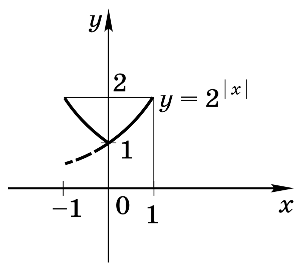


Рис. 14

673. 1) См. рис. 15, *а*;

2) см. рис. 15, *б*;

3) см. рис. 15, *в*;

4) см. рис. 15, *г*.

§ 2. Показательные уравнения (2/3 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — овладение основными способами решения показательных уравнений.

Так как в основе решений показательных уравнений и неравенств лежит знание свойств степени и свойств показательной функции, полезно в начале каждого урока при изучении материала этого и следующего параграфов организовывать повторение свойств степени. Делать это можно, например, с помощью упражнений следующего характера:

1. Выяснить, возрастающей или убывающей является функция: 1) $y=7{,}3^x$; 2) $y=0{,}6^x$; 3) $y=0{,}2^{-x}$; 4) $y=\left(\frac{5}{3}\right)^{-x}$.

З а м е ч а н и е. В задании **1** (3, 4) учащиеся должны до ответа на вопрос представить функцию в следующем виде:

3) $y=\left(\frac{1}{0{,}2}\right)^x$, т. е. $y=5^x$; 4) $y=\left(\frac{3}{5}\right)^x$.

2. Записать данную функцию в виде показательной:

1) $y=3^x\cdot 4^x$; 2) $y=\frac{6^x}{2^x}$; 3) $y=5^{2x}$; 4) $y=\frac{4^{3x}}{2^{5x}}$.

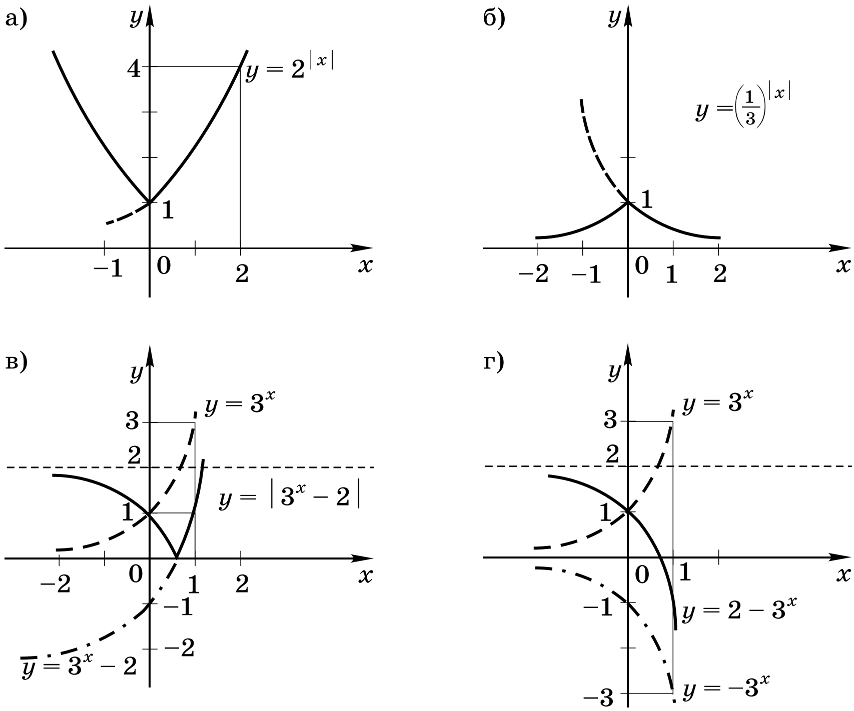


Рис. 15

3. Сравнить:

1) $\left(\frac{7}{4}\right)^5$ и $\left(\frac{7}{4}\right)^{5,1}$;　2) $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{-7}$;

3) $(\pi - 1)^{-2}$ и $(\pi - 1)^{-3}$;　4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$.

4. Представить числа:

1) 1; 32; $\frac{1}{64}$; 0,25 в виде степени числа 2;

2) $\frac{1}{3}$; 81; $\sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$ в виде степени числа 3.

5. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = 2^x$ и $y = 2$; 2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$.

6. Найти область определения функции:

1) $y = 56^x$; 2) $y = 56^{-x}$; 3) $y = 2^{\sqrt{x}}$; 4) $y = 6^{\frac{1}{x+1}}$.

7. Проверить, является ли число 5 корнем уравнения $2^{x-3} = x - 1$.

8. Решить уравнение:

1) $5^x = 1$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5$; 3) $5^x = -5$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 0$.

До введения понятия показательного уравнения и решения различных уравнений, сводящихся к элементарным показательным, желательно систематизировать знания учащихся об общих известных им подходах к решению уравнений (к приведению данного уравнения к виду, алгоритм решения которого известен). Можно вспомнить, какие преобразования приводят уравнения к равносильным. Сделать это можно в ходе решения, например, следующих уравнений:

1) $x^2 + 3x = \frac{2}{3}x + 2$; 2) $x^2 + 2x = 0$;

3) $x^3 + x^2 - 12x = 0$; 4) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Можно вспомнить и приёмы, приводящие к уравнениям-следствиям, но, так как при решении показательных уравнений чаще всего выполняются преобразования, приводящие к равносильным уравнениям, фокусировать внимание на таких преобразованиях на этих уроках не следует. Можно упомянуть и о графическом способе решения уравнений, но ему будет уделено особое внимание при изучении следующего параграфа.

После обобщения преобразований, которыми учащиеся умеют пользоваться и которые приводят к равносильным уравнениям, более осознанным будет разбор решений задач параграфа. Так, учащиеся будут видеть, что задачи **1** и **2** решаются с использованием замены левой и правой частей уравнения выражениями, тождественно им равными (на основе знаний свойств степени). В задаче **3** раскладывается на множители левая часть уравнения. В задаче **4** обе части уравнения делятся на одно и то же выражение, принимающее значение, отличное от нуля при всех действительных значениях x. В задаче **5** члены уравнения переносятся из одной части в другую, после чего удобно становится обе части уравнения раскладывать на множители, а затем делить их на одно и то же выражение ($5^{x-2} > 0$ при любом x). В задачах **6** и **7** применяется замена обозначения. Задача **8**, возможно более сложная для многих учащихся по технике решения, с теоретической точки зрения самая простая из рассмотренных, так как без предварительных преобразований на основе свойства равенства степеней с одинаковым основанием (большим нуля и не равным 1) данное уравнение сразу заменяется уравнением, приводящим к квадратному. В задаче **9** данное уравнение заменяется равносильной ему системой предложений. В задаче **10** приводится степенно-показательное уравнение, которое решается после рассмотрения совокупности ряда предложений.

С учащимися **математических** классов глубокое понимание теории проверяется в ходе решения задач с параметрами (задача **11** и упражнение **700**).

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 2 до задачи 6	679—683	681 (3), $3^{x+2}+3^{x-1}-3^{x}=25$	690, 691
2	§ 2, задачи 6, 7	684—688	684 (3), 687 (3)	689, 692, 694, 697; задача 8

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 2 до задачи 6	679—683, 690, 691	681 (2), $3^{x+2}+3^{x-1}-3^{x}=25$, 691 (3)	693, 695
2	§ 2, задачи 6—8	684—688, 689 (1, 2), 695, 697	686 (3), 695 (3), 697 (3)	692, 694 (1, 2)
3	§ 2, задачи 9, 10	698, 699, 696	699 (3)	701; ДМ № 5, 7, 10

В классах **углублённого** уровня в конце второго или начале третьего урока можно провести проверочную самостоятельную работу (10—15 мин) в двух вариантах.

В. 1. № **694** (4), **689** (3). ***В. 2.*** № **694** (3), **689** (4).

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны научиться решать уравнения типа **681—683**, используя тождественные преобразования выражений на основе свойств степени; с помощью разложения на множители выражений, содержащих степени; применяя способ замены неизвестной степени новым неизвестным. Учащиеся, изучающие математику на **углублённом** уровне, должны накапливать опыт в решении комбинированных задач. Так, они должны уметь решать показательные уравнения, сводящиеся не только к линейным и квадратным, но и к иррациональным уравнениям **(689)**, а также к уравнениям, содержащим неизвестное под знаком модуля **(697)**.

Решение упражнений

696. 1) Записав уравнение в виде $4 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 9 \cdot 2^{2x} = 0$, разделим обе его части на $2^{2x} > 0$. Получим

$$4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 9 = 0, \text{ откуда } \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 1, \ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{9}{4}.$$

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

697. 4) Так как $3 > 0$ и $3 \neq 1$, то $|x| = |2 - x| - 1$, т. е. $|x| + 1 = |2 - x|$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение-следствие $x^2 + 2|x| + 1 = 4 - 4x + x^2$, откуда $|x| = \frac{3}{2} - 2x$. Возведя последнее уравнение в квадрат, получим $x^2 = \frac{9}{4} - 6x + 4x^2$, откуда $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Проверка показывает, что $x = \frac{3}{2}$ — посторонний корень. Итак, $x = \frac{1}{2}$.

700. При $t = 2^x > 0$ уравнение примет вид

$$(k - 1)t^2 - 4t + (k + 2) = 0. \qquad (*)$$

1) При $k = 1$ уравнение (*) имеет вид линейного уравнения $-4t + 3 = 0$, откуда $t = \frac{3}{4} > 0$. Таким образом, при $k = 1$ исходное уравнение имеет один корень из уравнения $2^x = \frac{3}{4}$.

2) При $k \neq 1$ уравнение (*) является квадратным и имеет корни, если его дискриминант $D = 16 - 4(k - 1)(k + 2) = -4k^2 - 4k + 24 \geqslant 0$, т. е. если $k^2 + k - 6 \leqslant 0$, откуда

$$-3 \leqslant k \leqslant 2. \qquad (**)$$

Из этого промежутка нужно исключить те значения k (если такие значения существуют), при которых оба корня t_1 и t_2 уравнения (*) отрицательны, или оно имеет единственный отрицательный корень (это достигается при $k = -3$), или когда один корень равен нулю, а другой отрицателен (не существует таких k, при которых $t_1 = t_2 = 0$). Очевидно, что $t_1 < 0$ и $t_2 < 0$, когда $\begin{cases} \dfrac{k+2}{k-1} > 0, \\ \dfrac{4}{k-1} < 0, \end{cases}$ откуда $k < -2$. Один из корней уравнения (*) равен нулю при $k = -2$. При этом k уравнение (*) принимает вид $-3t^2 - 4t = 0$, откуда $t_2 = -\frac{3}{4} < 0$. Таким образом, и при $k = -2$ уравнение (*) не имеет корней. Исключая из промежутка (**) $k \leqslant 2$, получаем $-2 < k \leqslant 2$. Ответ. При $k \in (-2;\ 2]$.

701. Пусть $A(x) = 2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2}$, $S = 6{,}5 + 3{,}25 + 1{,}625 + \ldots$. Тогда $A(x) = 2^{x-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{13}{16} \cdot 2^x$, $S = 6{,}5(1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots)$, где $q=\frac{1}{2}$, $S=6{,}5\cdot\frac{1}{1-q}=13$. Равенство $A(x)=S$ означает, что $\frac{13}{16}\cdot 2^x=13$, $2^x=16$, откуда $x=4$.

702. 1) Функции $y=4^x$ и $y=25^x$ возрастают на всей числовой прямой, их сумма также возрастающая функция, принимающая значение 29 только при $x=1$ (каждое положительное значение она принимает при одном значении x).

§ 3. Показательные неравенства (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — формирование умения решать показательные неравенства на основе свойства монотонности показательной функции.

Так как при решении показательных неравенств используются приёмы преобразования выражений, стоящих в левой и правой частях неравенства, аналогичные тем, которые использовались и при решении показательных уравнений, первый урок можно начать со следующей проверочной самостоятельной работы (10—15 мин), в которой нужно решить уравнения:

1. $0{,}3^{3-2x}=0{,}09$ $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x}=9\right]$.

2. $3^{x-2}-3^{x-3}=2$ $[4^{x-2}-4^{x-1}=5]$.

3. $8^x=3^x$ $[6^x=7^x]$.

4. $25^x+4\cdot 5^x-5=0$ $[9^x-10\cdot 3^x+9=0]$.

До рассмотрения материала параграфа полезно устно выполнить задания, аналогичные упражнению **663**, а также устно решить неравенства типа $2^x>0$, $2^x>1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x>1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x<0$.

Основным в этом параграфе является материал до задачи **6**. Рассмотрение задачи **5**, скорее всего, не вызовет у учащихся затруднений, и естественным будет решение неравенств $\left(\frac{1}{3}\right)^x>x-\frac{2}{3}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^x<x-\frac{2}{3}$ с помощью построенных графиков. После разбора задачи **5** желательно обратить внимание учащихся на тот факт, что когда решается уравнение $f(x)=g(x)$, где $f(x)$ — убывающая, а $y=g(x)$ — возрастающая на одном и том же промежутке функции, и корень уравнения находится на том же промежутке, то этот корень будет единственным (на данном промежутке). Этот факт учащиеся будут наблюдать при решении упражнения **705**.

При решении уравнений в упражнениях **705** и **712** желательно ставить вопросы и о решении соответствующих неравенств, а графические решения неравенств в упражнении **711** следует начинать с графических решений соответствующих уравнений.

Распределение материала параграфа без учёта анализа самостоятельной работы учащихся на первом уроке по решению показательных уравнений отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3 до задачи 4	703, 704	703 (5)	706, 707
2	§ 2, задачи 4 и 5	$4^x + 2^{x+1} - 80 < 0$, 708, 705, 711	$9^x - 7 \cdot 3^x - 18 < 0$, 708 (3), 705 (3)	709, 710, 712

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3 до задачи 5	703, 704, 708; $4^x + 2^{x+1} - 80 < 0$	703 (5), $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 < 0$, 708 (3)	706, 707, 709, 710; ДМ № 1—3
2	§ 3, задачи 5—7	705, 711, 713, 715	705 (3), 711 (3)	712, 714; ДМ № 7, 10

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны справляться с решением неравенств типа **704**. Учащиеся классов с **углублённым** изучением математики должны освоить и графический метод решения неравенств (упр. **711**).

Решение упражнений

713. 1) Данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+6} > x$. График функции $y = \sqrt{x+6}$ лежит выше прямой $y = x$ (рис. 16) на промежутке $[-6;\ x_0)$, где x_0 — положительный корень уравнения $x + 6 = x^2$, т. е. $x_0 = 3$. Ответ можно записать так: $-6 \leqslant x < 3$.

2) Неравенство равносильно неравенству $\sqrt{30 - x} < x$. Прямая $y = x$ лежит выше графика функции $y = \sqrt{30 - x}$ (рис. 17) на промежутке $(x_0;\ 30]$, где x_0 — положительный корень уравнения $30 - x = x^2$, т. е. $x_0 = 5$. Ответ. $5 < x \leqslant 30$.

714. 1) Введём обозначение $\frac{5}{2}=a$, тогда $a>1$ и неравенство примет вид $a^{x+1}-a^{-x}+\frac{3}{2}<0$ или $\frac{5}{2}t-\frac{1}{t}+\frac{3}{2}<0$, где $t=\left(\frac{5}{2}\right)^x>0$.

Получаем $5t^2+3t-2<0$, или $5(t+2)\left(t-\frac{2}{5}\right)<0$. Так как $t>0$, то $t<\frac{2}{5}$, т. е. $\left(\frac{5}{2}\right)^x<\frac{2}{5}$, откуда $x<-1$.

2) Пусть $\frac{1}{5}=0{,}2=a$, тогда $0<a<1$ и неравенство примет вид $25\cdot a^{4x}>a^{x(3-x)}$, или $a^{-x^2-x}>a^{-2}$, где $a=\frac{1}{5}$. Тогда $-x^2-x>-2$, или $x^2+x-2<0$, откуда $-2<x<1$.

3) Пусть $\left(\frac{4}{3}\right)=t$, тогда неравенство примет вид $\frac{t}{t-1}<4$, или $\frac{t-4t+4}{t-1}<0$, или $\frac{3t-4}{t-1}>0$, $\left(t-\frac{4}{3}\right)(t-1)>0$, откуда $t<1$ и $t>\frac{4}{3}$. Но $t>0$, следовательно, $0<t<1$ и $t>\frac{4}{3}$, т. е. $0<\left(\frac{4}{3}\right)^x<1$, откуда $x<0$ и $\left(\frac{4}{3}\right)^x>\frac{4}{3}$, откуда $x>1$.

Ответ. $x<0$, $x>1$.

4) Пусть $\frac{1}{8}=a$, тогда $0<a<1$, $\frac{1}{4}=a^{\frac{2}{3}}$, $32=a^{-\frac{5}{3}}$ и неравенство примет вид $a^{\frac{2}{3}x}<a^{-\frac{5}{3}+x^2-1}$, или $a^{x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}}>1$, откуда $x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}<0$, $3x^2-2x-8<0$, т. е. $-\frac{4}{3}<x<2$.

715. При $x\geqslant 1$ неравенство примет вид $\left(\frac{5}{2}\right)^{(x+1)^2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{4(x-1)}\geqslant\left(\frac{5}{2}\right)^{13}$, откуда $(x+1)^2-4(x-1)\geqslant 13$. Решая это неравенство, получим $x\leqslant -2$ и $x\geqslant 4$; учитывая, что $x\geqslant 1$, окончательно имеем $x\geqslant 4$.

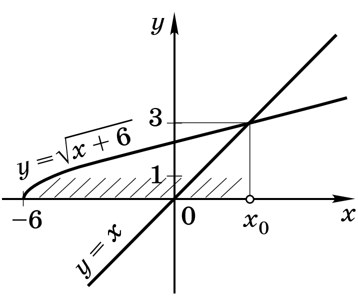


Рис. 16

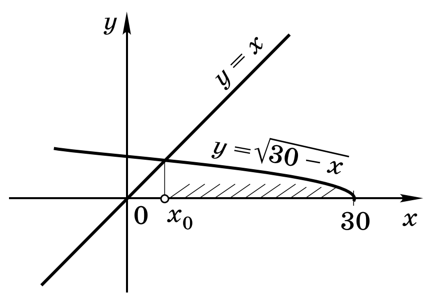


Рис. 17

При $x < 1$ показательное неравенство сводится к квадратному $x^2 + 6x - 16 \geqslant 0$, откуда (с учётом условия $x < 1$) имеем $x \leqslant -8$.

Ответ. $x \leqslant -8$, $x \geqslant 4$.

716. Исходное неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 > 1, \\ x^2 - \frac{5}{2}x + 1 < 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0 < x^2 - x + 1 < 1, \\ x^2 - \frac{5}{2}x + 1 > 0. \end{cases}$$

Ответ. $0 < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < 2$.

§ 4. Системы показательных уравнений и неравенств (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — обучение решению показательных систем уравнений; знакомство с решением систем, содержащих показательные неравенства.

В первых двух задачах параграфа предложенные системы уравнений решаются способом подстановки, причём в задаче **2** предварительно осуществляется замена обозначений. Можно рассмотреть ещё, например, систему уравнений $\begin{cases} 5 \cdot 2^x + 3^x = 13, \\ 7 \cdot 2^x - 3^x = 11, \end{cases}$ которая легко решается способом сложения. В задаче **3** демонстрируется приём почленного умножения уравнений системы, в результате можно перейти от показательного уравнения к линейному $x + 2y = 5$, после чего решить систему значительно проще. В **общеобразовательных** классах эту задачу можно не рассматривать (и соответственно тогда не выполнять упражнение **721**).

При желании в **общеобразовательных** классах учитель может продемонстрировать решение системы, состоящей из несложных показательных уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} 0{,}6^{4x} = 0{,}6^{2x+5}, \\ 2^{3x-1} > 4. \end{cases}$$

В классах **углублённого** уровня в соответствии с текстом параграфа рассматриваются задачи **1—6**, при этом после рассмотрения задачи **4** учащимся следует сообщить, что при решении систем, содержащих и уравнение, и неравенство, часто проще бывает решить сначала уравнение системы, а затем найденные корни подставить для проверки в неравенство. Однако, когда неравенство системы показательное (как в задаче **4** и упражнениях **722—724**), его лучше предварительно упростить (заменить равносильным непоказательным) или даже решить.

В начале первого урока по теме могут быть выполнены следующие задания:

1. Решить уравнение:
1) $5^x = 0{,}2$;
2) $25^x = 5$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = 1$.

2. Решить неравенство:
1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{27}\right)^7$; 2) $\pi^{10} > \pi^{2x}$.

3. С помощью графиков функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \frac{x}{2}$ (рис. 18) решить неравенство:
1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{x}{2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant \frac{x}{2}$.

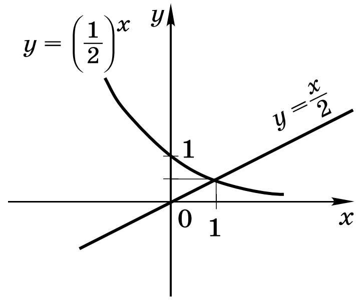


Рис. 18

4. Решить двумя способами систему уравнений
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

В конце второго урока в **общеобразовательных** классах можно провести *тест 4* или следующую самостоятельную работу с проверкой в классе (15 мин):

1. Решить уравнение $\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2-9} \leqslant 1$ $[(\sqrt{3})^{4-x^2} \geqslant 1]$.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x - y = 1, \\ 4^{2x-3y} = 1 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 3^{x-3y} = 27 \end{cases}\right].$$

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 4 до задачи 3	717—719	717 (3)	720 (1)
2	Обоснование решения системы $\begin{cases} 0{,}6^{4x} = 0{,}6^{2x+5}, \\ 2^{3x-1} > 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 0{,}3^{x^2-2x} = 0{,}3^x, \\ 7^{2x-3} < \frac{1}{49}; \end{cases}$ 720 (2—4)	Тест 4 или проверочная самостоятельная работа	722, 721

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4 до задачи 4	717—719, 721	717 (3)	720 (1), 743; ДМ № 2
2	§ 4, задачи 4—6	722—724, 720 (2—4)	723 (1), 720 (3)	747; ДМ № 3, 4

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны научиться решать системы показательных уравнений типа **717—719** и иметь представление о способах решения систем, содержащих показательное неравенство. Учащиеся классов **углублённого** уровня должны справляться и с заданиями типа **722.**

Решение упражнений

722. 1) Система равносильна следующей: $\begin{cases} 2x+1>4, \\ 6x^2-10x=9x-15. \end{cases}$

Уравнение имеет корни $x_1=\frac{5}{3}$ и $x_2=\frac{3}{2}$. Неравенству удовлетворяет только корень x_1. Итак, $x=\frac{5}{3}$.

2) Система равносильна следующей: $\begin{cases} 10x^2-37x+7=0, \\ |x|<2. \end{cases}$

Уравнение имеет корни $x_1=\frac{1}{5}$, $x_2=\frac{7}{2}$, из которых условию удовлетворяет только корень x_1. Итак, $x=\frac{1}{5}$.

724. 1) Система равносильна следующей: $\begin{cases} xy=21, \\ x+y=10, \\ x>y. \end{cases}$

Ответ. $x=7$, $y=3$.

2) Система равносильна следующей: $\begin{cases} xy=3, \\ y=3{,}5-x, \\ x-y<0. \end{cases}$

Ответ. $x=\frac{3}{2}$, $y=2$.

725. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5|x|^2+3a, \\ |x|^2+y^2=1. \end{cases} \qquad (*)$$

Очевидно, что если $(x_0;\ y_0)$ — решение системы (*), то и $(-x_0;\ y_0)$ также будет решением системы. Так как исследуется возможность единственного решения, то это возможно лишь при $|x| = 0$. Тогда система (*) примет вид $\begin{cases} 7 = 3y + 3a, \\ y^2 = 1, \end{cases}$ откуда $y_1 = 1$, $a_1 = \frac{4}{3}$ и $y_2 = -1$, $a_2 = \frac{10}{3}$.

Найденные значения a необходимо проверить подстановкой в систему (*) на предмет определения количества решений.

1) При $a = \frac{4}{3}$ первое уравнение системы примет вид $3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5|x|^2 + 4$, откуда

$$y = \frac{3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| - 5x^2}{3}. \qquad (**)$$

Из второго уравнения системы (*) имеем $-1 \leqslant x \leqslant 1$. При этих значениях $3 \cdot 2^{|x|} \geqslant 3$, а $5|x| - 5x^2 \geqslant 0$, поэтому в уравнении (**) $y \geqslant 1$. Но согласно второму уравнению системы (*) $|y| \leqslant 1$. Значит, y принимает единственное значение: $y = 1$. Таким образом, при $a = \frac{4}{3}$ система (*) имеет единственное решение (0; 1).

2) При $a = \frac{10}{3}$ система (*) имеет вид

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5|x|^2 + 6, \\ |x|^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

решением которой, помимо (0; −1), будет, например, и пара (1; 0).

Ответ. $a = \frac{4}{3}$.

Урок обобщения и систематизации знаний (1 ч)

На последнем перед контрольной работой уроке обобщаются знания о степени, показательной функции и её свойствах (используются вопросы в конце главы). Сделать это можно и при сравнении значений функции, решении показательных уравнений, неравенств и их систем. Выполняются по выбору учителя упражнения к главе VI и задания рубрики «Проверь себя!».

На этом уроке с учащимися **общеобразовательных** классов может быть рассмотрено степенно-показательное уравнение, в ходе решения которого повторяются свойства степени. Например, может быть решено уравнение $(x + 2)^{x^2 + 7x + 10} = 1$. Предложим пример записи решения:

1) $x + 2 = 1$, откуда $x = -1$;

2) $\begin{cases} x + 2 \neq 0, \\ x^2 + 7x + 10 = 0, \end{cases}$ откуда $x = -5$;

3) $\begin{cases} x+2=-1, \\ x^2+7x+10=2k, \text{ где } k \in \boldsymbol{Z}, \text{ откуда } x=-3. \end{cases}$

Ответ. $x_1=-1,\ x_2=-5,\ x_3=-3.$

Решение упражнений

745. 1) $y=2^{x+|x|}=\begin{cases} 2^{2x} \text{ при } x \geqslant 0, \\ 1 \text{ при } x<0 \text{ (рис. 19).} \end{cases}$

2) График функции $y=\left|3^{|x|}-3\right|$ изображён на рисунке 20.

746. 1) Пусть $\frac{1}{5}=0{,}2=a$, тогда $0<a<1$ и уравнение примет вид $a^{x+0{,}5}=a^{-\frac{3}{2}+2x}$, откуда $x+0{,}5=-1{,}5+2x$, $x=2$.

2) Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}=t$, тогда уравнение примет вид $4t^2-5t-9=0$, откуда $t_1=-1$, $t_2=\frac{9}{4}$. Так как $t>0$, то $t=\frac{9}{4}$, т. е. $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$, откуда $x=4$.

3) Пусть $\left(\frac{5}{2}\right)^x=t$, тогда, разделив обе части уравнения на 4^x, получим $5t^2+3t-2=0$, откуда $t_1=-1$, $t_2=\frac{2}{5}$. Итак, $\left(\frac{5}{2}\right)^x=\frac{2}{5}$, откуда $x=1$.

4) Уравнение можно записать в виде $4\cdot(3^x)^2+3^x\cdot4^x-3\times\times(4^x)^2=0$. $\left(\frac{3}{4}\right)^x=t$, тогда $4t^2+t-3=0$, откуда $t_1=-1$, $t_2=\frac{3}{4}$. Возвращаясь к исходному обозначению, получим $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{3}{4}$, откуда $x=1$.

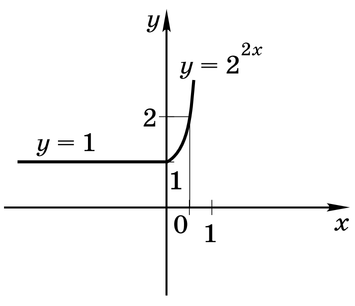


Рис. 19

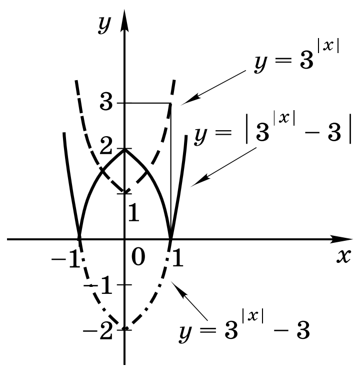


Рис. 20

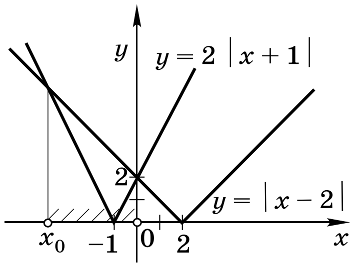


Рис. 21

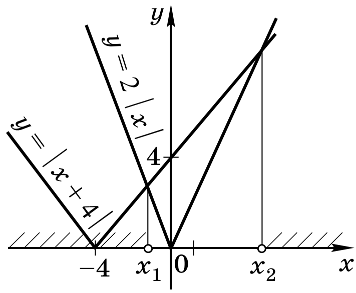


Рис. 22

747. 1) $3^{|x-2|} < 3^2$, откуда $|x - 2| < 2$, $0 < x < 4$.

2) $4^{|x+2|} > 4^2$, откуда $|x + 1| > 2$ и $x < -3$, $x > 1$.

3) $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$, откуда $|x - 2| > 2|x + 1|$. Строим в одной системе координат графики функций $y = |x - 2|$ и $y = 2|x + 1|$ (рис. 21). Неравенство справедливо на интервале $(x_0;\ 0)$, где x_0 — корень уравнения $|x - 2| = 2|x + 1|$, такой, что $x_0 < -1$, т. е. корень уравнения $2 - x = -2(x + 1)$, откуда $x_0 = -4$.

Ответ. $-4 < x < 0$.

4) $5^{|x+4|} < 25^{|x|}$, или $5^{|x+4|} < 5^{2|x|}$, откуда $|x + 4| < 2|x|$. Неравенство выполняется на интервалах $x < x_1$ и $x > x_2$ (рис. 22), где x_1 — корень уравнения $x + 4 = -2x$, откуда $x_1 = -\frac{4}{3}$, а x_2 — корень уравнения $x + 4 = 2x$, откуда $x_2 = 4$.

Ответ. $x < -\frac{4}{3}$, $x > 4$.

748. За первые $t = 10$ мин имеем $T_0 = 20°$, $T_1 = 320°$, $T = 290°$. Найдём a^{10} из уравнения $290 = 20 + (320 - 20) \cdot a^{10}$; $a^{10} = 0{,}9$. За следующие $t = 20$ мин остывания имеем $T_0 = 20°$, $T_1 = 290°$, $a^{20} = (a^{10})^2 = 0{,}81$. Тогда $T = 20 + (290 - 20) \cdot 0{,}81 = 238{,}7$ (°C).

749. $x = 0$ — единственный корень уравнения, так как при $x > 0$ верно, что $3^x + 4^x > 2$, а $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x < 2$. При $x < 0$ имеем $3^x + 4^x < 2$, а $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 2$, т. е. при всех $x \neq 0$ $3x + 4x \neq$ $\neq \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x$.

750. При $t = 2^x > 0$ уравнение примет вид

$$t^2 - (5b - 3)t + 4b^2 - 3b = 0. \qquad (*)$$

Исходное уравнение имеет единственный корень, если

$$\begin{cases} D = (5b - 3)^2 - 4(4b^2 - 3b) = 0, \\ t = \dfrac{5b - 3}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ t_1 \leqslant 0, \\ t_2 > 0, \end{cases}$$

где D — дискриминант квадратного уравнения (*), а t_1 и t_2 — его корни. Решением первой системы является $b = 1$, второй — промежуток $\frac{1}{2} < b \leqslant \frac{2}{3}$. Ответ. При $b = 1$ и $\frac{1}{2} < b \leqslant \frac{2}{3}$.

751. Очевидно, что $2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$. Относительно $t = (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x$ исходное уравнение примет вид $t + \frac{1}{t} = 4$ или $t^2 - 4t + 1 = 0$, откуда $t_1 = 2 + \sqrt{3}$, $t_2 = 2 - \sqrt{3}$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{и} \quad (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}},$$

откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

752. Исходное уравнение равносильно совокупности трёх систем:

1) $\begin{cases} x \leqslant -1, \\ 2^{-x-1} + 2^x - 1 = 1 + 2^x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -1 < x \leqslant 0, \\ 2^{x+1} + 2^x - 1 = 1 + 2^x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > 0, \\ 2^{x+1} - 2^x + 1 = 1 + 2^x. \end{cases}$

Решением первой системы является $x = -2$, решением второй системы будет $x = 0$, а решением третьей системы является $x > 0$.

Ответ. $x = -2$, $x \geqslant 0$.

Контрольная работа № 5

Базовый уровень

1. Сравнить числа:

1) $5^{-8,1}$ и 5^{-9} [$0,5^{-12}$ и $0,5^{-11}$];

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$ [$6^{\frac{1}{3}}$ и $6^{\frac{1}{5}}$].

2. Решить уравнение:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25$ [$(0,1)^{2x-3} = 10$];

2) $4^x + 2^x - 20 = 0$ [$9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$].

3. Решить неравенство

$\left(\frac{3}{4}\right)^x > 1\frac{1}{3}$ $\left[\left(1\frac{1}{5}\right)^x < \frac{5}{6}\right]$.

---

4. Решить неравенство:

1) $(\sqrt{5})^{x-6} < \frac{1}{5}$ $\left[(\sqrt[3]{3})^{x+6} > \frac{1}{9}\right]$;

2) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geqslant 1$ $\left[\left(1\frac{1}{7}\right)^{x^2-4} \leqslant 1\right]$.

5. Решить систему уравнений

$\begin{cases} x - y = 4, \\ 5^{x+y} = 25 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x + y = -2, \\ 6^{x+5y} = 36 \end{cases}\right]$.

6. (*Дополнительно.*) Решить уравнение

$7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 2^{x+5} + 3 \cdot 2^x$ $[3^{x+3} + 3^x = 5 \cdot 2^{x+4} - 17 \cdot 2^x]$.

Углублённый уровень

1. Сравнить числа:

$(\pi - 3)^{-5,6}$ и $(\pi - 3)^{-6}$ $[(5 - \pi)^{-18}$ и $(5 - \pi)^{-17,4}]$.

2. Решить уравнение:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25$ $[(0,1)^{2x-3} = 10]$;

2) $4^x + 2^x - 20 = 0$ $[9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0]$.

3. Решить неравенство:

1) $(\sqrt{5})^{x-6} < \frac{1}{5}$ $\left[(\sqrt[3]{3})^{x+6} > \frac{1}{9}\right]$;

2) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geqslant 1$ $\left[\left(1\frac{1}{7}\right)^{x^2-4} \leqslant 1\right]$.

---

4. Решить уравнение

$3^{x+2} + 8 \cdot 5^{x-1} = 5^{x+1} + 10 \cdot 3^{x-1}$ $[2^{x+5} - 3^{x+3} = 2^{x+1} + 6 \cdot 3^{x+1}]$.

5. Решить графически неравенство

$2^x \geqslant 3x - 1$ $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x < 6 + x\right]$.

6. Решить систему

$\begin{cases} 2^{x^2} > 2^9, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x} = \frac{1}{16} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 3^{x^2} < 3^{16}, \\ 2^{x^2-4x} = 32 \end{cases}\right]$.

7. (*Дополнительно.*) Решить неравенство

$4^{|x-1|} < \left(\frac{1}{16}\right)^{-|x|+2}$ $\left[\left(\frac{1}{9}\right)^{-|x-2|} > 3^{|x|-1}\right]$.

Глава VII Логарифмическая функция

До этой главы в курсе алгебры изучались такие функции, вычисление значений которых сводилось к четырём арифметическим действиям и возведению в степень. Для вычисления значений логарифмической функции нужно уметь находить логарифмы чисел, т. е. выполнять новое для учащихся действие — логарифмирование. До появления компьютеров логарифмы широко использовались для упрощения ряда вычислений и детально изучались в школе. Теперь же их роль стала вспомогательной, а изучение в школе не столь подробным.

Знакомство с логарифмами чисел и их свойствами для многих учащихся достаточно сложно. Поэтому полезны подробные и наглядные объяснения. Обычно логарифм определяется как показатель степени, в которую нужно возвести основание, чтобы получить данное число: $3 = \log_2 8$, так как $2^3 = 8$. Следует обратить внимание на то, что $3 = \log_2 8$ является корнем уравнения $2^x = 8$, а поэтому $2^{\log_2 8} = 8$. Таким образом, получается основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Это равенство является краткой символической записью определения логарифма.

Доказательство свойств логарифма опирается на его определение. Так как, например, по определению логарифма $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_a c} = c$, то, перемножая эти равенства и используя свойство умножения степеней, получаем $a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc$, $a^{\log_a b + \log_a c} = bc$. Последнее равенство показывает, что $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. Отсюда и следует свойство логарифма произведения $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

На практике рассматриваются логарифмы по различным основаниям, в частности по основанию 10 ($\lg b$ — десятичный логарифм) и по основанию e ($\ln b$ — натуральный логарифм), отсюда возникает необходимость формулы перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ где } b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1.$$

Так как на инженерном микрокалькуляторе есть клавиши lg и ln, то для вычисления логарифма по основаниям, отличным от 10 и e, нужно применить формулу перехода.

В настоящее время логарифмы широко используются в финансовых операциях, в частности для вычисления сложных процентов, определяющих прибыль от вкладов в банках. В учебнике рассматривается одна из таких задач.

Свойства логарифмической функции активно используются при решении логарифмических уравнений и неравенств.

Напомним, что рассмотрение квадратных уравнений в основной школе предшествовало изучению квадратичной функции, так как её свойства не были нужны для решения уравнений. Вместе с тем решения квадратных неравенств рассматривались после изучения квадратичной функции, так как её свойства были нужны для решения неравенств.

Изучение свойств логарифмической функции проходит совместно с решениями уравнений и неравенств. Например, при решении уравнения $\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=3$ с использованием свойства суммы логарифмов получаются корни $x=\pm3$. Корень $x=-3$ посторонний, так как при этом значении x функция, стоящая в левой части уравнения, не определена. При решении, например, неравенства $\log_2 x>3$ используется свойство возрастания функции $y=\log_2 x$.

Отметим, что многие свойства логарифмической функции $y=\log_a x$, где $a>0$, $a\neq1$, следуют из свойств показательной функции $y=a^x$, так как эти функции являются взаимно обратными.

При решении логарифмических уравнений и неравенств выполняются различные их преобразования. При этом часто нарушается равносильность. Поэтому при решении логарифмических уравнений необходима проверка найденных корней, а при решении логарифмических неравенств нужно следить за тем, чтобы равносильность не нарушалась, так как проверку решения неравенства осуществить сложно, а в ряде случаев невозможно. Так, при решении неравенства $\log_2(x+1)+\log_2(x-1)<3$ переходят к равносильной ему системе $\begin{cases}x^2-1<8,\\x>1.\end{cases}$ Решая её, находим $1<x<3$.

Эскиз графика логарифмической функции, как и показательной, легко строится с помощью её основных свойств: область определения — все положительные числа; множество значений — все действительные числа; функция возрастает или убывает; функция всегда принимает значение 0 при $x=1$. Для более точного построения графика полезно составить таблицу некоторых её значений.

Логарифмические уравнения и неравенства в учебнике специально не определяются (каждое из них содержит неизвестное под знаком логарифма).

Предметные цели изучения главы:

— введение понятия логарифма числа;
— изучение свойств логарифмов;
— применение свойств логарифмов и основного логарифмического тождества для упрощения логарифмических выражений в упражнениях и вычислениях;
— введение понятий десятичных и натуральных логарифмов;
— применение формулы перехода логарифма к другому основанию для вычисления логарифмов чисел с любыми основаниями (при использовании вычислительной техники);

— введение понятия логарифмической функции; изучение свойств логарифмической функции и построение её графика;
— обучение решению логарифмических уравнений, неравенств и их систем аналитическими и графическими методами, нахождению точных и приближённых значений корней уравнений.

Метапредметные цели изучения главы:
— расширение вычислительного аппарата за счёт применения свойств логарифмов (замена вычислений произведения и частного степеней на вычисления сумм и разностей показателей степеней);
— обучение моделированию реальных процессов, протекающих по законам экспоненциальной зависимости, и исследованию созданных моделей с помощью аппарата логарифмирования;
— осознание взаимосвязи математики со всеми предметами естественного и гуманитарного циклов.

Личностные цели изучения главы:
— совершенствование вычислительной культуры;
— расширение средств и методов преобразований символьного языка;
— совершенствование навыков работы с вычислительной техникой;
— расширение представлений о взаимно обратных действиях.

В результате изучения главы VII **все** учащиеся должны знать определение и свойства логарифма числа, определение и свойства логарифмической функции; уметь строить её график, решать логарифмические уравнения и неравенства и выполнять упражнения типа **878—893**, а также из рубрики «Проверь себя!».

Учащиеся классов с **углублённым** изучением математики дополнительно должны иметь представление о прикладных аспектах применения свойств логарифмической функции; знать формулу перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию и с её помощью (используя микрокалькулятор) уметь вычислять значение логарифмов чисел при любых заданных основаниях (упражнения типа **797**, **798**); уметь решать прикладные задачи типа **814—819**; решать графически уравнения типа **836**.

§ 1. Логарифмы (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятия логарифма числа; знакомство с применением основного логарифмического тождества к вычислениям и решению простейших логарифмических уравнений.

В устную работу до введения понятия логарифма, помимо задачи **1**, можно включить и следующие:

1. Решить уравнение:

1) $2^x = 8$; 2) $2^x = \frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$;

4) $2^x = 1$; 5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$; 6) $2^x = -2$.

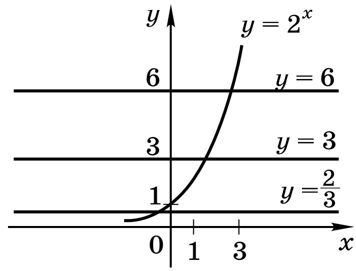


Рис. 23

2. С помощью графика функции $y = 2^x$ (рис. 23) найти приближённые значения корней уравнения:

1) $2^x = \frac{2}{3}$;   2) $2^x = 3$;   3) $2^x = 6$.

После введения понятия логарифма стоит вернуться к рисунку 23 и отметить абсциссы точек пересечения графика функции $y = 2^x$ с прямыми $y = \frac{2}{3}$, $y = 3$, $y = 6$. Это $x = \log_2 \frac{2}{3}$, $x = \log_2 3$, $x = \log_2 6$.

Задания для проверочной самостоятельной работы (15 мин) по теме могут быть следующими:

1. Вычислить:

1) $\log_5 5$ $[\log_4 4]$;   2) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ $\left[\log_4 \frac{1}{64}\right]$;

3) $10^{2\log_{10} 9}$ $[5^{3\log_5 4}]$;   4) $5^{2+\log_5 3}$ $[12^{1+\log_{12} 7}]$.

2. Выяснить, при каком значении x имеет смысл выражение $\log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ $[\log_{0,3}(5 - x)]$.

3. Решить уравнение:

1) $\log_3(x + 1) = 4$ $[\log_4(x - 5) = 3]$;   2) $\log_x 81 = 4$ $[\log_x 32 = 5]$.

Материал параграфа во всех типах классов изучается в соответствии с его изложением в учебнике, его распределение по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1 до задачи 4, исторические сведения	753—763	759, 760, 769 (3)	766—768
2	§ 1, задачи 4 и 5	764, 765	Проверочная самостоятельная работа	769—775

В **математических** классах углубление теоретических знаний происходит, в частности, в ходе решения задач с параметрами (в данном параграфе это — упражнение **776**).

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение логарифма числа и основное логарифмическое тождество, а также уметь решать упражнения типа **759—765**.

Решение упражнений

776. Пусть $3^x = t$, $t > 0$, тогда уравнение примет вид $t^2 + a \times$ $\times (1 - a)t - a^3 = 0$, откуда $t = \dfrac{a(a-1) \pm \sqrt{a^2(a-1)^2 + 4a^3}}{2}$.

Если $a = 0$, то корней нет. Если $a \neq 0$, то $t = \dfrac{a(a-1) \pm a\sqrt{(a+1)^2}}{2} =$ $= \dfrac{a(a-1) \pm a(a+1)}{2}$, $t_1 = a^2$, $t_2 = -a$, т. е. $3^x = a^2$, $3^x = -a$. Если $a > 0$, то $x = \log_3 a^2$ (уравнение $3^x = -a$ не имеет корней при $a > 0$). Если $a = -1$, то $t = 1$, т. е. $3^x = 1$ и $x = 0$. Пусть $a < 0$ и $a \neq -1$, тогда $t_1 = a^2$, $t_2 = -a$ и $x_1 = \log_3 a^2$, $x_2 = \log_3(-a)$.

Ответ. Если $a = 0$, то корней нет; если $a > 0$, то $x = \log_3 a^2$; если $a < 0$ и $a \neq -1$, то $x_1 = \log_3 a^2$ и $x_2 = \log_3(-a)$; если $a = -1$, то $x = 0$.

§ 2. Свойства логарифмов (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — изучение основных свойств логарифмов и формирование умений их применения для преобразований логарифмических выражений.

Для понимания доказательств свойств логарифмов необходимы знания основного логарифмического тождества и действий со степенями. Актуализировать эти знания можно, например, с помощью следующих упражнений:

1. Представить в виде степени:

1) $a^2 \cdot a^3$; 2) $(a^6)^2$; 3) $a^{12} : a^4$; 4) $\dfrac{a^8 \cdot a^{-3}}{a^{-5}}$.

2. Вычислить:

1) $7^{\log_7 8}$; 2) $7^{1 + \log_7 8}$; 3) $7^{2 \cdot \log_7 8}$; 4) $8^{\log_2 5}$.

3. Заполнить пропуски:

1) $3 = 4^{\square}$; 2) $\dfrac{1}{6} = 3^{\square}$.

4. Решить уравнение:

1) $\log_6 x = 2$; 2) $\log_6 x = -2$; 3) $\log_6 x = \dfrac{1}{2}$.

Рекомендуется после обоснования каждого из свойств демонстрировать его применение в ходе рассмотрения примеров, предложенных перед задачей **1**, и выполнения соответствующих упражнений типа **777—779**.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2 до задачи 2	777—780	778 (3), 779 (3)	784
2	§ 2, задача 2	781—783	Зная, что $\log_3 a = 15$, найти: 1) $\log_3(9a)$; 2) $\log_3 a^2$	785

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2 до задачи 2	777—780, 783, 784	778 (3), 779 (3), 784 (3)	785; ДМ № 3
2	§ 2, задачи 2, 3	781, 782, 787, 788, 790, 791	782, 788 (3)	786, 789; ДМ № 5

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь применять свойства логарифмов при выполнении упражнений типа **779—781**, а учащиеся классов **углублённого** уровня — и упражнений типа **787**.

Решение упражнений

792. 1) При $x > 0$, $x \neq 1$ преобразуем левую часть уравнения: $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = \frac{1}{2}\log_x 3^2 + 2\log_x 2^2 = \log_x 3 + \log_x 16 = \log_x 48$, $\log_x 48 = 2$, откуда $x^2 = 48$. Учитывая, что $x > 0$, имеем $x = 4\sqrt{3}$.

794. 1) $\log_3 15 = \log_3 5 + 1 = a$, откуда $\log_3 5 = a - 1$; $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2\log_3 50 = 2(\log_3 5 + \log_3 10) = 2(a - 1 + b)$;

2) $\log_4 1250 = \log_4(2 \cdot 5^4) = \log_2(\sqrt{2} \cdot 5^2) = \frac{1}{2} + 2a$.

§ 3. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода (2/3 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятий десятичного и натурального логарифмов; обучение применению формулы перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.

Введение десятичных и натуральных логарифмов школьники воспринимают прагматически, как «удобные» в вычислениях и записях логарифмы. Учитель может использовать при введении этих понятий сведения из истории их появления. Возможно рассмотрение примеров на упрощение вычислений с помощью десятичных логарифмов при работе с числами, записанными в стандартном виде. Полезно сообщить, что в 11 классе при изучении основ дифференциального и интегрального исчислений учащиеся познакомятся с уникальными особенностями функции $y = e^x$.

Введение формулы перехода обосновывается потребностями практики. Следует подчеркнуть, что формула (1) выражает одно из основных свойств логарифмов. В классах с **углублённым** изучением математики доказывается её справедливость на основании свойства логарифма степени, которое в начале урока желательно повторить, например, в ходе выполнения таких упражнений на вычисление значений выражений:

1) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$; 2) $\log_{10} 5 - \log_{10} 50$;

3) $\log_{10} 10^8$; 4) $\log_{10} 0{,}01$.

При выполнении упражнения **799** (3) учащиеся найдут, что $\log_2 7 = \frac{1}{\log_7 2}$, после чего можно записать в общем виде частный случай формулы (1) так: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

В случае отсутствия у большинства учащихся микрокалькуляторов с клавишами $\boxed{\text{lg}}$ и $\boxed{\text{ln}}$ учитель всё равно должен в классе рассмотреть и задачу **1** параграфа, и упражнения **795—798**. При этом на своём калькуляторе учитель показывает процесс нахождения логарифмов (при выполнении упражнений **795**, **796**), обязывает учащихся при выполнении заданий **797**, **798** самостоятельно выражать данные логарифмы через десятичные или натуральные, после чего либо сообщает результаты вычислений, проведённые на своём микрокалькуляторе, либо предлагает проводить эти вычисления различным учащимся.

На последнем уроке изучения темы может быть проведена проверочная самостоятельная работа (10—15 мин) по материалу § 2—3 следующего содержания:

1. Вычислить:

1) $\log_2 13 - \log_2 1\frac{5}{8}$ $[\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 2]$;

2) $\log_{\frac{1}{6}} 4 + \log_{\frac{1}{6}} 9$ $\left[\log_3 \frac{1}{6} - \log_3 40{,}5\right]$;

3) $\log_{15} \sqrt{225}$ $[\log_{13} \sqrt[5]{169}]$.

2. Зная, что $\lg 2 \approx 0{,}301$, а $\lg 5 \approx 0{,}699$, найти $\log_2 \sqrt[3]{5}$ с точностью до 0,01. [Зная, что $\lg 3 \approx 0{,}477$, а $\lg 5 \approx 0{,}699$, найти $\log_3 \sqrt{5}$ с точностью до 0,01.]

3. (Для классов с углублённым изучением математики.) Упражнение **812** (3) [Упражнение **812** (4)].

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 3 до задачи 3	795—800, 802	796 (3), 798 (3), 802 (5)	812
2	§ 3, задача 3	801, 803—806	804, проверочная самостоятельная работа	807—811, 813

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 3 до задачи 3	795—800, 802, 812 (1, 2)	796 (3), 798 (3), 802 (5)	ДМ № 1
2	§ 3, задача 3	801, 803—810	804	811; ДМ № 2, 3
3	§ 3, задача 4	813—819	813 (3), проверочная самостоятельная работа	820

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны научиться выполнять упражнения типа **799, 802**. Учащиеся классов с **углублённым** изучением математики должны справляться и с упражнениями типа **808, 814, 815**.

Решение упражнений

804. $\log_{49}28 = \dfrac{\log_7 28}{\log_7 49} = \dfrac{\log_7(7\cdot 2^2)}{2} = \dfrac{1+2\log_7 2}{2} = \dfrac{1+2m}{2}.$

805. $\log_{15}30 = \dfrac{\lg 30}{\lg 15} = \dfrac{\lg 3+\lg 10}{\lg 3+\lg 5} = \dfrac{m+1}{m+n}.$

807. $\log_{36}8 = \dfrac{\log_6 8}{\log_6 36} = \dfrac{3\log_6 2}{2} = m$, откуда $\log_6 2 = \dfrac{2}{3}m$;

$$\log_{36}9 = \frac{\log_6 9}{\log_6 36} = \frac{2\log_6 3}{2} = \log_6\left(\frac{6}{2}\right) = 1-\log_6 2 = 1-\frac{2}{3}m.$$

809. $\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$, откуда $\log_2 5 = \log_3 3 \cdot \log_2 5 = ab$;

$$\log_{300} 120 = \frac{\log_2 120}{\log_2 300} = \frac{\log_2(2^3 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_2(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2)} = \frac{3 + \log_2 3 + \log_2 5}{2 + \log_2 3 + 2\log_2 5} = \frac{3 + a + ab}{2 + a + 2ab}.$$

810. $\log_5 7 = \dfrac{\log_7 7}{\log_7 5} = \dfrac{1}{\log_7 5} = \dfrac{1}{n}$; $\log_{350} 140 = \dfrac{\log_5 140}{\log_5 350} =$

$$= \frac{\log_5(2^2 \cdot 5 \cdot 7)}{\log_5(2 \cdot 5^2 \cdot 7)} = \frac{2\log_5 2 + 1 + \log_5 7}{\log_5 2 + 2 + \log_5 7} = \frac{2m + 1 + \frac{1}{n}}{m + 2 + \frac{1}{n}} = \frac{2mn + n + 1}{mn + 2n + 1}.$$

811. 1) $\dfrac{\log_3 216}{\log_8 3} - \dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3} = \log_3(2^3 \cdot 3^3) \cdot \log_3 2^3 - \log_3(2^3 \cdot 3) \times$
$\times \log_3(2^3 \cdot 3^2) = (3\log_3 2 + 3) \cdot 3\log_3 2 - (3\log_3 2 + 1)(3\log_3 2 + 2) =$
$= 9\log_3^2 2 + 9\log_3 2 - 9\log_3^2 2 - 6\log_3 2 - 3\log_3 2 - 2 = -2$.

814. Пусть t — искомое число лет, по истечении которых число жителей удвоится. Тогда $2a = a\left(1 + \dfrac{8}{100}\right)^t$, т. е. $(1 + 0{,}08)^t = 2$, откуда $t = \dfrac{\ln 2}{\ln(1 + 0{,}08)} = \dfrac{\lg 2}{\lg(1 + 0{,}08)} \approx 9$.

816. Пусть n — число качаний насоса, после осуществления которых в сосуде останется $\dfrac{1}{10^{16}}$ часть имевшейся в нём массы m воздуха. Тогда $10^{-16} m = (1 - 0{,}012)^n \cdot m$, т. е. $10^{-16} = 0{,}988^n$, откуда $n = \dfrac{\lg 10^{-16}}{\lg 0{,}988} = \dfrac{-16}{\lg 0{,}988} \approx 3052$.

§ 4. Логарифмическая функция, её свойства и график (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — обоснование свойств логарифмической функции и построение её графика; демонстрация применения свойств логарифмической функции при сравнении значений выражений и решении простейших логарифмических уравнений и неравенств.

Если на предыдущем уроке проводилась проверочная самостоятельная работа по свойствам логарифмов, то этот урок можно начать с анализа её результатов и закрепить навыки в использовании этих свойств в ходе выполнения, например, следующих заданий:

1. Вычислить: $\dfrac{\log_9 45 + \log_9 1{,}8}{\log_9 \sqrt[3]{81}}$.

2. Решить уравнение $\log_3 x = 3\log_3 2 + 4\log_9 5$.

До рассмотрения материала параграфа (аналитического обоснования свойств логарифмической функции) стоит повторить свойства степени, основное логарифмическое тождество, определения возрастающей и убывающей функций с помощью, например, следующих устных упражнений:

1. Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $0{,}3^x$; 2) $\log_{0,3} x$; 3) $\log_3 x^2$; 4) $\log_x 1{,}5$; 5) $\log_{|x|} 15$.

2. Найти y, если:

1) $\ln y = 1$; 2) $\lg y = 0$; 3) $\ln y = \frac{1}{2}$; 4) $\lg y = -2$.

3. Записать каждое из чисел 0; 1; −1; 2; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ в виде логарифма по основанию 5.

4. Решить уравнение:

1) $10^x = 1000$; 2) $e^x = \frac{1}{e}$; 3) $2^x = 3$; 4) $10^x = 7$.

5. Решить неравенство:

1) $6^x > 6^{-3}$; 2) $0{,}1^x \geqslant 0{,}1^2$; 3) $10^{\lg x} > -15$;

4) $e^{\ln x} < e^{\ln 0,3}$; 5) $10^{\lg x} > 10^{\lg 2}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} < 2$.

6. Выяснить, возрастающей или убывающей является функция $y = f(x)$ на некотором интервале, если для любых $x_1 > x_2$ из этого интервала:

1) $f(x_1) < f(x_2)$; 2) $f(x_1) > f(x_2)$.

Изучение материала желательно проводить в соответствии с изложением его в учебнике. Тот факт, что функции $y = \log_a x$ и $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ взаимно обратны, иллюстрируется графически (с помощью рисунка учебника).

После объяснения теоретического материала, в зависимости от возможностей учащихся, учитель вправе требовать от них выполнения упражнений **821—824** с опорой на сформулированные свойства логарифмической функции либо без привлечения графической иллюстрации, либо прибегая к ней (в таком случае используются эскизы графиков, аналогичные построенным на рисунке 97 учебника). Практика показывает, что графические образы способствуют пониманию и запоминанию свойств функции.

В слабом классе изучение свойств логарифмической функции можно провести не в полном соответствии с текстом параграфа. Объяснение материала можно начать с построения по точкам в разных системах координат графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Опираясь на определение логарифма и вид графиков, выявить области определения функций и множества их значений, убедиться в том, что графики проходят через точку (1; 0), сделать выводы о монотонности каждой из функций, определить промежутки знакопостоянства. Затем можно перейти к рассмотрению свойств логарифмических функций $y = \log_a x$ двух видов: при $a > 1$ и при $0 < a < 1$, используя при этом рисунок **96**. При таком подходе свойства 4 и 5 не доказываются, а после их выявления проговариваются, например, таким образом: «При $a > 1$ большему значению (положительного) x соответствует большее значение $\log_a x$». При этом учащимся в тетрадях желательно делать краткие записи формулировок свойства и теоремы. Важно также сделать и краткие записи утверждений, сформулированных после свойства 4, так как на их основе будут в дальнейшем решаться логарифмические неравенства. На данном этапе обучения оформление решений уравнений и неравенств следует выполнять подробно, как это сделано в параграфе при решении задач **1—3**.

В классах с **углублённым** изучением математики желательно в конце изучения темы рассмотреть взаимосвязи свойств логарифмической и показательной функций ($y = \log_a x$ и $y = a^x$), используя графические иллюстрации.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 4 до теоремы	821—826	826 (3, 4)	
2	§ 4, теорема и весь последующий материал базового уровня	827—831	830 (5); решить неравенство: 1) $\log_{0,9} x > 1$; 2) $\log_7 x \leqslant 0$.	832—836

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 4 до теоремы	821—828, 836	826 (2, 3), 827 (3), 836 (3)	837
2	§ 4, теорема и весь текст после неё	829—835	830 (3), 833 (3), 834 (3)	836; ДМ № 4, 6, 7

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь применять свойства логарифмической функции при выполнении упражнений типа **821—824, 827, 828**, а учащиеся классов с **углублённым** изучением математики — и при выполнении упражнений типа **829—831**.

§ 5. Логарифмические уравнения (2/3 ч)

Цель изучения параграфа — формирование умения решать различные логарифмические уравнения и их системы с использованием свойств логарифмов и общих методов решения уравнений.

Общие подходы к решению уравнений (действия с членами и частями уравнения, замена обозначения, разложение на множители части уравнения, метод подстановки при решении систем) можно специально не повторять, они отрабатываются в ходе решения конкретных уравнений.

До рассмотрения решений задач параграфа желательно повторить понятие уравнения-следствия, определение логарифма и его свойства, а также теорему предыдущего параграфа о равенстве логарифмов с одинаковыми основаниями. Этому повторению будут способствовать и следующие задания:

1. Решить уравнение:

1) $2^x = 32$;

2) $2^x = 0{,}5$;

3) $2^x = 7$;

4) $2^x = -2$;

5) $2^{\log_2 9} = x + 1$.

2. Вычислить:

1) $\log_2 48 - \log_2 3$;

2) $\log_6 4 + \log_6 \frac{1}{24}$;

3) $\log_5 \sqrt[4]{125}$.

3. Решить уравнение:

1) $\log_{\frac{2}{3}} x = -2$;

2) $\log_x 9 = 2$;

3) $\log_x 1 = 0$;

4) $\log_8 \log_3 x = 0$;

5) $\log_5 (2x - 1) = \log_5 7$;

6) $\log_3 x^2 = \log_3 4$;

7) $2\log_3 x = \log_3 4$.

4. Выяснить, какое из данных уравнений является следствием другого:

1) $\log_5 x + \log_5 (x - 4) = 1$ и $\log_5 (x(x - 4)) = 1$;

2) $\log_3 x^2 = \log_3 4$ и $2\log_3 x = \log_3 4$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 5, задачи 1—3	839, 842	841 (3)	846
2	§ 5, задачи 4, 5, 10	843—845	844 (3)	850, 851 (после разбора задачи 6)

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 5, задачи 1—4	839—843	841 (3)	846, 849
2	§ 5, задачи 5, 6, 10	844, 847, 851, 845	844 (3), 847 (3)	850, 848; ДМ № 9, 16
3	§ 5, задачи 8, 9	852, 856, 857, 853, 854	857 (2)	Задача 7 текста параграфа, 855; ДМ № 15

Учащиеся классов с **углублённым** изучением математики при работе с учебником должны понимать, что в тексте параграфа невозможно разобрать решения всех типов уравнений. Большую часть времени на уроках и дома эти учащиеся должны уделять самостоятельному поиску решений комбинированных и нестандартных задач (к которым, например, в этом параграфе относятся упражнения **848, 853, 855**, а также задачи, выделенные для математических классов).

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь решать логарифмические уравнения, аналогичные предложенным в упражнениях **840—843**. Учащиеся классов с **углублённым** изучением математики должны уметь решать уравнения типа **844, 845, 851**.

Решение упражнений

852. 1) При $x > 0$, $x \neq 1$ имеем $\log_{x^2} 9 = \log_x 3$, $\log_{\sqrt{x}} 4 = \log_x 16$, значит, $\log_x 3 + \log_x 16 = 2$, откуда $\log_x 48 = 2$, $x^2 = 48$, $x = 4\sqrt{3}$.

2) При $x > 0$, $x \neq 1$ имеем $\log_{x^2}16 = \log_x 4$, $\log_{\sqrt{x}}7 = \log_x 49$, значит, $\log_x 4 - \log_x 49 = 2$, откуда $\log_x \frac{4}{49} = 2$, $x^2 = \frac{4}{49}$, $x = \frac{2}{7}$.

853. 1) Исходное уравнение равносильно уравнению $6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x = 25 \cdot 10^x$, которое после деления обеих его частей на $5^x \neq 0$ приводится к виду $25t^2 + 25t - 6 = 0$, где $t = 2^x > 0$. Решая это уравнение, находим $t_1 = -1{,}2$, $t_2 = 0{,}2$. Условию $t > 0$ удовлетворяет лишь t_2.

Ответ. $x = \log_2 0{,}2$.

2) Исходное уравнение равносильно уравнению

$$(2^x + x + 4) \cdot 5^x = 10^x.$$

После деления обеих частей уравнения на $5^x \neq 0$ получим $2^x + x + 4 = 2^x$, откуда $x = -4$.

Ответ. $x = -4$.

854. 1) $x = 2$ не является корнем уравнения. Разделив обе части уравнения на $\lg^2(x-1) \neq 0$, получим

$$\left(\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}\right)^2 = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} + 2.$$

Относительно $t = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}$ уравнение примет вид $t^2 - t - 2 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = -1$. Решая уравнения $\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = 2$ и $25 \cdot 20^x = 25 \cdot 10^x$, $\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} = -1$, находим 4 корня, из которых только $x = 3$ и $x = \sqrt{2}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = \sqrt{2}$.

855. 1) Так как левая часть уравнения неотрицательна, то $\log_5 x > 0$, откуда $x > 1$. При $x > 1$ уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2\log_x 5 + 3} = \log_x 5$, $2t + 3 = t^2$, где $t = \log_x 5$, откуда $t_1 = 3$ и $t_2 = -1$. Если $t = 3$, то $\log_x 5 = 3$, $x^3 = 5$, откуда $x = \sqrt[3]{5}$; если $t = -1$, то $\log_x 5 = -1$, $\frac{1}{x} = 5$, откуда $x = \frac{1}{5} < 1$. Ответ. $x = \sqrt[3]{5}$.

2) Должно выполняться условие $2x \geqslant 1$, т. е. $x \geqslant \frac{1}{2}$. Пусть $\log_2 x = t$, тогда (при $x > \frac{1}{2}$) уравнение равносильно уравнению $2t^2 + 3t - 5 = (1 + t)^2$, или $t^2 + t - 6 = 0$, откуда $t_1 = -3$, $t_2 = 2$. Если $t = -3$, то $\log_2 x = -3$, откуда $x = \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$, а если $t = 2$, то $\log_2 x = 2$, откуда $x = 4$.

Ответ. $x = 4$.

858. $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2(2^x+1))=$ $=t(1+t)$, где $t=\log_2(2^x+1)$. Тогда исходное уравнение относительно t примет вид $t(1+t)=2$, или $t^2+t-2=0$, откуда $t_1=-2$, $t_2=1$. Если $\log_2(2^x+1)=-2$, то $2^x+1=\frac{1}{4}$ и $2^x=-\frac{3}{4}$, а это уравнение не имеет корней. Если $\log_2(2^x+1)=1$, то $2^x+1=2$, т. е. $x=0$.

Ответ. $x=0$.

859. $\log_x 5\sqrt{5}=\dfrac{\log_{\sqrt{5}}5\sqrt{5}}{\log_{\sqrt{5}}x}=\dfrac{3}{\log_{\sqrt{5}}x}$, где $x>0$, $x\neq1$. Относительно $t=\log_{\sqrt{5}}x$ исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{3+\frac{3}{t}}\cdot t=-\sqrt{6}\,, \tag{*}$$

откуда получим уравнение-следствие $(3t+3)t=6$ или $t^2+t-2=0$. Корнями последнего уравнения являются $t_1=-2$, $t_2=1$. Проверка показывает, что только $t=-2$ является корнем уравнения (*). Из равенства $\log_{\sqrt{5}}x=-2$ находим $x=\frac{1}{5}$.

860. 1) Заметим, что $x^{\lg 9}=9^{\lg x}$ (так как $\lg x^{\lg 9}=\lg 9^{\lg x}$), тогда $2\cdot 9^{\lg x}=6$, $3^{2\lg x}=3$, откуда $2\lg x=1$, т. е. $x=\sqrt{10}$.

861. Заметим, что $a>0$, $a\neq1$, $x>0$.

Обозначим $\log_5 x=t$, тогда получим $5t+\dfrac{t}{\log_5 a}-2t=a$, откуда $t\left(3+\dfrac{1}{\log_5 a}\right)=a$. Если $\log_5 a=-\dfrac{1}{3}$, т. е. $a=5^{-\frac{1}{3}}$, то уравнение не имеет корней. При $a>0$, $a\neq1$, $a\neq5^{-\frac{1}{3}}$ имеем $\log_5 x=\dfrac{a\log_5 a}{3\log_5 a+1}$, откуда $x=5^{\frac{a\log_5 a}{3\log_5 a+1}}$.

862. Исходное уравнение равносильно каждой из следующих систем:

$$\begin{cases}x\neq0,\\ \lg(ax)=2\cdot\lg(x+1);\end{cases}\qquad \begin{cases}x\neq0,\\ x+1>0,\\ \lg(ax)=\lg(x+1)^2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x\neq0,\\ x+1>0,\\ ax=(x+1)^2.\end{cases}$$

Квадратное уравнение системы $x^2+(2-a)x+1=0$ имеет единственный корень, если: 1) $D=0$, откуда $a=0$ и $a=4$; но только $a=4$ удовлетворяет последней системе; 2) $D>0$ и только один из корней $x_{1,2}=\dfrac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$ удовлетворяет системе; это происходит при $a<0$.

Ответ. При $a=4$ и $a<0$.

863. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - a - a^2 > 0, & (1) \\ x - a - a^2 \neq 1, & (2) \\ x = (x - a - a^2)^2. & (3) \end{cases}$$

Из неравенства (1) следует, что при $a = 0$ и $a = -1$ система не имеет решений, а значит, и исходное уравнение не имеет корней.

Уравнение (3) преобразуется в уравнение $x^2 - (2a^2 + 2a + 1) \times$ $\times\, x + (a^4 + 2a^3 + a^2) = 0$, дискриминант которого $D = (2a + 1)^2 \geqslant 0$ при любом a. При $a = -\frac{1}{2}$, очевидно, уравнение (3) имеет один корень $x = \frac{1}{4}$, удовлетворяющий системе. Из корней этого уравнения $x_{1,2} = \frac{2a^2 + 2a + 1 \pm |2a + 1|}{2}$ при значениях a, выбираемых из промежутков $a < -1$, $-1 < a < 0$ и $a \neq -\frac{1}{2}$, $a > 0$, имеем разные наборы корней.

Ответ. При $a = 0$ и $a = -1$ уравнение не имеет корней; при $a < -1$ — один корень $x = a^2$; при $a > 0$ — один корень $x = (a + 1)^2$; при $a = -\frac{1}{2}$ — один корень $x = \frac{1}{4}$; при $-1 < a < 0$ и $a \neq -\frac{1}{2}$ — два корня $x_1 = a^2$ и $x_2 = (a + 1)^2$.

§ 6. Логарифмические неравенства (2/3 ч)

Цель изучения параграфа — обучение решению логарифмических неравенств на основании свойств логарифмической функции.

Первый урок по теме в любом классе можно начать с повторения свойств логарифмической функции и устного выполнения следующих упражнений:

1. Записать каждое из чисел:

1) 1; 0; -1; $\frac{1}{3}$ в виде логарифма по основанию 2;

2) -3; -1; 0; $\frac{1}{2}$; 1 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{3}$.

2. Найти область определения функции:

1) $y = \lg(x + 1)$;

2) $y = \log_5(3 - x)$;

3) $y = \ln x^2$;

4) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1)$.

3. С помощью графика функции $y = \log_2 x$ (рис. 24) решить неравенство:

1) $\log_2 x > 0$; 2) $\log_2 x \geqslant 1$;

3) $\log_2 x \leqslant 0$; 4) $\log_2 x < 1$.

4. Выяснить, возрастающей или убывающей является функция:

1) $y = \log_\pi x$; 2) $y = \lg x$;

3) $y = \log_{\frac{1}{e}} x$.

5. Среди соотношений $x < 3$, $x > 3$, $0 < x < 3$ выбрать решение неравенства:

1) $\log_5 x > \log_5 3$; 2) $\log_5 x < \log_5 3$;

3) $\log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} 3$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} 3$.

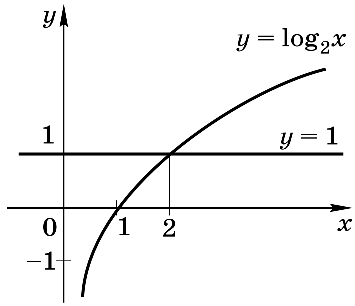


Рис. 24

Решение логарифмических неравенств можно записывать двумя способами: либо с помощью перехода к неравенству, решение которого совмещается с найденной областью определения исходного неравенства (как это сделано в задаче **1** текста параграфа), либо с помощью перехода к равносильной системе (как это сделано в задачах **2** и **3**). Практика показывает, что меньше ошибок при решении неравенств учащиеся допускают, записывая вместо исходного неравенства равносильную ему систему. В ряде случаев после записи системы становится очевидным, какое из её неравенств можно исключить.

Например, неравенство $\log_2(x^2 - 5x + 7) > 0$ равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0, \\ x^2 - 5x + 7 > 1, \end{cases}$ так как $0 = \log_2 1$, $1 = \log_2 2$ и $2 > 1$. Очевидно, что решение этой системы совпадает с решением неравенства $x^2 - 5x + 7 > 1$, т. е. неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$ (его решения $x < 2$ и $x > 3$). Решать же первое неравенство системы, обусловленное областью определения исходного неравенства, в данном случае бесполезная трата времени.

В классах с **углублённым** изучением математики на последнем уроке желательно провести *тест 5* или проверочную самостоятельную работу следующего содержания.

Решить неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{6}}(10 - x) + \log_{\frac{1}{6}}(x - 3) \geqslant -1$ $[\log_7(x - 3{,}5) + \log_7(x - 2) < 1]$;

2) $\log_3^2(x - 1) - 2\log_3(x - 1) \leqslant -1$ $[\log_{\frac{1}{5}}^2(x + 3) + 4\log_{\frac{1}{5}}(x + 3) \leqslant -4]$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 6 до задачи 2	864—866	865 (2)	868
2	§ 6, задача 2	867, 869	1) $\log_{2,6}(x^2-3x-9)>0$; 2) $\log_4(x-2)+$ $+\log_4(x-8)<2$; тест № 5	Задача 3 текста параграфа; 870, 871

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 6 до задачи 3	864—867	865 (3)	868, 898
2	§ 6, задача 3	869—872, $\log_7\log_{\frac{1}{3}}\log_8 x>0$	869 (3), 871 (3), $\log_7\log_{\frac{1}{3}}\log_8 x<0$	873; ДМ № 8, 9
3	§ 6, задача 4	873, 874, 875 (3, 4)	Проверочная самостоятельная работа или тест 5	875 (1, 2); ДМ № 11

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны справляться с решением неравенств типа **866, 867.** Учащиеся классов с **углублённым** изучением математики должны решать и задания типа **870, 874.**

Решение упражнений

876. $3^x=t$, $\frac{2}{t-1}\leqslant\frac{7}{t^2-2}$, $\frac{2(t^2-2)-7(t-1)}{(t-1)(t^2-2)}\leqslant 0$, $\frac{2t^2-7t+3}{(t-1)(t^2-2)}\leqslant 0$,

$$\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-3)}{(t-1)(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}\leqslant 0.$$

Методом интервалов (рис. 25) с учётом того, что $t>0$, по-

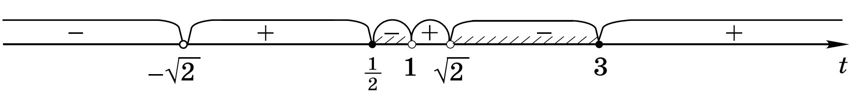


Рис. 25

лучим $\frac{1}{2} \leqslant t < 1$, $\sqrt{2} < t \leqslant 3$, т. е. $\frac{1}{2} \leqslant 3^x < 1$, $\sqrt{2} < 3^x \leqslant 3$. Итак, $-\log_3 2 \leqslant x < 0$, $\log_3 2 < x \leqslant 1$.

877. Пусть $4^x = t$, тогда $t > 0$, $t(\sqrt{16t^{-2} - 1} + 2) < 4|t-1|$, $\sqrt{16 - t^2} + 2t < 4|t-1|$.

а) Пусть $t \geqslant 1$, тогда $t \leqslant 4$ (так как $16 - t^2 \geqslant 0$) и неравенство примет вид $\sqrt{16 - t^2} + 2t < 4t - 4$, или $\sqrt{16 - t^2} < 2t - 4$. При $t \leqslant 2$ неравенство не имеет решений, а при $2 < t \leqslant 4$ оно равносильно неравенству $16 - t^2 < 4t^2 - 16t + 16$, при $5t^2 > 16t$, откуда $(t > 0)$ получаем $t > \frac{16}{5}$. Следовательно, $\frac{16}{5} < t \leqslant 4$, или $\frac{16}{5} < 4^x \leqslant 4$, $2 - \log_4 5 < x \leqslant 1$.

б) Пусть $0 < t < 1$, тогда $\sqrt{16 - t^2} + 2t < 4(1 - t)$, $\sqrt{16 - t^2} < 4 - 6t$.

При $t \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$ последнее неравенство равносильно неравенству $16 - t^2 < 16 - 48t + 36t^2$, $37t^2 - 48t > 0$, откуда $(t > 0)$ имеем $t > 1$ (противоречие). В этом случае решений нет.

Ответ. $2 - \log_4 5 < x \leqslant 1$.

Уроки обобщения и систематизации знаний (2/1 ч)

На этих уроках после анализа проверочных самостоятельных работ и тестов (проведённых на предыдущем уроке) повторяются свойства логарифмов и логарифмической функции, их применение при вычислении числовых значений логарифмических выражений, сравнении значений логарифмической функции, решении логарифмических уравнений и неравенств. Выполняются упражнения к главе VII.

В **общеобразовательных** классах на одном из отведённых для обобщения двух уроков учитель может провести проверочную самостоятельную работу, составленную из заданий «Проверь себя!» первого уровня. Последующее время можно посвятить анализу результатов выполнения этой работы; ответам учащихся на вопросы, приведённые в конце главы; выполнению упражнений, выбираемых по усмотрению учителя из номеров **878—893**.

В классах с **углублённым** изучением математики учитель организует повторение и систематизацию знаний с помощью вопросов к главе, заданий «Проверь себя!» второго уровня и упражнений **894—908**.

Решение упражнений

908. 1) При $t = \log_4 x$, где $x > 0$, $x \neq 1$, уравнение примет вид $\frac{4t^2 - t - 33}{t} \leqslant 0$, решениями которого являются $t < -5{,}5$ и $0 < t < 6$. Решениями исходного неравенства будут $0 < x < 4^{-5,5}$ и $1 < x < 4^6$.

914. 2) Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим $\left(3\lg^3 x - \frac{2}{3}\lg x\right)\cdot \lg x = 2\frac{1}{3}$ или $3t^4 - \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3} = 0$, где $t^2 = \lg x \geqslant 0$. Решая биквадратное (относительно t) уравнение, имеем $t_1^2 = 1$, $t_2^2 = -\frac{8}{9} < 0$. Итак, $\lg x = \pm 1$, откуда $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{10}$.

915. $\log_2(2^x - 5) - \log_2(2^x - 2) = \log_2 2^{2-x}$, откуда $\log_2(2^x - 5) = \log_2(2^{2-x}\cdot(2^x - 2)) = \log_2(2^2 - 2^3\cdot 2^{-x})$; $2^x - 5 = 4 - 8\cdot 2^{-x}$, $2^x = t$, $t^2 - 9t + 8 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 8$.

Если $t = 1$, то $2^x = 1$, $x = 0$ (не подходит, так как не входит в область определения исходного уравнения).

Если $t = 8$, то $2^x = 8$, $x = 3$ — удовлетворяет уравнению.

Ответ. $x = 3$.

916. 1) Неравенство равносильно такому: $0 < 2^{x+2} - 4^x \leqslant 9$, $2^x = t$ $(t > 0)$, $0 < 4t - t^2 \leqslant 9$, $\begin{cases} 0 < t < 4, \\ t^2 - 4t + 9 \geqslant 0 \end{cases}$ — верно для всех t.

Итак, $0 < t < 4$, т. е. $0 < 2^x < 4$, откуда $x < 2$.

2) $-2 = \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 5$, $0 < 6^{x+1} - 36^x \leqslant 5$, $6^x = t$, $0 < 6t - t^2 \leqslant 5$, $\begin{cases} 0 < t < 6, \\ t^2 - 6t + 5 \geqslant 0 \end{cases}$ (рис. 26). $0 < 6^x \leqslant 1$, $x \leqslant 0$, $5 \leqslant 6^x < 6$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$.

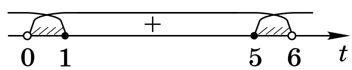


Рис. 26

Ответ. $x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$.

917. $\log_2 x\cdot\log_2(x-3) + 1 = \log_2(x(x-3))$, $\log_2 x\cdot\log_2(x-3) + 1 = \log_2 x + \log_2(x-3)$, $\log_2 x(\log_2(x-3) - 1) = \log_2(x-3) - 1$, откуда $(\log_2(x-3) - 1)(\log_2 x - 1) = 0$.

1) $\log_2(x-3) - 1 = 0$, $x - 3 = 2$, $x = 5$; 2) $\log_2 x = 1$, $x = 2$ — не входит в область определения исходного уравнения $(x > 3)$.

Ответ. $x = 5$.

918. При $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ исходное неравенство равносильно неравенству $\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + \frac{3}{2} < 0$ $(t = \log_a x)$;

$$\frac{2(2t+1) + 2(t-1) + 3(2t^2 - t - 1)}{(t-1)(2t+1)} < 0;$$

$$\frac{6t^2 + 3t - 3}{(t-1)(2t+1)} < 0; \quad \frac{(t+1)(2t-1)}{(t-1)(2t+1)} < 0.$$

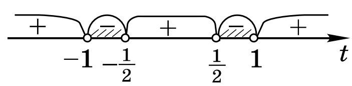


Рис. 27

Метод интервалов (рис. 27) даёт $-1 < \log_a x < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \log_a x < 1$.

Если $a > 1$, то $\frac{1}{a} < x < \frac{1}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a} < x < a$. Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{\sqrt{a}} < x < \frac{1}{a}$, $a < x < \sqrt{a}$.

При $a < 0$ и $a = 1$ неравенство не имеет решений.

919. 1) Параметр a может принимать любые положительные значения, кроме 1. При $a > 0$, $a \neq 1$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ \log_a((x-1)x) > \log_a a^2. \end{cases} \qquad (*)$$

Рассмотрим два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

а) При $a > 1$ система (*) равносильна системе $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ (x-1)x > a^2. \end{cases}$

Так как квадратное уравнение $x^2 - x - a^2 = 0$ имеет корни $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$, где $x_1 < 1$, $x_2 > 1$, то множеством решений системы будет промежуток $x > \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$.

б) При $0 < a < 1$ система (*) равносильна системе $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ (x-1)x < a^2. \end{cases}$

Множеством решений второго неравенства системы является интервал $\dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2} < x < \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$, а множеством решений системы — интервал $1 < x < \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$.

Ответ. При $a < 0$ и $a = 1$ неравенство не имеет решений. Если $a > 1$, то $x > \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$. Если $0 < a < 1$, то $1 < x < \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$.

2) Неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\log_a x^2 > 1 \text{ и } \log_a x^2 < -1. \qquad (**)$$

а) При $a > 1$ неравенства (**) равносильны совокупности неравенств $x^2 > a$ и $x^2 < \dfrac{1}{a}$, которая, в свою очередь, равносильна совокупности неравенств $x > \sqrt{a}$, $x < -\sqrt{a}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{a}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

б) При $0 < a < 1$ совокупность неравенств (**) равносильна каждой из следующих совокупностей неравенств: $x^2 < a$ и $x^2 > \dfrac{1}{a}$; $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, $x > \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ и $x < -\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Ответ. При $a < 0$, $a = 1$ неравенство не имеет решений. Если $a > 1$, то $x > \sqrt{a}$, $x < -\sqrt{a}$ и $-\dfrac{1}{\sqrt{a}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$. Если $0 < a < 1$, то $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, $x > \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ и $x < -\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

920. Через n лет масса вещества m станет равной $m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}}$, где m_0 — начальная масса вещества. Найдём значение n — числа лет, по прошествии которого масса вещества станет равной $\frac{m_0}{100}$.

Имеем $\frac{m_0}{100} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}} = \frac{1}{100}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 10^{-8}$, $n = \frac{8}{\lg 2} \approx 27$.

Ответ. Примерно через 27 лет.

921. Закон изменения массы m вещества имеет вид $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{T}}$, где m_0 — начальная его масса, n — число прошедших лет, T — время (период) полураспада вещества. Найдём T из уравнения $\frac{m_0}{10} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{T}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{T}} = 10^{-1}$, $T = 3\lg 2$. Полагая $\lg 2 \approx 0{,}3$, получаем $T \approx 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$ (лет).

Ответ. Примерно 11 месяцев.

922. Число лет n находится как наименьшее натуральное решение неравенства $2 \cdot 10^5 \cdot (1{,}07)^n \geqslant 3 \cdot 10^5$.

Ответ. Через 6 лет.

923. Значение t находится как корень уравнения $\frac{y_0}{3000} = y_0 e^{\frac{25t}{0{,}005}}$.

Ответ. $t \approx 0{,}0016$ с.

Контрольная работа № 6

Базовый уровень

1. Вычислить:

1) $\log_{\frac{1}{2}} 16$ $\left[\log_3 \frac{1}{27}\right]$; 2) $5^{1+\log_5 3}$ $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}} 7}\right]$;

3) $\log_3 135 - \log_3 20 + 2\log_3 6$ $[\log_2 56 + 2\log_2 12 - \log_2 63]$.

2. Сравнить числа

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}$ и $\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{5}$ $\left[\log_{0,9} 1\frac{1}{2}\right.$ и $\left.\log_{0,9} 1\frac{1}{3}\right]$.

3. Решить уравнение

$\log_5 (2x - 1) = 2$ $[\log_4 (2x + 3) = 3]$.

4. Решить неравенство

$\log_{\frac{1}{3}}(x - 5) > 1$ $\left[\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) > 2\right]$.

5. Решить уравнение

$\log_8 x + \log_{\sqrt{2}} x = 14$ $[\log_{\sqrt{3}} x + \log_9 x = 10]$.

6. Решить неравенство
$\log_{\frac{1}{6}}(10-x)+\log_{\frac{1}{6}}(x-3)\geqslant -1$ $\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+\log_{\frac{1}{2}}(9-x)\geqslant -3\right]$.

7. *(Дополнительно.)* Решить неравенство
$\log_3^2 x-2\log_3 x\leqslant 3$ $\left[\log_2^2 x-3\log_2 x\leqslant 4\right]$.

Углублённый уровень

1. Вычислить:

1) $\log_{\frac{1}{2}}16$ $\left[\log_3\frac{1}{27}\right]$; 2) $5^{1-\log_5 3}$ $[2^{2+3\log_2 5}]$;

3) $\log_3 135-\log_3 20+2\log_3 6$ $[\log_2 56+2\log_2 12-\log_2 63]$.

2. Сравнить числа
$\log_{\frac{3}{\pi}}\frac{3}{4}$ и $\log_{\frac{3}{\pi}}\frac{4}{5}$ $\left[\log_{\frac{4}{\pi}}\frac{5}{8}\text{ и }\log_{\frac{4}{\pi}}\frac{6}{7}\right]$.

3. Решить уравнение
$\log_5(2x-1)=2$ $[\log_4(2x+3)=3]$.

4. Решить неравенство
$\log_{\frac{1}{3}}(x-5)>1$ $\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>2\right]$.

5. Решить графически уравнение
$\log_3 x=\frac{6}{x}$ $\left[\log_{\frac{1}{2}}x=x^2-1\right]$.

---

6. Решить уравнение
$\log_8 x+\log_{\sqrt{2}}x=14$ $[\log_{\sqrt{3}}x+\log_9 x=10]$.

7. Решить неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{6}}(10-x)+\log_{\frac{1}{6}}(x-3)\geqslant 1$ $\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+\log_{\frac{1}{2}}(9-x)\geqslant -3\right]$;

2) $\log_3^2 x-2\log_3 x\leqslant 3$ $[\log_2^2 x-3\log_2 x\leqslant 4]$.

8. (*Дополнительно.*) Решить уравнение
$\log_{2x-1}(3x-2)=3-2\log_{3x-2}(2x-1)$
$[\log_{3x+1}(2x+1)=1+2\log_{2x+1}(3x+1)]$.

Глава VIII Тригонометрические формулы

Раздел школьного курса математики, называемый тригонометрией, неоднократно претерпевал изменения как по содержанию, так и по времени его изучения. Например, в прошлом тригонометрия была даже самостоятельным учебным предметом. В недавнем прошлом тригонометрия была искусственно распределена между курсами алгебры и геометрии основной школы и курсом алгебры и начал анализа в старших классах. Сейчас возвращается прежний, разумный порядок её изучения: в основной школе изучается тригонометрия треугольника, а в средней школе тригонометрия составляет целостный раздел курса алгебры и начал анализа (в данном учебнике она так и представлена). Особое значение приобретает изучение тригонометрии в классах с **углублённым** изучением математики, ориентированных на технические и естественно-научные профили. Свойства тригонометрических функций, преобразования тригонометрических выражений являются математическим аппаратом, необходимым для изучения колебательных процессов, законов автоматического регулирования различных процессов, элементов теории машин и механизмов и пр.

В школьной тригонометрии можно условно выделить три основных вопроса: тригонометрическая форма записи действительного числа и её свойства; рассмотрение преобразований тригонометрических выражений (включая решение уравнений) по формулам как алгебраическим, так и собственно тригонометрическим и, наконец, тригонометрические функции.

Первая проблема тесно связана с определением синуса, косинуса и тангенса угла и действительного числа. В основной школе они определялись для углов треугольника, измеряемых в градусах (градусом называется угол, равный $\frac{1}{180}$ доле развёрнутого угла). Исторически такое измерение углов было связано с шестидесятеричной системой исчисления и использовалось в астрономии.

Измерение углов в радианах тесно связано с движением точки по окружности. Если радиус окружности равен единице, а угол рассматривается как мера вращения, то за единицу измерения берётся центральный угол, длина дуги которого равна радиусу, т. е. единице. Термин «радиан» происходит от латинского слова radius — луч, спица колеса.

Так как между точками числовой прямой и точками единичной окружности существует однозначное соответствие, то каждому действительному числу можно сопоставить координаты точки единичной окружности, т. е. её косинус и синус. Например, числу π ставится в соответствие точка с координатами $(\cos\pi;\ \sin\pi)$, т. е. точка $(-1;\ 0)$.

Наименование «радиан» обычно опускают. Тем самым действительные числа, если это нужно, могут быть представлены в тригонометрической форме. Например, число 1 может быть представлено как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{2}$ или как $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, где α — любое действительное число. Это оказывается удобным при преобразованиях различных выражений, решении уравнений и записи некоторых формул геометрии и математического анализа. Например, длина дуги окружности радиуса R в α радиан равна αR;

один из замечательных пределов $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$, где x дан в радианах.

Рассматривая определения синуса и косинуса действительного числа α, естественно рассмотреть самые простые уравнения, в которых требуется найти число α, если синус или косинус его известен, например уравнения $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ и т. п. Поскольку для обозначения неизвестного по традиции используется буква x, то эти уравнения записывают как обычно: $\sin x = 0$, $\cos x = 1$ и т. п. Решение этих уравнений легко найти с помощью единичной окружности. Так, решить уравнение $\sin x = 0$ означает установить, какие точки окружности имеют ординаты, равные нулю. На окружности имеются две такие точки: (1; 0) и (−1; 0), а также все точки, полученные из найденных поворотом на углы, кратные 2π, т. е. $x = 0 + 2\pi k$ и $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Объединяя эти равенства в одно, получаем $x = nk$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Возможность выявления знаков синуса, косинуса и тангенса по четвертям является следствием симметрии точек единичной окружности относительно осей координат. Равенство $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ следует из симметрии точек, соответствующих числам α и $-\alpha$ относительно оси Ox.

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же числа или угла следует из тригонометрической формы записи действительного числа и определения синуса и косинуса как координаты точки единичной окружности. Так, основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ есть не что иное, как тригонометрическая форма записи уравнения окружности $x^2 + y^2 = 1$. Равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ является тождеством, так как любая точка $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ принадлежит единичной окружности. Равенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$ является выражением в тригонометрической форме свойства взаимно обратных чисел $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$ и определения тангенса и котангенса. Равенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$ также является тождеством, но только на множестве $\alpha \ne \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, так как знаменатель дроби не может быть равен нулю. К таким же тождествам на множестве принадлежат формулы $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ и др.

Вспомним, что при изучении степеней чисел рассматривались их свойства $a^{p+q} = a^p\cdot a^q$, $a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q}$. Аналогичные свойства справедливы и для синуса, косинуса и тангенса. Эти свойства называют формулами сложения. Практически они выражают зависимость между координатами суммы или разности двух чисел α и β через координаты чисел α и β. Обычно формулы сложения доказываются для косинуса суммы или разности, все остальные формулы сложения получаются как следствия.

Существуют различные способы вывода формул сложения. В учебнике приводится способ, опирающийся на свойства поворота на угол $\alpha + \beta$ как последовательное выполнение поворотов на углы α и β и на свойство сохранения расстояния между точками при повороте.

Формулы сложения являются центральными формулами тригонометрии, так как все другие можно получить как следствия: формулы двойного и половинного углов, формулы приведения, преобразования суммы и разности в произведение. Например, формула тангенса двойного угла следует из формулы тангенса суммы, формула тангенса половинного угла следует из формулы тангенса двойного угла. Заметим, что через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ представляются $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ в виде выражений, не содержащих корней.

Предметные цели изучения главы:

— развитие представлений о математике как части мировой культуры, о способах описания на математическом языке, в частности в терминах тригонометрии, явлений реального мира;
— формирование представлений о понятиях тригонометрии как математических моделях, позволяющих описывать процессы, изучаемые физикой, экономикой и другими науками;
— дальнейшее развитие понятия действительного числа посредством представления в тригонометрической форме;
— формирование умений определять и исследовать свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса действительного числа, используя однозначное соответствие между точками числовой прямой и точками окружности;
— обучение применению тригонометрических тождеств при вычислениях, преобразованиях тригонометрических выражений, решении простейших тригонометрических уравнений, используя при этом доказательные рассуждения.

Метапредметные цели изучения главы:

— развитие умений самостоятельно определять цели деятельности по усвоению и применению знаний тригонометрии как математической модели реальной действительности;
— формирование навыков учебно-исследовательской деятельности, готовности к поиску решения практических задач;
— развитие умений ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать полученную информацию, применять её в своей деятельности.

Личностные цели изучения главы:

— формирование мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики;

— развитие готовности учащихся к самостоятельной творческой деятельности;
— формирование навыков сотрудничества в процессе учебной, учебно-исследовательской, общественной деятельности.

В результате изучения главы VIII **все** учащиеся должны уметь отвечать на вопросы **1—9** к главе (знать определения синуса, косинуса и тангенса и основные формулы, выражающие зависимость между ними), а также уметь выполнять упражнения типа **1118—1129**, упражнения из рубрики «Проверь себя!».

Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь отвечать на все вопросы к главе и выполнять упражнения типа **1130—1136** и упражнения из рубрики «Проверь себя!».

§ 1. Радианная мера угла (1 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление с соответствием между точками числовой прямой и окружности; формирование понятия радиана; развитие умений самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать свою деятельность.

Для многих учащихся традиционно сложным является установление соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Методический приём «наматывания» нити, изображающей числовую прямую, на окружность единичного радиуса призван помочь учащимся осознать, что каждой точке прямой найдётся соответствующая точка на окружности. Таким образом, каждому действительному числу найдётся место на окружности, причём каждой точке окружности будет соответствовать бесконечное множество чисел. Более подробно об установлении соответствия между действительными числами и точками окружности учащиеся будут говорить на следующем уроке. Сейчас важно, чтобы школьники поняли, что новая мера угла как раз и помогает устанавливать такое соответствие.

Знакомство с новой единицей измерения углов опирается на известную из курса геометрии теорему о том, что мера дуги окружности равна мере центрального угла, опирающегося на эту дугу. Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1 окружности, меру дуги PM_1 естественно принять за единицу, так же как и меру центрального угла POM_1, который на неё опирается.

Важно обратить внимание учащихся на то, что в определении угла в 1 рад речь идёт об окружности произвольного радиуса и длине дуги, равной этому радиусу. Целесообразно предложить школьникам самостоятельно пояснить, почему для определения угла в 1 рад длина радиуса не имеет значения. Желательно, чтобы учащиеся сами предложили изображение двух или трёх концентрических окружностей, радиус одной из которых равен 1. Это предотвратит ошибки в формировании понятия радианной меры угла.

Не следует требовать заучивания формул перевода радиан в градусы и обратно. Желательно, чтобы учащиеся поняли их смысл и запомнили радианные меры часто встречающихся углов. На самом деле для практического использования при переводе углов из одной меры в другую достаточно запомнить соотношение π рад $= 180°$ и при необходимости составлять пропорции, записывая их так:

1) π рад — $180°$,

x рад — $30°$,

откуда $x = \frac{\pi \cdot 30°}{180°} = \frac{\pi}{6}$ рад;

2) π рад — $180°$,

$\frac{\pi}{3}$ рад — $x°$,

откуда $x° = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 180°}{\pi} = 60°$.

Поэтому решение задач **1** и **2** текста параграфа можно записать ещё и в таком виде. Решение упражнений **925** и **926** учащиеся могут записывать любым удобным способом. Учащимся **общеобразовательных** классов можно предложить самостоятельно поработать с дидактическими материалами (§ 21, примеры с решениями и задания **1—6**).

Решение задач **3** и **4**, в которых демонстрируется удобство применения радианной меры угла для нахождения длины дуги окружности и площади кругового сектора, рекомендуется предложить рассмотреть учащимся классов **углублённого** уровня по ходу самостоятельной работы, возможно и с учебником. Применение результатов решения этих задач можно продемонстрировать, например, при заполнении первых двух столбцов таблицы в упражнении **933** и при решении задач **929—931**. Желательно, чтобы учащиеся этих классов решили задачи 7—10 из дидактических материалов.

В **общеобразовательных** классах после изучения задач **3** и **4** с помощью учителя можно решить только упражнение **928**.

Упражнение **926** (4—6) способствует преодолению ложного представления о том, что мера угла, выраженная в радианах, есть число, кратное числу π или $\frac{\pi}{2}$, поэтому желательно выполнить его на уроке. С этой же целью полезно выполнить такое, например, упражнение:

Сравнить углы α и β, выраженные в радианах, если:

1) $\alpha = 2\pi$, $\beta = 6{,}3$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\beta = 4{,}75$.

В результате изучения параграфа все учащиеся должны знать определение радиана и уметь переводить радианную меру угла в градусы и обратно при выполнении таких упражнений, как **925** и **926**.

Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь выполнять упражнения типа **929—931**.

§ 2. Поворот точки вокруг начала координат (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — формирование понятия поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α и обучение нахождению положения точки окружности, соответствующей данному действительному числу; формирование навыков разрешения проблем, применения различных методов познания.

При изучении материала параграфа учащиеся продолжают знакомиться с окружностью как местом расположения точек, соответствующих действительным числам.

Но теперь эта окружность помещается на координатную плоскость так, что центр окружности совпадает с началом координат. Так как радиус окружности равен 1, её называют единичной. Важно, чтобы учащиеся не воспринимали единичную окружность как нечто новое: это та же окружность, что рассматривалась на прошлом уроке, и на ней расположились действительные числа. Координатная плоскость поможет найти место каждого действительного числа на окружности. Приём, выбранный для определения такого места, — поворот точки вокруг начала координат — вполне согласуется с наглядными представлениями о «наматывании» числовой оси на окружность.

Формирование понятия поворота точки единичной окружности должно идти без торопливости, строго в соответствии с текстом параграфа и активным использованием рисунков 104—112 учебника, которые можно продублировать на плакате или слайде с эффектом мультипликации.

Прежде чем вводить понятие поворота точки вокруг начала координат, целесообразно повторить материал предыдущего параграфа, используя следующие упражнения:

1. Найти радианную меру угла $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $135°$.

2. Дана окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1.

1) Построить угол с вершиной в начале координат, если одна из его сторон совпадает с положительным направлением оси Ox, а угол имеет радианную меру π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$.

2) Установить, где приблизительно находится точка B дуги AB, если $A(1;\ 0)$, а длина дуги равна 1; 2; 3; 4; 5.

3) Найти радианную меру угла, опирающегося на каждую из дуг, перечисленных в задании **2**.

Естественно возникает вопрос: что это за геометрическая фигура — угол, радианная мера которого равна 4? 5? Вводится понятие поворота точки вокруг начала координат. Здесь необходимо обратить внимание учащихся на то, что, говоря об угле, мера которого больше π рад, мы не вступаем в противоречие с определением угла, известным из курса геометрии: имеется в виду, что угол поворота не геометрическая фигура, а мера угла.

Примеры 1—4 поворотов из учебника можно дополнить следующими:

5) При повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол 3,5 рад получается точка, которая расположена в III четверти.

6) При повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол 7 рад точка совершит полный оборот, т. е. пройдёт путь $2\pi \approx 6{,}28$ рад, и ещё продвинется по дуге, длина которой меньше чем $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ рад; таким образом, она окажется в I четверти. В этой же четверти будет расположена точка, которая прошла путь 13,1 рад, так как она совершила два полных оборота и путь, меньший четверти оборота (меньше $\frac{\pi}{2}$).

Подобные примеры полезны для усвоения последующего материала, связанного с определением и изучением свойств тригонометрических функций.

Упражнение **938** (1—3) может быть выполнено у с т н о. Для выполнения упражнения **938** (4—6) рекомендуется сделать рисунок, что позволит использовать знания из курса планиметрии.

Запись упражнений **938—944** на доске должна сопровождаться устным пояснением, в какую сторону и на какую длину был совершён поворот. В тетрадях достаточно делать рисунки, аналогичные рисункам 104—112 учебника. Например, решения упражнений **942** (2) и **944** (2) могут быть записаны так:

942. 2) $\alpha = -\frac{7\pi}{2} = -3\pi - \frac{\pi}{2}$, $M(0;\ 1)$ (рис. 28).

944. 2) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (рис. 29).

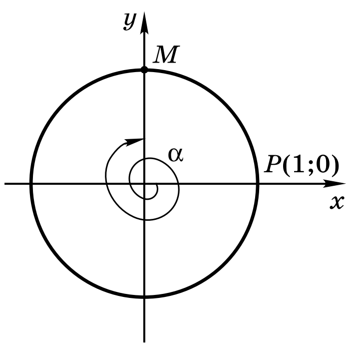


Рис. 28

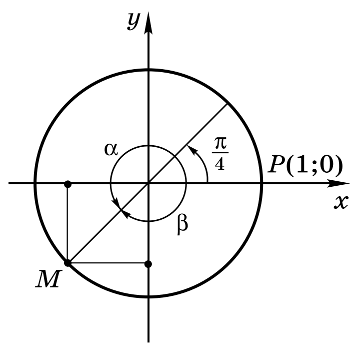


Рис. 29

На в т о р о м уроке можно провести с а м о с т о я т е л ь н у ю работу на 10 мин.

1. Привести примеры трёх чисел (углов поворота) α, если $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ $\left[\alpha_0 = -\frac{\pi}{3}\right]$.

2. Точка M единичной окружности получена в результате поворота точки $P(1;\ 0)$ на угол α, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. В какой четверти расположена точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

1) $\pi - \alpha$; 2) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; 3) $\alpha - \pi$ $\left[1)\ \pi + \alpha;\ 2)\ \frac{\pi}{2} - \alpha;\ 3)\ \alpha - \frac{\pi}{2}\right]$?

Пояснений к выполнению заданий требовать не следует, достаточно кратких ответов на каждый вопрос.

Учащимся классов **углублённого** уровня добавить четвёртое задание из упражнения **952 (5, 6)** или из дидактических материалов.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 2	938—940; ДМ § 22 № 1—6	940 (1, 2)	950 (1, 2)
2		942, 944—948; ДМ § 22 № 8, 10	945 (2, 3)	949

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 2	938, 939, 946—949	946 (1, 2), 949 (3, 4)	951, 956
2		950, 952 (1—4), 955	В тексте пособия	953, 954; ДМ № 14—18

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь выполнять упражнения типа **939, 941, 942, 944—946.** Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь выполнять упражнения типа **946—949.**

Решение упражнений

953. Скорость удаления равна $\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{15}=\frac{\pi}{15}$, так как $48^\circ=\frac{4\pi}{15}$. Время t, за которое точка A первый раз совпадёт с точкой B, равно $\pi:\frac{\pi}{15}=15$ (мин). На каждое следующее совпадение понадобится времени больше в 2 раза, т. е. каждое k совпадение произойдёт через $15+30(k-1)$ мин.

§ 3. Определение синуса, косинуса и тангенса угла (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — введение понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла (числа); обучение их нахождению для чисел вида $\frac{\pi}{2}k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$; ознакомление с применением определений синуса и косинуса при решении простейших тригонометрических уравнений; развитие умений ясно и точно излагать свою точку зрения, используя терминологию, известную из курса геометрии основной школы и новые термины.

Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса вводятся для произвольного **угла**, однако необходимо обратить внимание учащихся на то, что произвольный угол выражается действительным числом радиан. Поэтому можно говорить об определениях синуса, косинуса, тангенса, котангенса **числа**, а в дальнейшем и о тригонометрических функциях числового аргумента. Полезно по ходу уроков пользоваться и тем и другим термином, подчеркивая, что они равноправны.

С помощью рисунка 114 учебника при введении определений синуса и косинуса необходимо предостеречь учащихся от сопоставления синуса и косинуса с длинами отрезков, выделенных цветом на осях координат. Чтобы предупредить подобные ошибки, рекомендуется рассмотреть рисунки (рис. 30, 31), на которых значения абсциссы или ординаты точек отрицательны.

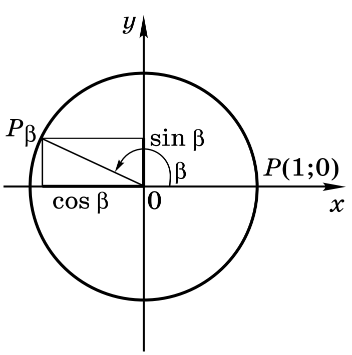


Рис. 30

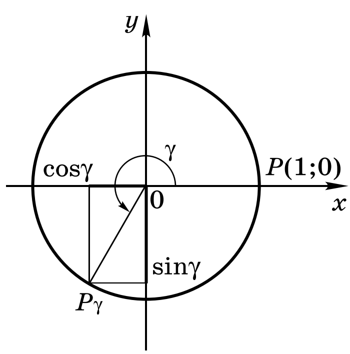


Рис. 31

На единичной окружности находятся значения тригонометрических функций углов, кратных $\frac{\pi}{2}$, и по значениям синуса и косинуса, равным ± 1 и 0, отыскиваются соответствующие значения аргумента. На данном этапе функциональные термины не используются (тригонометрические функции будут изучаться в 11 классе), пока говорим о синусе, косинусе, тангенсе угла (числа).

Для формирования понятий синуса и косинуса числа полезными являются такие упражнения, как **957** (5—7).

Упражнения **958—961** рекомендуется выполнять, используя единичную окружность, чтобы учащиеся вновь и вновь находили положение точки и определяли её координаты.

Прежде чем решать уравнения (упр. **963**), можно вернуться к упражнению **957** (1—4) и выполнить его на готовом рисунке единичной окружности.

На данном этапе обучения решение уравнений рассматривается только для закрепления определений синуса и косинуса числа. В дальнейшем умение решать уравнения $\sin x = \pm 1$, $\cos x = \pm 1$, $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ позволит значительно расширить систему упражнений при изучении формул тригонометрии.

Упражнения **968**, **969** могут не рассматриваться в общеобразовательных классах, но в классах углублённого уровня полезно потратить несколько минут на работу с микрокалькулятором.

Прежде чем вводить определения синуса, косинуса, тангенса, котангенса, полезно повторить известный из курса планиметрии материал с помощью упражнений:

1. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла $30°$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $120°$.

2. Дать определения синуса, косинуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника (перед выполнением упражнения **962** показать, как согласуется это определение с тем, что сформулировано для любого угла).

Кроме того, желательно *устно* выполнить задания:

1. Назвать хотя бы один угол, на который нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат, чтобы получить точку $A(-1;\ 0)$; $B(1;\ 0)$; $C(0;\ -1)$; $D(0;\ 1)$; $E\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Определить четверть, в которой находится точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол, равный 2; 3,7; 5; −2; −3,7; −5 рад.

3. Сравнить числа $\frac{\pi}{2}$ и 1; 2π и 4; $-\frac{3\pi}{2}$ и −4.

4. Верно ли высказывание: «Координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол 6 рад, имеют разные знаки»?

Повторение геометрии поможет и при выполнении упражнений **970, 971**, которые рекомендуется решить с учащимися классов **углублённого** уровня.

970. Оценим разность чисел:

$\sin 20° - \sin 20° \cdot \operatorname{tg} 40° = \sin 20°(1 - \operatorname{tg} 40°)$, $\sin 20° > 0$,

$1 - \operatorname{tg} 40° > 0$, так как $\dfrac{\cos 40° - \sin 40°}{\cos 40°} > 0$.

Действительно, в треугольнике OAB единичной окружности длина катета AB (ординаты точки A), лежащего против $\angle O = 40°$, меньше длины катета OB (абсциссы точки A), лежащего против $\angle A = 50°$ то есть $\cos 40° > \sin 40°$.

К этой задаче можно вернуться и позже, после изучения необходимых формул или после доказательства монотонности тригонометрических функций в первой четверти (11 класс).

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Определения синуса и косинуса, задачи 1—4	ДМ § 23 № 1; 957—960, 965; ДМ § 23 № 4, 5	957 (2, 3), 958 (3, 4)	967 (1—3)
2	Определение тангенса, задача 5	961, 962, 964, 963; ДМ § 23 № 19, 20, 25	963 (3, 4)	966, 967; ДМ § 23 № 31

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Определения синуса и косинуса, задачи 1—4	957, 960, 964, 965, 967 (1, 3); ДМ № 6, 7, 8	957 (5, 7), 966 (1)	971; ДМ № 14—16
2	Определение тангенса, задача 5	961, 962, 966 (2), 968, 969	968 (3, 4)	970, 972; ДМ № 17

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определения синуса, косинуса, тангенса и уметь выполнять такие упражнения, как **957, 959, 962, 964**. Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь выполнять такие упражнения, как **966, 967, 969**.

Решение упражнений

971. Пусть AB — хорда единичной окружности с центром O, тогда центральный угол, соответствующий хорде AOB. По теореме косинусов $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos AOB$, но $AO = BO = r = 1$, следовательно, $AB^2 = 2 - 2\cos AOB$, $AB^2 = 2(1 - \cos AOB) = 2 \cdot 2\sin^2 \frac{AOB}{2}$, откуда $AB = 2\sin\frac{AOB}{2}$.

972. 1) $\cos\left(3\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}\right) - \mathrm{ctg}1 = \cos\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) - \mathrm{ctg}1 = \cos 1 - \mathrm{ctg}1 = \cos 1 - \frac{\cos 1}{\sin 1} = \frac{\cos 1 \cdot \sin 1 - \cos 1}{\sin 1} = \frac{\cos 1(\sin 1 - 1)}{\sin 1} < 0$, так как $\cos 1 > 0$, $\sin 1 > 0$, но $\sin 1 - 1 < 0$.

§ 4. Знаки синуса, косинуса и тангенса (1/1 ч)

Цели изучения параграфа — обучение нахождению знаков значений синуса, косинуса, тангенса числа; развитие умений самостоятельно ставить цель деятельности и контролировать свою деятельность.

Приступая к изучению материала параграфа, стоит убедиться в том, что учащиеся хорошо понимают, как располагаются на единичной окружности точки, соответствующие различным действительным числам, и знают определения синуса, косинуса, тангенса угла. С этой целью можно выполнить самостоятельную работу, которую желательно проверить в классе, после чего приступать к изучению нового материала.

1. Вычислить:

1) $\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi$; 2) $\mathrm{tg}\,\pi + \sin\frac{3\pi}{2}$

$\left[1)\ \sin\pi + \cos\frac{\pi}{2};\ \ 2)\ \cos\frac{3\pi}{2} - \mathrm{tg}\,2\pi\right]$.

2. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол a, если:

1) $a = \frac{3\pi}{7}$; 2) $a = \frac{5\pi}{4}$; 3) $a = -\frac{14\pi}{3}$; 4) $a = 367°$

$\left[1)\ a = \frac{2\pi}{5};\ 2)\ a = \frac{9\pi}{8};\ 3)\ a = -\frac{10\pi}{3};\ 4)\ a = 380°\right]$?

3. Какие знаки имеют абсцисса и ордината точки, полученной при повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол $\frac{7\pi}{3}$ $\left[\frac{3\pi}{5}\right]$?

Изучение материала параграфа желательно организовать так, чтобы учащиеся действовали самостоятельно, с минимальной помощью учителя, так как здесь повторяется и закрепляется материал, изученный в § 1—3.

В качестве подготовки к изучению нового материала можно использовать и упражнения **973**, **974** или дидактические материалы.

Наибольшие трудности у учащихся вызывает определение знака тригонометрической функции, если угол выражен рациональным числом, как в упражнении **979**.

979. 2) Так как $\alpha = 3$, $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ ($\pi \approx 3{,}14$), то числу α соответствует точка во II четверти, поэтому $\sin 3 > 0$, $\cos 3 < 0$, $\operatorname{tg} 3 < 0$.

Перед решением упражнения **980** полезно выполнить **974**; упражнение **980** можно записать так:

980. 3) $\cos(\alpha - \pi) < 0$, так как точки, соответствующие числам $\alpha - \pi$, расположены в III четверти.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Весь материал параграфа	ДМ § 24 № 1—3, 7, 8; 973—980, 982	975 (3, 4), 976 (3, 4), 977 (3, 4)	985; ДМ § 24 № 27

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Весь материал параграфа	978—984; ДМ № 7, 9	980 (2, 5, 6), 983 (3), 985 (1)	986, 989; ДМ № 10, 11

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь определять знаки синуса, косинуса, тангенса числа при выполнении таких упражнений, как **975 (1—3)**, **976 (1—3)**, **977 (1—3)**.

Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь выполнять упражнения, такие, как **980**, **981**, **984**.

Решение упражнений

986. 1) Так как $\sin\alpha+\cos\alpha=-1{,}4$ и $|\sin\alpha|<1$, $|\cos\alpha|<1$, то отрицательное число в сумме может получиться только при сложении двух отрицательных чисел, т. е. $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha<0$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

2) Разность $\sin\alpha-\cos\alpha$ может быть положительным числом, большим единицы, только при условии, что $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, т. е. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

§ 5. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — вывод формул зависимости между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла (числа); обучение применению этих формул для вычисления значений синуса, косинуса, тангенса числа по заданному значению одного из них; развитие умений взаимодействовать в процессе изучения нового материала.

Центральное место в изучаемой теме должно занимать основное тригонометрическое тождество и его применение. Использование основного тригонометрического тождества значительно упрощает преобразование тригонометрических выражений, играет важную роль в решении уравнений.

Поэтому важно организовать работу таким образом, чтобы все учащиеся осознанно применяли полученные знания. Этому может способствовать деятельность в группе, когда каждый может получить необходимую помощь, а возможно, и самостоятельно более глубоко понять учебный материал, поясняя непонятное другому участнику группы.

При доказательстве тождества в учебнике ссылаются на уравнение окружности с центром в начале координат, которое учащиеся изучали в основной школе.

На уроках, посвящённых изучению данного параграфа, основное внимание уделяется применению тождества для вычисления значений синуса, косинуса и тангенса одного и того же числа. Осознанному восприятию тождества способствует упражнение **991**, которое желательно выполнить сразу после доказательства тождества. Упражнение легко выполняется устно, однако полезно зафиксировать в тетрадях решение одного из заданий, например, в такой форме:

991. 3) Так как $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{23}}{5}$, то

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{5}\right)^2=\frac{3}{25}+\frac{23}{25}=\frac{26}{25}\neq\mathbf{1},\ \text{т. е. } \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq 1.$$

Ответ. Не могут.

Затем полезно выполнить несколько упражнений на распознавание основного тригонометрического тождества.

1. Найти значение выражения:

1) $\sin^2 m + \cos^2 m$;

2) $\cos^2 x + \sin^2 x$;

3) $\sin^2 2a + \cos^2 2a$;

4) $\sin^2 (x + y) + \cos^2 (x + y)$.

2. Выразить число 1 через угол α, если:

1) $\alpha = 3x$; 2) $\alpha = \frac{x}{2}$;

3) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 4) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Закреплению умений решать задачи, подобные задачам **1** и **2** текста параграфа, способствуют упражнения **992—994**. Выполнение последнего полезно сопровождать изображением единичной окружности, что будет служить формированию потребности применять окружность для решения самых разных задач.

994. 3) Если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ либо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ (рис. 32).

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Ответ. $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

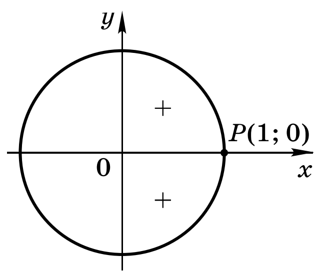


Рис. 32

Равенства, связывающие $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$, важны для учащихся: это для них первые тригонометрические равенства, справедливые не для всех действительных чисел. Термин «тождество» пока не употребляется: на данном этапе формулы применяются только для вычислений.

Вывод формулы $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ и следствий из этой формулы и основного тригонометрического тождества очень прост.

Главную трудность составляет выяснение множества, на котором эти равенства выполняются. Поэтому вновь особую роль играет рисунок: отметив точки, в которых не существует $\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, затем $\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \neq \pi k$, k, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 33),

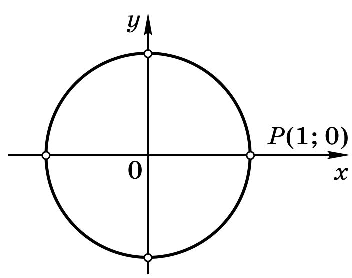


Рис. 33

учащиеся убеждаются в том, что равенство $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ не может выполняться для тех значений числа α, которые кратны $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Подобные рассуждения не стоит игнорировать, так как они являются пропедевтикой к выбору ответов при решении уравнений.

В качестве упражнений для актуализации знаний перед изучением новой темы можно предложить, например, такие:

1. Найти абсциссы точек, принадлежащих окружности с центром в начале координат и радиусом 1, если эти точки имеют ординату 0,8.

2. Дана окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 1$. Принадлежат ли ей точки:

$$A\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right),\ B(0{,}3;\ 0{,}7),\ C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)?$$

3. Определить знаки значений

$$\sin 190°,\ \cos 275°,\ \operatorname{tg}\frac{5\pi}{6},\ \sin\frac{7\pi}{6},\ \cos\frac{1}{3},\ \operatorname{tg} 6.$$

4. Сравнить значения выражений: $\sin 3{,}8$ и $\sin 0{,}25$; $\cos 2{,}1$ и $\cos 0{,}75$.

Материал параграфа по урокам можно распределить по-разному. (Так, в классах **углублённого** уровня на первом уроке можно изучить весь теоретический материал и начать выполнять упражнения, а на втором уроке решать упражнения к параграфу.)

Распределение материала параграфа по урокам (один из вариантов) отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	Основное тригонометрическое тождество, задачи 1 и 2	990—992, 993 (1, 2); ДМ § 25 № 5, 6	993 (3, 4)	998; ДМ § 25 № 10—13
2	Равенства 4—7, задачи 3—6	994—996	ДМ § 25 № 1	997; ДМ § 25 № 16—18

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Основное тригонометрическое тождество, задачи 1—6	991, 993, 994; ДМ № 5, 6	994 (3, 4), 996	1000; ДМ № 11
2		997 (1, 2), 998, 999	997 (3, 4)	1001; ДМ № 12

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать основное тригонометрическое тождество и равенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$ и уметь применять их при выполнении таких упражнений, как **993**.

Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь применять изученные формулы при выполнении таких упражнений, как **994**, **995**, **998**.

Решение упражнений

1000. 1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = p^2$, $2\sin\alpha\cos\alpha = p^2 - 1$, $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 - p^2$, $\sin\alpha - \cos\alpha = \pm\sqrt{2 - p^2}$.

2) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = p^2$, $2\sin\cos\alpha = p^2 - 1$, $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{p^4 - 2p^2 + 1}{4}\right) = \frac{1}{2} + p^2 - \frac{1}{2}p^4$.

1001. 1) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = m^2$, $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = m^2 - 2$.

2) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = m^2 - 4$ (см. задание 1), $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{m^2 - 4}$.

3) $(\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) = m(m^2 - 3)$ (см. задание 1).

§ 6. Тригонометрические тождества (2/3 ч)

Цели изучения параграфа — ознакомление с понятием тождества как равенства, справедливого для всех допустимых значений букв; обучение доказательству тождеств с использованием изученных формул; формирование умений выбирать успешные стратегии в различных ситуациях.

Впервые в 10 классе с понятием тождества как равенства, справедливого не для любого действительного числа, учащиеся встретились при изучении основного логарифмического тождества.

Однако задач на доказательство тождеств перед школьниками не ставилось, т. е. им не приходилось доказывать справедливость равенства, выполняя преобразования с использованием формул, которые верны лишь при допустимых значениях букв.

Уже первая задача параграфа поставлена так, чтобы можно было на её примере познакомить учащихся с рассуждениями, которые используются для доказательства тождеств, если выполняемые преобразования верны при определённых значениях α.

Несмотря на то что в учебнике сразу же оговаривается, что при доказательстве тождеств допустимые значения букв не устанавливают, если этого не требуется в условии задачи, полезно (а в классах **углублённого** уровня необходимо) при выполнении одного-двух упражнений на каждом уроке устно обсуждать, при каких значениях α верны выполненные преобразования. При решении упражнений **1002 (**3, 4**)**, **1006**, **1007** достаточно, чтобы учащиеся общеобразовательных классов могли не делать ошибок при выполнении преобразований.

В классах с **углублённым** изучением математики при решении задач **3**, **4**, **5** текста параграфа необходимо выявить допустимые значения углов. В задаче **3** учащиеся должны будут увидеть, что условия отличия от нуля косинуса и от единицы синуса можно коротко записать после иллюстрации на единичной окружности, как $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в задачах **4** и **5** достаточно вспомнить, при каких значениях букв существует тангенс угла, так как выражения, стоящие в знаменателях, не могут обращаться в нуль. Выполняя упражнения параграфа, рекомендуется анализировать текст задания и намечать возможные пути решения, выбирая оптимальный. Полезно выполнять преобразования, если это возможно, различными способами, используя разные формулы.

Различные способы доказательства тождеств, которые приводятся в учебнике, полезно показать на одной и той же задаче. Например, задачу **4** можно предложить учащимся решить ещё и нахождением разности левой и правой частей, и приведением левой части к виду правой. Различными способами целесообразно провести доказательство, например, таких тождеств, как в упражнениях **1002 (**3, 5**)**, **1007 (**6, 7**)**.

Упражнения **1002 (**5**)** и **1007 (**6**)** можно выполнить и записать, например, так:

1002. 5) I с п о с о б. Докажем, что разность левой и правой частей равна нулю:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \sin^2\alpha - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} - (1-\sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = 0.$$

II способ. Преобразуем левую часть так, чтобы она была равна правой:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

III способ. Преобразуем отдельно левую и правую части:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha.$$

$1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha.$

1007. 6) I способ. Докажем, что разность левой и правой частей равна нулю:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=0.$$

II способ. Преобразуем левую часть, для чего умножим числитель и знаменатель дроби левой части тождества на $\sin\alpha(\sin\alpha\neq 0)$, $1-\cos\alpha\neq 0$; $\alpha\neq\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$ — допустимые значения (рис. 34).

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1-\cos^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

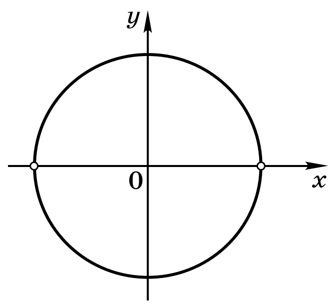


Рис. 34

Рекомендуется систематически решать уравнения, которые обычно приводятся в конце упражнений к параграфу. Они не сложны, но позволяют активно использовать изучаемые формулы, и их решение является пропедевтикой к изучению следующей главы.

На уроках в любых классах полезно устно выполнять упражнения такого, например, типа:

1. Упростить:

1) $(\sin x+\cos x)^2$; 2) $(1-\cos^2 x)-\sin^2 x$;

3) $\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}2x$; 4) $\sin x\operatorname{ctg}x$.

2. Могут ли числа a и b быть одновременно синусом и косинусом одного и того же числа:

1) $a=-1,\ b=0{,}1$; 2) $a=1,\ b=1$;

3) $a=\frac{\sqrt{3}}{2},\ b=\frac{1}{2}$; 4) $a=-0{,}8,\ b=-0{,}6$?

На одном из уроков желательно провести небольшую самостоятельную работу, проверяющую усвоение материала первых параграфов главы. Можно использовать такой, например, тест с выбором ответа:

1. Найти $\cos 270°$.

1) 0; 2) 1; 3) −1; 4) $\frac{1}{2}$.

2. Найти значение выражения $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. Найти четверть, в которой расположен угол α, если $\sin\alpha > 0$, а $\cos\alpha < 0$.

1) I; 2) II; 3) III; 4) IV.

4. Среди заданных чисел найти положительное число.

1) $\sin 1$; 2) $\cos(-3)$; 3) $\operatorname{tg} 2$; 4) $\operatorname{ctg} 5$.

5. Среди заданных пар чисел найти такую, в которой одно из чисел — значение $\sin\alpha$, а другое — значение $\cos\alpha$.

1) 1 и −1; 2) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 1 и 1,1; 4) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$.

6. Среди заданных чисел найти такое, которое равно $\sin\alpha$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; 3) $\frac{7}{9}$; 4) $-\frac{7}{9}$.

7. Упростить выражение $(\sin^2\alpha - 1) : \cos^2\alpha$.

1) $\sin^2\alpha$; 2) 1; 3) −1; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$.

В классах **углублённого** уровня целесообразно добавить задание **8** на доказательство тождеств.

8. Доказать тождество

$$\left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}.$$

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	Задачи 1 и 2	1002—1004 (1, 2), 1006, 1011 (1); ДМ § 26 № 1, 2	1002 (4, 6), 1003 (1, 2)	1008; ДМ § 26 № 6
2	Задачи 3—5	1004 (3, 4), 1005, 1007 (1—3); ДМ § 26 № 3, 4	1005	1007; ДМ § 26 № 9; 1011 (3)

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Задачи 1—5	1002 (3—6)—1004 (3, 4), 1011 (1); ДМ № 2	1005	1012
2	Задачи 1—5	1004, 1007, 1011	1008	1015 (1, 3)
3		1006, 1009, 1010; ДМ № 6	1011 (3)	1013, 1014; ДМ № 9

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение тождества и уметь применять способы доказательства тождеств при выполнении таких упражнений, как **1002, 1003.**

Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь решать упражнения, такие, как **1007, 1009.**

Решение упражнений

1012. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = 5;$

$$(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2) - 2 + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - 2 + 5 = 25 - 2 + 5 = 28.$$

1013. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{(1 - 0{,}36)}{2} = 0{,}32.$

1014. $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha) = 0{,}2(1 + \cos\alpha\sin\alpha);$

$(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 1 - 2\cos\alpha\sin\alpha, \quad \cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}(1 - 0{,}04) = 0{,}48;$

$\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = 0{,}296.$

1015. 1) $\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin^3\alpha\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \cos^3\alpha\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \sin^3\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + \cos^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha.$

3) $$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{\sqrt{(1+\sin\alpha)^2} - \sqrt{(1-\sin\alpha)^2}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} =$$

$= \frac{1+\sin\alpha - 1 + \sin\alpha}{-\cos\alpha} = -2\operatorname{tg}\alpha$, так как $90° < \alpha < 180°$ по условию.

§ 7. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$ (1 ч)

Цели изучения параграфа — обучение сведению вычислений значений синуса, косинуса, тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов; развитие умений самостоятельно контролировать и корректировать свою деятельность.

Для вывода формул (1)—(3), которые далее будут применяться при исследовании функций на чётность и нечётность, достаточно воспользоваться рисунком 121 учебника, и в дальнейшем учащиеся должны в основном работать самостоятельно под контролем учителя.

Обучение применению формул при вычислениях и преобразованиях должно стать основным на уроке. Однако не стоит пренебрегать возможностью использовать формулы при решении уравнений. Решение простейших уравнений желательно сопровождать иллюстрацией решения на единичной окружности до тех пор, пока учащиеся не перестанут допускать ошибки в записи ответа. Решение упражнения **1021** (3) можно записать так:

1021. 3) $\cos(-2x) = 1$, $\cos 2x = 1$, $2x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 35).
Ответ. $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

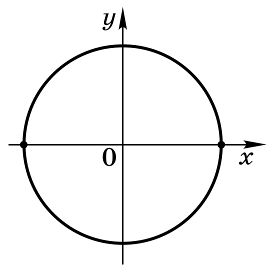


Рис. 35

Распределение материала параграфа отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Весь материал параграфа	1016, 1017, 1021 (1—4); ДМ § 27 № 3, 5	1016 (4), 1017 (1, 2)	1021 (5, 6), 1019; ДМ § 27 № 14, 15

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	Весь материал параграфа	1018, 1020, 1021, 1022; ДМ № 1, 3, 4	1019, 1020 (2)	1023, ДМ № 5

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать формулы **(1)—(3)** и уметь их применять при выполнении упражнений типа **1016, 1017** (1, 2). Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь выполнять упражнения, такие, как **1019, 1022.**

§ 8. Формулы сложения (2/3 ч)

Цель изучения параграфа — обучение применению формул сложения при вычислениях и выполнении преобразований тригонометрических выражений; развитие навыков учебно-исследовательской деятельности, навыков разрешения проблем.

Теорема, которая доказывается в параграфе, как уже указывалось выше, является центральной теоремой главы. Все остальные формулы представляют собой следствия этой теоремы. Отсюда вытекает значимость материала параграфа для последующего изучения всего курса тригонометрии.

Доказательство теоремы (доказательство обязательно только для учащихся классов **углублённого** уровня) опирается на формулу расстояния между двумя точками, которая изучается в курсе алгебры основной школы.

Вспомнить формулу и подготовить учащихся к доказательству теоремы можно с помощью решения такой задачи:

«Найти расстояние между точками A и B единичной окружности, которые соответствуют числам $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = -\frac{\pi}{6}$».

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

где $A\left(\cos\frac{\pi}{3}; \sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$B\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right); \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (рис. 36).

$$AB^2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right)^2 +$$

$$+\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\right)^2 = 2, \ AB = \sqrt{2}.$$

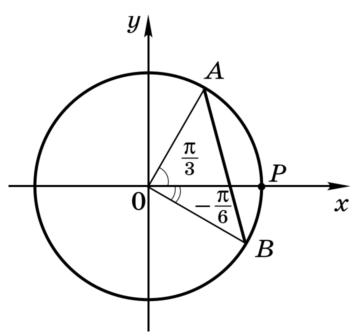


Рис. 36

Полезно также предварительно повторить основное тригонометрическое тождество при различной записи угла, например, найти значение выражения:

1) $\sin^2\beta + \cos^2\beta$;

2) $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)$.

Умение доказывать теорему не является обязательным для учащихся **общеобразовательных** классов, но разобрать доказательство желательно. Учащиеся классов **углублённого** уровня должны у м е т ь доказывать теорему, возможно, и другим способом, например опираясь на свойства скалярного произведения.

Если времени в общеобразовательном классе недостаточно, можно, используя рисунок 122 из учебника, который постепенно воспроизводится на доске (или с эффектом мультипликации на компьютере), обсудить принцип доказательства и записать в тетради его план.

1. Построить точки: $M\alpha$ — поворотом точки M_0 на угол α; $M_{-\beta}$ — поворотом точки M_0 на угол $(-\beta)$; $M_{\alpha+\beta}$ — поворотом точки M_0 на угол $\alpha + \beta$. Записать координаты этих точек.

2. Доказать равенство треугольников $M_{-\beta}OM_{\alpha}$ и $M_0OM_{\alpha+\beta}$.

3. Записать формулы расстояния между точками: 1) $M_{-\beta}$ и M_{α}; 2) M_0 и $M_{\alpha+\beta}$.

4. Выполнить преобразование и показать, что $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Все остальные формулы, которые вытекают из формулы (1), доказываются лишь заменой β на $-\beta$ (как при выводе формул (2) и (6)) либо использованием значений $\sin\frac{\pi}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{2}$ (задача **3**). В задачах **1**, **2**, **4**, **5** приводятся примеры применения формул (1)—(6), а в задаче **6** выводится формула тангенса суммы (необходимо выяснить, понимают ли учащиеся, при каких значениях α и β данное равенство верно).

На в т о р о м уроке в **общеобразовательных** классах можно провести с а м о с т о я т е л ь н у ю работу (20 мин) на проверку усвоения материала этого и предыдущих параграфов, например, такого содержания:

1. Какой знак имеет $\sin\alpha$, если $\alpha = \frac{3\pi}{4}$? $\alpha = -\frac{\pi}{6}$? $\alpha = 1140°$?

[Какой знак имеет $\cos\alpha$, если $\alpha = \frac{7\pi}{8}$? $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$? $\alpha = 920°$?]

2. Вычислить:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\left[\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}(-\pi)\right]$;

2) $\sin 67° \cos 23° + \cos 67° \sin 23°$ [$\cos 52° \cos 38° - \sin 52° \sin 38°$].

3. Доказать тождество

$$\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$$

$$\left[\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1\right].$$

4. Решить уравнение

$\cos 3x\cos 2x+\sin 3x\sin 2x=-1$

$[\cos 3x\cos x-\cos 3x\sin x=-1]$.

В классах **углублённого** уровня для проверки можно использовать упражнения учебника (номера указаны в таблице распределения по урокам) или дидактических материалов.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	Доказательство теоремы, задачи 1 и 2	1024, 1025, 1027, 1031; ДМ § 28 № 1, 2	1026	1040 (1); ДМ § 28 № 20
2	Задачи 3—5	1028, 1029, 1032, 1034; ДМ § 28 № 6, 7	В тексте параграфа	1040 (2); ДМ § 28 № 22

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	Доказательство теоремы, задачи 1—6	1026, 1029, 1031	1028 (1, 3); ДМ № 1, 2	1043 (1)
2		1030, 1034, 1035, 1036, 1039, 1040 (1)	1035 (1, 2), 1041 (1, 2); ДМ № 3	1044 (1)
3		1033, 1038, 1042	1040 (3, 4), 1041 (5, 6); ДМ № 4	1043 (2), 1044 (2); ДМ № 5, 6

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать формулы (1), (2), (5), (6) и уметь их применять при выполнении упражнений типа **1024, 1025, 1029**.

Учащиеся классов **углублённого** уровня должны знать формулы (1)—(7) и уметь применять их при выполнении таких упражнений, как **1032, 1033, 1035, 1040**.

Решение упражнений

1043. 1) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) = 1 + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1 + \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 2$, так как $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, а $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$.

2) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$.

$(1 - \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta) = -(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) + 1 + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)} + 1 + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = 2$, так как $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, а $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)}$.

1044. 1) $\sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2\beta + 2\sin(\alpha - \beta)\sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha - \beta) \times (\sin(\alpha - \beta) + 2\sin\beta\cos\alpha) + \sin^2\beta = \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta) + \sin^2\beta = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta(1 - \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha$.

2) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

$$\operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + 2\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

§ 9. Синус, косинус и тангенс двойного угла (1/1 ч)

§ 10. Синус, косинус и тангенс половинного угла (1/1 ч)

Цели изучения параграфов — ознакомление учащихся со следствиями теоремы сложения; обучение применению формул двойного угла при преобразованиях тригонометрических выражений, в частности при выводе формул половинного угла; развитие умений продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности.

Материал параграфов очень важен для продолжения изучения тригонометрии: все формулы, которые выводятся по ходу его изучения, часто применяются при решении тригонометрических уравнений, а в дальнейшем и при исследовании функций. Причём формулы двойного угла обязательны для изучения всеми учащимися, в то время как формулы преобразования половинного угла (в соответствии с требованиями стандарта) даются лишь ознакомительно.

Вывод формул двойного угла (§ 9) не составит труда, поэтому можно предложить учащимся либо вывести эти формулы самостоятельно, либо прочитать по учебнику. В **общеобразовательных** классах желательно обсудить вывод формул (5) и (6) из § 10, так как приём почленного сложения равенств нечасто используется в курсе алгебры. Учащимся классов **углублённого** уровня желательно с небольшими подсказками учителя доказать их самим. Формулу (7) из § 10 учащиеся общеобразовательных классов могут вывести с помощью учебника самостоятельно. В классах углублённого уровня предложить вывести эти формулы после совместного обсуждения. Применение формул из задачи **5** того же параграфа позволяет упростить решение некоторых уравнений, однако в соответствии со стандартом учащихся достаточно познакомить с этими формулами. Учащимся, интересующимся математикой, все эти формулы полезно знать и уметь применять.

Упражнения обязательного уровня к обоим параграфам в основном вычислительного характера, на прямое применение формул. Упражнения **1050**, **1051**, **1065**, **1066** очень полезны, так как по ходу их решения повторяется предыдущий материал.

Желательно обратить внимание учащихся на простое задание **1053** (1, 2), которое полезно предложить выполнить самостоятельно, а затем обсудить полученные результаты.

1053. 1) I способ. $2\cos 40^\circ \cos 50^\circ = 2\cos(90^\circ - 50^\circ)\cos 50^\circ = 2\sin 50^\circ \cos 50^\circ = \sin 100^\circ$.

II способ. $2\cos 40^\circ \cos 50^\circ = 2\cos 40^\circ \cos(90^\circ - 40^\circ) = 2\cos 40^\circ \times \sin 40^\circ = \sin 80^\circ$.

У кого же верный ответ? Для обоснования того, что $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$, можно воспользоваться иллюстрацией и напомнить, как построить точки, соответствующие углам $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 100^\circ$ на единичной окружности, показать общую ординату точек M_α и M_β (рис. 37). Полезно повторить и соответствующий материал курса геометрии: решение прямоугольных треугольников.

Тождества **1055** показывают, как понизить степень выражения, что в дальнейшем поможет при решении уравнений.

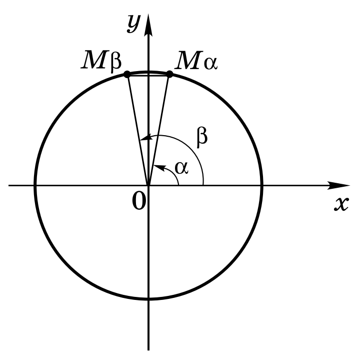


Рис. 37

Выполняя упражнение **1057 (5)**, можно в качестве дополнительного вопроса учащимся классов **углублённого** уровня предложить найти допустимые значения α.

Из упражнений § 10 желательно всем учащимся рассмотреть упражнение **1068**, так как при его выполнении применяются все остальные формулы, изучаемые в обоих параграфах.

В качестве самостоятельной работы в **общеобразовательных** классах можно предложить выполнить упражнения **1054** и **1067** (по вариантам) и обязательно рассмотреть возможные пути их решений. В классах **углублённого** уровня полезно самостоятельное решение учащимися упражнений **1057 (4)** и **1069 (4).**

Выполняя упражнение **1057 (4)**, учащиеся обычно пользуются формулами двойного угла:

1057. 4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=$

$$=\frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

К выполнению упражнения **1069 (4)** опыт подсказывает подойти иначе, используя формулы половинного угла.

1069. 4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

Формулы синуса и косинуса половинного угла полезно использовать и в виде формул (3) и (4), и в виде (5) и (6) из § 10.

На всех уроках необходимо решать уравнения. Постепенно усложняются тригонометрические преобразования, которые в результате приводят к уравнениям вида $\sin x=\pm1$, $\cos x=\pm1$, $\sin x=0$, $\cos x=0$. Но теперь начинает работать метод решения уравнений разложением на множители, и в ответе получается не два корня, а две серии корней. Полезно в классах углублённого уровня по мере возможности иллюстрировать расположение корней на единичной окружности, что в дальнейшем при решении более сложных уравнений поможет объединению серий корней в одну, когда это необходимо.

В качестве устных упражнений на уроках можно использовать следующие:

1. Закончить запись формулы двойного угла:

1) $\cos 4\alpha=\cos^2 2\alpha-$ ____________;

2) $\sin 5\alpha=2\sin$ ______________.

2. Выразить $\cos^2 3\alpha$ через $\cos 6\alpha$.

3. Вычислить $1-\cos 5\alpha$, если $\sin\dfrac{5\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Найти значение выражения:

1) $3\cos 3\alpha$, если $\cos^2 1{,}5\alpha - \sin^2 1{,}5\alpha = 0{,}7$;

2) $\dfrac{1+\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3$.

5. Решить уравнение:

1) $\cos^2 3x - \sin^2 3x = 1$; 2) $2\sin 2{,}5x \cos 2{,}5x = 0$.

Распределение материала параграфов по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Вывод формул $\sin 2a$ и $\cos 2a$, задачи 1—3 § 9	1045—1051, 1055, 1059; ДМ § 29 № 10, 18	1049, 1059 (1, 2)	1060 (1); ДМ § 29 № 15, 16
2	Формулы (3) § 9, (1)—(7) § 10	1052, 1054; ДМ § 30 № 1—3; 1063—1065, 1068	1053	1074 (3, 5); ДМ § 30 № 13, 15

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	Вывод формул $\sin 2a$ и $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$, задачи 1—5 § 9; формулы (1)—(6) § 10	1050—1052, 1057, 1069; ДМ § 10 № 2, 3; ДМ § 11 № 1	1056, 1074 (3, 5)	ДМ § 10 № 10, 11, 12, 13; 1061, 1062
2	Задача 5, § 10	1058, 1059, 1068, 1070; ДМ § 11 № 2	1059 (3, 5), 1070 (1, 3)	ДМ § 11 № 4, 5, 8; 1075, 1076

В результате изучения параграфов **все** учащиеся должны знать формулы двойного угла и уметь использовать их при выполнении упражнений **1047, 1050—1052**, пользуясь справочным материалом, выполнять упражнения **1064, 1067**.

Решение упражнений

1061. 1) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\cdot 2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=$

$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{4}.$

2) $8\cos10^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ=\frac{4\cdot 2\sin10^\circ\cos10^\circ}{\sin10^\circ}\cdot\cos20^\circ\cos40^\circ=$

$=\frac{4\sin20^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ}{\sin10^\circ}=\frac{2\sin40^\circ\cos40^\circ}{\sin10^\circ}=\frac{\sin80^\circ}{\sin10^\circ}=\frac{\cos10^\circ}{\sin10^\circ}=\operatorname{ctg}10^\circ.$

4) $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{tg}16\alpha+32\operatorname{ctg}32\alpha$; покажем, что $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{tg}\alpha+2\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$, следовательно, $16\operatorname{tg}16\alpha+32\operatorname{ctg}32\alpha=16\operatorname{ctg}16\alpha$, $8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{ctg}16\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$, $4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha$, $2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{ctg}4\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg}2\alpha=$ $=\operatorname{ctg}\alpha$.

5) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+1\right)-\operatorname{tg}\alpha=$

$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)-\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$

$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)=0.$

1062. 1) $90^\circ=2\cdot18^\circ+3\cdot18^\circ$, значит, $\sin(2\cdot18^\circ)=\cos(3\cdot18^\circ)$. Отсюда $2\sin18^\circ\cos18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos18^\circ$, следовательно, $2\sin18^\circ=$ $=4(1-\sin^2 18^\circ)-3$. Пусть $\sin18^\circ=t$, тогда $4t^2+2t-1=0$, $t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Так как $\sin18^\circ>0$, то $\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

2) $\operatorname{tg}^2 36^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 72^\circ=(\operatorname{tg}36^\circ\cdot\operatorname{tg}72^\circ)^2=(\operatorname{tg}(2\cdot18^\circ)\cdot\operatorname{tg}(4\cdot18^\circ))^2$.

Пусть $A=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}4\alpha=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}2(2\alpha)=\frac{2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{2\cdot\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2}{1-\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2}=$

$= \dfrac{8\,\mathrm{tg}^2\alpha}{(1-\mathrm{tg}^2\alpha)^2 - 4\,\mathrm{tg}^2\alpha}$. Так как $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, то $\cos 18° = \dfrac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$ и, следовательно, $\mathrm{tg}\,18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}$.

$$\mathrm{tg}^2 18° = \frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}};\quad (1-\mathrm{tg}^2 18°)^2 = \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{2+2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}.$$

$$A = \frac{8\cdot\dfrac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}{\dfrac{4}{5} - 4\cdot\dfrac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \frac{2(3-\sqrt{5})\cdot 5}{6\sqrt{5}-10} = \frac{2\cdot 5(3-\sqrt{5})}{2\cdot(3\sqrt{5}-5)} = \sqrt{5}.$$

$A^2 = 5$, т. е. $\mathrm{tg}^2 36°\cdot\mathrm{tg}^2 72° = 5$.

1075. 1) $\cos^2\alpha - \cos^2 25° = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} - \dfrac{1+\cos 50°}{2} = \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha - \dfrac{1}{2}\cos 50° = \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 50°)$;

$\cos^2(45°-\alpha) - \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos(90°-2\alpha)) - \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha - \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 50°) = \dfrac{1}{2}$; $\cos 2\alpha - \cos 50° = 1$, $\cos 2\alpha = 1 + \cos 50° > 1$.

Ответ. Не существует.

1076. 1) Числитель дроби равен $1 + \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 + \cos 3\alpha = \cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\cos^3\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\cos\alpha = 2\cos\alpha \times (2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)$. Знаменатель дроби равен $2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha \times \cos 2\alpha = 2\sin\alpha(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = 2\sin\alpha(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)$.

Дробь, стоящая в правой части, равна отношению $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

§ 11. Формулы приведения (2/2 ч)

Цели изучения параграфа — обучение применению правила, позволяющего заменить синус, косинус, тангенс, котангенс любого числа соответственно синусом, косинусом, тангенсом или котангенсом числа α, если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; развитие навыков познавательной рефлексии как осознание совершаемых действий и мыслительных процессов.

Ознакомление с параграфом рекомендуется начать с краткой исторической справки об использовании таблиц тригонометрических функций для вычислений на практике.

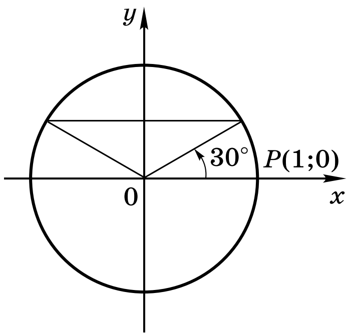


Рис. 38

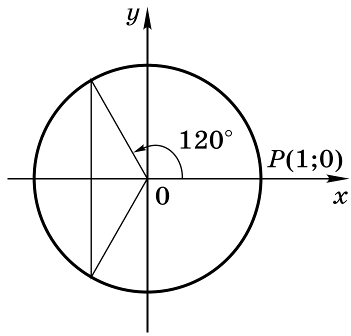


Рис. 39

С этой целью можно использовать историческую справку к главе и предложить желающим провести исследование по теме, результаты которого обсудить на уроках обобщения и систематизации знаний.

Кроме того, необходимо повторить поворот точки вокруг начала координат, например, с помощью следующих з а д а н и й:

1. Назвать углы, синусы которых равны синусу угла 30° **(рис. 38).**

2. Назвать углы, косинусы которых равны косинусу угла 120° **(рис. 39).**

3. На какой угол повернули точку $P(1;\ 0)$, чтобы получить точку M (рис. 40)? Сравнить значения синуса и косинуса чисел, соответствующих точкам A и M.

4. Сравнить синусы и косинусы углов α и β (рис. 41).

Затем рассмотреть решение задачи **1**, которое мотивирует необходимость появления формул, упрощающих нахождение синуса и косинуса углов, заданных «большими числами». Действительно, равенства (1) и (2), которые появились в ходе решения задачи **1**, подводят к мысли о существовании и других равенств, упрощающих вычисления, например равенства (3) из § 8. Вывод формул (5) и (6) рекомендуется предложить учащимся классов

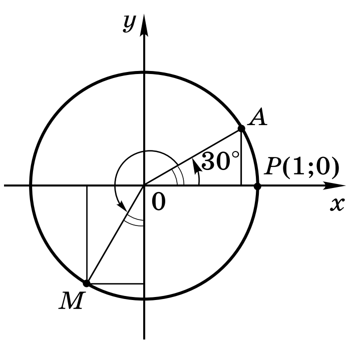


Рис. 40

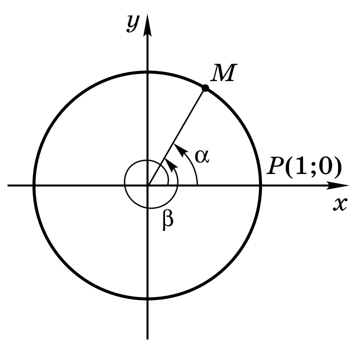


Рис. 41

углублённого уровня сделать самостоятельно, например, по вариантам.

I вариант

1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$;

2) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$;

3) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

4) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

II вариант

1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$;

2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$.

На доске в это время можно доказать тождества:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Все формулы (3), (5), (6) должны быть перед глазами учащихся. Обратите внимание учащихся на то, что все равенства справедливы при любых значениях α. Выполнить часть упражнения **1077**, затем обратиться к учебнику: рассмотреть задачу **2** и выполнить упражнения, например, **1078** (1, 2, 5, 6), **1079** (3, 5).

Теперь можно поставить проблему нахождения соответствующих формул приведения для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, разобрать задачу **4** (с учителем или по учебнику самостоятельно) и поучиться применять эти формулы при выполнении упражнений **1077** (4, 3), **1078** (3, 7), **1079** (7, 8).

Добавив полученные формулы к тем, что уже есть на доске ((3), (5), (6)), попытаться вместе выяснить, от чего зависит знак левой части и изменение или неизменность названия функции.

Затем прочитать правило на с. 308 учебника и научиться его применять, например, при выполнении одного примера из каждого упражнения **1083**, **1084**.

Необходимо, чтобы учащиеся понимали, что формулы приведения справедливы для любого значения α, хотя для определения знака исходной функции при запоминании формул считается, что α — угол I четверти.

При выполнении упражнений к параграфу и в дальнейшем следует продолжать обучение учащихся выявлению различных путей решения. Например, упражнение **1085** (1) можно решать так:

I способ.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\mathbf{0}.$$

II способ.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\mathbf{0}.$$

Можно преобразовать $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ и искать другие пути решения.

В классах **углублённого** уровня необходимо решить задачи **1088—1090**, иллюстрирующие применение формул приведения в геометрии.

В конце второго урока в **общеобразовательных** классах рекомендуется провести самостоятельную работу (15 мин).

1. Вычислить:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ [$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$];

2) $\sin 210° - \cos 120° + \operatorname{tg} 225°$ [$\operatorname{tg} 150° - \cos 780° + \sin 330°$].

2. Упростить выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(2\pi+\alpha)}{2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)+1} \quad \left[\frac{\sin(-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}{1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)}\right].$$

В классах **углублённого** уровня проверочную работу целесообразнее провести при изучении следующего параграфа, чтобы проверить применение формул при решении комбинированных заданий.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 11	1077 (1—4), 1079, 1083, 1084; ДМ § 31 № 1, 4	1079 (2, 4, 6, 7)	ДМ § 31 № 10

Продолжение

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
2		1080, 1082, 1084 (1, 3), 1086 (1, 2), 1091	Из текста пособия	1093; ДМ § 31 № 11

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 11	1083—1086; ДМ № 3, 4	1086 (1, 2), 1084 (3, 4)	ДМ № 9, 10
2		1087—1091; ДМ № 7, 8	1091 (5, 6)	1093; ДМ № 10, 11

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь применять формулы приведения при выполнении таких упражнений, как **1078, 1079**.

Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь решать упражнения типа **1084, 1086**.

Решение упражнений

1093. а) Пусть $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Обозначим $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, тогда $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{4}$ и $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\beta$.

б) Пусть $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{4}$, тогда $0 \leqslant \alpha - \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}$. Обозначив $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, получим $\sin\alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\beta$.

в) Пусть $\frac{3\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Обозначим $\beta = \pi - \alpha$, тогда $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \sin\beta$.

г) Пусть $-\pi \leqslant \alpha \leqslant 0$, тогда $\sin\alpha = -\sin\beta$, где $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. Далее следует воспользоваться тем, что $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

§ 12. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов (1/2 ч)

Цели изучения параграфа — обучение учащихся профильных классов применению формул суммы и разности синусов (косинусов) при вычислениях и разложении на множители; ознакомление учащихся общеобразовательных классов с применением формул для разложения тригонометрических выражений на множители; развитие умений самостоятельно определять цели в различных ситуациях.

Формулы, которые выводятся в этом параграфе, часто используются при решении тригонометрических уравнений, поэтому важно, чтобы учащиеся могли их применять в разных ситуациях (задачи **2—3**, упражнения **1094**, **1096**, **1099**).

Ход решения задачи **1** параграфа мотивирует необходимость появления формулы, упрощающей вычисления. С той же целью можно использовать упражнение **1094** (1, 2). Эти же задачи подсказывают приём, который используется при выводе формулы (1). Формулы (3) и (4) полезно вывести учащимся классов **углублённого** уровня самостоятельно дома и проверить на следующем уроке в классе.

В задаче **3** показывается важный приём разложения на множители: выявляется множитель, который после вынесения за скобки позволит оставить в скобках такое слагаемое, что его можно представить как синус или косинус некоторого угла. Закрепляется умение применять этот приём при выполнении упражнения **1096**. (Учащихся общеобразовательных классов достаточно ознакомить с решением только задач **1—3** и рассмотреть упражнения **1094—1097**.)

Доказательство тождеств позволяет продолжить работу по развитию мышления учащихся: многие упражнения могут быть выполнены разными способами. Очень показательно упражнение **1099** (1). В ходе его выполнения можно повторить различные формулы и различные способы доказательства тождеств.

1099. 1) I способ. Преобразуем левую часть:

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \sin 2\alpha =$$

$$= \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 2\cos\frac{2\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\alpha}{2} \times$$

$$\times \cos\frac{2\alpha - \frac{\pi}{2} + 2\alpha}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Выполняя эти преобразования, учащиеся продолжают учиться понижать степень выражения и находить полусумму и полуразность углов.

II способ. Преобразуем правую часть:

$$\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin2\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\cos2\alpha+\sin2\alpha=$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin2\alpha=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin2\alpha.$$

Можно пойти и по третьему пути: преобразовать левую и правую части к одинаковому виду.

Задачи **4—6** поясняют приёмы выполнения разложения на множители с различными целями: вычисления, нахождения наибольшего или наименьшего значения выражения и др.

На уроках в классах **углублённого** уровня полезно устно выполнять такие, например, упражнения:

1. Представить в виде суммы синусов выражение:

1) $\frac{1}{2}+\sin\alpha$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\alpha$; 3) $\sqrt{3}+2\sin\alpha$.

2. Выразить $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$ через синус или косинус 2α.

3. Разложить на множители:

1) $1-\cos2\alpha-\sin\alpha$; 2) $1+\cos2\alpha-\cos\alpha$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $2\cos\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha}{2}$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	Задачи 1—4	1095, 1096, 1099, 1101	1098, 1100	1106; ДМ № 5, 7
2	Задачи 5—7	1102—1105; ДМ № 1, 2	1103 (1, 3)	1107; ДМ № 8

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь выполнять упражнения типа **1094** и **1095**, а учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь применять формулы (1)—(4) при выполнении упражнений типа **1098, 1100**.

Решение упражнений

1106. 1) $\cos2\alpha-\cos3\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha=(\cos2\alpha-\cos4\alpha)+$
$+(\cos5\alpha-\cos3\alpha)=2\sin\alpha(\sin3\alpha-\sin4\alpha)=2\sin\alpha\,2\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{7\alpha}{2}\right)=$
$=-4\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2}.$

2) $\sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha + \sin 10\alpha = 2\sin 7\alpha \cos(-3\alpha) + 2\sin 7\alpha \cos(-\alpha) = 2\sin 7\alpha(\cos 3\alpha + \cos \alpha) = 2\sin 7\alpha \cdot 2\cos 2\alpha \cos \alpha = 4\cos \alpha \cos 2\alpha \sin 7\alpha$.

§ 13. Произведение синусов и косинусов (0/1 ч)

Цели изучения параграфа — обучение учащихся классов **углублённого** уровня применению формул замены произведения синусов и косинусов суммой при вычислениях и преобразованиях; ознакомление учащихся общеобразовательных классов с данными формулами; развитие навыков самостоятельного поиска методов решения практических задач.

Формулы замены произведения суммой часто применяются при решении уравнений и исследовании функций. Учащимся классов **углублённого** уровня полезно запомнить, что эти формулы, как и многие другие, выводятся с помощью формул сложения: произведение синусов, как и косинусов, содержится в формуле косинуса суммы и разности аргументов, произведение синуса и косинуса — составляющая формул синуса суммы и разности аргументов. Таким образом, хорошее знание формул сложения позволит вывести любую из формул **(1)—(3)** параграфа. Доказательство легко провести, записывая формулы одну под другой:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Складывая почленно эти равенства, получим формулу **(1)**.

Задача **1** и упражнения **1108**, **1110** демонстрируют применение формул для вычисления значений произведения синусов и косинусов без использования таблиц или калькуляторов. Эти задания рекомендуется изучить с учащимися **общеобразовательных** классов. С остальными задачами текста параграфа и упражнениями учащихся полезно ознакомить, но не требовать умения их применять.

Для учащихся классов **углублённого** уровня умения применять формулы **(1)—(3)** желательны: решение уравнений и задач на оптимизацию — составляющие осуществления моделирования самых разных процессов.

Содержание задач **2** и **3** и упражнений **1111—1117** позволяет повторить практически весь материал главы, поэтому на этом уроке можно провести небольшую проверочную работу, которая позволит более целенаправленно организовать урок обобщения и систематизации знаний. Работа на 15 мин может быть, например, такого содержания:

1) Вычислить:

1) $\sin 105° + \sin 15°$; 2) $\cos 52°30' \cos 7°30'$

[1) $\cos 45° - \cos 105°$; 2) $\sin 37°30' \sin 7°30'$].

2) Упростить выражение

$$\cos^2\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \quad \left[\sin^2\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right].$$

3) Решить уравнение $\sin\alpha + \cos\alpha = 0$ $[\sin\alpha - \cos\alpha = 0]$.

Учащиеся общеобразовательных классов могут выполнить задания 5, 6, 10, 11, 14, 15, 18 *теста 6* (из тематических тестов).

На этом уроке в классах **углублённого** уровня рекомендуется решить задачи **1—3** и выполнить упражнения **1110**, **1111** (3, 4), **1113**, **1114**, **1116** (3), дополнительно **1117** (1) и задания 8, 9 из дидактических материалов.

В результате изучения параграфа учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь применять формулы (1)—(3) при выполнении упражнений, таких, как **1110**, **1111**, **1114**.

Решение упражнений

1117. 1) Преобразуем каждое слагаемое левой части тождества с помощью формул замены произведения суммой:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\sin(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2(\beta-\alpha) - \frac{1}{4}(\sin(-2\alpha) + \sin 2\beta) = \frac{1}{4}(\sin 2(\beta-\alpha) - \sin 2\beta + \sin 2\alpha).$$

Аналогично

$$\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma-\beta) = \frac{1}{4}(\sin 2(\gamma-\beta) - \sin 2\gamma + \sin 2\beta),$$

$$\sin\gamma\sin\alpha\sin(\alpha-\gamma) = \frac{1}{4}(\sin 2(\alpha-\gamma) - \sin 2\alpha + \sin 2\gamma).$$

Следовательно, сумма их равна

$$\frac{1}{4}(\sin 2(\beta-\alpha) + \sin 2(\gamma-\beta) + \sin 2(\alpha-\gamma)) = \frac{1}{4}(2\sin(\gamma-\alpha)\cos(2\beta-\alpha-\gamma) -$$

$$- 2\sin(\gamma-\alpha))\cos(\gamma-\alpha) = \frac{1}{2}\sin(\gamma-\alpha)(\cos(2\beta-\alpha-\gamma) - \cos(\gamma-\alpha)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\gamma-\alpha)(-2\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)) = \sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma).$$

2) Правая часть тождества равна

$$\frac{\sin 6\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{2(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)\cos 3\alpha}{2\sin\alpha} = (3 - 4\sin^2\alpha)\cos 3\alpha.$$

Преобразуем левую часть, воспользовавшись формулами косинуса двойного аргумента и замены произведения суммой и суммы произведением:

$$\sin^2\alpha + \sin^2 3\alpha + \cos 2\alpha\cos 4\alpha + \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - 1 =$$

$$= \sin^2\alpha + \sin^2 3\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 6\alpha + \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - 1 =$$

$= \sin^2\alpha + \sin^2 3\alpha + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2\alpha) + \frac{1}{2}(1 - \sin^2 3\alpha) + \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - 1 = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha = 2\cos 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = \cos 3\alpha(2\cos 2\alpha + 1) = \cos 3\alpha(2(1 - 2\sin^2\alpha) + 1) = \cos 3\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)$.

Левая часть равна правой при $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Урок обобщения и систематизации знаний (1/1 ч)

На уроке обобщения и систематизации знаний необходимо провести анализ выполнения самостоятельной работы и коррекцию знаний, а также рекомендуется не только повторить все формулы, которые изучались в главе, но и обязательно вспомнить допустимые значения букв в каждом отдельном случае. Полезно все формулы представить в системе: формулы, связывающие тригонометрические функции одного аргумента, затем суммы аргументов, откуда следуют формулы двойного и половинного аргументов, формулы разложения на множители суммы и разности одноимённых функций разных аргументов, формулы замены произведения одноимённых функций или синуса и косинуса их суммой. При наличии времени заслушать результаты исследований, проведённых учащимися.

В **общеобразовательных** классах полезно выполнить в классе упражнения типа **1118**, **1119**, **1124**, **1127**, **1130**, а также решить уравнения:

1) $(\sin x + \cos x)^2 = 1$;
2) $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 1$;
3) $2\cos^2 2x - 2\sin^2 2x + \sin 8x = 0$.

Дополнительно выполнить упражнения **1137**, **1139**, а самостоятельно — упражнения **1121**, **1122**, **1128** (по одному заданию).

В классах **углублённого** уровня, кроме указанных выше упражнений, решить упражнения **1125**, **1126**, **1132**, **1133**, **1135**, **1137**, **1141**, **1142**.

Решение упражнений

1137. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha} = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\operatorname{tg}^3\alpha + 3} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^3\alpha + 3} = \dfrac{2\cdot 5}{8+3} = \dfrac{10}{11}$.

1139. 1) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)((\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha \times \cos^2\alpha) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4\alpha) = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4\alpha)$.

2) $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)^2 + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha = \cos^2 2\alpha + \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha = \dfrac{1+\cos 4\alpha}{2} + \dfrac{(1-\cos 4\alpha)^2}{32} = \dfrac{1}{32}(\cos^2 4\alpha + 14\cos 4\alpha + 17)$.

1140. 1) Заменим произведение суммой в левой части:

$$4\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\left(\cos2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=4\sin\alpha\cdot\left(\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{4}\right)=4\sin\alpha\cdot\left(\frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha)+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=2\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+\sin\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\sin3\alpha.$$

2) Преобразуем выражения, стоящие в левой части:

$$\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}+\frac{4(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{4\cos2\alpha}{\sin2\alpha}+\frac{4(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{4(\underline{\cos2\alpha\sin\alpha}+\cos2\alpha\cos\alpha+\underline{\cos\alpha\sin2\alpha}-\sin2\alpha\sin\alpha)}{\sin2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{4(\sin3\alpha+\cos3\alpha)}{\sin2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}.$$

Правая часть равна $\dfrac{4\sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=$

$$=\frac{4\left(\sin3\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos3\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sin2\alpha\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{4(\sin3\alpha+\cos3\alpha)}{\sin2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}.$$

Левая часть равна правой.

1142. Указание: обозначив $x=\angle COD$, прийти к уравнению $200\cos x-2\sin x=101$, решить его с помощью введения вспомогательного угла. (Можно решить эту задачу при изучении главы IX.)

Контрольная работа № 7

Базовый уровень

1. Найти значение выражения:

1) $\sin150°$ $[\cos315°]$;

2) $\cos\dfrac{5\pi}{3}$ $\left[\sin\dfrac{4\pi}{3}\right]$;

3) $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}$ $[\operatorname{tg}210°]$.

2. Вычислить $\sin\alpha$, $\cos2\alpha$ $[\cos\alpha,\ \sin2\alpha]$, если $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ $\left[\sin\alpha=\dfrac{9}{13}\text{ и }\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right]$.

3. Упростить выражение

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\ \left[\frac{\sin\alpha\sin\beta-\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{ctg}\beta}\right].$$

---

4. Доказать тождество

$$\frac{2\sin 2\alpha+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)}{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=-2\sin\alpha$$

$$\left[\frac{\sin^2(\pi-\alpha)+\cos 2\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right].$$

5. Решить уравнение

$\sin 3x\cos x=\cos 3x\sin x-1$

$[\cos 5x\cos 3x=1-\sin 5x\sin 3x]$.

Углублённый уровень

1. Найти $\sin\alpha$ $[\cos\alpha]$, если $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{5}$, $7\pi<\alpha<\frac{15\pi}{2}$ $\left[\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{7},\ 5\pi<\alpha<\frac{11\pi}{2}\right]$.

2. Вычислить $\cos\frac{\pi}{12}$ $[\operatorname{tg}75°]$.

3. Упростить выражение $\sin(\alpha+60°)\sin(\alpha-60°)-\sin^2\alpha$ $\left[\cos^2\alpha-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

4. Доказать тождество

$\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$ $[\sin 2\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha]$.

---

5. Выразить $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ $[\sin^6\alpha+\cos^6\alpha]$ через $\cos 4\alpha$.

6. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то справедливо равенство

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$[\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma]$.

Глава IX Тригонометрические уравнения

Как и при решении алгебраических, показательных и логарифмических уравнений, решение тригонометрических уравнений путём различных преобразований сводится к решению простейших: $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. При их решении получаются бесконечные множества корней, которые выражаются формулами.

Например, корнями уравнения $\operatorname{tg} x = a$ являются числа $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $n = 0$ получим корень $x = \operatorname{arctg} a$ в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

В учебнике рассмотрение простейших уравнений начинается с уравнения $\cos x = a$, так как формула его корней проще, чем формула корней уравнения $\sin x = a$ (для них используется необычный для учащихся указатель знака $(-1)^n$).

Решение более сложных тригонометрических уравнений, когда выполняются алгебраические и тригонометрические преобразования, сводится к решению простейших. При этом следует иметь в виду, что выполняемые преобразования должны осуществляться переходом от данного уравнения к равносильному ему на заданном множестве.

Например, уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$ на множестве $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, равносильно уравнениям $(\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (очевидно, что $\frac{\pi}{4} + \pi k \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ни при каких целых k и n).

Типология тригонометрических уравнений весьма разнообразна. В учебнике для учащихся общеобразовательных классов рассматриваются следующие типы: линейные относительно $\sin x$, $\cos x$ или $\operatorname{tg} x$; сводящиеся к квадратным и другим алгебраическим уравнениям после замены неизвестного; сводящиеся к простейшим тригонометрическим уравнениям после разложения на множители. В классах с **углублённым** изучением математики дополнительно изучаются однородные (первой и второй степеней) уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$, а также сводящиеся к однородным уравнения. При этом используется и метод *введения вспомогательного угла*.

Для учащихся классов **углублённого** уровня в § 5 предложен к рассмотрению метод предварительной оценки левой и правой частей уравнения, который в ряде случаев позволяет легко найти его корни или установить, что их нет. Например, зная, что $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, а также то, что соотношения $|\sin x| = 1$ и $|\cos x| = 1$ не могут выполняться одновременно, можно утверждать, что уравнение $2\sin x + 3\cos^2 x = 5$ не имеет корней.

В § 6 этой главы для учащихся классов **углублённого** уровня рассмотрены тригонометрические уравнения, для решения которых необходимо применение нескольких методов. Показан анализ уравнения не по неизвестному, а по значениям синуса и косинуса неизвестного, что часто сужает поиск корней уравнения. Показан метод объединения серий корней тригонометрических уравнений. Разобраны подходы к решению несложных систем тригонометрических уравнений.

Глава завершается рассмотрением (в классах **углублённого** уровня) простейших тригонометрических неравенств, которые решаются с помощью единичной окружности, где устанавливается множество точек, координаты которых определяются данным неравенством. Например, неравенству $\sin x > \frac{1}{2}$ удовлетворяют все значения x из промежутков $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Предметные цели изучения главы:
— введение понятий $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$;
— вывод формул корней простейших тригонометрических уравнений;
— обучение решению тригонометрических уравнений, сводящихся к алгебраическим, решению однородных относительно синуса и косинуса уравнений;
— обучение решению тригонометрических уравнений методами замены неизвестного и разложения на множители;
— знакомство с методом оценки левой и правой частей тригонометрического уравнения;
— знакомство со способами решения тригонометрических неравенств.

Метапредметные цели изучения главы:
— расширение средств моделирования реальных процессов и явлений;
— формирование приёмов перехода от аналитической к графической модели и обратно;
— развитие алгоритмического и логического мышления;
— совершенствование приёмов точных и приближённых вычислений;
— знакомство с математическим толкованием понятия периодичности, имеющего важное мировоззренческое значение;
— знакомство с физическими явлениями, описываемыми с помощью тригонометрических уравнений.

Личностные цели изучения главы:
— совершенствование навыков самоконтроля;
— развитие вычислительной и алгоритмической культуры;
— развитие творческой инициативы, исследовательских умений, самокритичности.

В результате изучения главы **все** учащиеся должны знать определения $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, формулы корней простейших тригонометрических уравнений; уметь решать упражнения типа **1129—1236**, **1239** и из рубрики «Проверь себя!» первого уровня. Учащиеся классов **углублённого** уровня дополнительно должны уметь решать однородные тригонометрические уравнения типа **1237** и задания второго уровня из рубрики «Проверь себя!».

§ 1. Уравнение $\cos x = a$ (3/3 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с понятием арккосинуса числа, обучение решению простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение $\cos x = a$ рассматривается первым в ряду простейших уравнений в связи с тем, что формула его корней достаточно просто записывается и легко поясняется исходя из наглядных представлений. Трудность заключается в формировании понятия числа $\arccos a$ и выражения $\arccos(-a)$ через $\arccos a$.

Актуализацию знаний можно провести с помощью, например, таких заданий:

1. Найти координаты точки M, лежащей на пересечении единичной окружности и стороны OM угла POM, если $\angle POM = \frac{\pi}{3}$ (рис. 42).

2. На единичной окружности дана точка M, абсцисса которой равна $\frac{1}{2}$ (рис. 43). Найти: 1) ординату точки M; 2) меру угла POM.

3. Абсцисса точки M единичной окружности равна $\frac{1}{2}$ (рис. 44).

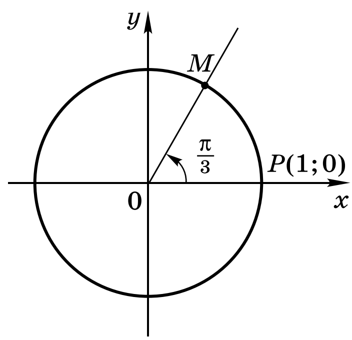


Рис. 42

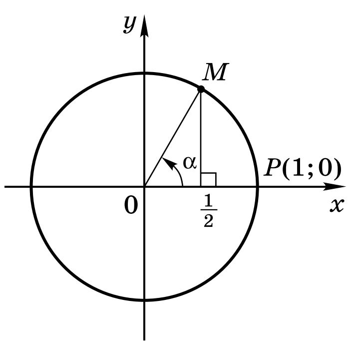


Рис. 43

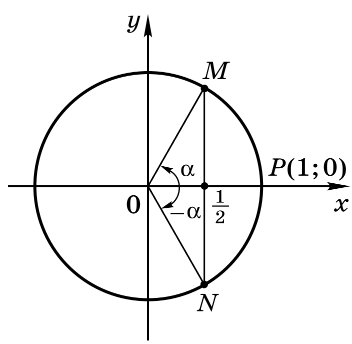


Рис. 44

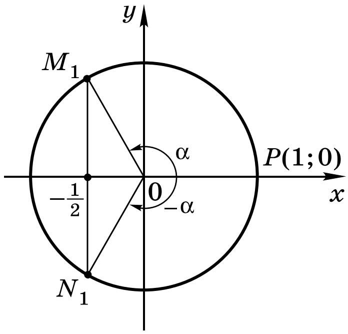


Рис. 45

1) Найти координаты точки N.

2) Назвать меры каких-нибудь трёх углов поворота точки $P(1;\ 0)$ вокруг точки $O(0;\ 0)$, в результате которых получается точка M; точка N.

3) Записать все углы, на которые нужно повернуть точку P, чтобы получить точку M; точку N.

4. Абсцисса точки M_1 единичной окружности (рис. 45) равна $-\frac{1}{2}$.

1) Найти координаты точки N_1.

2) Назвать меры каких-нибудь трёх углов поворота точки $P(1;\ 0)$ вокруг точки $O(0;\ 0)$, в результате которых получается точка M_1; точка N_1.

3) Записать все углы, на которые нужно повернуть точку P, чтобы получить точку M_1; точку N_1.

Задания **3** и **4** позволяют поставить задачу составления и решения уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$, с рассмотрения которых и начинается изучение материала параграфа.

Ход решения задач **1** и **2** из учебника даёт возможность учителю показать, что уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ (или $\cos x = -\frac{1}{2}$) является моделью задачи о нахождении всех углов поворота, соответствующих точке единичной окружности с абсциссой $\frac{1}{2}$ (или $-\frac{1}{2}$). Следовательно, аналогично можно сформулировать задачу, моделью которой станет уравнение $\cos x = a$.

При решении задач **1** и **2** учащиеся понимают, что рассматриваемые уравнения имеют бесконечное множество корней. Но все корни каждого из уравнений можно описать одной формулой, если однозначно определить один из его корней — угол α. Промежуток, которому должен принадлежать этот угол, выбрали таким образом, чтобы абсциссы соответствующих точек окружностей «пробегали» по одному разу все возможные значения косинуса. В качестве такого промежутка можно было выбрать, например, и отрезок $[-\pi;\ 0]$, но математики посчитали наиболее удобным указывать $\alpha = \arccos a$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

Рисунок 127 учебника желательно воспроизвести на плакате и использовать как при введении определения арккосинуса, так и при решении различных задач по теме на последующих уроках. В частности, с помощью этого рисунка можно попросить учащихся проиллюстрировать ответы на в о п р о с ы:

1. Имеет ли смысл выражение $\arccos\frac{3}{4}$? $\arccos(-0{,}7)$? $\arccos\frac{4}{3}$?

2. Может ли $\arccos a$ принимать значение, равное $\frac{\pi}{7}$? $-\frac{12}{13}\pi$? $\frac{13}{12}\pi$?

При выполнении упражнения **1143** желательно требовать от учащихся подробного обоснования ответа со ссылкой на определение арккосинуса числа.

1143. 3) Так как $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0; 1]$, то $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ — число (угол) из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, значит, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Вывод формулы (2) корней уравнения $\cos x = a$ учащиеся могут сделать самостоятельно с помощью рисунка 127 учебника и рассуждений, аналогичных приведённым в задачах **1** и **2**.

Решение уравнений $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$ рассматривалось при изучении предыдущей главы. Желательно, чтобы учащиеся использовали уже известные им формулы корней этих уравнений, но показать, что их можно решить по общим формулам, необходимо.

Рассуждения, приводящие к выводу формулы $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, можно предложить учащимся провести самостоятельно, например, заполняя пропуски в следующей записи.

Докажем, что для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Обозначим $\arccos a = \alpha$. По определению арккосинуса числа имеем:

1) ______ $\leqslant \alpha \leqslant$ ______ ;

2) $\cos \alpha =$ ______ .

Тогда по свойствам неравенств

______ $\leqslant -\alpha \leqslant$ ______, откуда ______ $\leqslant \pi - \alpha \leqslant$ ______.

По формуле приведения $\cos(\pi - \alpha) =$ ______ $= -a$.

Следовательно, по определению арккосинуса числа $\arccos(-a) = \pi - \alpha = \pi - \arccos a$.

Упражнения **1154—1158** позволят учащимся классов **углублённого** уровня лучше осознать понятие арккосинуса числа. При желании учителя упражнение **1154 (1)** можно рассмотреть и в **общеобразовательных** классах.

1154. 1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$. $2x - 3 = \cos\frac{\pi}{3}$, $2x - 3 = \frac{1}{2}$, $x = 1{,}75$.

Ответ. $x = 1{,}75$.

Изучение материала параграфа можно распределить по урокам двумя способами: один вариант — на первом уроке разобрать весь материал параграфа, а на последующих уроках заниматься решением задач; другой вариант распределения материала отражён в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 1, задачи 1 и 2, формула (1)	1143—1145, 1150	1144 (3)	1154
2	§ 1, формула (2), задача 3, формула (3)	1146, 1147, 1151	1146 (3), 1151 (3, 7)	1155 (1, 2)
3	§ 1, формулы (4)—(6), задача 4	1148, 1149, 1152	1148 (5); найти все корни уравнения $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$	1153

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 1, задачи 1 и 2, формула (1)	1143, 1144, 1150, 1154, 1155	1144 (3); вычислить $\cos\left(\pi - \arccos\frac{2}{5}\right)$	1145; ДМ № 1, 2
2	§ 1, формула (2), задача 3, формула (3)	1146, 1147, 1151—1153	1146 (3), 1151 (3, 7)	1157; ДМ № 4, 6
3	§ 1, формулы (4)—(6), задача 4	1148, 1149, 1156	1148 (5)	1158; ДМ № 7, 10

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение арккосинуса числа a, формулу корней уравнения $\cos x = a$, формулы (4)—(6); уметь применять формулы при выполнении упражнений типа **1144**, **1146—1148**,

1150. Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь выполнять упражнения типа **1149, 1151, 1152.**

Решение упражнений

1155. Доказательство следует из определения арккосинуса.

2) $-\frac{2}{3} \in [-1;\ 1]$, $\cos\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \cos\left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right) =$

$= -\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$;

3) $\frac{3}{4} \in [-1;\ 1]$, $\cos\left(\pi + \arccos\frac{3}{4}\right) = -\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}$;

4) $\frac{1}{3} \in [-1;\ 1]$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{1}{3}\right) = \cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$;

5) $\frac{4}{5} \in (0;\ 1)$, следовательно, $\frac{4}{5} \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$,

$\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$;

6) $\frac{3}{\sqrt{10}} \in (0;\ 1)$, значит, $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}} \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$,

$\cos\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{1}{10}}$,

$\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} : \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3}$.

1156. Обозначим $\cos\alpha = t$. По определению $\arccos t$ — такое число $\beta \in [0;\ \pi]$, что $\cos\beta = t$. Так как $\alpha \in [0;\ \pi]$ и $\beta \in [0;\ \pi]$, то из равенства $\cos\alpha = \cos\beta$ следует, что $\beta = \alpha$, т. е. $\arccos t =$ $= \arccos(\cos\alpha) = \alpha$ при $\alpha \in [0;\ \pi]$.

1) $\frac{\pi}{10} \in [0;\ \pi]$, $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{10}$, $5\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right) = 5 \cdot \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$;

2) $2 \in [0;\ \pi]$, $\arccos(\cos 2) = 2$, $3\arccos(\cos 2) = 3 \cdot 2 = 6$;

3) $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{7} \in [0;\ \pi]$, $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\frac{6\pi}{7}\right) = \frac{6\pi}{7}$;

4) $\cos 4 = \cos(2\pi - 4)$, $2\pi - 4 \in [0;\ \pi]$,
$\arccos(\cos 4) = \arccos(\cos(2\pi - 4)) = 2\pi - 4$.

1157. 1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right) \times$

$\times \cos\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$.

$\frac{1}{3} \in (0;\ 1]$, $\left(\arccos\frac{1}{3}\right) \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

$\frac{2\sqrt{2}}{3} \in (0;\ 1]$, $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{3}$;

$\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = 1$;

2) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right) = \cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) +$
$+ \sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\cdot\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$. $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right) = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$; так как $\frac{4}{5} \in (0;\ 1]$, то $\arccos\frac{4}{5} \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, аналогично

$$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5};\quad \cos\left(\arccos\frac{4}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

1158. 1) $\cos(2\arccos a) = \cos^2(\arccos a) - \sin^2(\arccos a) = a^2 - (1 - a^2) = 2a^2 - 1$.

1159. Обозначим $\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}} = \alpha$. Тогда $\alpha \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, так как $0 \leqslant \sqrt{\frac{1+a}{a}} \leqslant 1$ $(|a| \leqslant 1)$, $2\alpha \in [0;\ \pi]$. Нужно доказать, что $\cos 2\alpha = a$. Имеем $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{1+a}{2} - 1 = a$.

§ 2. Уравнение $\sin x = a$ (3/3 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — ознакомление с понятием арксинуса числа; обучение решению уравнений, сводящихся к уравнению вида $\sin x = a$.

Как показывает опыт, формула корней уравнения $\sin x = a$ усваивается с бóльшими трудностями, чем формулы корней уравнений $\cos x = a$ и $\operatorname{tg} x = a$.

Если учащиеся понимают, как осуществить запись корней с помощью двух формул, и применяют её, не стоит сразу заставлять их пользоваться общей формулой. К концу изучения темы они сами убедятся в удобстве формулы (4) и будут сознательно ею пользоваться.

Другая трудность в изучении темы аналогична той, которая преодолевалась по ходу изучения предыдущего параграфа: формирование понятия числа $\arcsin a$.

Актуализацию знаний можно провести с помощью, например, таких у п р а ж н е н и й:

1. Составить уравнение для решения следующей задачи: «Найти все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$, чтобы получить точки A и B, имеющие одинаковые абсциссы, равные 0,7 (рис. 46)».

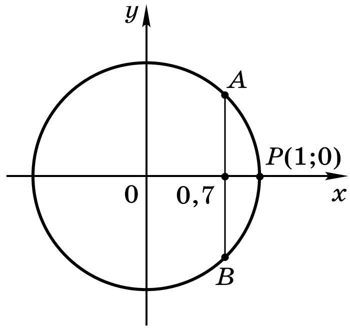


Рис. 46

2. Доказать, что:

1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

3. Объяснить, почему не существует числа x, такого, что $\arccos x=\frac{7\pi}{6}$, $\arccos\frac{6}{5}=x$.

4. Ордината точки M единичной окружности (рис. 47) равна $\frac{1}{2}$.

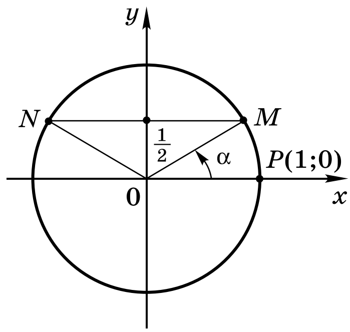


Рис. 47

1) Найти координаты точки N, симметричной M относительно оси ординат.

2) Назвать меры каких-либо трёх углов поворота точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат, в результате которых получается точка M; точка N.

3) Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$, чтобы получить точку M; точку N.

5. Ордината точки M единичной окружности (рис. 48) равна $-\frac{1}{2}$.

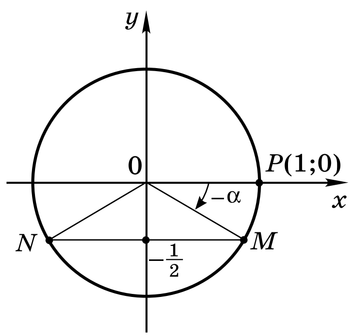


Рис. 48

1) Найти координаты точки N.

2) Назвать меры каких-либо трёх углов, на которые нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат, чтобы получить точку M; точку N.

3) Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат, чтобы получить точку M; точку N.

Как и при изучении предыдущего параграфа, последнее задание в упражнениях **1146** и **1147** подводит учащихся к постановке задачи составления и решения уравнений $\sin x=\frac{1}{2}$, $\sin x=-\frac{1}{2}$, которые и рассматриваются в задачах **1** и **2** текста параграфа.

Уже в задаче **1** учащимся предлагается объединить две формулы корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ в одну и проверить, что при различных значениях n получается либо одна, либо другая формула из полученных ранее.

Полезно предложить учащимся, которым это интересно, самостоятельно показать переход от двух формул $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, к формуле $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad (*)$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1),\ n \in \boldsymbol{Z} \qquad (**)$$

Формула $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, при $n = 2k$ даёт формулу (*), при $n = 2k + 1$ даёт формулу (**).

Введение понятия арксинуса числа можно провести по аналогии с введением понятия арккосинуса, используя рисунки 127 и 130 учебника и следующие записи (все пропуски заполняются учениками по ходу рассуждений):

Найдём один из корней уравнения	
$\cos x = a$ (рис. 127 учебника)	$\sin x = a$ (рис. 130 учебника)
Искомый корень уравнения называют	
$\arccos a$	$\arcsin a$
Обозначим этот корень буквой α	
$\arccos a = \alpha$	______ $= \alpha$
Если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 127, а)	Если ______ a ______, то $\alpha \in$ [______] (рис. 130, а)
Если $-1 \leqslant a \leqslant 0$, то $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (рис. 127, б)	Если ______ a ______, то $\alpha \in$ [______] (рис. 130, б)
Следовательно,	
$\alpha \in [0; \pi]$	$\alpha \in$ [______]
Значит,	
$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$	______ $\leqslant \arcsin a \leqslant$ ______
Так как при $\lvert a \rvert > 1$ уравнение	
$\cos x = a$	$\sin x = a$

не имеет корней, то	
$-1 \leqslant a \leqslant 1$	$\_\_\_\_\_ \leqslant a \leqslant \_\_\_\_\_$
Таким образом,	
$\arccos a = \alpha$, если $\cos\alpha = a$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$	$\arcsin a = \alpha$, если $\sin\alpha = a$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Выбор промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ для определения «основного» корня уравнения $\sin x = a$, обозначаемого $\arcsin a$, можно мотивировать учащимся удобством работы с числами, имеющими небольшие модули. К тому же на выбранных промежутках определения «основных» корней уравнений $\cos x = a$ и $\sin x = a$ выполняется полезное (для ряда преобразований) равенство $\arccos a + \arcsin a = \frac{\pi}{2}$, справедливое при любом $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Рисунок 130 учебника может быть полезен учащимся и для иллюстрации ответов на в о п р о с ы: 1) Имеет ли смысл выражение $\arcsin 0{,}95$? $\arcsin(-0{,}01)$? $\arcsin\frac{13}{10}$? 2) Может ли значение выражения $\arcsin a$ быть равным $\frac{\pi}{10}$? $-\frac{13}{14}\pi$? $\frac{14}{13}\pi$? Ответы обосновать.

При выполнении упражнения **1160** желательно требовать от учащихся подробного обоснования ответа, как это показано в учебнике при разборе примера, приведённого после определения арксинуса числа.

Упражнения **1161**, **1162** направлены на закрепление понятия арксинуса числа, что необходимо для осознанного решения простейших тригонометрических уравнений. Упражнение **1167** полезно выполнить со всем классом, хотя его уровень несколько превышает обязательный.

Формула $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ может быть выведена на уроке, например, следующим образом:

○ Обозначим $\arcsin a = \alpha$. По определению арксинуса числа это означает, что: 1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin\alpha = a$. Тогда:

1) по свойствам неравенств $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$;

2) по свойству $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ имеем $\sin(-\alpha) = -a$. Следовательно, по определению арксинуса числа $\arcsin(-a) = -\alpha = -\arcsin a$. ●

Другие равенства для $\arcsin a$, приведённые в упражнениях **1173**, **1174**, рассматриваются с учащимися классов **углублённого** уровня.

Вывести формулу корней уравнения $\sin x = a$ учащиеся могут самостоятельно или с помощью учителя по аналогии с рассуждениями, приведёнными в задачах **1** и **2** параграфа.

Обучение решению уравнений с использованием калькулятора желательно, но не является обязательным.

В конце т р е т ь е г о урока рекомендуется провести с а м о с т о я т е л ь н у ю работу (15—20 мин) на проверку усвоения материала § 1 и 2.

1. Решить уравнение:

1) $3\sin x + 1 = 0$ $[4\sin x = 3]$; 2) $2\cos 4x = 1$ $[2\cos 3x = \sqrt{3}]$;

3) $\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\left[2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}\right]$.

2. Сравнить числа

$\arccos\frac{1}{3}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\left[\arcsin 1 \text{ и } \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

---

3. Найти все корни уравнения $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ $\left[\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]\right]$.

4. (*Для классов углублённого уровня.*) Вычислить

$\sin\left(\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ $\left[\sin\left(\pi + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$.

И з у ч е н и е м а т е р и а л а п а р а г р а ф а можно распределить по урокам следующим образом: один вариант — на п е р в о м уроке разобрать весь теоретический материал параграфа, в т о р о й и т р е т и й уроки посвятить решению задач; другой вариант отражён в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, задачи 1 и 2, формулы (3) и (5)	1160—1162, 1167	1161 (2, 3)	1173
2	§ 2, формула (4), задача 3, формулы (6)—(8), задача 4	1163—1165, 1166, 1168 (1, 2), 1171	1164 (3), 1165 (2, 3)	1174, 1175

Продолжение

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
3	§ 2	1168 (3, 4), 1169, 1170	Проверочная самостоятельная работа	1172

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, задачи 1 и 2, формулы (3) и (5)	1160—1162, 1167, 1173	1161 (2, 3); вычислить $\sin\left(\pi - \arcsin\frac{2}{3}\right)$	1176, 1178
2	§ 2, формула (4), задача 3, формулы (6)—(8)	1163—1166, 1168 (1, 2), 1171, 1174	1164 (3), 1165 (2, 3)	1175; ДМ № 1—8
3	§ 2	1168 (3, 4), 1169, 1170, 1172	Проверочная самостоятельная работа	1177; ДМ № 9, 13

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать формулы (3)—(8) и уметь их применять при выполнении упражнений типа **1160, 1164, 1165, 1167**. Учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь решать упражнения типа **1168—1171**.

Решение упражнений

1173. Равенство $\sin(\arcsin a) = a$ выполняется при всех значениях a, для которых выражение, стоящее в любой части равенства, имеет смысл, т. е. при $-1 \leqslant a \leqslant 1$ (по определению арксинуса числа).

3) $\sin\left(\pi + \arcsin\frac{3}{4}\right) = -\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{3}\right) = -\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$;

5) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) = \cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

1174. По определению арксинуса равенство $\arcsin a = \alpha$ означает, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = a$. Подставим в формулу $\arcsin a = \alpha$ вместо a число $\sin\alpha$, получим $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$.

1175. 3) Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) > 0$. Следовательно,

$$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = +\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

1177. 1) $\arcsin\frac{1}{3} = \alpha$, $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} = \beta$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{3}$, $\sin(\alpha+\beta) = \frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$;

2) $\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{4}{5} = \alpha$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$.

1179. Если $a \in [0;\ 1]$, то $-1 \leqslant 1 - 2a^2 \leqslant 1$. Поэтому выражение $t = \arccos(1 - 2a^2)$ имеет смысл. Левая часть равенства $2\arcsin a = t$ также имеет смысл. Чтобы доказать это равенство, нужно убедиться в том, что $\cos 2\alpha = 1 - 2a^2$, где $\alpha = \arcsin a$. Так как $\alpha \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2}$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2(1 - a^2) - 1 = 1 - 2a^2$.

§ 3. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ (2/2 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — знакомство с понятием арктангенса числа; обучение решению уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$.

Практика показывает, что формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$ учащиеся запоминают быстро. Однако формирование понятия $\operatorname{arctg} a$ вызывает у учащихся затруднения. Это связано с тем, что непросто воспринимается идея изображения на единичной окружности точек, соответствующих числам, тангенс которых равен заданному числу a.

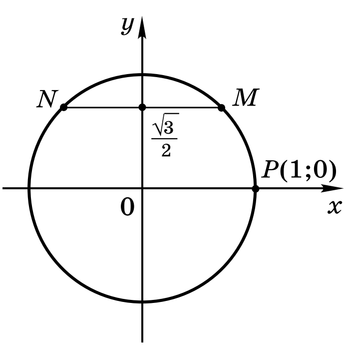


Рис. 49

Повторение материала предыдущих параграфов и определения тангенса острого угла прямоугольного треугольника позволяет подготовить учащихся к решению задач параграфа. С этой целью можно выполнить, например, такие у п р а ж н е н и я:

1. С помощью рисунка 49 составить уравнение для решения задачи: «Найти все углы поворота точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат, позволяющие получить точки M и N». Найти корни полученного уравнения на отрезках $[0;\ \pi]$; $[0;\ 2\pi]$; $[0;\ 2{,}5\pi]$.

2. С помощью рисунка 50 составить уравнение для решения задачи: «Найти все углы поворота точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат, позволяющие получить точки A и B». Найти корни полученного уравнения на отрезках $[0;\ \pi]$; $[0;\ 2\pi]$; $[0;\ 2{,}5\pi]$.

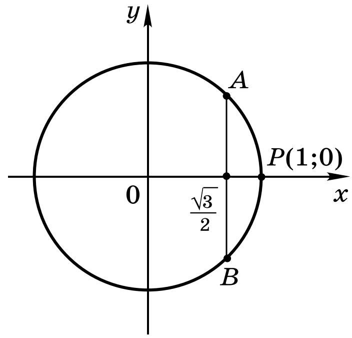


Рис. 50

3. На единичной окружности (рис. 51, *а*) отметить: 1) точку D (отличную от точки M), соответствующую числу, синус которого равен $\sin\alpha$; 2) точку C (отличную от M), соответствующую числу, косинус которого равен $\cos\alpha$; 3) точку K, соответствующую числу, тангенс которого равен $\operatorname{tg}\alpha$. Результаты обосновать.

Для ответа на последний вопрос задания **3** учащимся придётся вспомнить определение тангенса и как отношения синуса и косинуса, и как отношения катетов. Далее можно провести аналогию: в единичной окружности ($OM = 1$) $\sin\alpha = \frac{MA}{OM} = MA$, $\cos\alpha = \frac{OA}{OM} = OA$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MA}{OA}$.

Так как $|OA| \leqslant 1$, то имеет смысл в качестве прилежащего катета взять катет, длина которого равна 1, например OP, тогда другой катет должен иметь длину, равную $|\operatorname{tg}\alpha|$. Таким образом, если из точки $P(1;\ 0)$ восставить перпендикуляр к оси Ox и через точки O и M провести прямую до пересечения с этим перпендикуляром и окружностью, получим точку N, такую, что

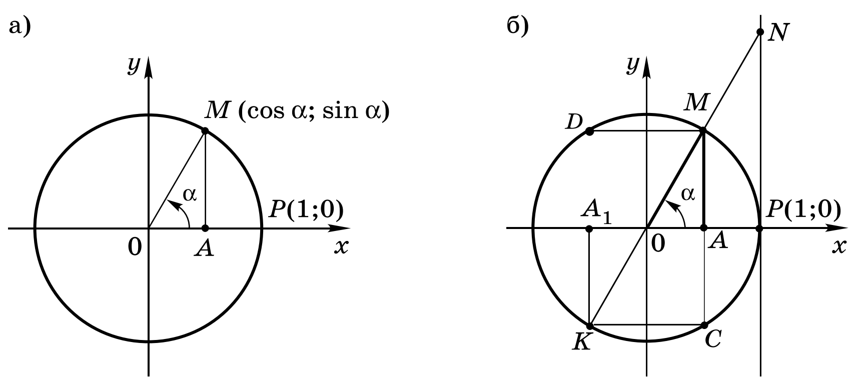


Рис. 51

$PN = |\mathrm{tg}\,\alpha|$, и точку K, соответствующую числу, тангенс которого равен $\mathrm{tg}\,\alpha$. По рисунку 51, *б*, рассматривая треугольники A_1OK, AOM и PON, это легко показать. Заметим, что на этом рисунке все тонкие линии должны появляться постепенно, по мере проведения соответствующих рассуждений.

Теперь учащиеся **наглядно** могут представить себе, что $\mathrm{tg}\,\alpha$ может быть любым действительным числом и почему $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}$ не существует.

Решая задачи **1** и **2** текста параграфа, особое внимание следует уделить объединению формул корней уравнения в одну формулу. Для этого достаточно использовать рисунки **131—133** учебника.

Понятие арктангенса числа можно ввести, используя самостоятельную работу с учебником, либо организовать работу так, как это предложено в предыдущем параграфе при введении $\arcsin a$.

С помощью рисунка 133 учебника учащиеся могут иллюстрировать ответы на вопросы:

1. Имеет ли смысл выражение $\mathrm{arctg}\,1$? $\mathrm{arctg}\,105$? $\mathrm{arctg}\,(-10)$?

2. Может ли значение $\mathrm{arctg}\,a$ быть равным $\frac{\pi}{10}$? $\frac{\pi}{2}$? $-\frac{13}{10}\pi$? $\frac{5}{4}\pi$?

Ответы обосновать.

При выполнении упражнения **1180** желательно требовать от учащихся обоснование ответа, как это сделано в примере учебника, рассмотренном после формулы (1).

Упражнения **1180—1182** направлены на формирование понятия арктангенса числа. Понятие арккотангенса в учебнике не вводится, а решение уравнения $\mathrm{ctg}\,x = a$ заменяется решением уравнения $\frac{1}{\mathrm{tg}\,x} = a$ (как и показано в задаче **3** параграфа).

Учащиеся должны уметь пользоваться формулой $\mathrm{arctg}\,(-a) = -\mathrm{arctg}\,a$, но доказывать эту формулу необходимо лишь учащимся классов **углублённого** уровня.

Задача. Доказать, что для любого действительного числа a выполняется равенство $\mathrm{arctg}\,(-a) = -\mathrm{arctg}\,a$.

Обозначим $\mathrm{arctg}\,a$ через α. По определению арктангенса числа имеем: 1) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\,\alpha = a$. Тогда:

1) по свойствам неравенств $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) по известному свойству $\mathrm{tg}\,(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$, по определению $-\mathrm{tg}\,\alpha = -a$.

Следовательно, по определению арктангенса числа $\mathrm{arctg}\,(-a) = -\alpha = -\mathrm{arctg}\,a$.

Другие свойства арктангенса числа (см. упр. **1188—1189**) необязательны для учащихся **общеобразовательных** классов.

Изучение материала параграфа по урокам можно распределить следующим образом: один вариант — на первом уроке изучить весь теоретический материал параграфа, а на втором решать задачи; другой вариант распределения материала отражён в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 3, задачи 1 и 2, формулы (1) и (3)	1180—1182, 1187	1181 (2), 1182 (2)	1188
2	§ 3, формула (2), задача 3	1183—1185	Решить уравнение: 1) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=-\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$; 3) $\operatorname{tg}(\pi+x)+$ $+2\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0$	1189, 1190, 1186

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 3, задачи 1 и 2, формулы (1) и (3)	1180—1182, 1188, 1189	1181 (2), 1182 (2); вычислить: 1) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$; 2) $\cos(\operatorname{arctg}0{,}5)$	1187; ДМ № 2, 4, 8
2	§ 3, формула (2), задача 3	1183—1186	1. Вычислить $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$. 2. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ на отрезке $\left[-\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$	1190; ДМ № 9, 12

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь применять формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$ при выполнении упражнения **1184**; учащиеся классов **углублённого** уровня должны уметь решать упражнения типа **1185—1187**.

Решение упражнений

1189. Обозначим $t = \operatorname{tg}\alpha$. По определению $\operatorname{arctg} t$ — такое число $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, что $\operatorname{tg}\beta = t$. Так как $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то из равенства $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$ следует, что $\beta = \alpha$, т. е. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$, если $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = -\frac{\pi}{8}$.

3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}13) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(13 - 4\pi))$, так как $0 < 13 - 4\pi < \frac{\pi}{2}$.

1190. 1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) =$

$= -\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

3) $\operatorname{arctg}\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

1191. Обозначим $\operatorname{arctg} a = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} =$

$= \frac{1}{1 + a^2}$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$, так как $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\cos\alpha > 0$.

§ 4. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Однородные уравнения (3/4 ч)

Цель изучения параграфа — обучение решению тригонометрических уравнений, сводящихся к алгебраическим, а также решению однородных уравнений первой и второй степеней.

Обязательными для **всех** учащихся являются: метод введения нового неизвестного, что позволит свести уравнение к квадратному, и метод разложения на множители. Метод вспомогательного угла (о котором говорилось и в § 12 предыдущей главы), применяемый при решении задачи **9**, рассматривается только в классах **углублённого** уровня. Однако, если воспользоваться формулами двойных углов для $\sin x$ и $\cos x$, задачу **9** можно при наличии времени рассмотреть и с учащимися **общеобразовательных** классов (задача сведётся к решению знакомого им однородного уравнения второй степени).

Задача 9. (Из учебника.) Решить уравнение

$$4\sin x + 3 - 3\cos x = 5.$$

Рассмотрим II способ решения.

Используя формулы $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $5 = 5\cdot 1 = 5\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$, получаем

$$8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 5\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right),$$

$$8\sin^2\frac{x}{2} - 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Поделив обе части этого уравнения на $2\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$ (для этого уравнения), получим равносильное ему уравнение $4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозначив $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, получим уравнение $4y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y = \frac{1}{2}$, т. е. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

По форме ответы при различных способах решения задач, аналогичных задаче **9**, могут быть различны. При желании учитель может показать, например, совпадение углов $\arcsin\frac{4}{5}$ и $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Рассматривая уравнения, сводящиеся к квадратным, необходимо обратить внимание учащихся на решение задачи **3** и обсуждение равносильности уравнений $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$ и $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Среди уравнений вида $a\sin x + b\cos x = c$ уравнение, рассматриваемое в задаче **6**, занимает особое место: это пример уравнения, однородного относительно синуса и косинуса. Желательно, чтобы при решении таких уравнений (упр. **1196**) учащиеся могли объяснить, почему при делении данного уравнения на $\cos x$ получается уравнение, равносильное данному, как это сделано перед задачей **6**.

При решении задач (например, упражнения **1197**, аналогичного задаче **9**) с помощью введения вспомогательного аргумента важно добиться от учащихся классов **углублённого** уровня объяснения существования вспомогательного аргумента в каждом конкретном случае. Желательно обратить внимание учащихся на то, что уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ не имеет решения, если $c^2 > a^2 + b^2$.

Решая упражнения, аналогичные № **1192**, желательно проиллюстрировать наличие общей части у двух серий корней с помощью единичной окружности, что поможет предотвратить ошибки в записи общей формулы ответа.

1192. 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ (рис. 52).

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{1}{2}$,

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ можно записать в виде $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

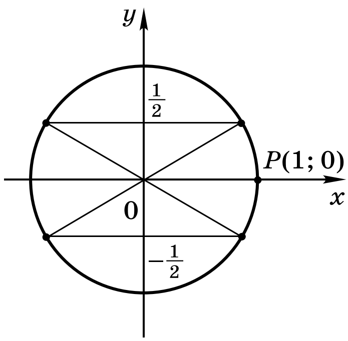


Рис. 52

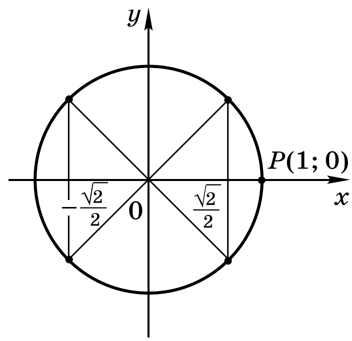


Рис. 53

1192. 2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 53).

а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, или $x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Иначе можно записать

$x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

При наличии времени можно предложить учащимся, **интересующимся математикой**, вывести удобные для запоминания формулы решения уравнений $\sin^2 x = a^2$, $\cos^2 x = a^2$, $\mathrm{tg}^2 x = a^2$, записав их соответственно так:

$x = \pm\arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ $(|a| \leqslant 1)$;
$x = \pm\arccos a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ $(|a| \leqslant 1)$;
$x = \pm\mathrm{arctg}\, a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Упражнения к параграфу подобраны таким образом, чтобы приём, использованный при решении конкретной задачи параграфа, мог быть закреплён учащимися при выполнении упражнений. Так, упражнение **1192** отрабатывает идеи, заложенные в задаче **1**; упражнение **1193** — в задаче **2**; упражнение **1194** — в задаче **3**; упражнение **1195** — в задаче **4**; упражнение **1196** — в задачах **6** и **7**; упражнение **1198** — в задаче **5**.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	Упражнения: для самостоятельной работы в классе	Упражнения: дополнительные
1	§ 4, задачи 1 и 2	1192, 1193	1193 (3)	$2\sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin x - 5 = 0$
2	§ 4, задачи 3 и 4	1194, 1195	Решить уравнение: 1) $3\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$; 2) $2\cos^2 x + 3\sin^2 x = 0$	1199 (1)
3	§ 4, задачи 6 и 7	1196	Решить уравнение: 1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$; 2) $\sin^2 x + 6\cos^2 x + 7\sin x\cos x = 0$	1199 (2)

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	Упражнения: для самостоятельной работы в классе	Упражнения: дополнительные
1	§ 4, задачи 1—3	1192—1194	1193 (3), 1194 (3)	1199 (1); решить уравнение $2\sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin x - 5 = 0$; ДМ № 1, 4, 5, 7
2	§ 4, задачи 4—5	1195, 1198	Решить уравнение: 1) $2\cos^2 10x - 2\sin 5x\cos 5x - 1 = 0$; 2) $\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin^2 x} = 3$	1199 (2); ДМ № 11—15

Продолжение

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
3	От задачи 6 до конца параграфа	1196, 1197	Решить уравнение: 1) $2\sin x - 3\cos x =$ $= 0$; 2) $5\sin^2 x -$ $- 5\sin x\cos x = 3$	1200; решить уравнение $\sin x + 2\cos x =$ $= \lvert\sin x\rvert$; ДМ № 17, 19

На последнем уроке изучения параграфа в классах **углублённого** уровня можно провести проверочную работу (15—20 мин), в которой нужно решить уравнения:

1. $2\sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin x - 5 = 0$ $[\sin^2 x + 2\cos^2 x - 5\cos x - 7 = 0]$.

2. $7\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 4\cos^2 x$ $[3\sin^2 x - \sin x\cos x = 4\cos^2 x]$.

3. $4\sin x - 3\cos x = 2$ $[3\cos x + 4\sin x = 1]$.

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь выполнять упражнения типа **1193**, **1194** (3, 4), **1196** (1—4), а учащиеся классов **углублённого** уровня — упражнения типа **1196** (5, 6), **1197** (1, 2).

Решение упражнений

1198. 1) Пусть $\cos x = t$, тогда уравнение примет вид $4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = 0$, откуда $4t^2(t-1) - 3(t-1) = 0$, $(t-1)(4t^2-3) = 0$, т. е. $t_1 = 1$, $t_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $x = 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3) Полагая $\operatorname{tg} x = t$ и используя формулу $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, преобразуем уравнение к виду $1 + t^2 = 3 + t$, откуда $t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1199. 1) Заменяя $\sin^2 x = t$, преобразуем уравнение к виду $4t^2 + \frac{1}{3}(1-t) = \frac{1}{2}$, $4t^2 - \frac{t}{3} - \frac{1}{6} = 0$, откуда $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = -\frac{1}{6}$; $\sin x = \pm\frac{1}{2}$.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1200. 1) Так как $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, не являются корнями исходного уравнения, разделим обе его части на $\cos^3 x \neq 0$ и получим уравнение $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x = 2$, которое преобразуем к виду

$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 2) = 0$. Все корни этого уравнения находим из уравнения $\operatorname{tg} x = 1$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

1201. 1) Пусть $b = \sqrt{a^2 + (1+a)^2} = \sqrt{2a^2 + 2a + 1}$. Разделив обе части уравнения на $b \neq 0$, получим $\frac{a}{b}\sin x + \frac{1+a}{b}\cos x = \frac{\sqrt{5}}{b}$, или $\sin(x + \varphi) = \frac{\sqrt{5}}{b}$. Уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $\left|\frac{\sqrt{5}}{b}\right| \leqslant 1,\ b^2 \geqslant 5,\ 2a^2 + 2a + 1 \geqslant 5,\ a^2 + a - 2 \geqslant 0$.

Ответ. При $a \leqslant -2,\ a \geqslant 1$.

2) Рассуждая аналогично, получим $a^2 - a - 2 \geqslant 0$.

Ответ. При $a \leqslant -1,\ a \geqslant 2$.

1202. Преобразуем исходное уравнение:

$$(a^2 + 2) \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 2a\sin 2x = a^2 + 3,$$

$$(a^2 + 2)\cos 2x + 4a\sin 2x = -(a^2 + 4).$$

Условие наличия корней: $\frac{(a^2+4)^2}{(a^2+2)^2 + 16a^2} \leqslant 1$, откуда $12a^2 - 12 \geqslant 0,\ a^2 \geqslant 1$, т. е. $|a| \geqslant 1$.

Ответ. $a \leqslant -1,\ a \geqslant 1$.

§ 5. Методы замены неизвестного и разложения на множители. Метод оценки левой и правой частей тригонометрического уравнения (2/3 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство всех учащихся с применением метода разложения на множители для решения тригонометрических уравнений; расширение знаний учащихся классов **углублённого** уровня о применимости метода замены обозначения в тригонометрии; знакомство учащихся **математических** классов с оценочным методом при решении тригонометрических уравнений.

С учащимися **общеобразовательных** классов при изучении данного параграфа рассматриваются лишь уравнения, решаемые методом разложения его левой части на множители при равенстве нулю правой части уравнения (задачи **1—3**). С методом замены неизвестного учащиеся в принципе знакомились при изучении предыдущего параграфа (сводя тригонометрические уравнения к квадратным). В начале первого урока или в конце второго в качестве повторения учитель может рассмотреть с классом решение ещё одного тригонометрического уравнения, приводимого после замены обозначения к квадратному.

Решить уравнение $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

Решение. Так как $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin^2 2x = 1-\cos^2 2x$, то, полагая $t = \cos 2x$, получаем уравнение

$$3(1-t) + 2(1-t^2) = 5, \quad \text{или} \quad 2t^2 + 3t = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{3}{2}$.

Если $t = 0$, т. е. $\cos 2x = 0$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Если $t = -\frac{3}{2}$, то $\cos 2x = -\frac{3}{2}$. Это уравнение не имеет корней.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Учащиеся классов углублённого уровня знакомятся с заменами $t = \sin x + \cos x$ и $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, упрощающими решение определённых видов тригонометрических уравнений.

Метод введения нового неизвестного можно продемонстрировать и при решении упражнения **1207**.

1207. 1) $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$. Обозначим $\sin x + \cos x = t$, тогда $(\sin x + \cos x)^2 = t^2$, откуда $2\sin x \cos x = t^2 - 1$, т. е. $\sin 2x = t^2 - 1$. Получим уравнение относительно t:

$2(t^2-1) - 3t + 2 = 0$, $2t^2 - 3t = 0$, $t(2t-3) = 0$.

а) $t = 0$, $\sin x + \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $2t - 3 = 0$, $t = \frac{3}{2}$, $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$ не имеет решения (так как $c^2 > a^2 + b^2$, что не удовлетворяет соотношениям (9) из § 4).

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Хотя для учащихся этих классов оценочный метод левой и правой частей тригонометрических уравнений не является обязательным для изучения, при наличии времени всё же желательно познакомить учащихся с ним. Если учитель считает задачи **9—11** сложными для учащихся своего класса, оценочный метод можно проиллюстрировать, например, при решении приведённого ниже комбинированного уравнения.

Решить уравнение $x^2 + 2x + 4 = 3\sin\frac{3\pi x}{2}$.

$$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geqslant 3.$$

Так как $\left|\sin\frac{3\pi}{2}\right| \leqslant 1$, то $3\sin\frac{3\pi x}{2} \leqslant 3$. Таким образом, равенство левой и правой частей возможно лишь при равенстве каждой из них числу 3. Отсюда $x^2+2x+4=3$ при $x=-1$. Проверим, будет ли значение выражения $3\sin\frac{3\pi x}{2}$ при $x=-1$ равно 3:

$$3\sin\frac{3\pi(-1)}{2}=-3\sin\frac{3\pi}{2}=-3\cdot(-1)=3.$$

Ответ. $x=-1$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 5, задачи 1—3	1203, 1204	1204 (3)	1209 (2)
2		1205, 1206	1206 (3); тест 7	Решить уравнение $6\sin^2 x+$ $+2\sin^2 2x=5$

Классы углублённого уровня

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 5, задачи 1—3	1203—1206	1204 (3), 1206 (3)	1209 (2); ДМ № 1, 2, 5
2	§ 5, задачи 4—5	1212, 1211, 1209 (1)	1211 (3)	Задача 6 текста параграфа; ДМ № 5, 7
3	Текст § 5 после задачи 6, задачи 7—8, замечание к задаче 8	1207, 1208	1207 (3); тест 7	1210; решить уравнение $x^2+2x+4=$ $=3\sin\frac{3\pi x}{2}$; ДМ № 10, 11

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь применять метод разложения на множители при решении упражнений типа **1203—1205**; учащиеся классов **углублённого** уровня должны знать особенности метода замены выражений $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ при решении тригонометрических уравнений.

Решение упражнений

1213. 1) $2\sin x\cos 2x = -\sin x\sin 3x$, поэтому исходное уравнение примет вид $3\sin 3x + \sin 5x + \sin x = 0$, откуда $3\sin 3x + 2\sin 3x \times \times \cos 2x = 0$, $\sin 3x(3 + 2\cos 2x) = 0$, $\sin 3x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) $6\cos 2x\sin x + 14\sin x\cos x = 0$, $\sin x(6\cos^2 x + 7\cos x - 3) = 0$, откуда $\sin x = 0$, $\cos x = \frac{1}{3}$.

Ответ. $x = \pi n$, $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3) Равенство верно, если $\sin x = \pm 1$. При $\sin x = 1$ имеем $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, при этих значениях x верно, что $\sin 5x = 1$. При $\sin x = -1$ имеем $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, тогда $\sin 5x = -1$.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, или $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1214. 1) $0 \leqslant \sin^4 x \leqslant 1$, $0 \leqslant \cos^6 x \leqslant 1$, равенства $\sin^2 x = 1$ и $\cos^2 x = 1$ одновременно выполняться не могут.

Ответ. Корней нет.

2) $|\sin^3 x| \leqslant 1$, $|\cos^5 x| \leqslant 1$, поэтому левая часть уравнения не превосходит 3, а правая часть $\sqrt{10} > 3$.

Ответ. Корней нет.

3) Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, тогда $\sin 5x = 1$, $\sin 7x = 1$. Если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, тогда $\sin 5x = -1$, $\sin 7x = -1$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4) Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n$, тогда $\cos 2x = 1$, $\cos 3x = 1$. Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n$, тогда $\cos 2x = 1$, $\cos 3x = 1$.

Ответ. $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1215. 1) $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5} = t$, $\frac{3\pi}{5} + x = 2t + \pi$, $\sin(2t + \pi) = 2\sin t$, $\sin 2t + 2\sin t = 0$, $2\sin t\cos t + 2\sin t = 0$.

а) $\sin t = 0$, $t = \pi n$, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5} = \pi n$, $x = \frac{2\pi}{5} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\cos t = -1$ (корни этого уравнения содержатся среди корней уравнения $\sin t = 0$).

Ответ. $x = \frac{2\pi}{5} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = t$, $\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = t^2 - 2$, $t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -1$.

а) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = -1$ (в этом случае нет корней, так как правая часть уравнения положительна);

б) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$, $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$, $\sin x = 1$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3) $\cos 2x + \frac{1}{\cos 2x} = t$, $t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -1$.

а) $\cos 2x + \frac{1}{\cos 2x} = 2$, $\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1 = 0$, $\cos 2x = 1$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\cos 2x + \frac{1}{\cos 2x} = -1$, $\cos^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$ — это уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

1216. а) $\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin 7x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \boldsymbol{Z}, \\ 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \boldsymbol{Z}, \end{cases}$

откуда $\frac{7\pi}{2} + 14\pi n = \frac{5\pi}{2} + 10\pi k$, $14n + 1 = 10k$. Это равенство не может выполняться при $n, k \in \boldsymbol{Z}$ (чётное число не может быть равно нечётному).

б) $\begin{cases} \sin 5x = -1, \\ \sin 7x = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \boldsymbol{Z}, \\ 7x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \boldsymbol{Z}, \end{cases}$

откуда $-\frac{7\pi}{2} + 14\pi n = -\frac{5\pi}{2} + 10\pi k$ или $14n = 1 + 10k$.

Ответ. Уравнение не имеет корней.

1217. $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \cos^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$,

$\frac{3}{8}\cos 4x = a - \frac{5}{8}$, $\cos 4x = \frac{8a - 5}{3}$, $-1 \leqslant \frac{8a - 5}{3} \leqslant 1$, откуда $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$.

Ответ. $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$.

§ 6. Системы тригонометрических уравнений (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство учащихся классов **углублённого** уровня с приёмами решения систем тригонометрических уравнений.

Предлагаемый в учебнике материал не должен вызвать затруднений у учащихся и может быть усвоен менее чем за 2 ч. В освободившееся время учитель может организовать повторение ранее изученного материала, используя при этом упражнения к главе.

Возможное распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Номер урока	**Теоретический материал**	**Упражнения**		
		основные для работы в классе и дома	**для самостоятельной работы в классе**	**дополнительные**
1	§ 6, задачи 1, 2	1218		1220; ДМ № 1
2	§ 6, задача 3	1219	1219 (3)	1261, 1263; ДМ № 3

В результате изучения параграфа учащиеся классов углублённого уровня должны получить представление о рациональных способах решения систем тригонометрических уравнений.

Решение упражнений

1219. 1) Исходную систему приведём к виду $\begin{cases}\sin x - \sin y = 1,\\ \sin^2 x - \sin^2 y = 0,\end{cases}$

получаем совокупность двух систем:

а) $\begin{cases}\sin x - \sin y = 1,\\ \sin x - \sin y = 0.\end{cases}$ Эта система не имеет решений;

б) $\begin{cases}\sin x - \sin y = 1,\\ \sin x + \sin y = 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2\sin x = 1,\\ 2\sin y = -1;\end{cases}$ $\begin{cases}x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z},\\ y = (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.\end{cases}$

Ответ. $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

1220. 1) Первое уравнение системы равносильно уравнению $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 1$; учитывая второе соотношение системы, имеем $\sin(x+y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

а) $\cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, и, зная, что $\cos x\cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, получим $\sin x\sin y=0$, откуда $\operatorname{tg} x=0$, $\operatorname{tg} y=0$.

Из условий $\begin{cases}\cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ следует, что $x+y=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, тогда если $\operatorname{tg} x=0$ и $x=\pi k$, то решениями исходной системы будут $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n-\pi k\right)$, где $k\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; если же $\operatorname{tg} y=0$ и $y=\pi k$, то решения системы — $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\pi k;\ \pi k\right)$.

б) $\cos(x+y)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $\sin x\cdot\sin y=\sqrt{2}>1$, чего быть не может.

Ответ. $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n-\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\pi k;\ \pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

§ 7. Тригонометрические неравенства (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство учащихся классов **углублённого** уровня с приёмами решения простейших тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

При наличии времени и в **общеобразовательных** классах учитель может разобрать с учащимися решения задач **1—3**.

В классах **углублённого** уровня распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 7, задачи 1—3	1221—1224	Решить неравенство: 1) $\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$; 2) $\sin x<\frac{1}{2}$	1228 (1)
2	§ 7, задачи 4—5	1225—1227	1225 (3)	1228 (2)

В результате изучения параграфа учащиеся классов **углублённого** уровня должны научиться решать простейшие тригонометрические неравенства типа **1221—1224.**

Решение упражнений

1228. 1) Знаменатель дроби положителен, так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$. Неравенство равносильно следующему: $|\sin x| > \frac{1}{2}$, откуда $\frac{\pi}{6} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Воспользуемся формулами

$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ и $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$. Тогда неравенство примет вид

$$(\cos 3x + 3\cos x)\cos 3x + (\sin 3x - 3\sin x)\sin 3x > \frac{5}{2},$$

$$3(\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) > \frac{3}{2},\ \cos 4x > \frac{1}{2},$$

откуда $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3) Найдём решения неравенства на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π.

а) Если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $-2\cos x < 0$ и эти значения x — решения неравенства (левая часть определена и положительна, а правая часть отрицательна).

б) Если $\cos x \leqslant 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству $\frac{7 - \cos 4x}{2} > 16\cos^4 x$ (1), где $4\cos^4 x = (1 + \cos 2x)^2 = 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x$, $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. Поэтому неравенство (1) преобразуется к виду

$$7 - 2\cos^2 2x + 1 > 8(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x),$$

$$\cos 2x(5\cos 2x + 8) < 0,\ \text{где}\ 5\cos 2x + 8 > 0.$$

Поэтому задача сводится к отысканию значений $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (где $\cos x \leqslant 0$), для которых $\cos 2x < 0$. Но неравенство $\cos 2x < 0$ равносильно неравенству $\cos^2 x < \frac{1}{2}$ или $|\cos x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как $\cos x \leqslant 0$, то $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x \leqslant 0$. Это неравенство на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет решения $-\frac{3\pi}{4} < x \leqslant 0$ и $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{3\pi}{4}$. Объединив промежутки $\left(-\frac{3\pi}{4}; 0\right]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, получим интервал $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$. Полное решение имеет вид $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Урок обобщения и систематизации знаний (1/1 ч)

На уроке обобщения и систематизации знаний следует обратить внимание учащихся на важность проведения анализа уравнения, что позволит выбрать метод решения и наметить путь решения.

Среди упражнений к главе, которые рекомендуется использовать на уроках повторения, особое внимание следует обратить на задания типа **1230—1237**, **1239** (подобные уравнения должны уметь решать почти все учащиеся).

В качестве дополнительных в классах **углублённого** уровня можно использовать упражнения **1252—1255**, **1261—1263** и прикладные задачи **1276**, **1277**, решения которых приводятся ниже.

Решение упражнений

1252. 1) $\sin x \neq 0$, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 0$, $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{3}{4}$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = 0$, $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

4) $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 0$, $\frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x} = 0$, $4\cos^2 x = 3$, $2(1 + \cos 2x) = 3$, $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

5) $\frac{\sin x}{\sin 5x} = 0$. Это уравнение не имеет корней, так как если $\sin x = 0$, то $\sin 5x = 0$;

6) $\frac{\cos x}{\cos 7x} = 0$. Если $\cos x = 0$, то $\cos 7x = 0$. Поэтому уравнение не имеет корней.

1255. 1) $\sin 2x + \cos 2x = 2\operatorname{tg} x + 1$, $\sin 2x + 2\cos^2 x = 2\operatorname{tg} x + 2$, откуда $2\cos x(\sin x + \cos x) = \frac{2(\sin x + \cos x)}{\cos x}$.

а) $\sin x + \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\cos^2 x = 1$, $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1256. 1) Преобразуем уравнение к виду $1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x$, $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}\sin^2 2x$, $\cos^2 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}$.

$1 - 3\sin^2 2x = \frac{1}{4}$, $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$, $\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{4}$, $\cos 4x = \frac{1}{2}$,

$4x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3) $\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \sin^2 3x$, $\cos^2 3x - \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = 0$, $\cos^2 3x - \cos 3x \cdot \cos x = 0$.

а) $\cos 3x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\cos 3x - \cos x = 0$, откуда $\sin 2x \cdot \sin x = 0$, $\sin^2 x \cdot \cos x = 0$. Корни уравнения $\cos x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\cos 3x = 0$. Уравнение $\sin x = 0$ имеет корни $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4) $\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2}$, $\cos 2x + \cos 6x + \cos 4x + \cos 8x = 0$, $\cos 4x \cos 2x + \cos 6x \cos 2x = 0$, $\cos 2x \cos 5x \times \cos x = 0$. Корни уравнения $\cos x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\cos 5x = 0$. Итак, $\cos 2x \cdot \cos 5x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1257. 1) а) $\sin x \geqslant 0$, тогда $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$, $2\sin 2x \cdot \cos x = \sin 2x$, $\sin 2x(2\cos x - 1) = 0$; $\sin 2x = 0$, $x = \frac{\pi n}{2}$, отсюда при $\sin x \geqslant 0$ имеем $x = \pi k$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. Корнями являются $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, а $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ не являются корнями исходного уравнения.

б) $\sin x < 0$, тогда $\sin 3x - \sin x = \sin 2x$, $2\sin x \cdot \cos 2x = 2\sin x \times \cos x$. Из того, что $\sin x < 0$, следует: $\cos 2x = \cos x$, $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Отсюда $\cos x = 1$, тогда $\sin x = 0$ (не подходит); $\cos x = -\frac{1}{2}$, тогда $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, откуда $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ($\sin x < 0$); $x = \frac{\pi}{3} + (2k-1)\pi$.

Ответ. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1258. 1) Данное уравнение равносильно уравнениям

$$\frac{(2\cos x+\sin^2 x)\sin x}{\cos x-\sin 2x\sin x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x},$$

$$\frac{\sin x(2\cos x+\sin^2 x)}{\cos x\cdot\cos 2x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}. \qquad (1)$$

Область определения исходного уравнения задаётся соотношениями

$$\sin x\neq 0,\ \cos x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0. \qquad (2)$$

При выполнении (2) уравнение (1) равносильно следующим: $\sin 2x+\sin^3 x=\sin 2x\cos x$, $\sin 2x(1-\cos x)+(1-\cos^2 x)\sin x=0$, $(1-\cos x)\sin x(2\cos x+1+\cos x)=0$. Если $\cos x=1$, то $x=2\pi n$ не подходит, так как тогда $\sin x=0$; $\sin x\neq 0$ (см. область определения); $3\cos x+1=0$, $\cos x=-\frac{1}{3}$, $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n$, $x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi n$.

Ответ. $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+(2k+1)\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

3) Исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\cos 3x-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos 5x-\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)}=1,\quad \frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=1.$$

Область определения задаётся соотношением

$$\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0. \qquad (3)$$

При выполнении условия (3) исходное уравнение равносильно каждому из следующих: $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, $\sin x\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, откуда $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Эти значения x удовлетворяют условию (3).

Ответ. $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

1259. 1) Область определения: $\sin x>0$, $2\cos x-\sin x\geqslant 0$ $\left(\operatorname{ctg} x\geqslant\frac{1}{2}\right)$. После возведения в квадрат имеем $2\cos x-\sin x=$ $=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\sin x=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$, $2\sin x\cos x-\sin^2 x=\cos^2 x$, $t=\operatorname{ctg} x$, тогда $t^2-2t+1=0$, $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. Но $\sin x>0$, и поэтому $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

3) Область определения находится из соотношений $\cos x \neq 0$, $\operatorname{tg} x \geqslant -2$, откуда $\frac{5}{2}\sin x + \frac{1}{\cos x} \geqslant 0$ (1). Возводим в квадрат:

$5\operatorname{tg} x + 10 = \frac{25}{4}\sin^2 x + 5\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $\cos^2 x = t$, $40t = 25t(1-t) +$ $+ 4$, $25t^2 + 15t - 4 = 0$, $t = \frac{-15 \pm \sqrt{225+400}}{50} = \frac{-15 \pm 25}{50}$, $t_1 = \frac{1}{5}$, $t_2 = -\frac{4}{5}$ (не подходит).

Если $\cos^2 x = \frac{1}{5}$, то $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

а) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, откуда $x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$ (2).

Если в формуле (2) взять знак «+», то $\cos x > 0$, $\sin x > 0$, $\sin 2x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$ и условия (1) выполняются. Следовательно, значения $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$ — корни исходного уравнения.

Если в формуле (2) взять знак «−», то $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{5}{2}\sin x + \frac{1}{\cos x} = 0$, $\operatorname{tg} x = -2$ (выполнено условие (1)) и значения $x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$ являются корнями исходного уравнения.

б) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда либо $x = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$, откуда $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда $\frac{5}{2}\sin x + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{5}$ — выполняются условия (1); либо $x = \pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$, откуда $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда $\frac{5}{2}\sin x + \frac{1}{\cos x} = -2\sqrt{5} < 0$ — условие (1) не выполняется.

Ответ. $x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$, $x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + (2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1260. 1) а) Если $\sin x > 0$, тогда уравнение примет вид $(\sqrt{3}+1)\sin 3x - \sqrt{3}\sin x + \sin 5x = 0$, $\sqrt{3}\sin x\cos 2x + \sin 4x\cos x = 0$,

$$\sin x\cos 2x(\sqrt{3} + 4\cos^2 x) = 0. \qquad (1)$$

Так как $\sin x > 0$ и $\sqrt{3} + 4\cos^2 x > 0$, то из (1) имеем $\cos 2x =$ $= 2\sin^2 x - 1 = 0$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (так как $\sin x > 0$),

$$x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ или } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \text{ и } x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Если $\sin x<0$, то $(\sqrt{3}+1)\sin 3x+\sqrt{3}\sin x+\sin 5x=0$, $3\sin 2x\times$ $\times\cos x+\sin 4x\cos x=0$, $\sin 2x\cos x(\sqrt{3}+2\cos 2x)=0$. Так как $\sin x\neq 0$, то $\cos x=0$, откуда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$ (это корни уравнения), или $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $2x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $x=\pm\frac{5\pi}{12}+\pi k$. Если в формуле взять знак «+», то при $k=2n$ имеем $\sin x>0$, а при $k=2n-1$ имеем $x=-\frac{7\pi}{12}+2\pi n$ и $\sin x<0$ (это корни). Если в формуле взять знак «−», то при $k=2n$ имеем $\sin x<0$ и $x=-\frac{5\pi}{12}+2\pi n$ — корни уравнения, при $k=2n-1$ имеем $x=\frac{7\pi}{12}+2\pi n$ и $\sin x>0$ — не корни.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\frac{7\pi}{12}+2\pi n$, $x=-\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

3) Воспользуемся формулами

$$\sin 3x=\sin x(3-4\sin^2 x)=\sin x(2\cos 2x-1),$$

$$\cos 6x=\cos 2x(4\cos^2 2x-3) \qquad (1)$$

и рассмотрим два возможных случая: $\cos 6x>0$, $\cos 6x<0$, учитывая при этом, что

$$\cos 6x\neq 0,\ \sin x\neq 0. \qquad (2)$$

а) В первом случае нужно решить уравнение

$$2(2\cos 2x+1)=4\cos^2 2x-3 \qquad (3)$$

при условии

$$\cos 6x>0. \qquad (4)$$

Положим $\cos 2x=t$, тогда уравнение (3) примет вид $4t^2-4t-$ $-5=0$. Это уравнение имеет корни $t_1=\frac{1-\sqrt{6}}{2}$ и $t_2=\frac{1+\sqrt{6}}{2}>1$.

Итак, $\cos 2x=\frac{1-\sqrt{6}}{2}<0$, откуда

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{6}}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}. \qquad (5)$$

Из равенства (1) следует, что $\cos 6x=t_1(4t_1^2-3)$, где $4t_1^2-3=$ $=(1-\sqrt{6})^2-3=4-2\sqrt{6}<0$.

Поэтому $\cos 6x>0$, если $\cos 2x=t_1=\frac{1-\sqrt{6}}{2}$, где $t_1<0$. Итак, условие (4) выполняется и значения x, определяемые формулой (5), являются корнями исходного уравнения.

б) Во втором случае ($\cos 6x < 0$) нужно решить уравнение $4t^2 + 4t - 1 = 0$, $t = \cos 2x$. Это уравнение имеет корни $t_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} > 0$ и $t_2 = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2} < -1$.

Проверим выполнение условия $\cos 6x < 0$, используя формулу (1). Получим $\cos 6x = t_1(4t_1^2 - 3)$, где $4t_1^2 - 3 = (\sqrt{2} - 1)^2 - 3 = -2\sqrt{2} < 0$. Так как $t_1 > 0$, то $\cos 6x < 0$ и поэтому корни уравнения $\cos 2x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$, т. е. числа $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2} - 1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 - \sqrt{6}}{2} + \pi n$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2} - 1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1270. Полагая $\cos x = t$, получаем уравнение $4(1 - t^2) + 2(a - 3)\times$ $\times\, t + 3a - 4 = 0$, или $4t^2 - 2(a - 3)t - 3a = 0$, откуда $t_1 = -\frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{a}{2}$. Уравнение $\cos x = -\frac{3}{2}$ не имеет корней, а уравнение $x = \frac{a}{2}$ имеет корни при условии $|a| \leqslant 2$.

Ответ. $|a| \leqslant 2$, $x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1271. Преобразуем выражение, стоящее в левой части уравнения $y = \sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x - (1 + \cos 2x) =$
$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3\cos 2x + \sin 2x) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x\right) =$
$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}\sin(2x + \varphi)$, где $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$. Так как $|\sin(2x + \varphi)| \leqslant 1$, то $-\frac{1 + \sqrt{10}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{10} - 1}{2}$.

Ответ. При $a < -\frac{1 + \sqrt{10}}{2}$ и при $a > \frac{\sqrt{10} - 1}{2}$.

1272. Преобразуем левую часть уравнения $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$, и уравнение примет вид $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x = a$, или $\cos 4x = 4a - 3$. Уравнение имеет корни, если $-1 \leqslant 4a - 3 \leqslant 1$, т. е. $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, причём $4x = \pm\arccos(4a - 3) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a - 3) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1273. Рассмотрим тождество $\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^8 x + \cos^8 x) \times$ $\times (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^{10} x + \cos^{10} x + \sin^2 x \cos^2 x (\sin^6 x + \cos^6 x)$. С другой стороны,

$$\sin^8 x + \cos^8 x = (\cos^2 4x + 14\cos 4x + 17)\frac{1}{32},$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4x),$$

получаем

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{1}{64}(5\cos^2 4x + 30\cos 4x + 29).$$

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin^{10} x + \cos^{10} x$. Так как $|\cos 4x| \leqslant 1$, то задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции $z(t) = \frac{1}{64}(5t^2 + 30t + 29) = \frac{1}{64}(5(t+3)^2 - 16)$ на отрезке $[-1;\ 1]$. Эта функция возрастающая при $t \geqslant -3$. Поэтому $z_{\min} = z(-1) = \frac{1}{16}$, $z_{\max} = z(1) = 1$. Следовательно, $\frac{1}{16} \leqslant \sin^{10} x + \cos^{10} x \leqslant 1$, и уравнение $\sin^{10} x + \cos^{10} x = a$ имеет корни тогда и только тогда, когда $\frac{1}{16} \leqslant a \leqslant 1$.

1274. Пусть $\sin x + \cos x = t$, тогда $t^2 = 1 + \sin 2x$ и уравнение примет вид $t^2 - 1 - 2a\sqrt{2}t + 1 - 6a^2 = 0$, где $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, откуда $|t| \leqslant \sqrt{2}$. Уравнение $t^2 - 2a\sqrt{2}t - 6a^2 = 0$ имеет корни $t_1 = 3\sqrt{2}a$, $t_2 = -\sqrt{2}a$. Неравенство $|t_1| \leqslant \sqrt{2}$ выполняется, если $|a| \leqslant \frac{1}{3}$, а неравенство $|t_2| \leqslant \sqrt{2}$ верно, если $|a| \leqslant 1$.

а) Если $|a| \leqslant \frac{1}{3}$, то $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}a$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3a$, т. е.

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin 3a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

В этом случае есть ещё одна серия корней, таких, что $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}a$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -a$,

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

б) Если $\frac{1}{3} < |a| \leqslant 1$, то имеется только одна серия корней (2).

Ответ. Если $|a| \leqslant \frac{1}{3}$, то $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin 3a + \pi n$ и $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; если $\frac{1}{3} < |a| \leqslant 1$, то

$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin a+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$. При $|a|>1$ уравнение не имеет корней.

1276. По условию $\alpha+\beta=\psi$, $a:b=k$. Пусть $\alpha=x$, тогда $\beta=\psi-x$.

По теореме тангенсов $\frac{k-1}{k+1}=\frac{\operatorname{tg}\frac{x-\psi+x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+\psi-x}{2}}$, откуда

$$\frac{k-1}{k+1}=\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\psi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}},\qquad \operatorname{tg}\left(x-\frac{\psi}{2}\right)=\frac{(k-1)\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{k+1},\qquad x=\frac{\psi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{(k-1)\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{k+1}.$$

Ответ. $\alpha=\frac{\psi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{(k-1)\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{k+1}$, $\beta=\frac{\psi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{(k-1)\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{k+1}$.

1277. Проведём диагональ BD. Пусть $BD=m$, $\angle ADB=\varphi$, $\angle BDC=\psi$, т. е. $\beta=\varphi+\psi$. По теореме синусов из треугольника ABD имеем $\frac{a}{\sin\varphi}=\frac{d}{\sin(180^\circ-\alpha-\varphi)}$, откуда $a\cdot\sin(\alpha+\varphi)=d\sin\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi=\frac{a\cdot\sin\alpha}{d-a\cos\alpha}$. По теореме косинусов из $\triangle ABD$ имеем $m^2=a^2+d^2-2ad\cdot\cos\alpha$, а из $\triangle BCD$ имеем (по теореме косинусов) $\cos\psi=\frac{c^2+m^2-b^2}{2mc}$, т. е. $\cos\psi=\frac{c^2+a^2+d^2-2ad\cos\alpha-b^2}{2c\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\alpha}}$.

Ответ. $\beta=\operatorname{arctg}\frac{a\cdot\sin\alpha}{d-a\cos\alpha}+\arccos\frac{a^2-b^2+c^2+d^2-2ad\cos\alpha}{2c\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\alpha}}$.

Контрольная работа № 8

Базовый уровень

1. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2}\cos x-1=0$ $[2\sin x-1=0]$;

2) $3\operatorname{tg}2x+\sqrt{3}=0$ $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0\right]$.

2. Найти корни уравнения $\sin\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$ $\left[\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\right]$ на отрезке $[0;\ 3\pi]$ $[[0;\ 4\pi]]$.

3. Решить уравнение:

1) $3\cos x-\cos^2 x=0$ $[\sin^2 x-2\sin x=0]$;

2) $6\sin^2 x-\sin x=1$ $[10\cos^2 x+3\cos x=1]$;

3) $3\sin x-5\cos x=0$ $[5\sin x+2\cos x=0]$;

---

4) $\sin 6x-\sin 4x=0$ $[\cos 5x+\cos 3x=0]$;

5) $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+\frac{1}{4}$ $\left[\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^2 2x-\frac{1}{2}\right]$.

Углублённый уровень

1. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ $[2\sin x - 1 = 0]$;

2) $3\operatorname{tg} 2x + \sqrt{3} = 0$ $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0\right]$.

2. Найти корни уравнения $\sin\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ $\left[\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\right]$ на отрезке $[0;\ 3\pi]$ $[[0;\ 4\pi]]$.

3. Решить уравнение:

1) $3\cos x - \cos^2 x = 0$ $[\sin^2 x - 2\sin x = 0]$;

2) $6\sin^2 x - \sin x = 1$ $[10\cos^2 x + 3\cos x = 1]$;

3) $3\sin x - 5\cos x = 0$ $[5\sin x + 2\cos x = 0]$;

4) $\sin 6x - \sin 4x = 0$ $[\cos 5x + \cos 3x = 0]$;

5) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + \frac{1}{4}$ $\left[\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 2x - \frac{1}{2}\right]$;

6) $5\cos x + 2\sin x = 3$ $[\cos x + 3\sin x = 2]$.

4. (*Дополнительно.*) Решить неравенство $\sin 2x < -\frac{1}{2}$ $\left[\cos 3x < -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Содержание

Учебное издание

Фёдорова Надежда Евгеньевна
Ткачёва Мария Владимировна

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические рекомендации

10 класс

Пособие для учителей
общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Н. Сорокина*
Художественный редактор *О. П. Боголомова*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Компьютерная вёрстка
и техническое редактирование *О. В. Храбровой*
Корректоры *М. А. Павлушкина*, *Т. Н. Федосеенко*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 05.08.14. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 12,51. Тираж 1500 экз. Заказ № .

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70.
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru