Universidad Rey Juan Carlos

Ampliación de Señales y Sistemas

EJERCICIOS TEMA 5: Transformada Discreta de Fourier

Ejercicio 1

Calcule la DFT de N-puntos (DFT_N) de cada una de las siguientes secuencias de longitud N (con N par).

a) $x[n] = \delta[n]$

b) $x[n] = \delta[n - n_0]$

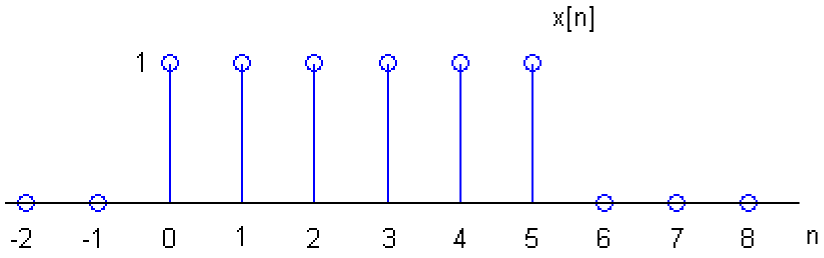
c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \quad par, \quad 0 \le n \le N-1 \\ 0, & n \quad impar, \quad 0 \le n \le N-1 \end{cases}$

d) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N/2-1 \\ 0, & N/2 \le n \le N-1 \end{cases}$

e) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & en \quad otro \quad caso \end{cases}$

Ejercicio 2

Considere la secuencia de longitud finita *x[n]* que se muestra en la figura inferior. Sea $X(e^{j\Omega})$ la Transformada de Fourier de esa secuencia.



Imaginemos que muestreamos la TF de esta secuencia en el periodo de 0 a 2π en los puntos $\Omega=2\pi k/4$ creando la señal:

$$X_1[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{4}k} = X(e^{j\frac{2\pi}{4}k}) \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

a) ¿Es $X_1[k]$ la DTF de la secuencia *x[n]*?

b) Dibuje la secuencia $x_1[n]$ que se obtiene al realizar la DFT inversa de $X_1[k]$.

c) Explique, en términos de muestreo a qué se debe el efecto observado en (c).

Ejercicio 3

Suponga que tenemos las siguientes secuencias de longitud 4:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \qquad n = 0,1,2,3$$
$$h[n] = 2^n, \qquad n = 0,1,2,3$$

a) Calcule la DFT de longitud 4 de x[n], $X[k]=DFT_4\{x[n]\}$

b) Calcule la DFT de longitud 4 de h[n], $H[k]=DFT_4\{h[n]\}$

c) Calcule $y[n]=x[n]④h[n]$ realizando directamente la convolución circular

d) Calcule $y[n]=x[n]④h[n]$ a través de la DFT inversa del producto de $X[k]\cdot H[k]$

Ejercicio 4

Considere un secuencia de duración finita *x[n]* cuya longitud es *N*, es decir,

$x[n]=0$, para cualquier valor de n que no esté comprendido en $0\le n\le N-1$

Sea $X(e^{j\Omega})$ la Transformada de Fourier (TF) de *x[n]* y sea $\widetilde{X}[k]$ la secuencia resultante de tomar 64 muestras equiespaciadas de un periodo de $X(e^{j\Omega})$, es decir,

$$\widetilde{X}[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{64}k} = X(e^{j\frac{2\pi}{64}k})$$

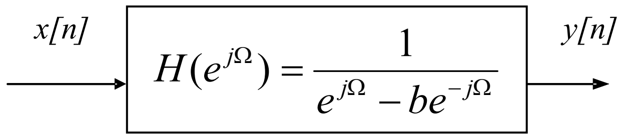
Se sabe además que,

$$\widetilde{X}[k] = \begin{cases} 1, & k = 32 \\ 0, & resto \end{cases}$$

a) Suponga que la longitud de *x[n]* es *N=64*, determine una secuencia *x[n]* que cumpla las condiciones que plantea el problema. Indique si la respuesta es única, si lo es explique por qué y si no lo es determine otra *x'[n]* que también se ajuste a las condiciones del problema.
b) Suponga que la longitud de *x[n]* es *N=192*, determine una secuencia *x[n]* que cumpla las condiciones que plantea el problema. Indique si la respuesta es única, si lo es explique por qué y si no lo es determine otra *x'[n]* que también se ajuste a las condiciones del problema.

Ejercicio 5

Sea *y[n]* la salida de un sistema LTI estable cuya función de transferencia es $H(e^{j\Omega})$ cuando la entrada es *x[n]* tal y como se muestra en la figura inferior.



Siendo *b* una constante conocida

Se desea recuperar *x[n]* a partir de *y[n]* siguiendo el procedimiento siguiente:

1. A partir de *y[n]* calcular la *DFT* de *N* puntos de *y[n]*, *Y[k]*.
2. Obtener *V[k]* mediante la ecuación,

$$V[k] = \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} - b \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right) \cdot Y[k]$$

3. Calcular la DFT_N inversa de *V[k]* para obtener *v[n]*.

Indique para qué valores de *n* pertenecientes al intervalo $0 \leq n \leq N-1$ podemos garantizar que *v[n]=x[n]*.

Ejercicio 6

Suponga que desea calcular la salida de un sistema LTI con respuesta al impulso h[n] de longitud 100 y una señal de entrada x[n] de longitud 10000 a través del cálculo de la convolución lineal de la entrada con la respuesta al impulso. No obstante, para calcular la convolución, en lugar de utilizar el método tradicional pretende utilizar DFT's de longitud N=256.

a) Sabiendo que utiliza el método Overlap-Add para calcular la convolución lineal a través de DFT's, ¿cuál es el número mínimo de DFT's directas y de DFT's inversas que deberá realizar?

b) Si ahora utiliza el método Overlap-Save para calcular la convolución lineal a través de DFT's, ¿cuál es el nuevo número mínimo de DFT's directas y de DFT's inversas que deberá realizar?

c) Si supone que el número de operaciones necesarias para el cálculo de una DFT de longitud *N* a través de un algoritmo de FFT (siempre que N sea una potencia de 2) es de $N \cdot log_2 N$ multiplicaciones y $N \cdot log_2 N$ sumas.

   (c.1) Calcule el número necesario de operaciones para realizar la convolución mediante el método propuesto en (a) sabiendo que utiliza un algoritmo FFT.
   (c.2) Calcule el número necesario de operaciones para realizar la convolución mediante el método propuesto en (b) sabiendo que utiliza un algoritmo FFT.

(c.3) Calcule el número necesario de operaciones para realizar la convolución mediante la aplicación directa de la fórmula de convolución y compare los resultados con los obtenidos para el método propuesto en (a) y (b).

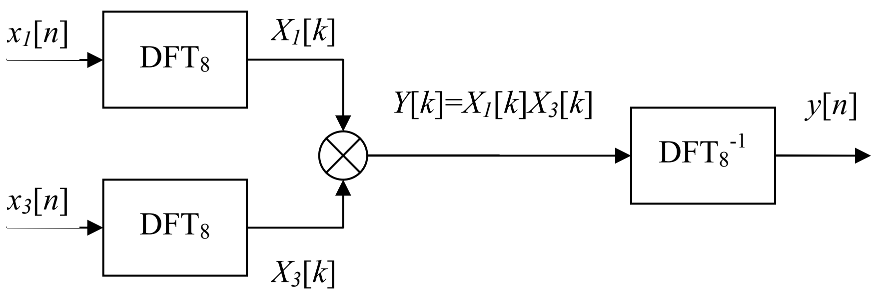
Ejercicio 7

Sean las secuencias

$$x_1[n] = \begin{cases} n+1, & 0 \le n \le 7 \\ 0, & resto \end{cases} \qquad\qquad x_2[n] = x_1[n+1]$$

para las que quiere calcularse la convolución circular de tamaño 8 de forma que $z[n] = x_1[n] \circledast_8 x_2[n]$

Considere ahora el esquema de la figura inferior



Determine $x_3[n]$ para que $y[n]$, la salida del esquema superior, coincida con $z[n]$.

Ejercicio 8

Considere la secuencia temporal

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

a) Determine la transformada de Fourier de *x[n]*, es decir, $X(e^{j\Omega})$.

b) Determine la secuencia $X[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{4}}$, $\qquad k = 0,1,2,3.$

c) Suponiendo que la secuencia obtenida en b) corresponde a una DFT, determine la secuencia temporal que se deriva de dicha secuencia.

d) Compare la secuencia obtenida en c) con *x[n]* y justifique el resultado.

Ejercicio 9

La figura inferior muestra la secuencia discreta $x[n]$ de longitud 9. Considere que $x[n]=0$ fuera del intervalo dibujado. El valor de $x[4]$ no se conoce y se representa mediante la variable *b*.

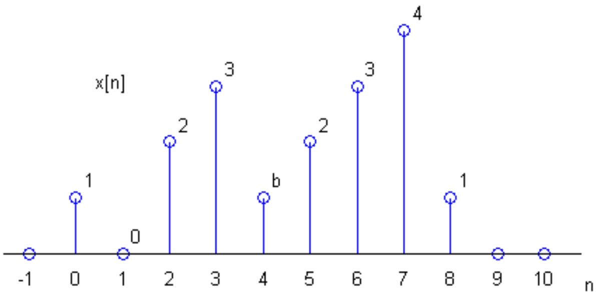


Figura T1-1

Con $X(\Omega)$ representando la TF de $x[n]$, se define la secuencia $X_1[k]$ como la versión muestreada de $X(\Omega)$ con un periodo de muestreo de $\pi/2$ radianes, es decir,

$$X_1[k] = X(\Omega)\big|_{\Omega=\frac{2\pi}{4}k} = X(\Omega = \frac{2\pi}{4}k) \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Finalmente la secuencia $x_1[n]$ se define como la DFT inversa de longitud 4 de la secuencia $X_1[k]$ y se representa en la inferior.

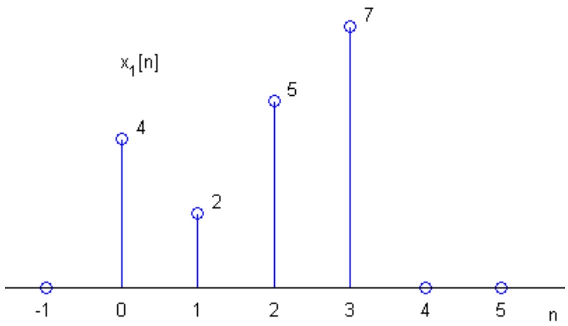


Figura T1-2

Basándose en esta figura, ¿puede calcularse el valor de *b* de forma unívoca? Justifique su respuesta y, en caso de que sea positiva, calcule el valor de *b*.

Ejercicio 10

Sea $x[n]$ una señal discreta de longitud finita tal que $x[n]=0$ si $n \notin [0,7]$ y cuya transformada de Fourier se denota como $X(e^{j\Omega})$. Partiendo de $X(e^{j\Omega})$, se define la secuencia $X_1[k]$ como

$$X_1[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{8}k} = X(e^{j\frac{2\pi}{8}k}) \qquad k = 0, 1, ..., 7$$

de la que se sabe que X_1[k]=24 si k=0 y $X_1[k]$=16 si $k \in [1,7]$,

a) Calcule la secuencia $x_1[n]$ que se obtiene al realizar la DFT inversa de longitud 8 de $X_1[k]$. ¿Cuál es la relación entre $x_1[n]$ y $x[n]$?

Partiendo de $X_1[k]$ se define la secuencia $X_2[k]$ como $X_2[k] = X_1[2k], \quad k = 0, 1, ..., 3.$

b) Calcule la secuencia $x_2[n]$ que se obtiene al realizar la DFT inversa de longitud 4 de $X_2[k]$. ¿Cuál es la relación entre $x_2[n]$ y $x[n]$?

Considere ahora la secuencia $z[n]$ tal que $z[n]$=1 si $n \in [0,7]$ y $z[n]$=0 fuera del anterior intervalo.

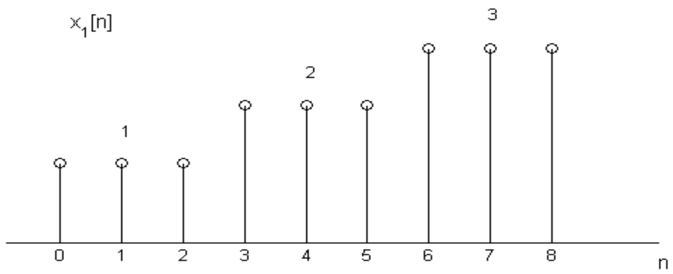
c) Sea $y_{C1}[n]$ la secuencia que se obtiene al realizar la convolución circular de longitud 8 de $x_1[n]$ y $z[n]$. Determine el valor de $y_{C1}[n]$.

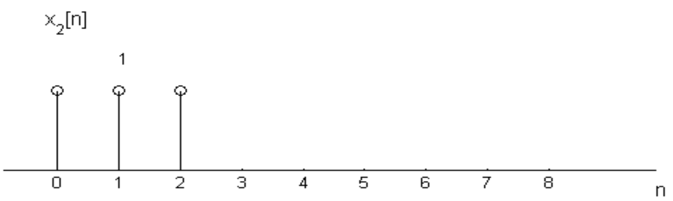
d) Sea $y_{L1}[n]$ la secuencia que se obtiene al realizar la convolución lineal de $x_1[n]$ y $z[n]$. Si sabe que $y_{L1}[0]$=17, obtenga el valor de $y_{L1}[8]$ utilizando únicamente el valor de $y_{L1}[0]$ y el resultado del apartado c).

Ejercicio 11

Utilizando exclusivamente DFT's e IDFT's de longitud 5, convolucione por bloques las siguientes señales mediante:

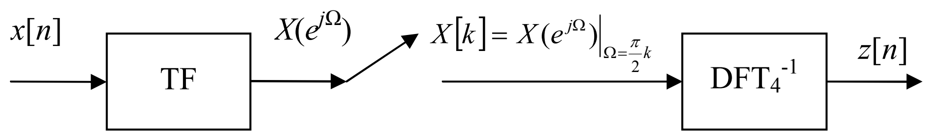
a) el método de *overlap-add*
b) el método de *overlap-save*





Ejercicio 12

Considere el siguiente esquema de procesamiento:



Si $x[n]$ es una señal discreta tal que $x[n]$=0 si $n \notin [0, L]$.

a) Considere que L=3 Escriba una fórmula que exprese la señal $z[n]$ a partir de $x[n]$. Exprese la fórmula de la manera más sencilla posible.

b) Considere que L=11. Escriba una fórmula que exprese la señal $z[n]$ a partir de $x[n]$. Exprese la fórmula de la manera más sencilla posible.

A partir de este punto la entrada x[n] se obtiene como la convolución circular de longitud N de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, donde $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son señales discretas de longitud finita tales que $x_1[n]$=0 si $n \notin [0, P_1]$ y $x_2[n]$=0 si $n \notin [0, P_2]$.

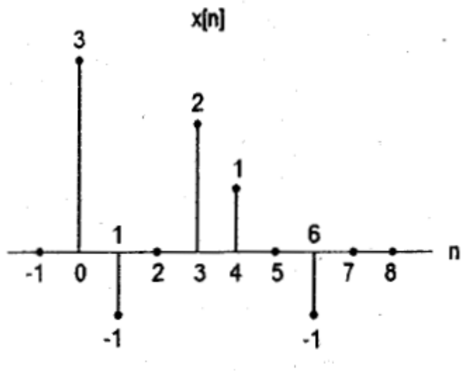
c) Considere que $N=2$, $P_1=1$, $P_2=1$. ¿Es $z[n]$ la convolución circular de longitud 2 de $x_1[n]$ y $x_2[n]$?

d) Considere que $N=4$, $P_1=1$, $P_2=1$. ¿Es $z[n]$ la convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$?

e) Considere que $N=4$, $P_1=3$, $P_2=3$. ¿Es $z[n]$ la convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$?

Ejercicio 13

Considere la secuencia x[n] que se muestra a continuación.



a) Se define: $R[k]=X(e^{j\Omega})|_{\Omega=2\pi k/4}$ para $0 \leq k \leq 3$, donde $X(e^{j\Omega})$ representa a la transformada de Fourier de x[n]. Represente la secuencia r[n] que se obtiene al hacer la DFT inversa de 4 puntos de R[k]. (1,0 punto)

b) Sea X[k] la DFT de 8 puntos de x[n] y sea H[k] la DFT de 8 puntos de la h[n] que se muestra a continuación. Se define $Y[k]=X[k]H[k]$ para $0 \leq k \leq 7$. Represente y[n], la DFT inversa de 8 puntos de Y[k]. (1,0 punto)