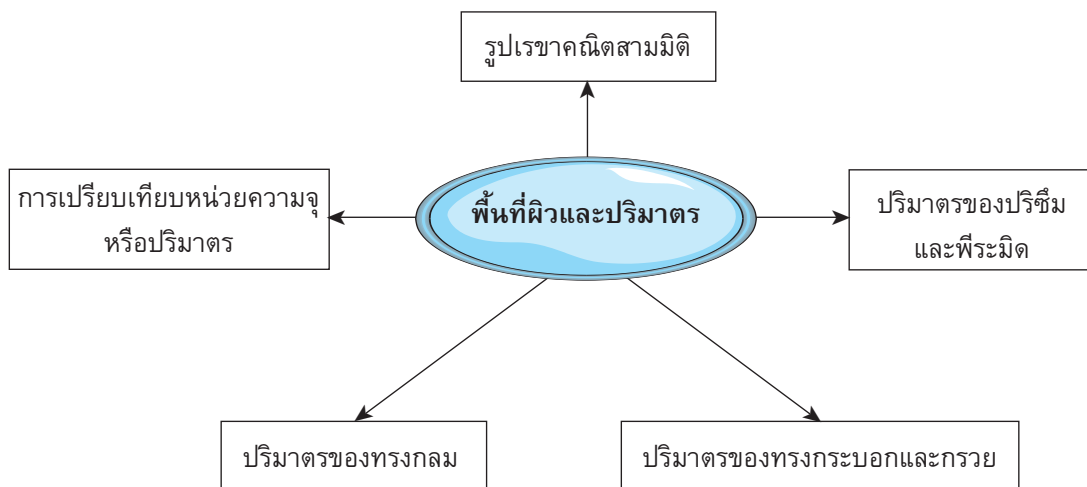




พื้นที่ผิวและ ปริมาตร



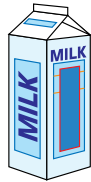
จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายลักษณะและสมบัติของปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้ (ค 3.1 ม.3/1)
2. หาพื้นที่ผิวของปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้ (ค 2.1 ม.3/1)
3. หาปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลมได้ (ค 2.1 ม.3/2)
4. เปรียบเทียบหน่วยความจุหรือหน่วยปริมาตรในระบบเดียวกันหรือต่างระบบได้ (ค 2.1 ม.3/3)
5. เลือกใช้หน่วยการวัดเกี่ยวกับความจุหรือปริมาตรได้อย่างเหมาะสม (ค 2.1 ม.3/3)
6. ใช้ความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ พื้นที่ผิว และปริมาตรแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้ (ค 2.2 ม.3/1)
7. ใช้การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัดในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม (ค 2.1 ม.3/4)



1. รูปเรขาคณิตสามมิติ

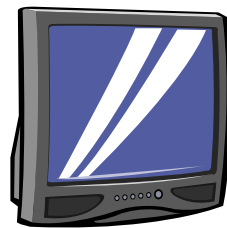
ในชีวิตประจำวันของเราจะพบกับสิ่งของมากมายที่อยู่รอบๆ ตัว ที่มีลักษณะเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ เช่น กล่องนม ลูกบอล เครื่องซักผ้า คอมพิวเตอร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่เรานำมาใช้ประโยชน์ แต่บางครั้งอาจนึกไม่ถึงว่ามีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร



กล่องนม



เครื่องซักผ้า



โทรทัศน์



ลูกบอล



คอมพิวเตอร์

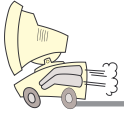


กระป๋องนม

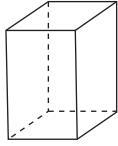


กิจกรรมสำรวจรูปเรขาคณิตสามมิติ ในชีวิตประจำวัน

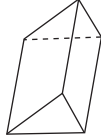
ให้นักเรียนยกตัวอย่างสิ่งของที่มีลักษณะเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติแล้วบอกว่า เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดใด เช่น กล่องยาสีฟ้ามี่ลักษณะเป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ท่อน้ำมีลักษณะเป็นทรงกระบอก



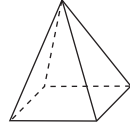
สำหรับรูปเรขาคณิตสามมิติที่จะศึกษาในหน่วยนี้ ได้แก่ ปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลม



ปริซึมสี่เหลี่ยม
มุมฉาก



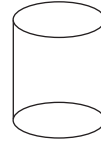
ปริซึมสามเหลี่ยม



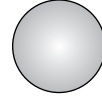
พีระมิด



กรวย



ทรงกระบอก

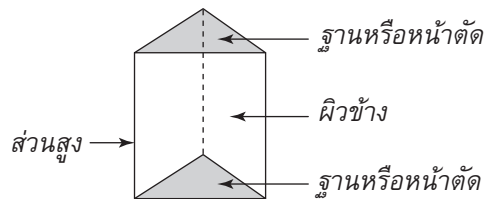


ทรงกลม

1.1 ปริซึม

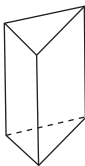
ปริซึมเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานอยู่บนระนาบที่ขนานกันทั้งคู่ซึ่งเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ การเรียกชื่อปริซึมมักเรียกชื่อตามลักษณะของฐาน เช่น ปริซึมสามเหลี่ยมด้านเท่า ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก

การเรียกชื่อส่วนต่าง ๆ ของปริซึม

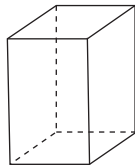


ตัวอย่างแสดงภาพปริซึมแบบต่าง ๆ

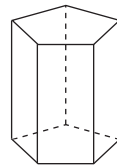
ปริซึมที่เป็นที่รู้จักคุ้นเคย เช่น ปริซึมสามเหลี่ยม ปริซึมสี่เหลี่ยม ปริซึมห้าเหลี่ยม ปริซึมหกเหลี่ยม



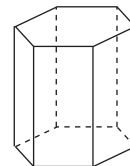
ปริซึมสามเหลี่ยม



ปริซึมสี่เหลี่ยม



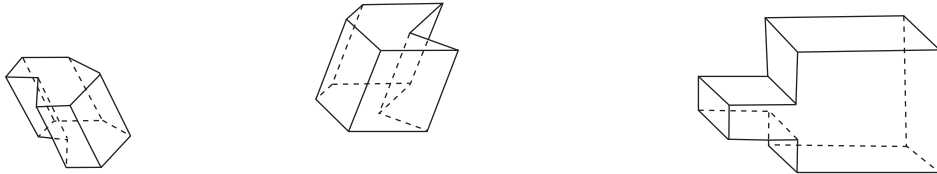
ปริซึมห้าเหลี่ยม



ปริซึมหกเหลี่ยม



นอกจากนั้นหากพิจารณาตามบทนิยามของปริซึมแล้ว รูปเรขาคณิตสามมิติต่อไปนี้จัดว่าเป็นปริซึมด้วยเช่นกัน



ปริซึมแบบอื่นๆ

จากตัวอย่างของปริซึมจะสังเกตได้ว่า ปริซึมแต่ละชนิดจะมีฐานจำนวนสองด้านเท่ากัน และจำนวนของผิวข้างจะมีแตกต่างกันไปตามลักษณะของฐาน เช่น

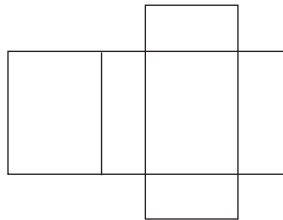
ปริซึมสามเหลี่ยมจะมีผิวข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจำนวน 3 ด้าน

ปริซึมหกเหลี่ยมจะมีผิวข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจำนวน 6 ด้าน

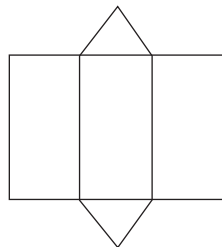
เราจะพบว่าในชีวิตประจำวันของเราสามารถพบเห็นสิ่งของที่เป็นปริซึมมากมาย เช่น ก๋วยเตี๋ยว ก๋วยเต๋อม้วน ก๋วยเต๋อลูก ลูกเต๋า ไมโครเวฟ ตู้เย็น

ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้ว่าเป็นรูปคลี่ของปริซึมชนิดใด

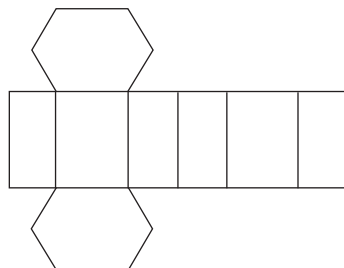
1.

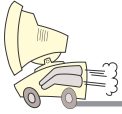


2.

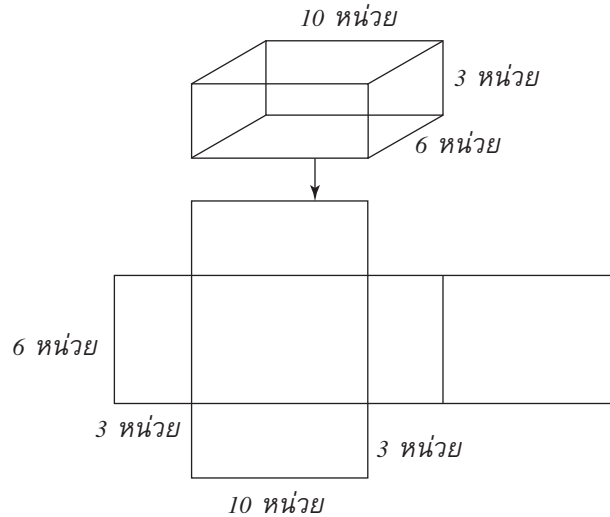


3.





สมมติว่าเราตัดกล่องกระดาษปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก (หรือเรียกว่าทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก) ตามขอบ และแกะออกวางบนพื้นราบ รูปที่ปรากฏคือรูปเรขาคณิตสองมิติที่เรียกว่า **ข่าย (net)** ข่ายสามารถช่วยให้นักเรียนเห็นหน้าต่างๆ ของรูปเรขาคณิตสามมิติ



เมื่อพิจารณาจากรูปจะเห็นได้ว่า ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากมีหน้าทั้งหมดหกหน้า

เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 3×6 ตารางหน่วย สองรูป

เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 3×10 ตารางหน่วย สองรูป

เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 6×10 ตารางหน่วย สองรูป

พื้นที่ผิวทั้งหมดเท่ากับ $2(3 \times 6) + 2(3 \times 10) + 2(6 \times 10) = 216$ ตารางหน่วย

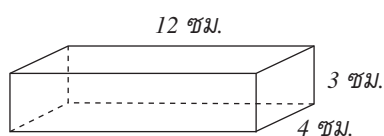
เมื่อกล่าวถึงพื้นที่ผิวของปริซึม จะหมายถึงผลรวมพื้นที่ผิวทุกหน้าของปริซึม ในการเรียกชื่อหน้าของปริซึม เรามักเรียกหน้าสองหน้าที่มีพื้นที่เท่ากันทุกประการที่อยู่ในระนาบสองระนาบที่ขนานกันว่า **ฐาน** หรือ **หน้าตัด** และเรียกหน้าอื่นๆ ที่เหลือว่า **ผิวข้าง**

การหาพื้นที่ผิวของปริซึมหาได้จากสูตร

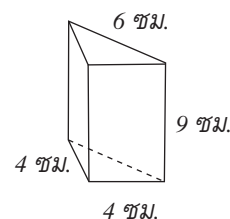
$$\text{พื้นที่ผิวปริซึม} = \text{ผลรวมพื้นที่ผิวข้างทุกหน้า} + \text{พื้นที่ฐานสองหน้า}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ผิวของปริซึมต่อไปนี้

(1)



(2)





วิธีทำ (1) ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความกว้าง 4 เซนติเมตร

ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความยาว 12 เซนติเมตร

ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความสูง 3 เซนติเมตร

พื้นที่ผิวปริซึม = พื้นฐานสองหน้า + พื้นที่ผิวข้างสี่หน้า

$$\text{พื้นที่ฐานสองหน้า} = 2 \times (4 \times 3)$$

$$= 24 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

$$\text{พื้นที่ผิวข้างสี่หน้า} = [2(3 \times 12)] + [2(4 \times 12)]$$

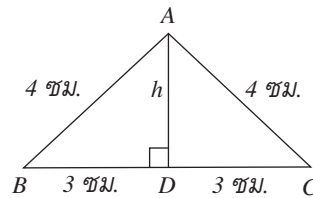
$$= 72 + 96$$

$$= 168 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่ากับ $24 + 168 = 192$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากมีพื้นที่ผิว 192 ตารางเซนติเมตร

(2) เนื่องจากฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีด้านยาว 4 เซนติเมตร 4 เซนติเมตร และ 6 เซนติเมตร หาความสูงโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้



$\triangle ABD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หา AD ได้ดังนี้

$$h^2 = 4^2 - 3^2$$

$$= 7$$

$$h = \sqrt{7} \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{รูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีพื้นที่} = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7}$$

$$\approx 3 \times 2.65$$

$$\approx 7.95 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

พื้นที่ผิวปริซึม = พื้นฐานสองหน้า + พื้นที่ผิวข้างสามหน้า

$$\text{พื้นที่ฐานสองหน้า} \approx 2 \times 7.95$$

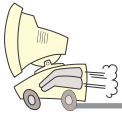
$$\approx 15.9 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

$$\text{พื้นที่ผิวข้างสามหน้า} = (4 \times 9) + (4 \times 9) + (6 \times 9)$$

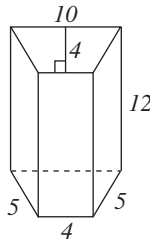
$$= 126 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้น ปริซึมสามเหลี่ยมมีพื้นที่ผิวประมาณ $15.9 + 126 \approx 141.9$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ ปริซึมสามเหลี่ยมมีพื้นที่ผิวประมาณ 141.9 ตารางเซนติเมตร



ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ผิวของปริซึมต่อไปนี้



$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{พื้นที่ฐานรูปสี่เหลี่ยมคางหมู} &= \frac{1}{2} \times \text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{2} \times (10+4) \times 4 \\ &= 28 \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ผิวข้าง} &= (5 \times 12) + (4 \times 12) + (5 \times 12) + (10 \times 12) \\ &= (5+4+5+10) \times 12 \\ &= 288 \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

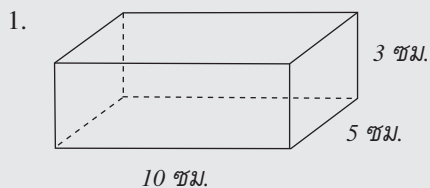
$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น พื้นที่ผิวปริซึม} &= \text{พื้นที่ฐานสองหน้า} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \\ &= (2 \times 28) + 288 \\ &= 56 + 288 \\ &= 344 \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

ตอบ พื้นที่ผิวของปริซึมเท่ากับ 344 ตารางหน่วย

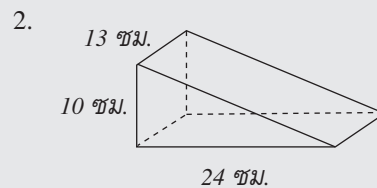


กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ 1

จงหาพื้นที่ผิวของปริซึมต่อไปนี้



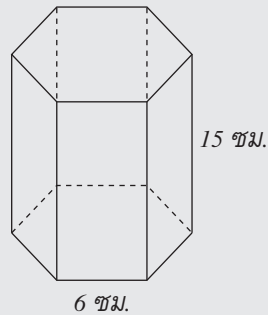
ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก
หน้าตัดมีความกว้าง 5 เซนติเมตร
หน้าตัดมีความสูง 3 เซนติเมตร
ความยาวของปริซึม 10 เซนติเมตร



ปริซึมสามเหลี่ยมมุมฉาก
ความยาวของด้านประกอบมุมฉาก
ของรูปสามเหลี่ยมเป็น 10 และ 24
เซนติเมตร
ปริซึมหนา 13 เซนติเมตร

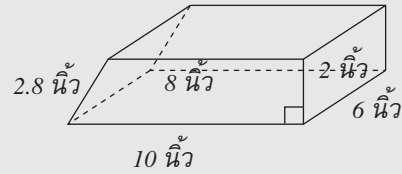


3.



ปริซึมหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
แต่ละด้านมีความยาว 6 เซนติเมตร
มีพื้นที่หน้าตัด 94 ตารางเซนติเมตร
ความสูงของปริซึม 15 เซนติเมตร

4.

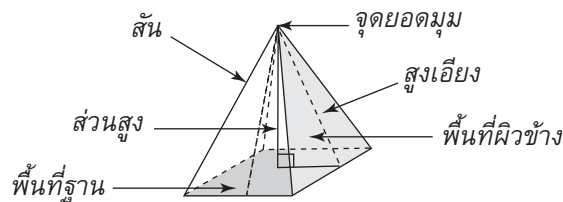


ปริซึมสี่เหลี่ยมคางหมู
หน้าตัดมีความยาวของด้านคู่ขนาน เป็น 8 และ 10 นิ้ว มีความสูง 2 นิ้ว
ปริซึมหนา 6 นิ้ว

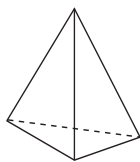
1.2 พีระมิด

พีระมิดเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานอยู่ในระนาบหนึ่ง ด้านข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดมุมร่วมกันที่จุด ๆ หนึ่ง ซึ่งจุดยอดมุมจุดนี้ไม่อยู่บนระนาบของฐาน

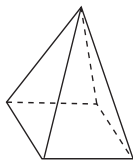
การเรียกชื่อส่วนต่าง ๆ ของพีระมิด



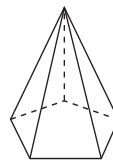
ตัวอย่างแสดงภาพพีระมิดแบบต่าง ๆ



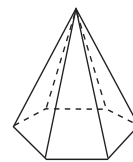
พีระมิดฐานสามเหลี่ยม



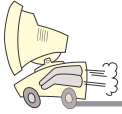
พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม



พีระมิดฐานห้าเหลี่ยม

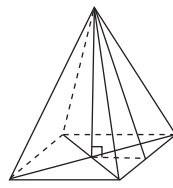


พีระมิดฐานหกเหลี่ยม

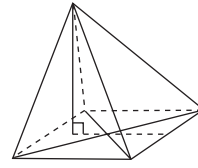


พีระมิดที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า รวมทั้งพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมมุมฉาก เมื่อลากเส้นจากจุดยอดมุมมาตั้งฉากกับฐาน ถ้าจุดที่ตั้งฉากกับฐานอยู่ห่างจากมุมที่ฐานเป็นระยะเท่ากัน พีระมิดนี้เรียกว่า **พีระมิดตรง** ถ้าจุดที่ตั้งฉากกับฐานอยู่ห่างจากมุมที่ฐานเป็นระยะไม่เท่ากัน พีระมิดนี้เรียกว่า **พีระมิดเอียง**

สำหรับพีระมิดตรง ฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า เส้นที่ลากจากจุดยอดมาแบ่งครึ่งด้านของฐาน จะตั้งฉากกับด้านของฐานด้วย เรียกเส้นที่แบ่งครึ่งฐานนี้ว่า **สูงเอียง**



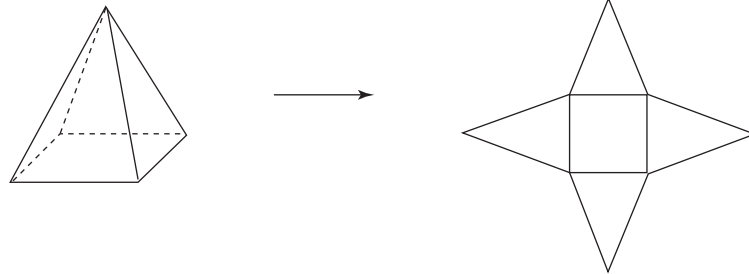
พีระมิดตรง



พีระมิดเอียง

หมายเหตุ สำหรับในหน่วยนี้จะกล่าวถึงพีระมิดที่เป็นพีระมิดตรงเท่านั้น

สมมติว่าเราตัดกล่องกระดาษพีระมิดตามขอบ และแกะออกวางบนพื้นราบ จะได้ขั้วยดรูป ซึ่งถ้าเรารู้ความยาวของส่วนต่างๆ เราก็จะสามารถหาพื้นที่ผิวของพีระมิดนี้ได้



การหาพื้นที่ผิวของพีระมิดหาได้จากสูตร

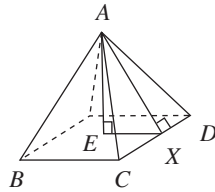
$$\text{พื้นที่ผิวพีระมิด} = \text{ผลรวมพื้นที่ผิวข้างทุกหน้า} + \text{พื้นที่ฐาน}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดต่อไปนี้

- (1) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 12 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 10 เซนติเมตร
- (2) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 20 เซนติเมตร ส่วนสูงยาว 24 เซนติเมตร
- (3) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร สันด้านข้างยาว 13 เซนติเมตร



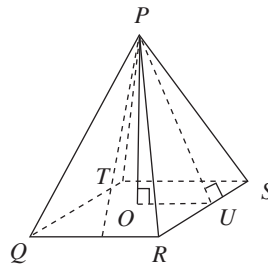
วิธีทำ (1) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสฐานยาวด้านละ 12 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 10 เซนติเมตร



$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ผิวของพีระมิด} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \\
 &= (12 \times 12) + \left[4 \times \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 10 \right) \right] \\
 &= 144 + 240 \\
 &= 384 \text{ ตารางเซนติเมตร}
 \end{aligned}$$

ตอบ พีระมิดมีพื้นที่ผิว 384 ตารางเซนติเมตร

(2) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสฐานยาวด้านละ 20 เซนติเมตร ส่วนสูงยาว 24 เซนติเมตร
กำหนดตัวอักษรเพื่อสะดวกในการกล่าวถึงดังภาพ



□QRST เป็นฐานของพีระมิด เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 20 เซนติเมตร
มีพื้นที่ $20 \times 20 = 400$ ตารางเซนติเมตร

\overline{PO} เป็นส่วนสูงของพีระมิด ซึ่ง $PO = 24$ เซนติเมตร $OU = 10$ เซนติเมตร
หาสูงเอียง เนื่องจาก $\triangle POU$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี \overline{PU} เป็นด้านตรงข้าม

มุมฉาก

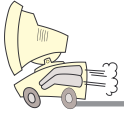
$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad PU^2 &= PO^2 + OU^2 \\
 &= 24^2 + 10^2 \\
 &= 676
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad PU = 26 \text{ เซนติเมตร}$$

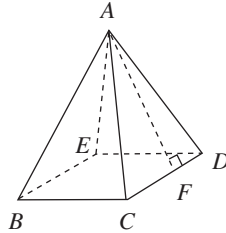
$$\text{มีพื้นที่ผิวข้างเท่ากับ } 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 20 \times 26 \right) = 1,040 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

$$\text{ดังนั้น พีระมิดมีพื้นที่ผิว} = 400 + 1,040 = 1,440 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ตอบ พีระมิดมีพื้นที่ผิว 1,440 ตารางเซนติเมตร



(3) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร สันด้านข้างยาว 13 เซนติเมตร



จากรูป \overline{AD} เป็นสัน ยาว 13 เซนติเมตร \overline{AF} เป็นสูงเอียง $\triangle ADF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี \hat{AFD} เป็นมุมฉาก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} AF^2 &= AD^2 - DF^2 \\ &= 13^2 - 5^2 \\ &= 144 \end{aligned}$$

$$AF = 12 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{พื้นที่ผิวของพีระมิด} = \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง}$$

$$= (10 \times 10) + \left[4 \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 12 \right) \right]$$

$$= 100 + 240$$

$$= 340 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ตอบ พีระมิดมีพื้นที่ผิว 340 ตารางเซนติเมตร



กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ 2

จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดต่อไปนี้

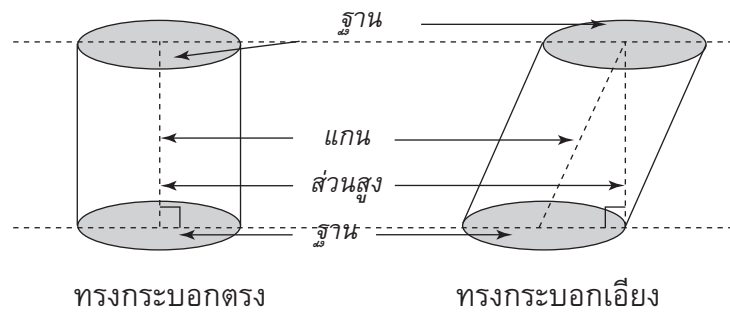
1. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 12 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 8 เซนติเมตร
2. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 24 นิ้ว ความสูง 28 นิ้ว
3. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 12 นิ้ว สันด้านข้างยาว 15 นิ้ว



1.3 ทรงกระบอก

ทรงกระบอกเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานสองหน้าเป็นรูปวงกลมที่เท่ากันทุกประการซึ่งอยู่บนระนาบที่ขนานกัน

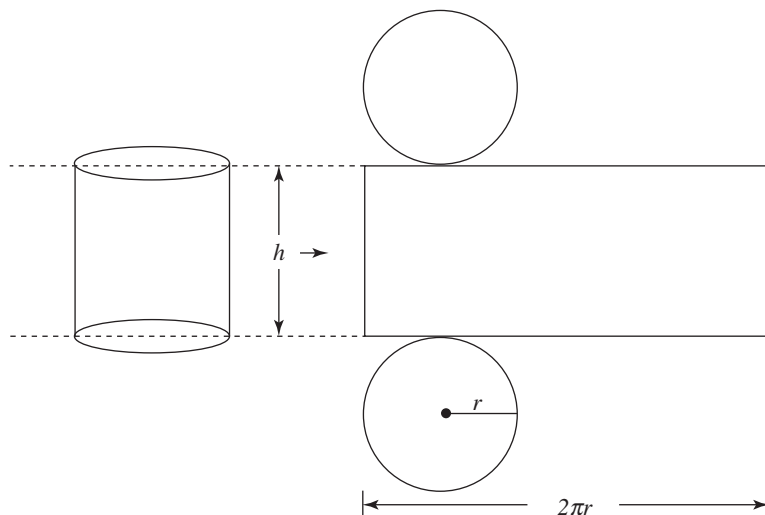
การเรียกชื่อส่วนต่าง ๆ ของทรงกระบอก



แกนของทรงกระบอกคือเส้นที่ลากเชื่อมจุดศูนย์กลางวงกลมสองวงที่เป็นฐานของทรงกระบอกนั้น สำหรับทรงกระบอกตรง แกนและความสูงจะมีความยาวเท่ากัน ส่วนทรงกระบอกเอียง แกนและความสูงจะมีความยาวไม่เท่ากัน โดยที่แกนจะมีความยาวมากกว่าความสูง

หมายเหตุ สำหรับในหน่วยนี้จะกล่าวถึงทรงกระบอกที่เป็นทรงกระบอกตรงเท่านั้น

สมมติว่าเราตัดทรงกระบอกที่ทำจากกระดาษ โดยตัดตามขอบวงกลมทั้งสองและในส่วนที่เป็นผิวข้างตัดให้ตั้งฉากกับเส้นขอบรอบวงกลม จะได้รูปดังนี้





จะเห็นได้ว่า พื้นที่ผิวของทรงกระบอกประกอบด้วย

- ส่วนที่เป็นวงกลมสองวง เรียกว่า พื้นที่หน้าตัดหรือพื้นที่ฐาน
- ส่วนที่เป็นผิวข้าง เมื่อตัดออกมาจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ถ้าทรงกระบอกมีความสูง h หน่วย ฐานทรงกระบอกมีรัศมี r หน่วย จะได้เส้นรอบรูปวงกลมยาว $2\pi r$ หน่วย

พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอกเท่ากับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง h หน่วย ความยาว $2\pi r$ หน่วย

ดังนั้น พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก $= 2\pi rh$ ตารางหน่วย

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ฐานสองหน้า} &= 2 \times (\pi r^2) \\ &= 2\pi r^2 \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

การหาพื้นที่ผิวของทรงกระบอกหาได้จากสูตร

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ผิวทรงกระบอก} &= \text{พื้นที่ผิวข้าง} + \text{พื้นที่ฐานสองหน้า} \\ &= 2\pi rh + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r(h+r)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพื้นที่ผิวของถังเก็บน้ำมันทรงกระบอกซึ่งมีความสูง 20.8 เมตร และรัศมีของฐานยาว 34.6 เมตร ($\pi \approx 3.14$)

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{พื้นที่ผิวทรงกระบอก} &= \text{พื้นที่ผิวข้าง} + \text{พื้นที่ฐานสองหน้า} \\ &= 2\pi rh + 2\pi r^2 \\ &\approx (2 \times 3.14 \times 34.6 \times 20.8) + (2 \times 3.14 \times 34.6 \times 34.6) \\ &\approx 4,519.59 + 7,518.16 \\ &\approx 12,037.75 \text{ ตารางเมตร}\end{aligned}$$

ตอบ ถังเก็บน้ำมันทรงกระบอกมีพื้นที่ผิวประมาณ 12,037.75 ตารางเมตร

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพื้นที่ผิวของทรงกระบอกมีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 16 หน่วย และสูง 10 หน่วย ($\pi \approx 3.14$)

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{ฐานทรงกระบอกมีรัศมีเท่ากับ } \frac{16}{2} &= 8 \text{ หน่วย} \\ \text{พื้นที่ผิวทรงกระบอก} &= \text{พื้นที่ผิวข้าง} + \text{พื้นที่ฐานสองหน้า} \\ &= 2\pi rh + 2\pi r^2\end{aligned}$$

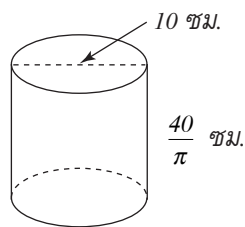


$$\begin{aligned} &\approx (2 \times 3.14 \times 8 \times 10) + (2 \times 3.14 \times 8^2) \\ &\approx 502.4 + 401.92 \\ &\approx 904.32 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

ตอบ ทรงกระบอกมีพื้นที่ผิวประมาณ 904.32 ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 6 จินตนามีกระป๋องใบหนึ่งลักษณะเป็นทรงกระบอกมีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 10 เซนติเมตร สูง $\frac{40}{\pi}$ เซนติเมตร จินตนาอยากทราบว่ากระป๋องใบนี้มีพื้นที่ผิวข้างกี่ตารางเซนติเมตร

วิธีทำ



เนื่องจาก $r = 5$ เซนติเมตร

$$h = \frac{40}{\pi} \text{ เซนติเมตร}$$

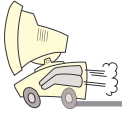
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก} &= 2\pi rh \\ &= 2\pi \times 5 \times \frac{40}{\pi} \\ &= 400 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

ตอบ กระป๋องออมสินมีพื้นที่ผิวข้างเท่ากับ 400 ตารางเซนติเมตร



กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ 3

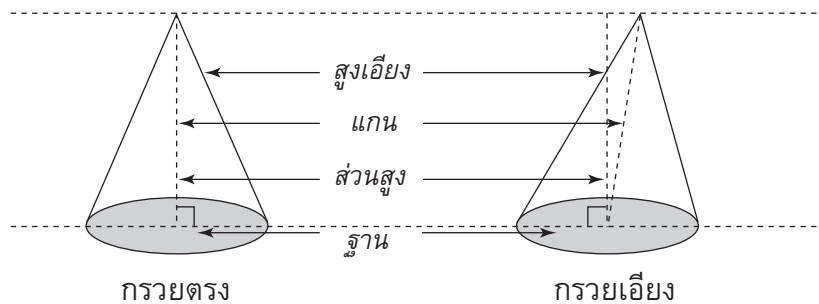
1. จงหาพื้นที่ผิวของทรงกระบอกซึ่งมีความสูง 20 เมตร และเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 14 เมตร $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
2. จงหาพื้นที่ผิวข้างของแก้วทรงกระบอกใบหนึ่ง มีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 7 เซนติเมตร และสูง 9.5 เซนติเมตร $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
3. แท่งแก้วทรงกระบอกยาว 40 เมตร วัดความยาวโดยรอบแท่งแก้วได้ 22 เมตร จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมดของแท่งแก้ว $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



1.4 กรวย

กรวยเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นรูปวงกลม มีจุดยอดจุดหนึ่งไม่อยู่บนระนาบของฐาน

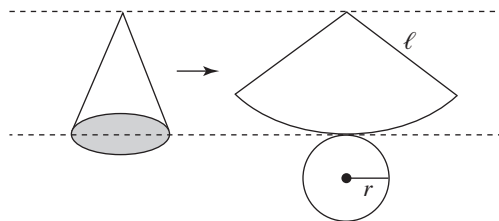
การเรียกชื่อส่วนต่าง ๆ ของกรวย



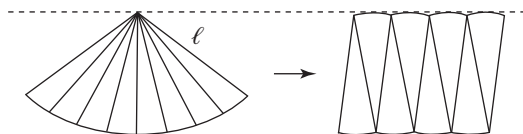
แกนของกรวยคือเส้นที่ลากเชื่อมจุดยอดและจุดศูนย์กลางวงกลมที่ฐานของกรวยนั้น สำหรับกรวยตรงความยาวแกนและความสูงจะยาวเท่ากัน ส่วนกรวยเอียงความยาวแกนและความสูงจะยาวไม่เท่ากัน

หมายเหตุ สำหรับในหน่วยนี้จะกล่าวถึงกรวยที่เป็นกรวยตรงเท่านั้น

สมมติว่าเราตัดกรวยที่ทำจากกระดาษ โดยตัดตามขอบวงกลมที่เป็นฐาน และในส่วนที่เป็นผิวข้างให้ตัดจากขอบไปยังจุดยอดของกรวย จะได้รูปดังนี้



จะเห็นว่าพื้นที่ผิวข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง ผิวข้างของกรวยสามารถนำมาตัดและจัดรูปใหม่ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ดังนี้



ถ้ากรวยมีสูงเอียง l หน่วย ฐานกรวยมีรัศมี r หน่วย จะได้เส้นรอบรูปวงกลมยาว $2\pi r$ หน่วย



เมื่อนำผิวข้างของกรวยมาประกอบเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสูง ℓ หน่วย มีฐานยาวเป็นครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูปวงกลม ดังนั้นฐานของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาว πr หน่วย

พื้นที่ผิวข้างของกรวยเท่ากับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีความสูง ℓ หน่วย และฐานยาว πr หน่วย

ดังนั้น พื้นที่ผิวข้างของกรวย = $\pi r \ell$ ตารางหน่วย

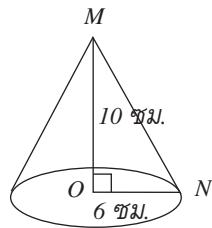
พื้นที่ฐาน = πr^2 ตารางหน่วย

การหาพื้นที่ผิวของกรวยหาได้จากสูตร

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ผิวกรวย} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \\ &= \pi r^2 + \pi r \ell \\ &= \pi r(r + \ell)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 กรวยอันหนึ่งฐานเป็นรูปวงกลม รัศมียาว 6 เซนติเมตร สูง 10 เซนติเมตร จะมีพื้นที่ผิวเท่าไร ($\pi \approx 3.14$)

วิธีทำ



ให้ \overline{OM} เป็นส่วนสูงของกรวย \overline{ON} เป็นรัศมีของวงกลม และ \overline{MN} เป็นสูงเอียงของกรวย โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$MN^2 = OM^2 + ON^2$$

$$= 10^2 + 6^2$$

$$= 136$$

$$MN = 2\sqrt{34}$$

$$\approx 11.66 \text{ เซนติเมตร}$$

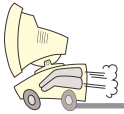
$$\text{พื้นที่ผิวกรวย} = \pi r^2 + \pi r \ell$$

$$\approx (3.14 \times 6^2) + (3.14 \times 6 \times 11.66)$$

$$\approx 113.04 + 219.67$$

$$\approx 332.71 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ตอบ กรวยมีพื้นที่ผิวประมาณ 332.71 ตารางเซนติเมตร

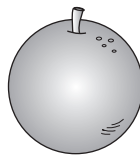
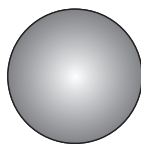


กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ 4

1. จงหาพื้นที่ผิวของกรวยซึ่งมีสูงเอียงยาว 13 นิ้ว และเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 14 นิ้ว
2. จงหาพื้นที่ผิวของกรวยซึ่งมีความสูง 20 เซนติเมตร และรัศมีของฐานยาว 12 เซนติเมตร

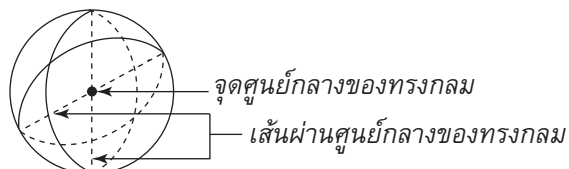
1.5 ทรงกลม

เมื่อกล่าวถึงทรงกลม (sphere) เราอาจนึกถึงผลมะนาว ผลส้ม ผลแตงโม ลูกฟุตบอล ลูกปิงปอง ลูกโลก หรือสิ่งอื่นๆ ตามที่แต่ละคนจะคุ้นเคย



ทรงกลมเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่ทุกๆ จุดบนพื้นผิวจะอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน เรียกจุดคงที่นั้นว่า **จุดศูนย์กลางของทรงกลม** และเรียกระยะที่เท่ากันนั้นว่า **รัศมีของทรงกลม**

ส่วนประกอบของทรงกลม



ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนหาลูกบอลพลาสติกทรงกลมขนาดใดขนาดหนึ่งมาหนึ่งลูก แล้วพิจารณาว่าจะหาพื้นที่ผิวทรงกลมนั้นได้อย่างไร แล้วนำเสนอแนวคิดในชั้นเรียน ครูและนักเรียนร่วมกันพิจารณาว่าแนวคิดใดน่าจะเหมาะสมมากที่สุด แล้วลองลงมือกระทำเพื่อหาพื้นที่ผิวทรงกลมนั้นๆ



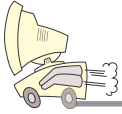
2. ให้นักเรียนหาลูกบอลพลาสติกทรงกลมขนาดใดขนาดหนึ่งมาหนึ่งลูก แล้วตัดกระดาษแผ่นเล็กๆ ให้แต่ละแผ่นมีพื้นที่ 1 ตารางเซนติเมตร ติดบนพื้นผิวทรงกลมโดยพยายามไม่ให้กระดาษซ้อนทับกัน และไม่ให้มีช่องว่างเหลืออยู่ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

- (1) ต้องใช้กระดาษติดบนพื้นผิวทรงกลมกี่แผ่น
- (2) ทรงกลมมีพื้นที่ผิวที่ตารางเซนติเมตร ทราบได้อย่างไร
- (3) นักเรียนจะหารัศมีของทรงกลมนี้ได้อย่างไร และหารัศมีของทรงกลมได้ที่เซนติเมตร
- (4) หาพื้นที่วงกลมที่มีรัศมีเท่ากับรัศมีของทรงกลมตามข้อ (3) ได้กี่ตารางเซนติเมตร
- (5) หาอัตราส่วนของพื้นที่ผิวทรงกลมต่อพื้นที่วงกลม นักเรียนหาอัตราส่วนของพื้นที่ผิวทรงกลมต่อพื้นที่วงกลมได้เท่าใด

3. ให้นักเรียนหาหรือจัดทำเครื่องทรงกลมตันขนาดใดขนาดหนึ่งซึ่งอาจทำจากไม้พลาสติกหรือวัสดุอื่นๆ มาหนึ่งชิ้น ใช้เชือกขนาดโตพอสมควรซึ่งมีขนาดคงเส้นคงวา ไม่ยืดไม่หด นำมาพันรอบพื้นที่ผิวเครื่องทรงกลมโดยพันจากด้านบนลงมาที่ฐาน และอาจใช้กาเวลาแท็กซ์ติดไว้โดยพยายามไม่ให้เชือกซ้อนทับกันและไม่มีช่องว่างเหลืออยู่ และใช้เชือกชนิดเดียวกันพันพื้นที่วงกลมที่เป็นฐานของเครื่องทรงกลมนั้น เริ่มพันจากจุดศูนย์กลางของวงกลมออกไปจนเต็มพื้นที่วงกลมและอาจใช้กาเวลาแท็กซ์ติดไว้โดยพยายามไม่ให้เชือกซ้อนทับกันและไม่มีช่องว่างเหลืออยู่ แล้วตอบคำถามและทำกิจกรรมดังนี้

- (1) หาพื้นที่ผิวเครื่องทรงกลมจากความกว้างและความยาวของเชือก นักเรียนจะต้องทราบอะไรบ้าง
 - (2) จากข้อ (1) แกะเชือกที่พันรอบพื้นที่ผิวเครื่องทรงกลม เชือกมีความยาวกี่เซนติเมตร ถ้าให้เชือกมีความกว้าง a เซนติเมตร ดังนั้นพื้นที่ผิวเครื่องทรงกลมเป็นกี่ตารางเซนติเมตร
 - (3) จากข้อ (2) ถ้าหาพื้นที่ผิวทรงกลม จะได้ว่าทรงกลมมีพื้นที่ผิวที่ตารางเซนติเมตร
 - (4) หาพื้นที่วงกลมจากความกว้างและความยาวของเชือก นักเรียนจะต้องทราบอะไรบ้าง
 - (5) จากข้อ (4) แกะเชือกที่พันรอบพื้นที่วงกลม เชือกมีความยาวกี่เซนติเมตร ถ้าให้เชือกมีความกว้าง a เซนติเมตร ดังนั้นพื้นที่วงกลมเป็นกี่ตารางเซนติเมตร
 - (6) อัตราส่วนของพื้นที่ผิวทรงกลมต่อพื้นที่วงกลมเป็นเท่าไร
- จากการทำกิจกรรมในข้อ 2 และข้อ 3 ข้างต้นนี้ หากไม่มีความคลาดเคลื่อนเลย จะได้

$$\frac{\text{พื้นที่ผิวทรงกลม}}{\text{พื้นที่วงกลม}} = \frac{4}{1}$$



โดยที่ทรงกลมและวงกลมมีรัศมียาวเท่ากัน ให้มีรัศมียาว r หน่วย

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \frac{\text{พื้นที่ผิวทรงกลม}}{\pi r^2} &= \frac{4}{1} \\ \text{พื้นที่ผิวทรงกลม} &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

การหาพื้นที่ผิวของทรงกลมหาได้จากสูตร

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวทรงกลม} &= 4\pi r^2 \\ \text{เมื่อ } r &\text{ แทนรัศมีของทรงกลม} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 ภาชนะเก็บน้ำครึ่งทรงกลมรัศมีภายนอก 12 เซนติเมตร จะมีพื้นที่ผิวภายนอกเป็นเท่าใด ($\pi \approx 3.14$)

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{พื้นที่ผิวครึ่งทรงกลม} &= \text{พื้นที่ผิวข้าง} + \text{พื้นที่ฐาน} \\ &= 2\pi r^2 + \pi r^2 \\ &= 3\pi r^2 \end{aligned}$$

เมื่อ $r = 12$ เซนติเมตร

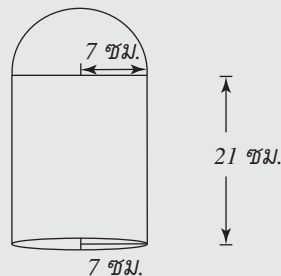
$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \text{พื้นที่ผิวครึ่งทรงกลม} &\approx 3 \times 3.14 \times 12 \times 12 \\ &\approx 1,356.48 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

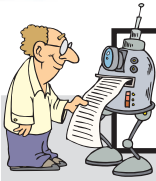
ตอบ มีพื้นที่ผิวภายนอกประมาณ 1,356.48 ตารางเซนติเมตร



กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ 5

ภาชนะเก็บของส่วนล่างเป็นทรงกระบอกรัศมี 7 เซนติเมตร สูง 21 เซนติเมตร ส่วนบนเป็นครึ่งทรงกลม รัศมี 7 เซนติเมตร ดังรูป จะมีพื้นที่ผิวเท่าใด

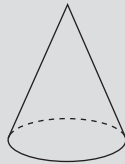




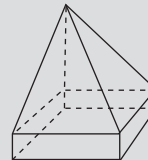
แบบฝึกหัด 1

1. จงวาดภาพที่มองเห็นจากด้านบนและด้านข้างของรูปเรขาคณิตสามมิติจากรูปต่อไปนี้

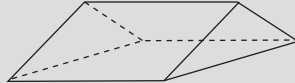
(1)



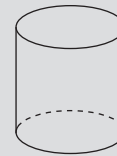
(2)



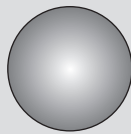
(3)



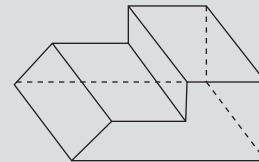
(4)



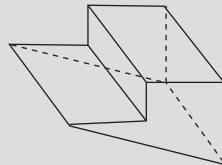
(5)



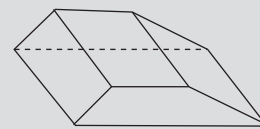
(6)



(7)



(8)

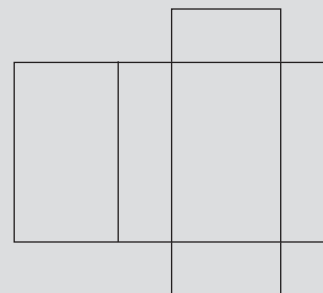


2. จากรูปต่อไปนี้เมื่อนำมาประกอบเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติจะได้รูปเรขาคณิตสามมิติชนิดใด

(1)

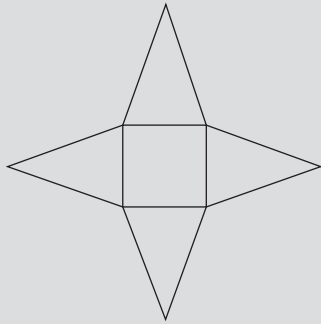


(2)

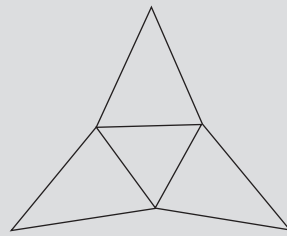




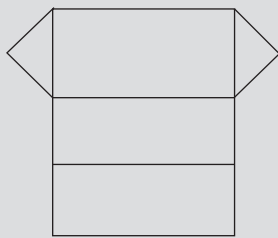
(3)



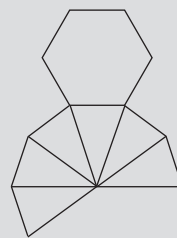
(4)



(5)

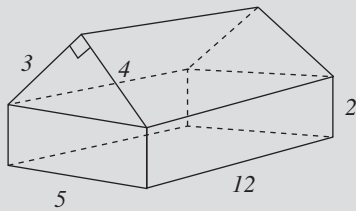


(6)

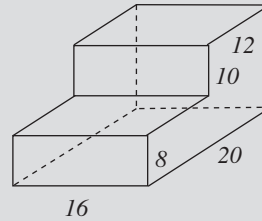


3. ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง a หน่วย ความยาว b หน่วย และความสูง h หน่วย จะมีพื้นที่ผิวที่ตารางหน่วย
4. จงหาพื้นที่ผิวของรูปเรขาคณิตสามมิติต่อไปนี้

(1)



(2)

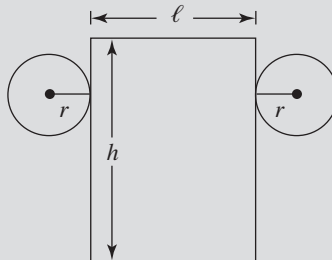


5. จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดต่อไปนี้

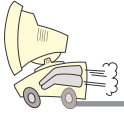
- (1) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสฐานยาวด้านละ 16 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 20 เซนติเมตร
- (2) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 16 นิ้ว ความสูง 20 นิ้ว
- (3) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 16 นิ้ว สันด้านข้างยาว 20 นิ้ว
6. พีระมิดกิเซห์อยู่ในประเทศอียิปต์ เป็นพีระมิดที่ใหญ่ที่สุดในโลก มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 227 เมตร สูงเอียงยาวประมาณ 184.14 เมตร จงหาพื้นที่ฐาน พื้นที่ผิวข้าง และความสูงของพีระมิด



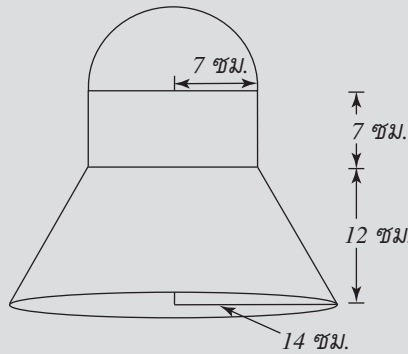
7. จงตอบคำถามโดยใช้รูปต่อไปนี้ซึ่งประกอบได้เป็นทรงกระบอกที่มีขอบชนกันพอดี



- (1) ถ้า $r = 7$ เซนติเมตร h จะมีความยาวเท่าไร
 - (2) ถ้า $r = 7$ เซนติเมตร $l = 15$ เซนติเมตร ทรงกระบอกจะมีพื้นที่ผิวเท่าไร
 - (3) ถ้า $r = 15$ เซนติเมตร $l = 7$ เซนติเมตร ทรงกระบอกจะมีพื้นที่ผิวเท่ากับพื้นที่ผิวในข้อ (2) หรือไม่อย่างไร
 - (4) ถ้า $r = 14$ เซนติเมตร $l = 15$ เซนติเมตร ทรงกระบอกจะมีพื้นที่ผิวเป็นสองเท่าของพื้นที่ผิวในข้อ (2) หรือไม่อย่างไร
8. จงหาพื้นที่ผิวกรวย เมื่อกำหนดรัศมีและสูงเอียงยาวดังนี้
- (1) $r = 5$ เซนติเมตร $l = 12$ เซนติเมตร
 - (2) $r = 6$ เซนติเมตร $l = 8$ เซนติเมตร
 - (3) $r = 4$ เซนติเมตร $l = 8$ เซนติเมตร
 - (4) $r = 10$ เซนติเมตร $l = 20$ เซนติเมตร
9. จงหาพื้นที่ผิวกรวย เมื่อกำหนดรัศมีและความสูงดังนี้
- (1) $r = 5$ เซนติเมตร $h = 12$ เซนติเมตร
 - (2) $r = 6$ เซนติเมตร $h = 8$ เซนติเมตร
 - (3) $r = 4$ เซนติเมตร $h = 8$ เซนติเมตร
 - (4) $r = 10$ เซนติเมตร $h = 20$ เซนติเมตร
10. ภาชนะเก็บน้ำครึ่งทรงกลมรัศมีภายนอก 50 เซนติเมตร จะมีพื้นที่ผิวภายนอกเป็นเท่าใด
11. ถังน้ำทรงกลมรัศมี 40 เซนติเมตร มีพื้นที่ผิวเท่าใด



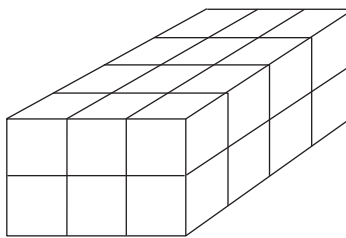
12. โคมไฟมีส่วนบนเป็นครึ่งทรงกลม ส่วนกลางเป็นทรงกระบอก และส่วนล่างเป็นกรวย ตัดยอด จงหาพื้นที่ผิวของโคมไฟ



2. ปริมาตรของปริซึมและพีระมิด

2.1 ปริมาตรของปริซึม

ปริซึมที่พบเห็นในชีวิตประจำวันส่วนใหญ่ ได้แก่ ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก เช่น กล่องใส่สิ่งของหรือกล่องขนมต่างๆ เป็นต้น



ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก กว้าง 3 หน่วย ยาว 4 หน่วย สูง 2 หน่วย เมื่อนำลูกบาศก์ขนาด 1 ลูกบาศก์หน่วย วางลงไปชั้นล่าง ต้องใช้ลูกบาศก์ $3 \times 4 = 12$ ลูก และเมื่อวางลูกบาศก์สองชั้น ต้องใช้ลูกบาศก์ $(3 \times 4) \times 2 = 24$ ลูก

ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก กว้าง 3 หน่วย ยาว 4 หน่วย สูง 2 หน่วย มีปริมาตร
 $3 \times 4 \times 2 = 24$ ลูกบาศก์หน่วย

ปริมาตรของปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง \times ความยาว \times ความสูง



ตัวอย่างที่ 1 ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความกว้าง 65 เซนติเมตร ความยาว 82 เซนติเมตร และความสูง 30 เซนติเมตร จะมีปริมาตรเท่าไร

วิธีทำ ปริมาตรของปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง×ความยาว×ความสูง

ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความกว้าง 65 เซนติเมตร

ความยาว 82 เซนติเมตร

ความสูง 30 เซนติเมตร

ดังนั้น ปริซึมมีปริมาตรเท่ากับ $65 \times 82 \times 30 = 159,900$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตอบ จะมีปริมาตร 159,900 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 ภาชนะบรรจุน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความกว้าง 45 เซนติเมตร ความยาว 150 เซนติเมตร และความสูง 80 เซนติเมตร จะจุน้ำได้กี่ลิตร

วิธีทำ ภาชนะบรรจุน้ำได้ = ความกว้าง×ความยาว×ความสูง

$$= 45 \times 150 \times 80 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

$$= \frac{45 \times 150 \times 80}{1000} \text{ ลิตร}$$

$$= 540 \text{ ลิตร}$$

ตอบ ภาชนะบรรจุน้ำได้ 540 ลิตร

ตัวอย่างที่ 3 ขวดน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยก้นขวดมีความกว้าง 7 เซนติเมตร ความยาว 7 เซนติเมตร ใส่ น้ำ สูง 40 เซนติเมตร จงหาว่าขวดน้ำมีน้ำอยู่เท่าไร

วิธีทำ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง×ความยาว×ความสูง

$$= 7 \times 7 \times 40$$

$$= 1,960 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

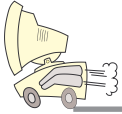
ตอบ ขวดน้ำมีน้ำอยู่ 1,960 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ในการหาปริมาตรของปริซึมมักจะพบว่าฐานเป็นรูปเหลี่ยมต่างๆ ดังนั้น นักเรียนควรทราบสูตรการหาพื้นที่รูปต่างๆ ดังนี้

$$1. \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

$$2. \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ด้าน})^2$$

$$3. \text{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส} = \text{ด้าน} \times \text{ด้าน}$$



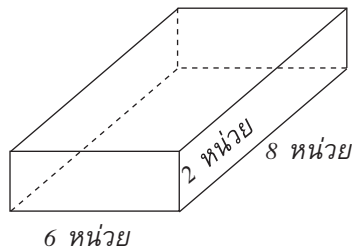
4. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง×ยาว
5. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2} \times$ ผลบวกของด้านคู่ขนาน×สูง
6. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ฐาน×สูง
7. พื้นที่รูปหกเหลี่ยมด้านเท่า = $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ด้าน})^2$

การหาปริมาตรของปริซึมฐานต่างๆ หาได้จากสูตร

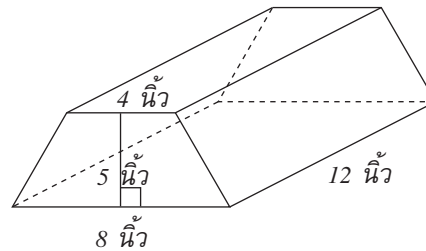
$$\text{ปริมาตรของปริซึม} = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาปริมาตรของปริซึมต่อไปนี้

(1)



(2)



วิธีทำ (1) ปริมาตรของปริซึม = พื้นที่ฐาน×ความสูง
 $= (\text{กว้าง} \times \text{ยาว}) \times \text{ความสูง}$
 $= (6 \times 2) \times 8$
 $= 96$ ลูกบาศก์หน่วย

ตอบ 96 ลูกบาศก์หน่วย

(2) ปริซึมมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีพื้นที่เท่ากับ

$$\frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 5 = 30 \text{ ตารางนิ้ว}$$

ปริซึมสี่เหลี่ยมคางหมูสูง 12 นิ้ว

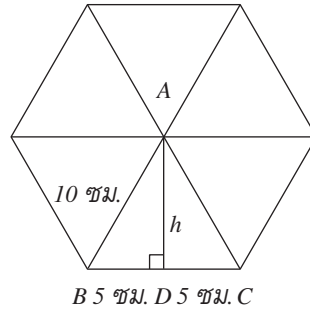
ดังนั้นปริมาตรของปริซึม = พื้นที่ฐาน×ความสูง
 $= 30 \times 12$
 $= 360$ ลูกบาศก์นิ้ว

ตอบ 360 ลูกบาศก์นิ้ว



ตัวอย่างที่ 5 ปริซึมหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร ปริซึมสูง 40 เซนติเมตร จะมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

วิธีทำ เนื่องจากฐานเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะแบ่งได้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จำนวนหกรูปที่มีขนาดเท่ากัน ดังรูป



พิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ; \overline{AB} ยาว 10 เซนติเมตรลาก \overline{AD} ตั้งฉากกับ \overline{BC} ที่จุด D จะได้ $BD = 5$ เซนติเมตร หาระยะ AD โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 - BD^2 \\ &= 10^2 - 5^2 \\ &= 75 \end{aligned}$$

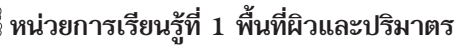
$$AD = 5\sqrt{3} \text{ เซนติเมตร}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \text{ความยาวฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} \\ &= 25\sqrt{3} \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ พื้นที่ฐานของปริซึม} &= 6 \times 25\sqrt{3} \\ &= 150\sqrt{3} \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

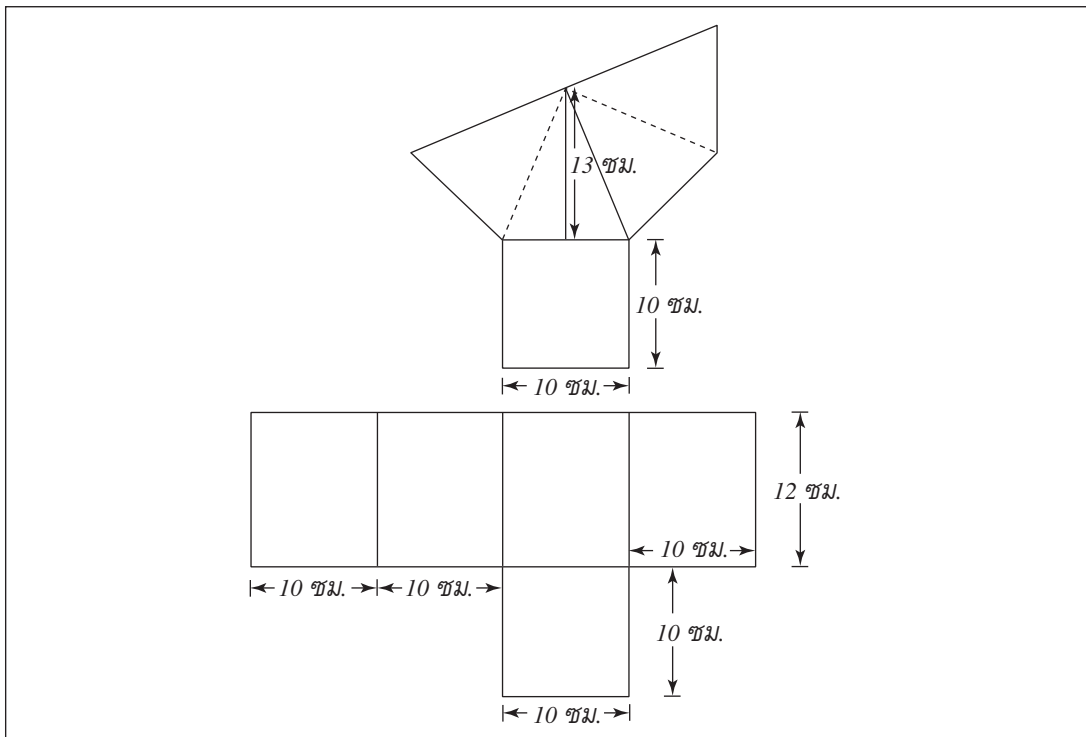
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ปริมาตรของปริซึม} &= \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= 150\sqrt{3} \times 40 \\ &= 6,000\sqrt{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \\ &\approx 10,392.30 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

ตอบ ปริซึมมีปริมาตรประมาณ 10,392.30 ลูกบาศก์เซนติเมตร



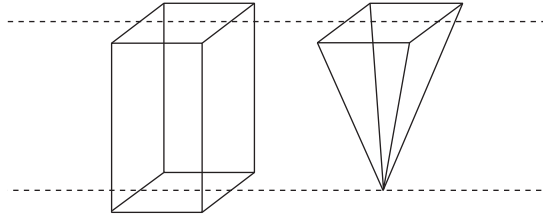
1. อ่างเก็บน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความกว้าง 12 เมตร ความยาว 20 เมตร และความสูง 3 เมตร จะจุน้ำได้กี่ลิตร
2. ห้องเรียนห้องหนึ่งกว้าง 5.6 เมตร ยาว 8 เมตร หลังคาเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีด้านประกอบมุมฉากยาว 4 เมตร และ 3.8 เมตร ถ้าห้องนี้สูง 4 เมตร แล้วห้องเรียนนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เมตร
3. ภาชนะบรรจุน้ำผึ้งเป็นปริซึมหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีฐานยาวด้านละ 5 เซนติเมตร ถ้าปริซึมสูง 12 เซนติเมตร จะจุน้ำผึ้งได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

ให้นักเรียนลอกแบบของรูปข้างล่างนี้ ลงในกระดาษหน้าขาวหลังเทาหรือกระดาษอื่นๆ แล้วตัดประกอบเป็นปริซึมและพีระมิด โดยเปิดฐานด้านหนึ่งไว้ นำพีระมิดดวงทรายละเอียด ปาดให้เต็มพอดี แล้วใส่ลงในปริซึม ต้องใช้พีระมิดดวงทรายที่ครึ่งจึงจะเต็มปริซึมพอดี





ภาพต่อไปนี้แสดงปริซึมและพีระมิดที่ฐานมีพื้นที่เท่ากัน และส่วนสูงยาวเท่ากัน



ในการทดลอง ถ้าสร้างปริซึมและพีระมิดที่ฐานมีพื้นที่เท่ากันและส่วนสูงเท่ากันได้ อย่างถูกต้อง และการทดลองไม่คลาดเคลื่อน จะพบว่า ต้องใช้พีระมิดทรงทลาย 3 ครั้ง จึงจะ ใส่เต็มปริซึมพอดี

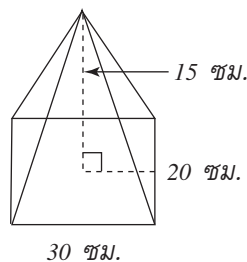
ดังนั้น 3 เท่าของปริมาตรพีระมิด = ปริมาตรของปริซึม

$$\begin{aligned}\text{หรือปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \text{ ของปริมาตรของปริซึม} \\ &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}\end{aligned}$$

การหาปริมาตรของพีระมิดฐานต่าง ๆ หาได้จากสูตร

$$\text{ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาปริมาตรของพีระมิดต่อไปนี้



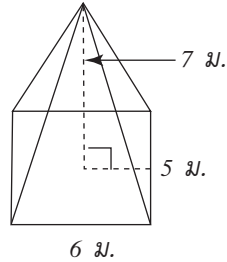
$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times (30 \times 20) \times 15 \\ &= 3,000 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ตอบ 3,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร



ตัวอย่างที่ 7 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 5 เมตร ยาว 6 เมตร และสูง 7 เมตร จงหาว่าพีระมิดนี้มีปริมาตรเท่าใด

วิธีทำ

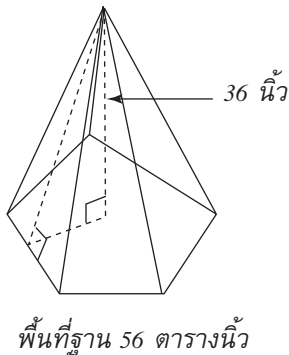


$$\begin{aligned}\text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times (5 \times 6) \times 7 \\ &= 70 \text{ ลูกบาศก์เมตร}\end{aligned}$$

ตอบ พีระมิดนี้มีปริมาตร 70 ลูกบาศก์เมตร

ตัวอย่างที่ 8 พีระมิดแกวอันหนึ่งมีฐานเป็นรูปห้าเหลี่ยม มีพื้นที่ฐานเท่ากับ 56 ตารางนิ้ว สูง 36 นิ้ว จงหาว่าพีระมิดแกวอันนี้มีปริมาตรเท่าใด

วิธีทำ

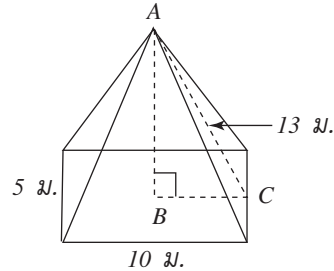


$$\begin{aligned}\text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times 56 \times 36 \\ &= 672 \text{ ลูกบาศก์นิ้ว}\end{aligned}$$

ตอบ พีระมิดแกวนี้มีปริมาตร 672 ลูกบาศก์นิ้ว



ตัวอย่างที่ 9 พีระมิดฐานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 5 เมตร ยาว 10 เมตร สูงเอียงยาว 13 เมตร จะมีปริมาตรเท่าใด



วิธีทำ ปริมาตรของพีระมิด = $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

หาสูตรตรงของพีระมิดจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

โดย $AC = 13$ เมตร $BC = 5$ เมตร หา AB

จะได้

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$= 13^2 - 5^2$$

$$= 144$$

$$AB = 12 \text{ เมตร}$$

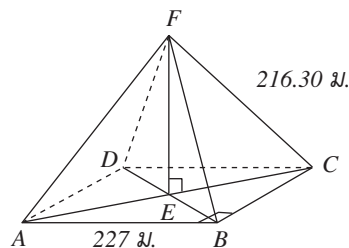
$$\text{ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times (5 \times 10) \times 12$$

$$= 200 \text{ ลูกบาศก์เมตร}$$

ตอบ พีระมิดมีปริมาตร 200 ลูกบาศก์เมตร

ตัวอย่างที่ 10 พีระมิดกึ่งเขตร มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 227 เมตร สันของพีระมิดยาวประมาณ 216.30 เมตร จงหาปริมาตรของพีระมิดกึ่งเขตร

วิธีทำ ให้ ABCD เป็นฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส EF เป็นส่วนสูง และเส้นทแยงมุม AC และ BD ตัดกันที่จุด E ดังนั้น EC ตั้งฉากกับ EF





หาระยะ AC โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ดังนี้

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 227^2 + 227^2 \\ &= 51,529 + 51,529 \\ &= 103,058 \end{aligned}$$

$$AC \approx 321.03 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น \overline{EC} ยาวประมาณ 160.5 เมตร

$\triangle FEC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี \overline{FC} เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก หาความสูง \overline{FE} โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ดังนี้

$$\begin{aligned} FE^2 &= FC^2 - EC^2 \\ &= (216.3)^2 - (160.5)^2 \\ &= 46,785.69 - 25,760.25 \\ &= 21,025.44 \end{aligned}$$

$$FE \approx 145 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น พีระมิตมีความสูงประมาณ 145 เมตร

หาปริมาตรของพีระมิต

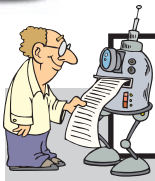
$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรพีระมิต} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &\approx \frac{1}{3} \times (227 \times 227) \times 145 \\ &\approx 2,490,568.33 \text{ ลูกบาศก์เมตร} \end{aligned}$$

ตอบ พีระมิตกีเซห์มีปริมาตรประมาณ 2,490,568.33 ลูกบาศก์เมตร



กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ 7

- จงหาปริมาตรของพีระมิตต่อไปนี้
 - พีระมิตฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 24 นิ้ว ส่วนสูงยาว 15 นิ้ว
 - พีระมิตฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 120 เมตร สูงเอียงยาว 100 เมตร
- ต้องการทำขนมเทียนมีรูปร่างเป็นพีระมิตฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ให้มีฐานยาวด้านละ 5 เซนติเมตร สูง 6 เซนติเมตร จำนวน 200 ห่อ ถ้าขนมเทียนแต่ละห่อใช้แป้งประมาณ $\frac{2}{3}$ ของเนื้อขนม จงหาว่าจะต้องใช้แป้งกี่กิโลกรัมจึงจะพอทำขนม



แบบฝึกหัด 2

1. จงหาปริมาตรของปริซึมต่อไปนี้

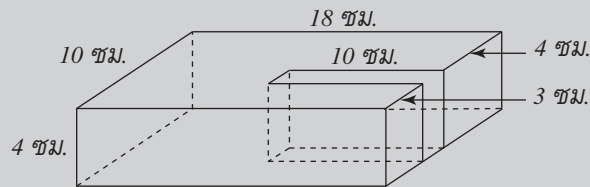
(1)



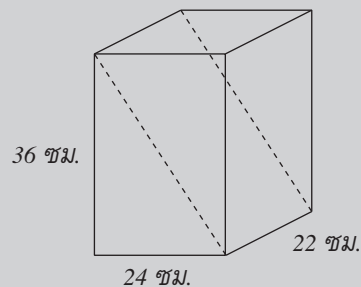
ปริซึมสามเหลี่ยมมุมฉาก

ความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมเป็น 8 และ 12 เซนติเมตร
ปริซึมสูง 18 เซนติเมตร

(2) ปริซึมมีความยาวด้านต่างๆ ดังรูป จงหาปริมาตรของปริซึมนี้



2. ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนตามเส้นประ มีความยาวส่วนต่างๆ ดังรูป แต่ละส่วนมีปริมาตรเท่าไร



3. จงหาปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมี

- (1) ฐานยาวด้านละ 16 เซนติเมตร สันด้านข้างยาว 12 เซนติเมตร
- (2) ฐานยาวด้านละ 32 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 20 เซนติเมตร
- (3) ฐานยาวด้านละ 40 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 52 เซนติเมตร
- (4) ฐานยาวด้านละ 40 เซนติเมตร สันด้านข้างยาว 60 เซนติเมตร
- (5) ฐานยาวด้านละ 24 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 24 เซนติเมตร
- (6) ฐานยาวด้านละ 8 นิ้ว สันด้านข้างยาว 10 นิ้ว



3. ปริมาตรของทรงกระบอกและกรวย

3.1 ปริมาตรของทรงกระบอก

การหาปริมาตรของทรงกระบอก หาได้เช่นเดียวกับการหาปริมาตรของปริซึมคือ

$$\text{ปริมาตรของทรงกระบอก} = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

ถ้าทรงกระบอกมีรัศมีของฐานเป็น r หน่วย จะมีพื้นที่ฐานเป็น πr^2 ตารางหน่วย

ดังนั้น ทรงกระบอกที่มีรัศมีของฐานเป็น r หน่วย มีส่วนสูงยาว h หน่วย

จะมีปริมาตรของทรงกระบอก = พื้นที่ฐาน \times ความสูง

$$= \pi r^2 \times h$$

$$= \pi r^2 h \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

การหาปริมาตรของทรงกระบอกหาได้จากสูตร

$$\text{ปริมาตรของทรงกระบอก} = \pi r^2 h$$

เมื่อ r แทนรัศมีของฐานที่เป็นวงกลม

h แทนความสูงของทรงกระบอก

ตัวอย่างที่ 1 แก้วน้ำทรงกระบอกวัดเส้นผ่านศูนย์กลางภายในได้ 14 เซนติเมตร แก้วน้ำนี้สูง

12 เซนติเมตร จะสามารถจุน้ำได้เท่าไร $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

วิธีทำ แก้วน้ำทรงกระบอกมีรัศมีเท่ากับ $\frac{14}{2} = 7$ เซนติเมตร

ปริมาตรของทรงกระบอก = พื้นที่ฐาน \times ความสูง

$$= \pi r^2 \times h$$

$$= \left(\frac{22}{7} \times 7^2\right) \times 12$$

$$= 1,848 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ตอบ แก้วน้ำใบนี้จุน้ำได้ 1,848 ลูกบาศก์เซนติเมตร



ตัวอย่างที่ 2 บงกชคั้นน้ำส้มไว้ 1 ลิตร ต้องการบรรจุน้ำส้มคั้นลงในขวดทรงกระบอกที่มีรัศมี 6 เซนติเมตร ขวดใบนี้จะต้องมีความสูงเท่าใดจึงจะใส่น้ำส้มคั้นได้หมดพอดี ($\pi = \frac{22}{7}$)

วิธีทำ 1 ลิตร = 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ปริมาตรของทรงกระบอก = พื้นฐาน \times ความสูง

$$1,000 = \left(\frac{22}{7} \times 6^2\right) \times \text{ความสูง}$$

$$\text{ความสูง} = \frac{1000 \times 7}{22 \times 36}$$

$$\approx 8.83 \text{ เซนติเมตร}$$

ตอบ ขวดใบนี้จะต้องมีความสูง ประมาณ 8.83 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 3 ถังน้ำทรงกระบอกฐานมีรัศมีภายใน 0.75 เมตร ความสูงภายใน 3 เมตร จะจุน้ำได้กี่ลิตร ($\pi \approx 3.14$)

วิธีทำ ปริมาตรของทรงกระบอก = $\pi r^2 h$

ถังน้ำทรงกระบอกฐานมีรัศมีภายใน 0.75 เมตร สูง 3 เมตร

ดังนั้นถังน้ำทรงกระบอกมีปริมาตรภายใน $\approx 3.14 \times (0.75)^2 \times 3$

$$\approx 5.29875 \text{ ลูกบาศก์เมตร}$$

เนื่องจาก ปริมาตร 1 ลูกบาศก์เมตร = $100 \times 100 \times 100$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

$$= \frac{100 \times 100 \times 100}{1000} \text{ ลิตร}$$

$$= 1,000 \text{ ลิตร}$$

ดังนั้น ปริมาตร 5.29875 ลูกบาศก์เมตร = $5.29875 \times 1,000$

$$= 5,298.75 \text{ ลิตร}$$

ตอบ ถังน้ำทรงกระบอกมีความจุประมาณ 5,298.75 ลิตร



กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ 8

1. ถังน้ำทรงกระบอกฐานมีรัศมีภายใน 0.8 เมตร ความสูงภายใน 3.2 เมตร จะจุน้ำได้กี่ลิตร
2. แท่งแก้วตันรูปทรงกระบอกยาว 140 นิ้ว วัดโดยรอบแท่งแก้วได้ 45 นิ้ว จงหาปริมาตรแท่งแก้วนี้



3.2 ปริมาตรของกรวย

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

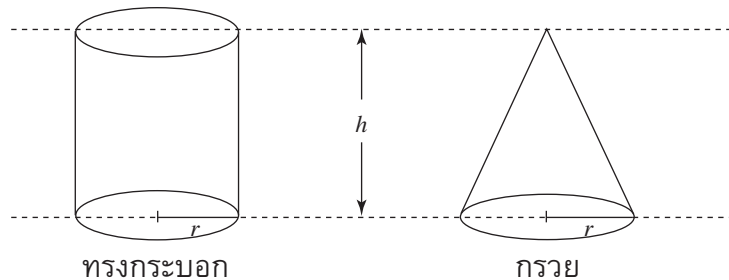
1. สร้างทรงกระบอกที่เปิดฐานไว้ด้านหนึ่ง โดยใช้กระดาษหน้าขาวหลังเทาหรือกระดาษอื่นๆ โดยที่ทรงกระบอกมีรัศมีของฐาน 5 เซนติเมตร สูง 12 เซนติเมตร ทรงกระบอกที่นักเรียนสร้างจะมีความยาวรอบรูปวงกลมที่ฐานกี่เซนติเมตร

2. สร้างกรวยเปิดฐานไว้ โดยใช้กระดาษหน้าขาวหลังเทาหรือกระดาษอื่นๆ โดยที่กรวยมีรัศมีของฐาน 5 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 13 เซนติเมตร กรวยที่นักเรียนสร้างจะมีความยาวรอบรูปวงกลมที่ฐานกี่เซนติเมตร

3. กรวยและทรงกระบอกที่นักเรียนสร้างมีส่วนสูงเท่ากันหรือไม่ พื้นที่ฐานเท่ากันหรือไม่

4. นำกรวยที่เปิดฐานไว้ใส่ทรายละเอียดปาดให้เต็มกรวยพอดี แล้วใส่ลงในทรงกระบอกที่เปิดฐานไว้ด้านหนึ่ง ต้องใช้กรวยใส่ทรายกี่ครั้งจึงจะเต็มทรงกระบอกพอดี

ในกรณีที่นักเรียนสร้างทรงกระบอกและกรวยได้ขนาดที่ถูกต้อง คือพื้นที่ฐานเท่ากัน และส่วนสูงเท่ากัน และการทดลองไม่คลาดเคลื่อน จะได้ว่า ต้องใช้กรวยใส่ทราย 3 ครั้ง จึงจะใส่ได้เต็มทรงกระบอกพอดี



นั่นคือ เมื่อกรวยและทรงกระบอกที่มีพื้นที่ฐานเท่ากัน และสูงเท่ากัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{ปริมาตรของกรวย} &= \frac{1}{3} \text{ของปริมาตรของทรงกระบอก} \\ &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h\end{aligned}$$

การหาปริมาตรของกรวยหาได้จากสูตร

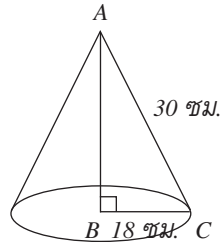
$$\text{ปริมาตรของกรวย} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

เมื่อ r แทนรัศมีของฐานที่เป็นวงกลม
 h แทนความสูงของกรวย



ตัวอย่างที่ 4 กรวยฐานรูปวงกลมมีรัศมี 18 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 30 เซนติเมตร จะมีปริมาตรเป็นเท่าไร ($\pi \approx 3.14$)

วิธีทำ



หาความสูงของกรวยให้ \overline{AB} เป็นความสูงของกรวย

\overline{BC} เป็นรัศมีของวงกลมซึ่งเป็นฐานของกรวย

\overline{AC} เป็นสูงเอียง

เนื่องจาก $BC = 18$ เซนติเมตร $AC = 30$ เซนติเมตร หา AB ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 - BC^2 \\ &= (30)^2 - (18)^2 \\ &= 900 - 324 \\ &= 576 \end{aligned}$$

$$AB = 24 \text{ เซนติเมตร}$$

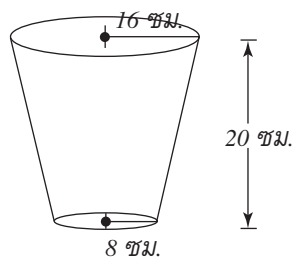
ดังนั้น กรวยมีความสูง 24 เซนติเมตร

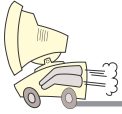
หาปริมาตรของกรวย

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของกรวย} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 18^2 \times 24 \\ &\approx 8,138.88 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

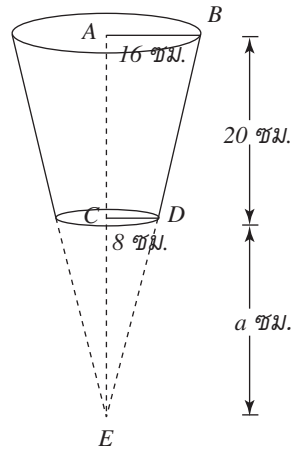
ตอบ กรวยมีปริมาตรประมาณ 8,138.88 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 5 ถังทรงกรวยตัดยอดมีขนาดดังรูป จะมีปริมาตรเป็นเท่าไร ($\pi \approx 3.14$)





วิธีทำ ลากเส้นต่อกรวยตัดยอดให้เป็นกรวย แล้วคำนวณความสูงของกรวยก่อนที่จะตัดยอด และความสูงของกรวยในส่วนที่ตัดออก แล้วคำนวณหาปริมาตรดังนี้



เนื่องจาก

$$\triangle ECD \sim \triangle EAB$$

ดังนั้น

$$\frac{EC}{EA} = \frac{CD}{AB}$$

นั่นคือ

$$\frac{a}{a+20} = \frac{8}{16}$$

$$16a = 8(a+20)$$

$$16a = 8a+160$$

$$8a = 160$$

$$a = 20$$

ดังนั้น กรวยก่อนตัดยอดมีความสูง $20+20 = 40$ เซนติเมตร รัศมีของฐานเท่ากับ 16 เซนติเมตร มีปริมาตร $\frac{1}{3} \times \pi \times 16^2 \times 40 \approx 10,717.87$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ยอดกรวยที่ตัดออกมีความสูง 20 เซนติเมตร รัศมีของฐานเท่ากับ 8 เซนติเมตร มีปริมาตร $\frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 20 \approx 1,339.73$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น ปริมาตรของกรวยตัดยอดประมาณ

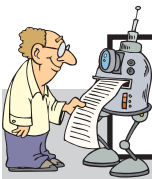
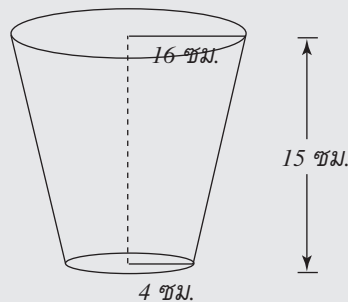
$$10,717.87 - 1,339.73 \approx 9,378.14 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ตอบ ถังทรงกรวยตัดยอดมีปริมาตรประมาณ 9,378.14 ลูกบาศก์เซนติเมตร



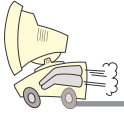
กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ 9

1. จงหาปริมาตรของกรวยต่อไปนี้
 - (1) ฐานวงกลมรัศมี 16 เซนติเมตร สูง 12 เซนติเมตร
 - (2) ฐานวงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 นิ้ว สูงเอียงยาว 13 นิ้ว
2. จงหาปริมาตรของกรวยตัดยอดต่อไปนี้

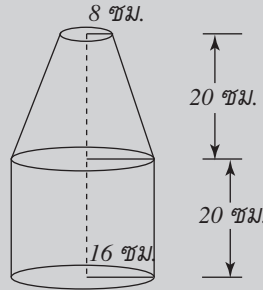


แบบฝึกหัด 3

1. จงหาปริมาตรของทรงกระบอกต่อไปนี้
 - (1) ฐานมีรัศมี 4 เซนติเมตร สูง 12 เซนติเมตร
 - (2) ฐานมีรัศมี 28 มิลลิเมตร สูง 60 มิลลิเมตร
 - (3) ฐานมีรัศมี 12 นิ้ว สูง 18 นิ้ว
2. จงหาปริมาตรของกรวยต่อไปนี้
 - (1) ฐานมีรัศมี 4 เซนติเมตร สูง 12 เซนติเมตร
 - (2) ฐานมีรัศมี 28 มิลลิเมตร สูง 60 มิลลิเมตร
 - (3) ฐานมีรัศมี 12 นิ้ว สูง 18 นิ้ว
3. จงหาปริมาตรของทรงกระบอกเมื่อกำหนด
 - (1) รัศมี 4 เซนติเมตร สูง 8 เซนติเมตร
 - (2) รัศมี 8 เซนติเมตร สูง 4 เซนติเมตร
 - (3) รัศมี 4 เซนติเมตร สูง 16 เซนติเมตร
 - (4) รัศมี 16 เซนติเมตร สูง 4 เซนติเมตร



4. ถังน้ำส่วนล่างเป็นทรงกระบอก ส่วนบนเป็นกรวยตัดยอดตั้งรูป จะมีปริมาตรเป็นเท่าไร



4. ปริมาตรของทรงกลม

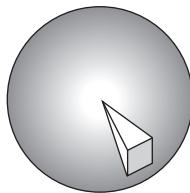
ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนหาทรงกลมมาหนึ่งลูก อาจเป็นลูกปิงปอง ลูกฟุตบอล หรือผลไม้ที่มีลักษณะเป็นทรงกลมก็ได้ แล้วพิจารณาว่าจะหาปริมาตรของทรงกลมได้อย่างไร นำเสนอความคิดในห้องเรียน แล้วร่วมกันพิจารณาว่าแนวคิดของใครเหมาะสมที่จะนำไปใช้ได้
2. ให้นักเรียนนำผลไม้ทรงกลมมาหนึ่งผล ฝ่าผลไม้ให้ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมจนกระทั่งได้ชิ้นเล็กๆ

- (1) นักเรียนคิดว่าผลไม้ชิ้นเล็กๆ นั้นมีลักษณะเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดใด
- (2) สมมติทรงกลมนี้อาศัยมี r หน่วย และผลไม้ชิ้นเล็กๆ มีพื้นที่ฐานเป็น a ตารางหน่วย ผลไม้ชิ้นเล็กๆ นี้จะมีปริมาตรเป็นเท่าไร

ในการหาสูตรปริมาตรของทรงกลมในรูปทั่วไปอาจใช้ความรู้ในเรื่องพื้นที่ผิวของทรงกลมและปริมาตรของพีระมิด ดังนี้

สมมติให้ผ่าทรงกลมที่มีรัศมี r หน่วย ออกเป็นชิ้นเล็กๆ n ชิ้น โดยทุกครั้งที่ผ่าให้ผ่าผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมเสมอ แต่ละชิ้นจะมีลักษณะเป็นพีระมิดที่มีส่วนสูงยาว r หน่วย ให้ชิ้นที่ i มีพื้นที่ฐาน a_i





ดังนั้น พีระมิดชั้นที่ 1 มีพื้นที่ฐาน a_1 สูง r มีปริมาตร $\frac{1}{3} \times a_1 \times r$ ลูกบาศก์หน่วย

พีระมิดชั้นที่ 2 มีพื้นที่ฐาน a_2 สูง r มีปริมาตร $\frac{1}{3} \times a_2 \times r$ ลูกบาศก์หน่วย

พีระมิดชั้นที่ 3 มีพื้นที่ฐาน a_3 สูง r มีปริมาตร $\frac{1}{3} \times a_3 \times r$ ลูกบาศก์หน่วย

⋮

พีระมิดชั้นที่ n มีพื้นที่ฐาน a_n สูง r มีปริมาตร $\frac{1}{3} \times a_n \times r$ ลูกบาศก์หน่วย

จะได้ว่า ปริมาตรของทรงกลม

$$= \left(\frac{1}{3} \times a_1 \times r \right) + \left(\frac{1}{3} \times a_2 \times r \right) + \left(\frac{1}{3} \times a_3 \times r \right) + \dots + \left(\frac{1}{3} \times a_n \times r \right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} \times r \right) (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

แต่เนื่องจากทรงกลมรัศมี r หน่วย มีพื้นที่ผิว $4\pi r^2$ ตารางหน่วย

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ทรงกลมรัศมี } r \text{ หน่วย มีปริมาตร} &= \left(\frac{1}{3} \times r \right) \times 4\pi r^2 \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ ลูกบาศก์หน่วย} \end{aligned}$$

การหาปริมาตรของทรงกลมหาได้จากสูตร

$$\text{ปริมาตรของทรงกลม} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

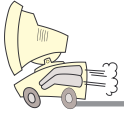
เมื่อ r แทนรัศมีของทรงกลม

ตัวอย่างที่ 1 ถังน้ำทรงกลมรัศมีภายใน 50 เซนติเมตร จะจุน้ำได้กี่ลิตร ($\pi \approx 3.14$)

วิธีทำ ทรงกลมมีรัศมีภายใน 50 เซนติเมตร

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของทรงกลม} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &\approx \frac{4}{3} \times 3.14 \times 50^3 \\ &\approx 523,333.33 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \\ &\approx \frac{523333.33}{1000} \text{ ลิตร} \\ &\approx 523.33 \text{ ลิตร} \end{aligned}$$

ตอบ จะจุน้ำได้ 523.33 ลิตร



ตัวอย่างที่ 2 โลหะทรงกลมรัศมี 4 เซนติเมตร นำมาหลอมเป็นทรงกลมรัศมี 1 เซนติเมตร จะได้กี่ลูก และเหลือเศษเท่าไร

วิธีทำ ปริมาตรของทรงกลม = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\begin{aligned}\text{ทรงกลมรัศมี 4 เซนติเมตร มีปริมาตร} &= \frac{4}{3} \times \pi \times 4 \times 4 \times 4 \\ &= \frac{256}{3} \pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ทรงกลมรัศมี 1 เซนติเมตร มีปริมาตร} &= \frac{4}{3} \times \pi \times 1 \times 1 \times 1 \\ &= \frac{4}{3} \pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อนำมาหลอมเป็นทรงกลมที่มีรัศมี 1 เซนติเมตร

$$\text{จะได้ทรงกลม } \frac{256}{3} \pi \div \frac{4}{3} \pi = 64 \text{ ลูก และไม่มีเศษเหลือ}$$

ตอบ จะได้ทรงกลม 64 ลูก และไม่มีเหลือเศษ



กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ 10

1. ชันน้ำครึ่งทรงกลมรัศมีภายใน 20 เซนติเมตร จะจุน้ำได้กี่ลิตร
2. นำทรงกลมรัศมี 5 เซนติเมตร มาหลอมเป็นทรงกลมรัศมี 2 เซนติเมตร จะได้กี่ลูก และเหลือเศษเท่าไร

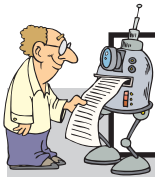


แบบฝึกหัด 4

1. จงหาปริมาตรของทรงกลมที่มีรัศมี
 - (1) 5 เซนติเมตร
 - (2) 10 เซนติเมตร
 - (3) 30 เซนติเมตร
2. ทรงกลมรัศมี 1 ฟุต และทรงกลมรัศมี 2 ฟุต จะมีปริมาตรต่างกันเท่าไร
3. ทรงกลมรัศมี 3 ฟุต และทรงกลมรัศมี 4 ฟุต จะมีปริมาตรต่างกันเท่าไร

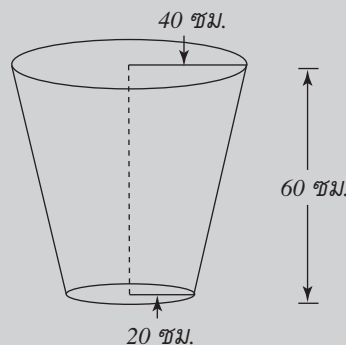


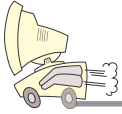
4. ถังน้ำทรงกลมรัศมี 1 เมตร จะจุน้ำได้กี่ลิตร
5. นำทรงกลมรัศมี 5 เซนติเมตร มาหลอมเป็นทรงกระบอกรัศมี 5 เซนติเมตร จะได้ทรงกระบอกสูงเท่าไร
6. นำทรงกลมรัศมี 10 เซนติเมตร มาหลอมเป็นทรงกลมรัศมี 2 เซนติเมตร จะได้กี่ลูก และเหลือเศษประมาณเท่าไร
7. นำทรงกลมรัศมี 10 เซนติเมตร มาหลอมทำเป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 3 เซนติเมตร ยาว 4 เซนติเมตร จะมีความสูงเท่าไร
8. นำทรงกลมรัศมี 10 เซนติเมตร มาหลอมเป็นกรวยตรงรัศมี 3 เซนติเมตร สูง 4 เซนติเมตร จะได้กี่กรวย และเหลือเศษเท่าไร



แบบฝึกหัดชุดระคน

1. ปริซึมฐานสามเหลี่ยมด้านเท่า ฐานยาวด้านละ 10 เซนติเมตร ปริซึมสูง 20 เซนติเมตร จะมีพื้นที่ผิวและปริมาตรเท่าไร
2. จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิดต่อไปนี้
 - (1) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 12 นิ้ว สูง 16 นิ้ว
 - (2) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 8 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 12 เซนติเมตร
 - (3) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ฐานยาวด้านละ 8 นิ้ว ผิวข้างมีสันยาว 12 นิ้ว
3. จงหาปริมาตรของกรวยต่อไปนี้
 - (1) ฐานวงกลมรัศมี 12 นิ้ว สูง 15 นิ้ว
 - (2) ฐานวงกลมรัศมี 8 เซนติเมตร สูงเอียงยาว 17 เซนติเมตร
4. ถังทรงกรวยตัดยอดมีความยาวดังรูป จะมีปริมาตรเป็นเท่าไร





5. ท่อน้ำทรงกระบอกยาว 300 เซนติเมตร มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 160 เซนติเมตร
เส้นผ่านศูนย์กลางภายใน 145 เซนติเมตร วัสดุที่ใช้ทำท่อน้ำมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เมตร
6. นำทรงกลมรัศมี 15 เซนติเมตร มาหลอมเป็นทรงกลมรัศมี 3 เซนติเมตร ได้กี่ลูก
และเหลือเศษเท่าไร



5. การเปรียบเทียบหน่วยความจุ หรือปริมาตร

ชีวิตประจำวันของคนเราเกี่ยวข้องกับการวัดมากมายไม่จำเป็นว่าการวัดความยาว
ของสิ่งของต่างๆ การวัดระยะทางว่าไกลหรือใกล้เพียงใด แม้แต่การวัดพื้นที่เป็นการวัดขนาด
ของสิ่งของต่างๆ ที่มีลักษณะเป็นระนาบหรือสองมิติ เช่น การวัดถนน การวัดที่ดิน ซึ่ง
นักเรียนได้เคยเรียนมาแล้วบ้างในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

การวัดสิ่งต่างๆ นั้นจะต้องมีการเลือกใช้หน่วยให้เหมาะสมและถูกต้อง เช่น ความสูง
ของนักเรียนใช้หน่วยเป็นเซนติเมตร น้ำหนักใช้หน่วยเป็นกิโลกรัม

การเปรียบเทียบหน่วยปริมาตรที่นักเรียนควรรู้จักมีดังนี้

การเปรียบเทียบหน่วยปริมาตรในระบบเมตริก

- | | | |
|-----------------------------|---------------|-------------------|
| 1 ลูกบาศก์เซนติเมตร เท่ากับ | 1,000 | ลูกบาศก์มิลลิเมตร |
| 1 ลูกบาศก์เดซิเมตร เท่ากับ | 1,000 | ลูกบาศก์เซนติเมตร |
| 1 ลูกบาศก์เมตร เท่ากับ | 1,000,000 | ลูกบาศก์เซนติเมตร |
| 1 ลูกบาศก์กิโลเมตร เท่ากับ | 1,000,000,000 | ลูกบาศก์เมตร |

การเปรียบเทียบหน่วยปริมาตรในระบบอังกฤษ

- | | | |
|-----------------------|-------|--------------|
| 1 ลูกบาศก์ฟุต เท่ากับ | 1,728 | ลูกบาศก์นิ้ว |
| 1 ลูกบาศก์หลา เท่ากับ | 27 | ลูกบาศก์ฟุต |

การเปรียบเทียบหน่วยปริมาตรในมาตราไทย

- | | | |
|-------------------------|------------|--------------|
| 1 ลูกบาศก์คืบ เท่ากับ | 1,728 | ลูกบาศก์นิ้ว |
| 1 ลูกบาศก์ศอก เท่ากับ | 8 | ลูกบาศก์คืบ |
| 1 ลูกบาศก์วา เท่ากับ | 64 | ลูกบาศก์ศอก |
| 1 ลูกบาศก์เส้น เท่ากับ | 8,000 | ลูกบาศก์วา |
| 1 ลูกบาศก์โยชน์ เท่ากับ | 64,000,000 | ลูกบาศก์เส้น |



การเปรียบเทียบหน่วยความจุที่นักเรียนควรรู้จักมีดังนี้

1 เซนติลิตร	เท่ากับ	10 มิลลิลิตร
1 เดซิลิตร	เท่ากับ	10 เซนติลิตร
1 ลิตร	เท่ากับ	10 เดซิลิตร
1 เดคาลิตร	เท่ากับ	10 ลิตร
1 เฮกโตลิตร	เท่ากับ	10 เดคาลิตร
1 กิโลลิตร	เท่ากับ	10 เฮกโตลิตร

นอกจากหน่วยความจุที่กล่าวมาข้างต้นแล้วเรายังนำหน่วยความจุมาเปรียบเทียบกัน
ในระบบเดียวกันหรือต่างระบบกันก็ได้ ดังนี้

1 ลิตร	เท่ากับ	1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร
1 ลิตร	เท่ากับ	61.02 ลูกบาศก์นิ้ว
1 ลิตร	เท่ากับ	0.035 ลูกบาศก์ฟุต
1 ลูกบาศก์ฟุต	เท่ากับ	0.028 ลูกบาศก์เมตร
1 ลูกบาศก์ฟุต	เท่ากับ	28,316.84 ลูกบาศก์เซนติเมตร
1 ลูกบาศก์เซนติเมตร	เท่ากับ	0.06102 ลูกบาศก์นิ้ว

ตัวอย่างที่ 1 มีน้ำอยู่ในถัง 12 ลิตร แสดงว่ามีน้ำอยู่ในถังกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

วิธีทำ น้ำ 1 ลิตร เท่ากับ 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

น้ำ 12 ลิตร เท่ากับ $12 \times 1,000 = 12,000$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น มีน้ำอยู่ในถัง 12,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตอบ 12,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 สมปองซื้อถังเก็บน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีด้านกว้าง 2 เมตร ยาว 4 เมตร สูง 3 เมตร อยากทราบว่าถังใบนี้จะจุน้ำได้กี่ลิตร

วิธีทำ หาความจุของถังเก็บน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากหรือหาปริมาตรของปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned}
 \text{ปริมาตรของปริซึม} &= \text{ความกว้าง} \times \text{ความยาว} \times \text{ความสูง} \\
 &= 2 \times 4 \times 3 \\
 &= 24 \text{ ลูกบาศก์เมตร}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก 1 ลูกบาศก์เมตร เท่ากับ 1,000 ลิตร

ดังนั้น 24 ลูกบาศก์เมตร เท่ากับ $24 \times 1,000 = 24,000$ ลิตร

ตอบ ถังใบนี้จะจุน้ำได้ 24,000 ลิตร



ตัวอย่างที่ 3 กุมพาชี้อยาแก่โอมาขวดหนึ่ง ปรากฏว่าก้นขวดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้าง 6 เซนติเมตร ตัวขวดสูง 15 เซนติเมตร ขวดยานี้บรรจุยาได้กี่มิลลิลิตร

วิธีทำ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง×ความยาว×ความสูง

$$= 6 \times 6 \times 15$$

$$= 540 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

เนื่องจาก 1 ลูกบาศก์เซนติเมตร เท่ากับ 1 มิลลิลิตร

ดังนั้น 540 ลูกบาศก์เซนติเมตร เท่ากับ 540 มิลลิลิตร

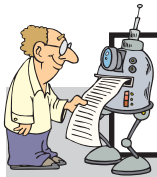
ตอบ ขวดยานี้บรรจุยาได้ 540 มิลลิลิตร

ตัวอย่างที่ 4 หนูแดงทำนาได้ข้าวทั้งหมด 1,000 ถัง อยากทราบว่าหนูแดงจะมีข้าวกี่เกวียน

วิธีทำ เนื่องจาก 100 ถัง เท่ากับ 1 เกวียน

ดังนั้น 1,000 ถัง เท่ากับ $\frac{1000}{100} = 10$ เกวียน

ตอบ หนูแดงจะมีข้าวทั้งหมด 10 เกวียน



แบบฝึกหัด 5

1. ถังน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีก้นถึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้าง 115 เซนติเมตร สูง 125 เซนติเมตร ถังน้ำใบนี้จะจุน้ำได้กี่ลิตร
2. สมศรีต้องการตักน้ำใส่ถังเป็นทรงสี่เหลี่ยมคางหมู มีพื้นที่ฐาน 120 ตารางเซนติเมตร สูง 20 เซนติเมตร อยากทราบว่าสมศรีจะตักน้ำได้ที่ลูกบาศก์เดซิเมตร
3. พีระมิดแท่งหนึ่งมีปริมาตร 8.5 ลูกบาศก์เดคาเมตร อยากทราบว่าพีระมิดนี้มีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เดซิเมตร
4. ขวดใบหนึ่งมีความจุ 4.6 เดคาลิตร อยากทราบว่าขวดใบนี้มีความจุกี่เฮกโตลิตร
5. ต้องการสร้างอ่างเก็บน้ำให้ฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีด้านกว้าง 5 เมตร สูง 2.5 เมตร ต้องการจุน้ำได้ 48,000 ลิตร อยากทราบว่าฐานภายในของอ่างยาวเท่าใด

