

# Free dom | คณิตศาสตร์

สอบปลายภาค 1 / 2568

( สรุปผิดกัก IG : d3w4r\_zz )

ฝังก์ชัน

กราฟ

## คำเตือน

- เนื้อหาทั้งหมดเป็นเนื้อหาที่สรุปเอง
- เนื้อหามาจาก หนังสือ / สมุด / ชีท / ครุ
- สรุปนี้อาจมีข้อผิดพลาดได้



**FREEDOM**  
ASSUMPTION COLLEGE THONBURI



ONLINE PDF

FREEDOM.POOMP5.COM



Free  
dom

truemoney  
wallet



Free  
dom

K+

# FUNCTION

คูณคาร์ติเซียล

$A \times B$

เซตใน A คูณกับ B

สมมุติว่า  $A = \{1, 2\}$   $B = \{3, 4, 5\}$

$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

{ 1 , 2 }

x

{ 3 , 4 , 5 }

เอาตัวแรกในเซต A ไปจับคู่กับเซต B เรียงไปกีละตัว เรียงเป็นแบบ  $(x, y)$

เขียนแบบบวกเจือนไข่ได้  $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$

ความสัมพันธ์น้อยกว่าจาก A ไป B

$\{(x, y) \in A \times B | x < y\}$

ความสัมพันธ์มากกว่าจาก A ไป B

$\{(x, y) \in A \times B | x > y\}$

ความสัมพันธ์กำลังสองจาก A ไป B

$\{(x, y) \in A \times B | x = y^2\}$

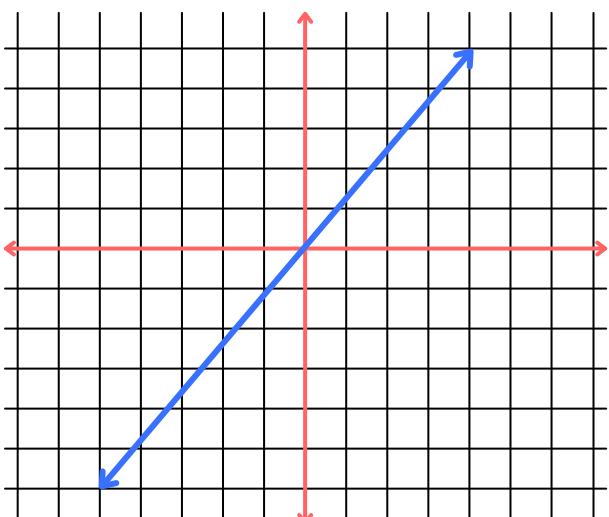
ความสัมพันธ์รากที่สองจาก A ไป B

$\{(x, y) \in A \times B | x = \sqrt{y}\}$

# GRAPH

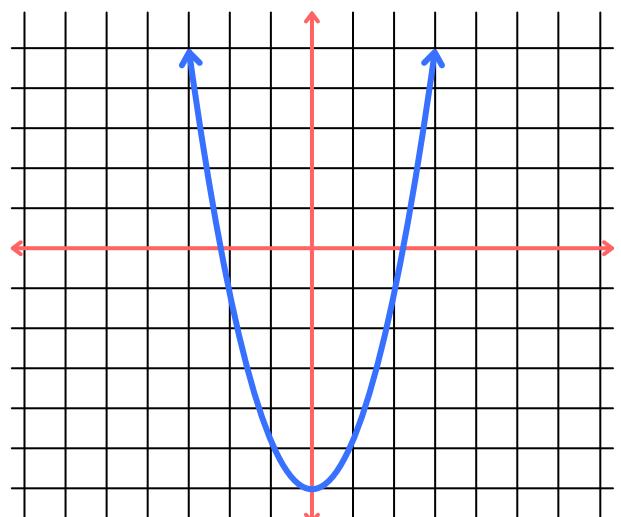
$$y = mx + b$$

เป็นสมการกราฟเส้นตรง



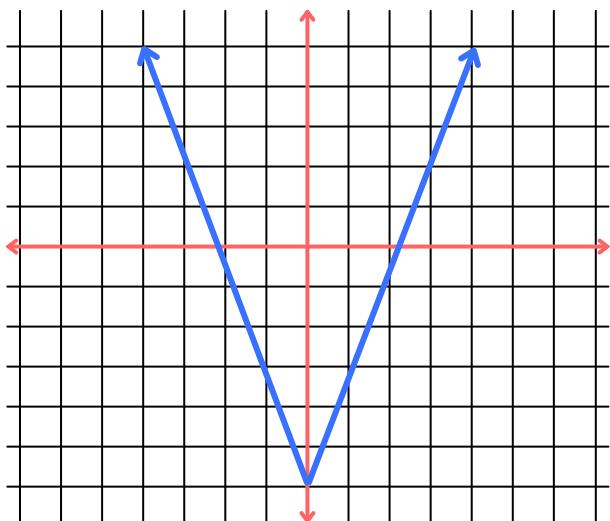
$$y = x^2$$

เป็นสมการกราฟพาราโบลา



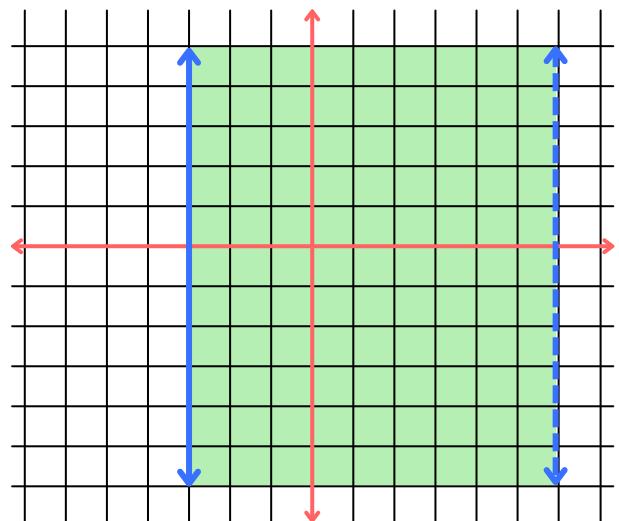
$$y = |x|$$

เป็นสมการกราฟค่าสัมบูรณ์



$$R < x < R$$

เป็นสมการกราฟอสมการเชิงเส้น



## กราฟเส้นตรง

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3x\}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-2	-2	-2	-2

ให้กำหนดตารางแบบง่ายๆ และ **แทนค่า x ดู**

$$y = 3(-2) = -6, (-2, -6)$$

$$y = 3(-1) = -3, (-1, -3)$$

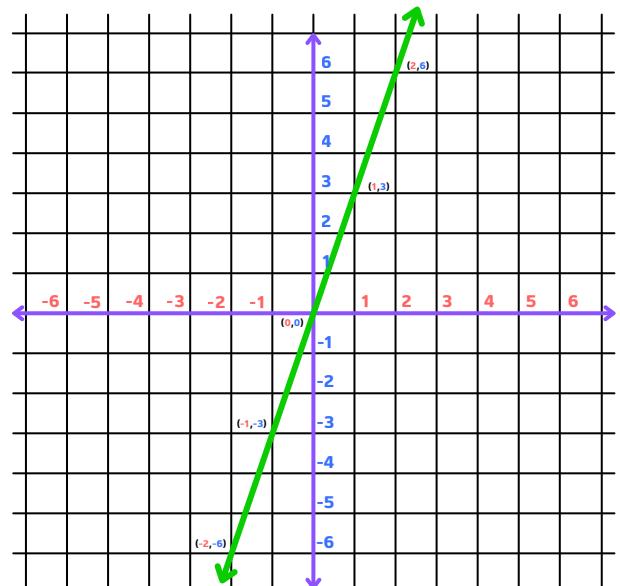
$$y = 3(0) = 0, (0, 0)$$

$$y = 3(1) = 3, (1, 3)$$

$$y = 3(2) = 6, (2, 6)$$

$$y = mx + b$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3x\}$$



นี่คือเรื่องต้นอย่า  
เพิ่งปิดสรุปนะ

ลองทำความเข้าใจ  
ใหม่เห็นยากเลย

# กราฟพาราโบลา

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x^2\}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

ให้กำตาร่างแบบง่ายๆ และ **แทนค่า x ดู**

$$y = (-2)^2 = 4, (-2,4)$$

$$y = (-1)^2 = 1, (-1,1)$$

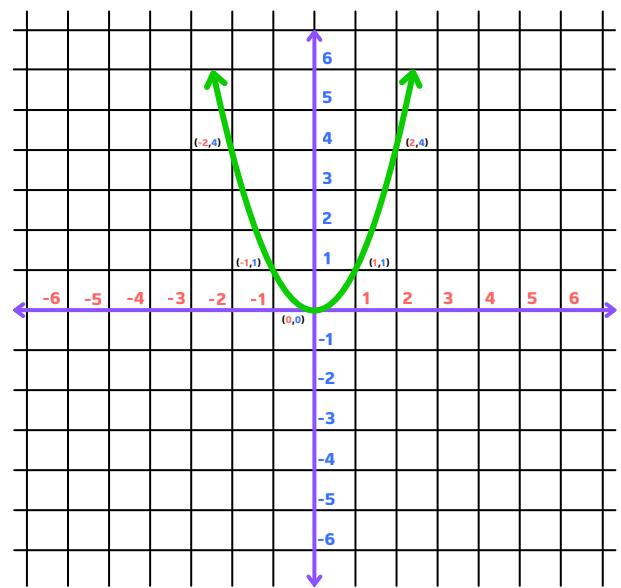
$$y = (0)^2 = 0, (0,0)$$

$$y = (1)^2 = 1, (1,1)$$

$$y = (2)^2 = 4, (2,4)$$

$$y = x^2$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x^2\}$$



# สูตรพาราโบลา



$$y = ax^2 + bx + c$$



$$\left( \frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

$$y = ax^2$$



$$(0,0)$$

$$y = ax^2 + k$$



$$(0,k)$$

$$y = a(x - h)^2$$



$$(h,0)$$

$$y = a(x - h)^2 + k$$



$$(h,k)$$

สูตรแคลน์ชิวๆ จำ  
ได้ยุลະ สบายนะ

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y - 3 = (x + 2)^2\}$$

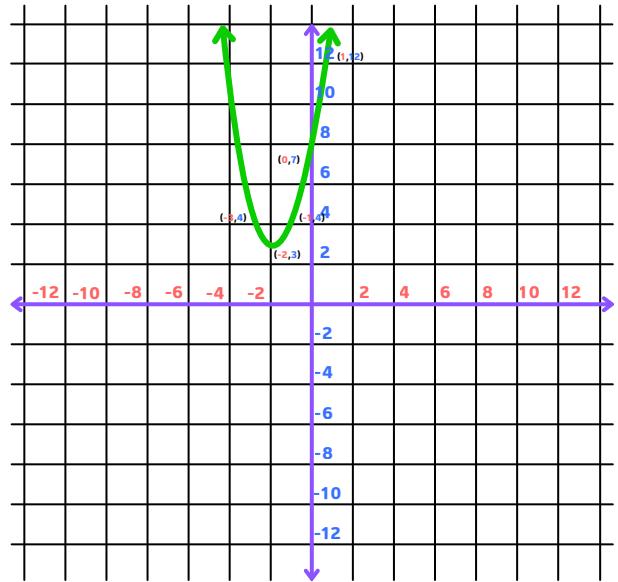
x	-3	-2	-1	0	1
y	4	3	4	7	12

ให้กำตรางแบบง่ายๆ และ **แกนค่า x** ดู

$$\begin{aligned} y - 3 &= ((-3) + 2)^2 = 1 \\ y &= 1+3 \\ y &= 4 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{แกนค่า } x \text{ แบบนี้ไป} \\ \text{เรื่อยๆ เมื่อันใน} \\ \text{ตราร่าง} \end{array} \right\}$$

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y - 3 = (x + 2)^2\}$$



$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 2x^2 + 2\}$$

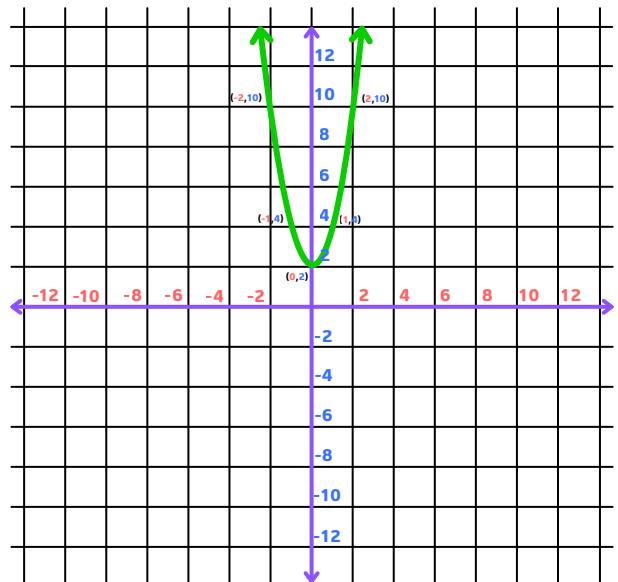
x	-2	-1	0	1	2
y	10	4	2	4	10

ให้กำตรางแบบง่ายๆ และ **แกนค่า x** ดู

$$\begin{aligned} y &= 2(-2)^2 + 2 = 10 \\ y &= 10 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{แกนค่า } x \text{ แบบนี้ไป} \\ \text{เรื่อยๆ เมื่อันใน} \\ \text{ตราร่าง} \end{array} \right\}$$

$$y = ax^2 + k$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 2x^2 + 2\}$$



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{สมมุติมีโจทย์ } y = x^2 - 4x + 3$$

$$\text{หา } x \text{ ใช้สูตร : } \left( \frac{-b}{2a} \right), b \text{ คือ } -4, a \text{ คือ } 1$$

$$\text{แกนค่า : } \left( \frac{-(-4)}{2(1)} \right) = \frac{-(-4)}{2} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore x = 2$$

$$\begin{aligned} \text{หา } y \text{ ให้แทน } x \text{ ไปในสูตร : } y &= 2^2 - 4(2) + 3 \\ y &= 4 - 8 + 3 \end{aligned}$$

$$\therefore y = -1 \quad \therefore \text{จุดต่ำสุดที่ } (2, -1)$$

$$\text{สมมุติมีโจทย์ } y = -4x^2 + 12x - 9$$

$$\text{หา } x \text{ ใช้สูตร : } \left( \frac{-b}{2a} \right), b \text{ คือ } 12, a \text{ คือ } -4$$

$$\text{แกนค่า : } \left( \frac{-(12)}{2(-4)} \right) = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{หา } y \text{ ให้แทน } x \text{ ไปในสูตร : } y &= -4\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{2}\right) - 9 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore y = 0 \quad \therefore \text{จุดสูงสุดที่ } \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

สามารถเขียน  $y = ax^2 + bx + c$  ให้เป็น  $y = a(x-h)^2 + k$  ถ้า  $a$  ไม่เท่ากับ 0

ต้องจัดใช้กำลังสองสมบูรณ์

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$y = x^2 + 6x + 8$$

$$y = x^2 + 2(3)(x) + 3^2 - 3^2 + 8$$

$$y = [x^2 + 2(3)(x) + 3^2] - 3^2 + 8$$

$$y = (x+3)^2 - 9 + 8 \quad \text{เข้าสูตร : } y = a(x-h)^2 + k$$

$$a = 1, h = -3, k = -1$$

x(h)	-1	-2	-3	-4	-5
y(k)	3	0	-1	0	3

ได้จุด  
ยอดจากสูตร

$$y = x^2 + 2(3)(x) + 3^2 - 3^2 + 8$$

ถ้าตามสูตรมี  $a$  มี  $b$  แล้ว แต่  $b$   
ถ้าตามโจทย์ต้อง 8 ซึ่ง  $b$  ต้อง 3  
แต่ 3 กำลังสองได้ 9 ไม่ใช่ 8  
เลยต้องทำแบบนี้ให้ได้เท่ากัน  
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$a = x, b = 3$$

ป. ไม่รู้ว่าทำแบบนี้เรียกว่าไรแต่ว่ามันคือมี  $b$  แล้ว แต่ว่า  $b$  กำลังสองแล้วไม่ตรงเลยต้อง ตัดออกให้คงตัวเดิมไว้

ถ้าโจทย์เป็น  $y = x^2 - 4x + 9$

$$\text{ให้กำลังแบบนี้ } y = x^2 - 2(2)(x) + 2^2 - 2^2 + 9$$

2 กำลังสองไม่ได้  
9 เลยต้องตัดออก

$$a = x, b = 2$$

$$y = (x-2)^2 + 5$$

$$a = 1, h = 2, k = 5$$

x(h)	0	1	2	3	4
y(k)	9	6	5	6	9

$$y = a(x - h)^2 + k$$

$h$  คือให้กำเป็นเครื่องหมายตรงข้าม , ถ้าเป็น  $(x - 2)$   $h$  คือ 2 , ถ้าเป็น  $(x + 2)$   $h$  คือ -2

## กราฟค่าสัมบูรณ์

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = |x|\}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

ให้กำตรางแบบง่ายๆ และ **แกนค่า x** ดู

$$y = |(-2)| = 2, (-2,2)$$

$$y = |(-1)| = 1, (-1,1)$$

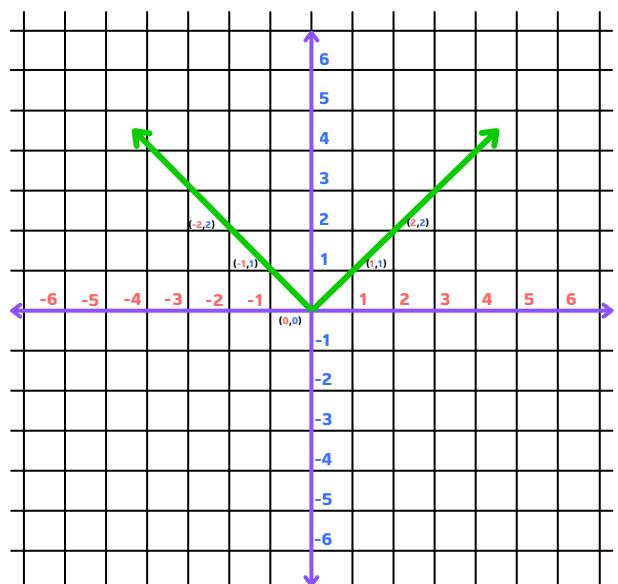
$$y = |(0)| = 0, (0,0)$$

$$y = |(1)| = 1, (1,1)$$

$$y = |(2)| = 2, (2,2)$$

$$y = |x|$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = |x|\}$$



$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = |x| - 1\}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	1	0	-1	0	1

ให้กำตรางแบบง่ายๆ และ **แกนค่า x** ดู

$$y = |(-2)| - 1 = 1, (-2,1)$$

$$y = |(-1)| - 1 = 0, (-1,0)$$

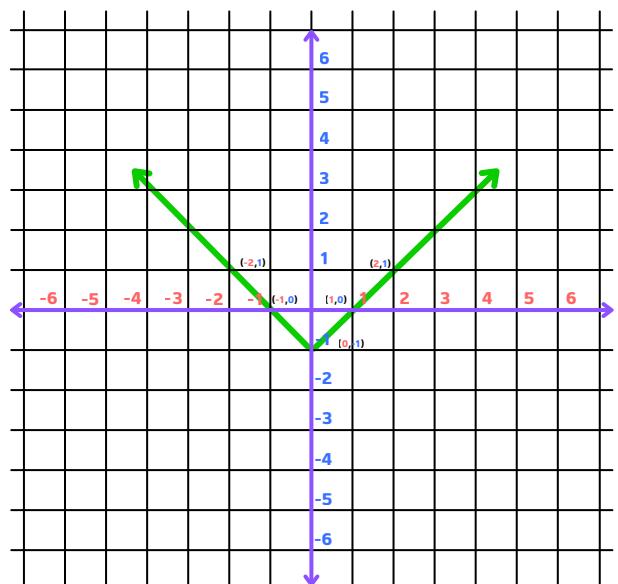
$$y = |(0)| - 1 = -1, (0,-1)$$

$$y = |(1)| - 1 = 0, (1,0)$$

$$y = |(2)| - 1 = 1, (2,1)$$

$$y = |x| - (แกน y)$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = |x| - 1\}$$



$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1|\}$$

<b>x</b>	-1	0	1	2	3
<b>y</b>	2	1	0	1	2

ให้กำตรางแบบง่ายๆ และ **แกนค่า x** ดู

$$y = |(-1) - 1| = 2, (-1,2)$$

$$y = |(0) - 1| = 1, (0,1)$$

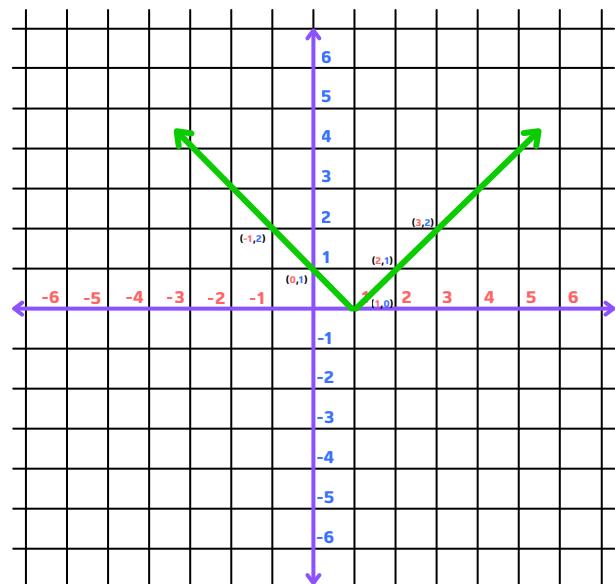
$$y = |(1) - 1| = 0, (1,0)$$

$$y = |(2) - 1| = 1, (2,1)$$

$$y = |(3) - 1| = 2, (3,2)$$

$$y = |x - (\text{แกน } x)|$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1|\}$$



$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1| - 1\}$$

<b>x</b>	-1	0	1	2	3
<b>y</b>	1	0	-1	0	1

ให้กำตรางแบบง่ายๆ และ **แกนค่า x** ดู

$$y = |(-1) - 1| - 1 = 1, (-1,1)$$

$$y = |(0) - 1| - 1 = 0, (0,0)$$

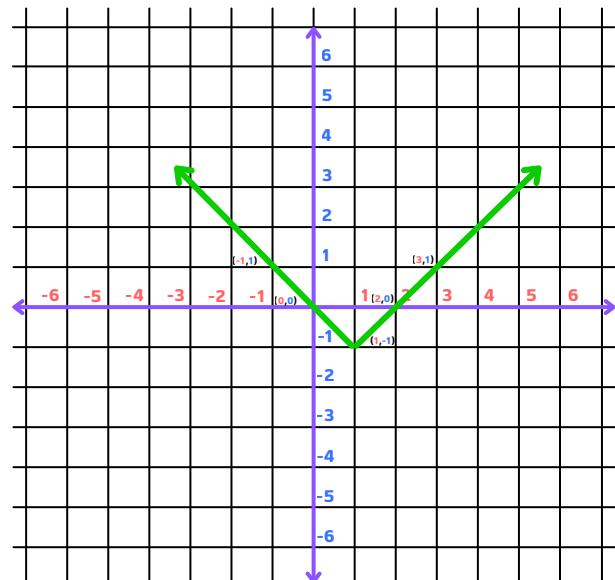
$$y = |(1) - 1| - 1 = -1, (1,-1)$$

$$y = |(2) - 1| - 1 = 0, (2,0)$$

$$y = |(3) - 1| - 1 = 1, (3,1)$$

$$y = |x - (\text{แกน } x)| - (\text{แกน } y)$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1|\}$$



สูตรลัด

$$y = |x + 1|$$

ถ้าโจทย์มากรงนี้ ปรับเครื่องหมายเป็นตรงข้ามได้เลยแล้วจะได้จุดยอด (**แกน x**)

ตามปกติ  $|x|$  ตลอดมาแล้วจะได้ค่าเป็น **บวก**

เพียงหน้า 8 เอง  
ไปอ่านต่อๆ

# กราฟเส้นตรง

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x\}$$

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	-2	-1	0	1	2

ให้กำตรางแบบง่ายๆ และ **แกนค่า x** ดู

$$y = (-2), (-2, -2)$$

$$y = (-1), (-1, -1)$$

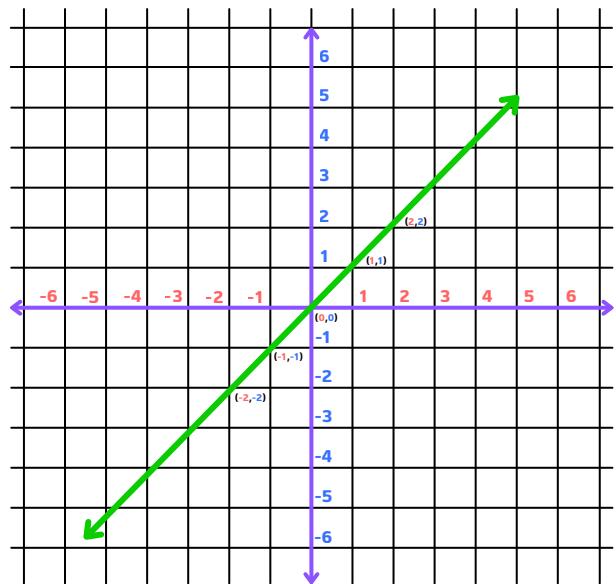
$$y = (0), (0, 0)$$

$$y = (1), (1, 1)$$

$$y = (2), (2, 2)$$

$$y = x$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x\}$$



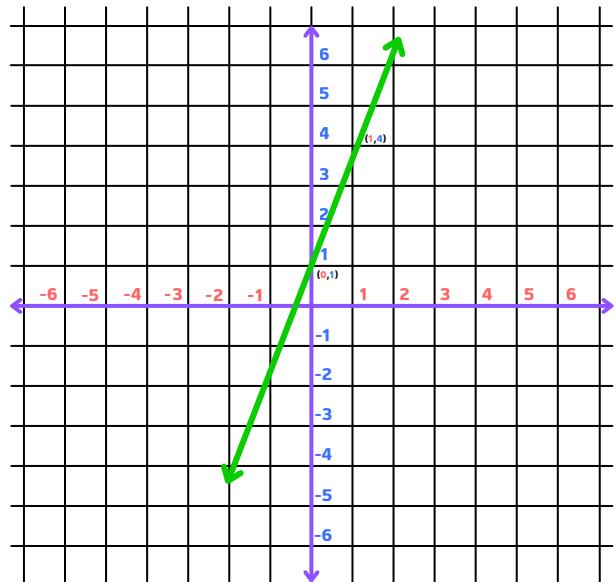
$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3x + 1\}$$

จัดสมการให้อยู่ในรูป  $y = mx + b$

ให้มองว่า  $m$  คือเท่าไหร่แล้วนับไปตาม  
บันทึก **บนขึ้น** และ **นับออกจากขวา**  
**อีก 1**, จะเริ่มนับจากจุด  $b$  (ค่า  $y$ )

$$y = mx + b$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3x + 1\}$$



กราฟเส้นตรงจัดยังไงก็ได้ให้อยู่ในรูป  $y = mx + b$

การนับคือให้ **จุดแรกอยู่ที่ตำแหน่ง b** ในแกน y

**จุดสอง**ให้นับ **ขึ้นหรือลง**ตาม **บวกหรือลบ** ใน **แกน y** ตามค่า  $m$  แล้ว **ขยับขวา 1 หน่วย**

สมมุติว่า  $y = 5x + 9$  จุดแรกอยู่ที่  $(0, 9)$  จุดสองอยู่ที่  $(1, 14)$

# กราฟอสมการ

โล่งอะเนียนไรตี  
นิกไน์ออก

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid -5 \leq x \leq 2\}$$

ค่าตัวแผลงเก่าไหร่จุดตรงนั้นจุดหนึ่ง  
ค่าตัวน้ำเงินเป็นอักจุดหนึ่ง

กราฟนี้ไม่มีค่าแกน y ดูแก่แกน x

ชิ้งแมง! ไปอ่านต่อไป

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid -3 \leq x < 6\}$$

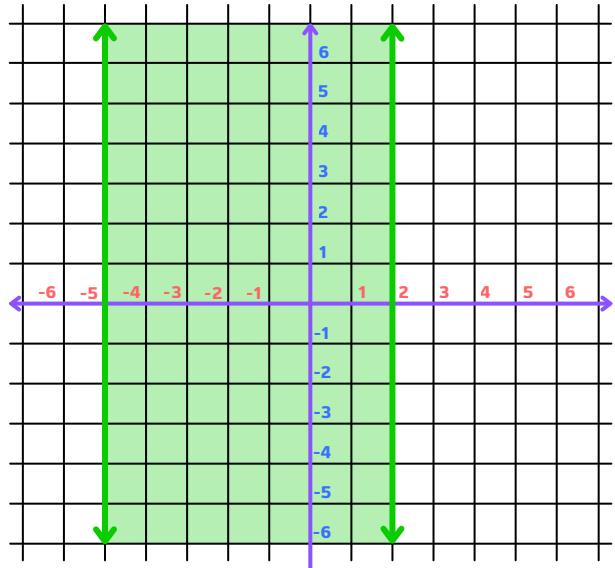
ค่าตัวแผลงเก่าไหร่จุดตรงนั้นจุดหนึ่ง  
ค่าตัวน้ำเงินเป็นอักจุดหนึ่ง

แต่ข้อบี้เส้นตรงจุด (6) ต้องเป็นเส้นประหรือจุด  
โปรดเพราะเป็นเครื่องหมาย น้อยกว่า



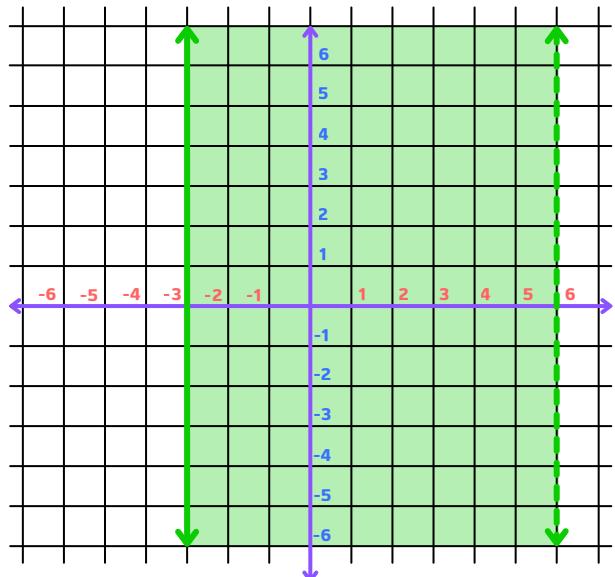
$$R < x < R$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid -5 \leq x \leq 2\}$$



$$R < x < R$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid -3 \leq x < 6\}$$



เครื่องหมายน้อยกว่า ให้เส้นเป็นเส้นประหรือจุดโปรด  
เครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ ให้เส้นเป็นเส้นกึ่งหรือจุดกึ่ง

กราฟอสมการ ไม่มีค่าแกน y (เป็น  $\infty$ ) มีแต่ค่าแกน x

# Domain และ Range

**Domain (Dr)**

$$Dr = x$$

**Range (Rr)**

$$Rr = y$$

$$r = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (5, -5), (6, -6)\}$$

$$Dr = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$Rr = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\}$$

ตัวหน้าคือ Dr (x) , ตัวหลังคือ Rr (y)

$$r = \{(x, y) \in |x| \mid 2x + 3y = 6\}$$

อันนี้ |x| นะ

หา Rr (y = ?)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 3y &= 6 - 2x \\ y &= \frac{6 - 2x}{3} \quad \text{ตัวใจโลกเด้อกัน} \\ y &= 2 - \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

อันนี้คือ Rr (y)

$$\therefore Rr = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

หา Dr (x = ?)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 2x &= 6 - 3y \\ x &= \frac{6 - 3y}{2} \quad \text{ตัวใจโลกเด้อกัน} \\ x &= 3 - \frac{3y}{2} \end{aligned}$$

อันนี้คือ Dr (x)

$$\therefore Dr = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$r = \{(x, y) \in |x| \mid 2x + 10y = 20\}$$

อันนี้ |x| นะ

หา Rr (y = ?)

$$\begin{aligned} 2x + 10y &= 20 \\ 10y &= 20 - 2x \\ y &= \frac{20 - 2x}{10} \quad \text{ตัวใจโลกเด้อกัน} \\ y &= 2 - \frac{2x}{10} \end{aligned}$$

อันนี้คือ Rr (y)

$$\therefore Rr = \{\dots, -20, -10, 0, 10, 20, \dots\}$$

หา Dr (x = ?)

$$\begin{aligned} 2x + 10y &= 20 \\ 2x &= 20 - 10y \\ x &= \frac{20 - 10y}{2} \quad \text{ตัวใจโลกเด้อกัน} \\ x &= 10 - \frac{-10y}{2} \end{aligned}$$

อันนี้คือ Dr (x)

$$\therefore Dr = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x - 5y = 20\}$$

อันนี้  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  นะ

หา  $R_r$  ( $y = ?$ )

$$4x - 5y = 20$$

$$-5y = 20 - 4x$$

$$y = \frac{20 - 4x}{-5}$$

ตัวไว้ใจก็ต้องกัน

$$y = -4 - \frac{2x}{-5}$$

อันนี้คือ  $R_r$  ( $y$ )

$$\therefore R_r = \mathbb{R}$$

หา  $D_r$  ( $x = ?$ )

$$4x - 5y = 20$$

$$4x = 20 + 5y$$

$$x = \frac{20 + 5y}{4}$$

ตัวไว้ใจก็ต้องกัน

$$x = 5 + \frac{5y}{4}$$

อันนี้คือ  $D_r$  ( $x$ )

$$\therefore D_r = \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ใช้สูตรแบบเดียวกันแต่ว่าคำตอบ  $D_r = \mathbb{R}$ ,  $R_r = \mathbb{R}$

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2x + 1}{3x - 2}\}$$

ส่วนไม่เท่ากับ 0

หา  $R_r$  ( $y = ?$ )

$$y = \frac{2x + 1}{3x - 2}$$

จัดสมการให้มีข้อยลุบไปคูณ

$$y(3x - 2) = 2x + 1$$

$$3xy - 2y = 2x + 1$$

$$3xy - 2x = 1 + 2y$$

ขยับข้างสมการ

$$x(3y - 2) = 1 + 2y$$

ดึงตัวร่วม

$$x = \frac{1 + 2y}{3y - 2}$$

ขยับข้างสมการ

$$x = \frac{1 + 2y}{3y - 2}$$

จัดส่วนให้มีไปเท่ากับ 0

$$3y - 2 \neq 0$$

$$3y \neq 2$$

$$y \neq \frac{2}{3}$$

$$\therefore R_r = \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

หา  $D_r$  ( $x = ?$ )

$$y = \frac{2x + 1}{3x - 2}$$

จัดส่วนให้มีไปเท่ากับ 0

$$3x - 2 \neq 0$$

$$3x \neq 2$$

$$x \neq \frac{2}{3}$$

$$\therefore D_r = \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

เป็น  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$  เพราะ  $x \neq \frac{2}{3}$

ก็คือเวลาทุกตัวยกเว้น  $\frac{2}{3}$

ดูให้ดีว่าเป็น  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  หรือ  $|x|$

อ่านไรเหยย  
ไปอ่านคณิตศาสตร์

$$A = \{5, 6, 7, 8, 9\}, r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x - 5\}$$

หา  $D_r(x)$

$$5 = 2x - 5 = 5$$

$$7 = 2x - 5 = 6$$

$$9 = 2x - 5 = 7$$

$$\therefore D_r = \{5, 6, 7\}$$

แทนค่า y

หา  $R_r(y)$

$$y = 2(5) - 5 = 5$$

$$y = 2(6) - 5 = 7$$

$$y = 2(7) - 5 = 9$$

$$y = 2(8) - 5 = 11$$

ไม่มีจำนวนในเซต A (ເກີບ)

$$\therefore R_r = \{5, 7, 9\}$$

แทนค่า x จากเลขในเซต A

หาค่า y ก่อนแล้วค่อยหาค่า x

$$r = \{(x, y) \mid y = |x| + 3\}$$

หา  $D_r(x)$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	4	3	4	5

$$\therefore D_r = \mathbb{R}$$

เป็นจำนวนจริง ( $\mathbb{R}$ )

หา  $R_r(y)$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	4	3	4	5

$$\therefore R_r = [3, \infty]$$

เป็น  $\infty$  ໄປເຮືອຍໆ, ຕໍ່ສຸດທີ 3 ຈະດັ່ງ  $\infty$

ອຍ່າເພິ່ນຫຼວ  
ຮະເບີຕະນະ

ສູ້ຍຸ ກ່ອນຖຸກຄນ  
ກຳໄຕແນ່ນອນເວັຍ  
ຫ້ອງໃຈຫົວຫ້ອໄປ!

ถ้า  $y = 2x - 1$  เมื่อ  $-1 \leq x \leq 3$

ถ้าเจอกำกราฟสองแบบ

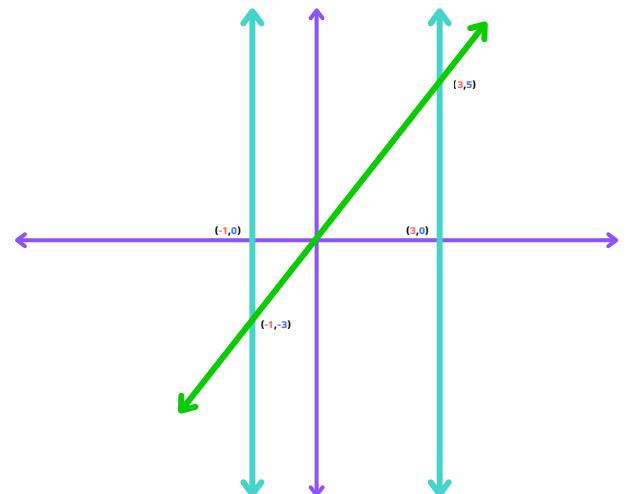
ให้แยกประเภทก่อน

กราฟอสมการ  $x = -1, 3$

กราฟเส้นตรงให้แทนค่า  $x$

$$x = -1, y = 2(-1) - 1 = -3 \\ \therefore y = -3$$

$$x = 3, y = 2(3) - 1 = 5 \\ \therefore y = 5$$



ถ้า  $y = x^2$  เมื่อ  $-4 \leq x \leq 4$

ถ้าเจอกำกราฟสองแบบ

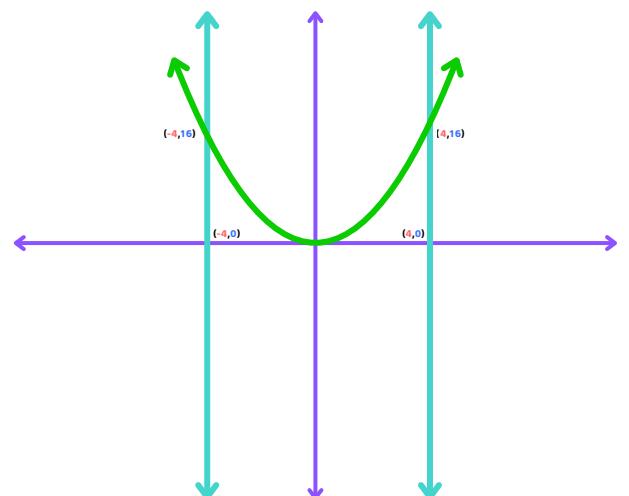
ให้แยกประเภทก่อน

กราฟอสมการ  $x = -4, 4$

กราฟพาราโบลาให้แทนค่า  $x$

$$x = -4, y = (-4)^2 = 16 \\ \therefore y = 16$$

$$x = 4, y = (4)^2 = 16 \\ \therefore y = 16$$



ถ้า  $y = |x|$  เมื่อ  $-4 \leq x \leq 4$

ถ้าเจอกำกราฟสองแบบ

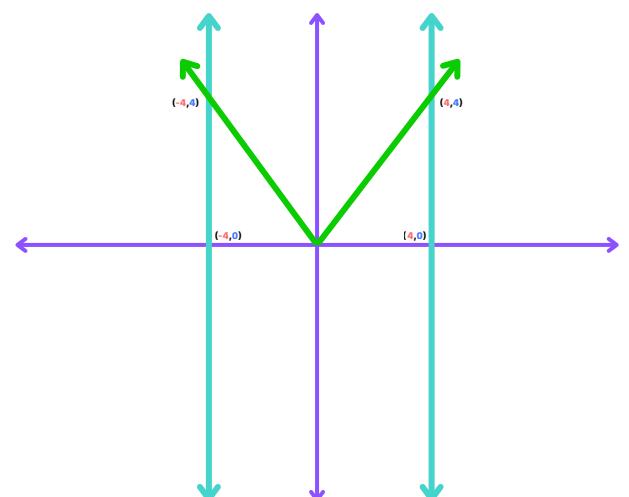
ให้แยกประเภทก่อน

กราฟอสมการ  $x = -4, 4$

กราฟค่าสัมบูรณ์ให้แทนค่า  $x$

$$x = -4, y = |-4| = 4 \\ \therefore y = 4$$

$$x = 4, y = |4| = 4 \\ \therefore y = 4$$



ถ้าเจอให้หา  $D_r$ ,  $R_r$  ในกราฟค่าสัมบูรณ์

$$D_r = R$$

$$R_r = [0, \infty)$$

↑ อ่านว่า  
ปิด 0 เปิด  $\infty$

อ่านว่า **ปิด**(เครื่องหมาย  $[ ]$ )  
**เปิด**(เครื่องหมาย  $( )$ )

ถ้าเจอให้หา  $D_r$ ,  $R_r$  ในกราฟค่าสัมบูรณ์

$$D_r = R$$

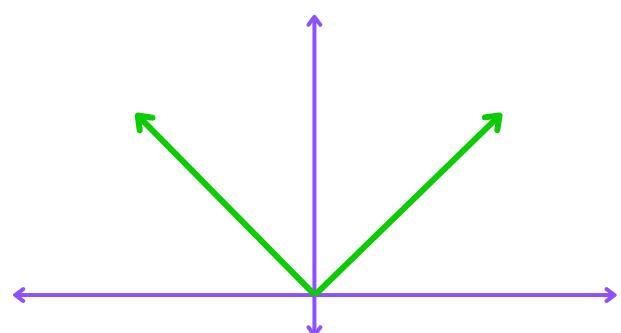
$$R_r = [0, \infty)$$

↑ อ่านว่า  
ปิด 0 เปิด  $\infty$

อ่านว่า **ปิด**(เครื่องหมาย  $[ ]$ )  
**เปิด**(เครื่องหมาย  $( )$ )

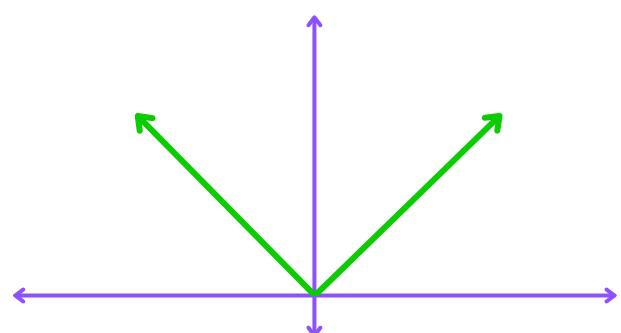
$$y = |x|$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = |x|\}$$



$$y = |x|$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = |x|\}$$



## สมการกราฟวงกลม

ในสมการกราฟวงกลม

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 6^2\}$$

ตัวที่ **โจทย์** คือตัวที่จะบอกจุดทั้งหมดที่อยู่ใน**ค่าบวก** และลบของ **ห้องส่องแกะ**

$$D_r = [-6, 6]$$

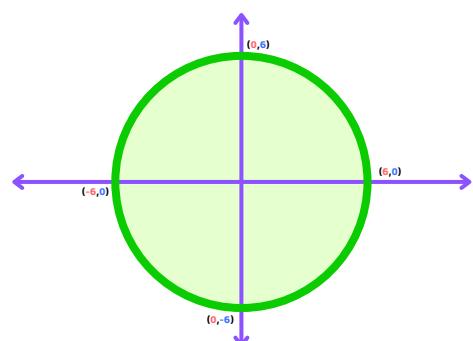
$$R_r = [-6, 6]$$

ยังคงก็ได้ต้องจัดสมการให้ในรูป

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

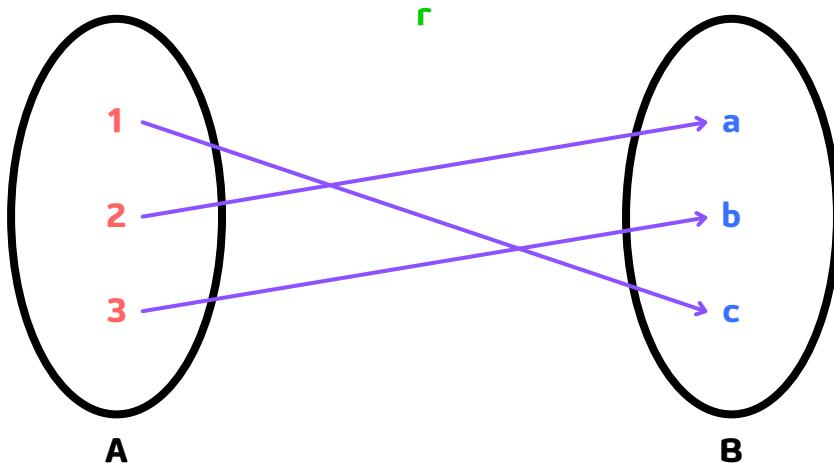
$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 6^2\}$$



$$r = \text{รัศมี}$$

ถ้าสมการมาจาก  $y = \sqrt{r - x^2}$  ให้กำลังสองทั้งสมการและจะได้กราฟครึ่งวงกลม

# FUNCTION



Function ຈະຕ້ອງ **x** ມີນັ້ງຄ່າຕ່ອງ **y** ມີນັ້ງຄ່າ ໄມມີຜູ້

$$r = \{(1,c), (2,a), (3,b)\}$$

$$f(x) = y$$

ຕັວອຍ່າງ :  $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3x\}$

$x$	1	2	3	4	5
$f(x) = y$	3	6	9	12	15

ຕັວອຍ່າງ :  $f(x) = 3x + 2$  ໂດຍກໍ x ເປັນຈຳນວນໃດໆ

$$f(2) = 3(2) + 2 = 8$$

$$f(-5) = 3(-5) + 2 = -13$$

ໃຫ້ແກນຄ່າ x ລົງໄປໃນສາການ

$$f(a) = 3(a) + 2 = 3a + 2$$

$$f(b-2) = 3(b-2) + 2 = 3b - 4$$

ແກນຄ່າດ້ວຍຕົວແປຣໄດ້

ให้  $f(x) = mx + c$  โดยที่  $f(1) = 5$  และ  $f(5) = -4$

หาค่า  $m$  และ  $c$

$$5 = m(1) + c$$

$$5 = m + c \quad \underline{\text{①}}$$

$$-4 = m(5) + c$$

$$-4 = 5m + c \quad \underline{\text{②}}$$

$$\underline{\text{②}} - \underline{\text{①}} ; \quad -4 = 5m + c \quad \cancel{-}$$

$$5 = m + c \quad \cancel{-}$$

$$= -9 - 4m$$

$$4m = -9$$

$$m = \frac{-9}{4}$$

แทนค่า  $m$  ไปในสมการที่ 1

$$5 = \frac{-9}{4} + c$$

$$5 + \frac{9}{4} = c$$

$$5 \times \left(\frac{4}{4}\right) + \frac{9}{4} = c$$

$$\frac{29}{4} = c$$

หาค่า  $f(3)$  และ  $f(-4)$

แทนค่า  $m$ ,  $c$  ในสมการได้เลย

$$f(x) = \frac{-9}{4}x + \frac{29}{4}$$

กรณี  $f(3)$

$$f(3) = \frac{-9}{4}(3) + \frac{29}{4}$$

$$f(3) = \frac{2}{4}$$

$$f(3) = \frac{1}{2}$$

กรณี  $f(-4)$

$$f(-4) = \frac{-9}{4}(-4) + \frac{29}{4}$$

$$f(3) = \frac{65}{4}$$

$$f(3) \times f(-4) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{65}{4}\right)$$

$$f(3) \times f(-4) = \frac{65}{8}$$

$$f(x) = \frac{12}{ax + b}, x \in R$$

ถ้า  $f(1) = 24$  ॥ ॥  $f(-1) = -8$

หาค่า  $a$  และ  $b$

$$24 = \frac{12}{a(1) + b}$$

$$24(a + b) = 12$$

$$2(a + b) = 1$$

$$2a + 2b = 1 \quad \underline{\text{①}}$$

$$-8 = \frac{12}{a(-1) + b}$$

$$-8(-a + b) = 12$$

$$-2(-a + b) = 3$$

$$2a - 2b = 3 \quad \underline{\text{②}}$$

$$\underline{\text{②}} + \underline{\text{①}} ; \quad 2a + 2b = 1 + 2a - 2b = 3$$

$$4a = 4$$

$$a = \frac{4}{4}$$

$$a = 1$$

แทน  $a = 1$  ในสมการที่ 1

$$2(1) + 2b = 1$$

$$2b = -1$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

หาค่า  $x$  ที่ทำให้  $f(x) = 4$

$$f(x) = \frac{12}{ax + b}$$

$$f(x) = \frac{12}{(1)x + (-\frac{1}{2})}$$

$$4 = \frac{12}{x - \frac{1}{2}}$$

$$4 \left(x - \frac{1}{2}\right) = 12$$

$$4x - 2 = 12$$

$$x = \frac{14}{4}$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a = 1, b = -\frac{1}{2}, x = \frac{7}{2}$$

ถ้าเจอให้หาค่า  $a, b$  ผ่านสมการให้จัดให้เป็นสมการที่ 1 หรือ 2

ถ้าเจอให้หาค่า  $f(x)$  ที่ให้แทนค่า  $a, b$  ได้เลย

$$f(x) = x; -1 \leq x \leq 1$$

หา  $Dr(x)$

$$\therefore Dr = Rr$$

หา  $Rr(y)$

$$x = -1, y = -1$$

$$x = 1, y = 1$$

$$\therefore Rr = [-1, 1]$$

$$f(x) = 2x - 3; -1 \leq x \leq 3$$

หา  $Dr(x)$

$$\therefore Dr = [-1, 3]$$

หา  $Rr(y)$

$$x = -1; y = 2(-1) - 3 = -5$$

$$x = 3; y = 2(3) - 3 = 3$$

$$\therefore Rr = [-5, 3]$$

$$f(x) = x - 2; x \geq 1$$

หา  $Dr(x)$

$$\therefore Dr = [1, \infty)$$

$x$  มากกว่า 1 เลยเอาตั้งแต่ 1 จนถึง  $\infty$

หา  $Rr(y)$

$$x = 1; y = (1) - 2 = -1$$

$$\therefore Rr = [-1, \infty)$$

ค่า  $y$  ได้  $-1$  ไปจนถึง  $\infty$

$$f(x) = -4x + 5; x < 2$$

หา  $Dr(x)$

$$\therefore Dr = (-\infty, 2)$$

$x$  น้อยกว่า 2 เลยเอาตั้งแต่  $-\infty$  ฝั่งค่าลบ  $(-\infty)$  ไปจนถึง 2

หา  $Rr(y)$

$$x = 2; y = -4(2) + 5 = -3$$

$$\therefore Rr = (-3, \infty)$$

สูตร

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = Dr = R - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}, Rr = R - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

รู้นะเงื่อนละท้อ  
แต่ขออย่องแพ้ติวะ

$$f(x) = \frac{6x + 7}{2x + 3}$$

អារ Dr (x)

$$Dr = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

$$\therefore Dr = R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

អារ Rr (y)

$$Rr = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

$$Rr = R - \left\{\frac{6}{2}\right\}$$

$$\therefore Rr = R - \{3\}$$

$$f(x) = \frac{8x + 4}{7x - 5}$$

អារ Dr (x)

$$Dr = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

$$Dr = R - \left\{-\frac{(-5)}{7}\right\}$$

$$\therefore Dr = R - \left\{\frac{5}{7}\right\}$$

អារ Rr (y)

$$Rr = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

$$\therefore Rr = R - \left\{\frac{8}{7}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

តើសេវាដែងទៀតមែនត្រូវបាន 0

អារ Dr (x)

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$\sqrt{x^2} \neq \sqrt{1}$$

$$x \neq \pm 1$$

$$\therefore Dr = R - \{-1, 1\}$$

អារ Rr (y)

$$y(x^2 - 1) = x$$

$$yx^2 - y = x$$

$$yx^2 - x - y = 0$$


---

ករណី  $y = 0$

$$(0)x^2 - (0) - x = 0$$

$$0 = x$$


---

ករណី  $y \neq 0$

ឯកសूទ្ធតែ :  $ax^2 + bx + c , x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$a = y, b = -1, c = -y$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(y)(-y)}}{2(y)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}$$

$$\therefore Rr = R$$

Rr ត្រូវបាន R ពេលវេលា :  $1 + 4y^2 > 0$

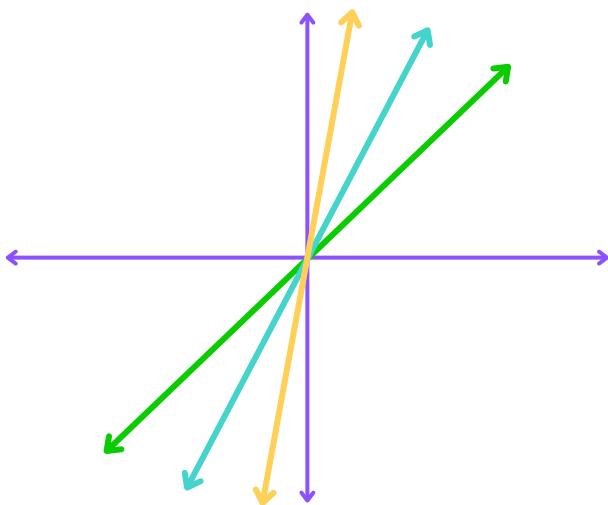
តើសេវាដែងទៀតមែនត្រូវបាន 0

ហេចីមិនឹងហេនន័ងប៉ះ  
នៃការសំណើនៅក្នុងការការពារ  
ក្នុងការការពារ

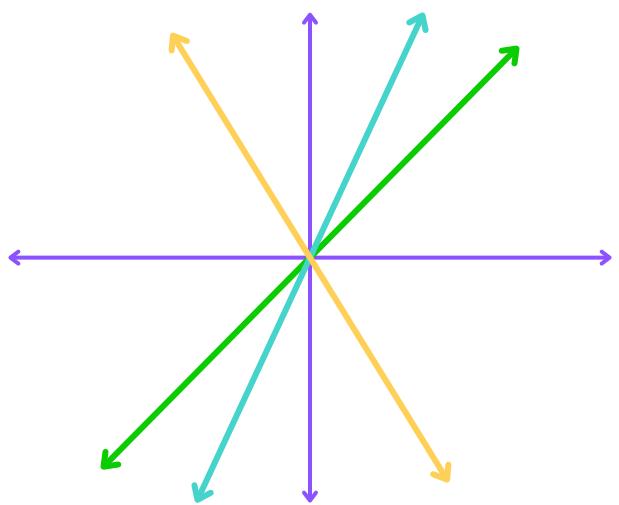
$$ax^2 + bx + c , \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

# LINEAR FUNCTION

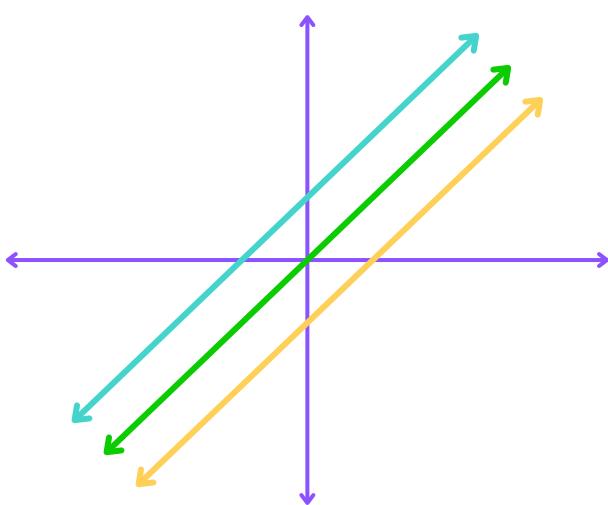
$$y_1 = x , \quad y_2 = 3x , \quad y_3 = 6x$$



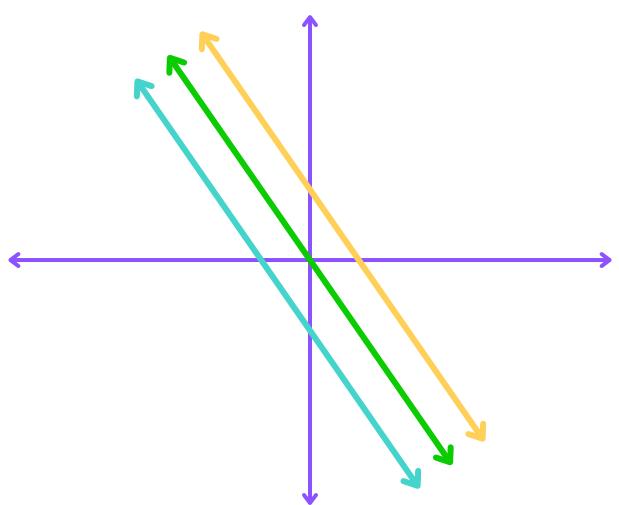
$$y_1 = x , \quad y_2 = 3x , \quad y_3 = -3x$$



$$y_1 = x , \quad y_2 = x - 1 , \quad y_3 = x + 1$$



$$y_1 = -3x , \quad y_2 = -3x - 1 , \quad y_3 = -3x + 1$$



ດ້າວເຈວໂຈກຍິແນວໆ ວ່າ  $(x,y)$  ນີ້ຍູ່ໃນກຣາຟມັ້ງຈາກສມກາຣ ເຊັບ

ຄູ່ວັນດັບນີ້ຍູ່ບໍນແກນຮອບໄມ  $(2, 1)$  ໃນສມກາຣ  $2x - 3y = 6$

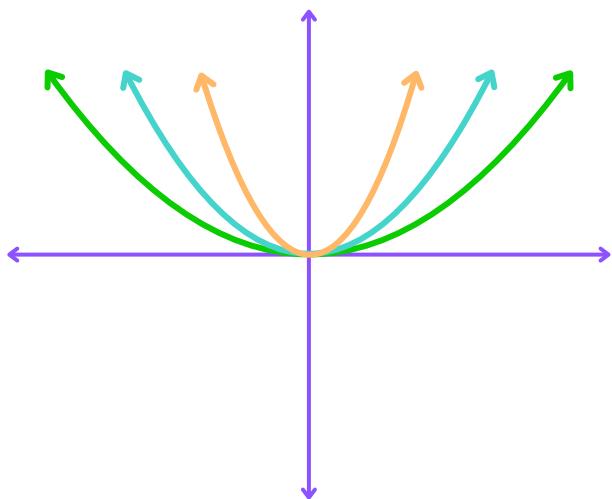
ໜາຄ່າ  $x$  ແກນຄ່າ  $y = 0$  ;  $2(2) - 3(0) = 6$  ; ຈຸດຕັດແກນ  $x$  ສຶກ  $(3, 0)$

ໜາຄ່າ  $y$  ແກນຄ່າ  $x = 0$  ;  $2(0) - 3y = 6$  ; ຈຸດຕັດແກນ  $y$  ສຶກ  $(0, -2)$

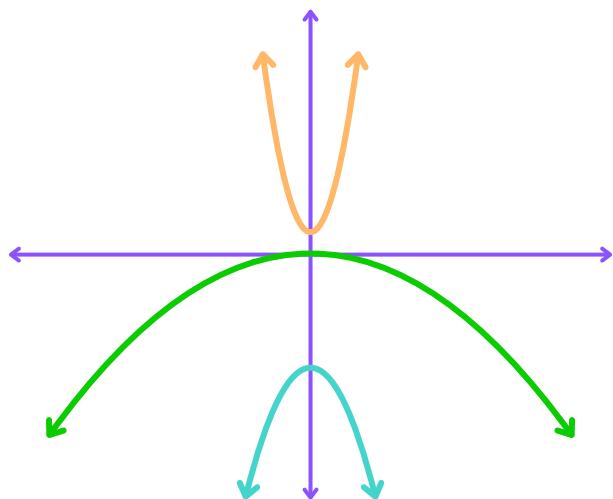
$\therefore (2, 1)$  ໄປອູ່ຍູ່ບໍນແກນ , ຈຸດທີ່ຍູ່ບໍນແກນສຶກ  $(3, 0)$  ແລະ  $(0, -2)$

# QUADRATIC FUNCTION

$$y_1 = 2x^2, \quad y_2 = 4x^2, \quad y_3 = 6x^2$$



$$y_1 = -2x^2, \quad y_2 = -4x^2 - 4, \quad y_3 = 8x + 3$$



ถ้าเจอโจทย์สมการพาราโบลาให้นึกถึงสูตรให้ได้และต้องแก้สมการตามสูตร  
อย่าลืมว่า  $(x,y) = (h,k)$

สมมุติว่าเจอโจทย์  $4(x-1)^2 - 1 = 0$  ก็จะตรงกับสูตร  $a(x-h)^2 + k$

จะได้ค่าตอบว่า สมการนี้เป็นกราฟหมายที่จุดต่ำสุดคือ  $(1,-1)$

สมมุติว่าเจอโจทย์  $x^2 - 10x + 25 = 0$  ก็จะตรงกับสูตร  $ax^2 + bx + c, \frac{-b}{2a}$   
 $\frac{-(-10)}{2(1)} = 5$

จะได้ค่าตอบว่า สมการนี้เป็นกราฟหมายที่จุดต่ำสุดคือ  $(5,0)$

ถ้าต้องหา  $Dr$  และ  $Rr$

$$y = x^2 - 8x + 54$$

หา  $Dr (x)$

$$\therefore Dr = R$$

จะบลลงนิตเตี้ยง  
ใจเย็นๆ นะ

หา  $Rr (y)$

แก้สมการหาค่า  $x$  ก่อน

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)}$$

$$x = 4$$

แทนค่า  $x$  ในสมการ

$$y = 4^2 - 8(4) + 54$$

$$y = 16 - 32 + 54$$

$$y = 38$$

$$\therefore Rr = [38, \infty)$$

ถ้าต้องหา  $Dr$  และ  $Rr$  และต้องจัดสมการด้วย

$$y = (x + 2)(x + 3) \text{ จัดสมการให้เป็น } y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^2 + 5x + 6$$

(มาจาก การคูณ AA AB BA BB)

หา  $Dr$  ( $x$ )

$$\therefore Dr = R$$

จะส่องบนระนาบเว้ย  
ตั้งใจอ่านหนังสือบน

หา  $Rr$  ( $y$ )

แก้สมการหาค่า  $x$  ก่อน

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(1)}$$

$$x = \frac{-5}{2}$$

แทนค่า  $x$  ในสมการ

$$y = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{-5}{2}\right) + 6$$

$$y = \frac{25}{4} - \frac{25}{2}\left(\frac{2}{2}\right) + 6\left(\frac{4}{4}\right)$$

$$y = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore Rr = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$$

## MATH PROBLEMS

เดวารเตะบอลขึ้นไปในแนวตั้ง ความสูงหน่วยเป็นฟุต ลูกบอลกีดูกเตะขึ้นไปคำนวณได้จากสูตร

$$f(x) = 27x - 6x^2 \quad x \text{ แทนเวลาหน่วยวินาที(s)}$$

จงเขียนกราฟเมื่อ  $0 \leq x \leq 4.5$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-27}{2(-6)}$$

$$x = \frac{-27}{-12}$$

$$x = \frac{9}{4} = 2.25s$$

แทนค่า  $x$  ในสมการ

$$f(x) = 27\left(\frac{9}{4}\right) - 6\left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{243}{4} - \frac{486}{16}$$

$$f(x) = \frac{972}{16} - \frac{486}{16} = 30.375'$$

ลูกบอลอยู่กี่จุดสูงสุดตอนไหน

$$x = 2.25s$$

ลูกบอลใช้เวลานานเท่าไหร่ถึงจะตกลงพื้น

$$f(x) = 0$$

$$0 = 27x - 6x^2$$

$$0 = x(27 - 6x)$$

จัดให้มี

$$27 - 6x = 0$$

$$27 = 6x$$

$$\frac{27}{6} = x$$

$$x = 4.5s$$



## โจทย์หินขึ้นไปในแนวเดิ่ง ความสูงหน่วยเป็นฟุต ลูกบอลที่ถูกเตะขึ้นไปคำนวณได้จากสูตร

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \text{ แทนเวลาหน่วยวินาที(s)}$$

ก้อนหินอยู่ที่จุดสูงสุดตอนไหน

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-2}{-2}$$

$$x = 1\text{s}$$



ที่จุดสูงสุดก้อนหินอยู่ที่ความสูงเท่าไหร่

แทน x เป็น 1

$$\begin{aligned} f(x); f(1) &= -(1)^2 + 2(1) + 2 \\ &= -1 + 2 + 3 \\ &= 4' \end{aligned}$$

ก้อนหินใช้เวลานานเท่าไหร่จะตกลงพื้น

$$f(x) = 0$$

คุณ -1 กั้งสมการเพื่อให้ตัวหน้าติดลบ

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$(x - 3) = 0$$

$$x = 3$$

$$(x + 1) = 0$$

$$x = -1$$

เวลาติดลบไม่ได้

∴ ก้อนหินจะใช้เวลา 3 วินาทีจึงจะตกลงพื้น

∴ ก้อนหินจะอยู่ที่จุดสูงสุดตอน 1 วินาทีความสูง 4'

บริษัทผลิตของเล่นมีต้นทุนการผลิต x ชิ้นเท่ากับ  $\frac{1}{2}x^2 - 30x - 100$  บาท

โดยจะขายชิ้นละ 170 บาท ถ้าต้องการให้ได้กำไรสูงสุดต้องขายกันหมดกี่ชิ้น

กำไร = ราคาขาย - ต้นทุน

$$f(x) = 170x - (\frac{1}{2}x^2 - 30x - 100)$$

$$f(x) = 170x - \frac{1}{2}x^2 + 30x + 100$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 200x + 100$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 200, c = 100$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-200}{2(-\frac{1}{2})}$$

$$x = \frac{-200}{-1} = 200$$

∴ จะต้องขายของ 200 ชิ้น



ป้าสมรซื้อรถราคาร 2,000,000 บาท เมื่อใช้งานไป 8 ปี รถจะมีราคา 1,450,000 บาท  
จงเขียน f(x) เมื่อเวลาผ่านไป x ปี

$$f(x) = x \frac{(2,000,000 - 1,450,000)}{8}$$

$$f(x) = x \frac{(550,000)}{8}$$

$$f(x) = x(68,750)$$

ตอบส่วนทำให้ได้ =  
บังคับเลย

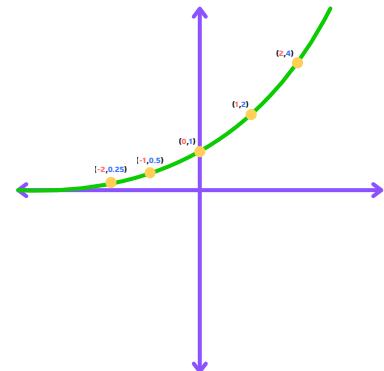
# EXPONENTIAL

$$y = 2^x$$

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

ถ้า  $0 < a < 1$  พังก์ชั่นลด

$$y = a^x$$

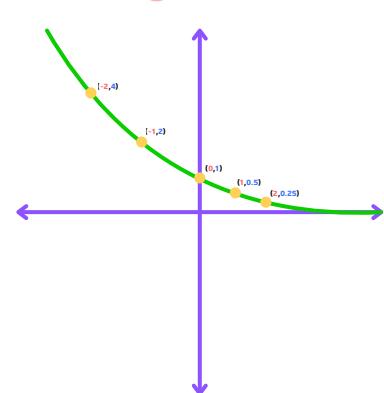


$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ถ้า  $a > 1$  พังก์ชั่นเพิ่ม

$$y = a^x$$



ยิ่ง a มีค่ามาก กราฟจะยิ่งแแคบ

## การแก้สมการ Exponential

จัดให้ออยู่ในรูปเดียวกัน  $a^x = a^y$  จะได้  $x = y$

$$3^x = 243$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x = 2,401$$

$$2^{x-1} = 256$$

$$3(5)^x = 1,875$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} = \left(\frac{81}{16}\right)^x$$

$$3^x = 3^5$$

$$7^{-x} = 2,401$$

$$2^{x-1} = 2^8$$

$$5^x = \frac{1875}{3}$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-x+1} = \left(\frac{9}{4}\right)^{2x}$$

$$x = 5$$

$$7^{-x} = 7^4$$

$$x - 1 = 8$$

$$5^x = 625$$

$$-x + 1 = 2x$$

$$-x = 4$$

$$x = 9$$

$$5^x = 5^4$$

$$1 = 3x$$

$$x = 4$$

$$x = 4$$

$$x = 4$$

$$\frac{1}{3} = x$$

คลิปการสอน (ใน YouTube) คร่าวๆ ไปดูได้ สอนเข้าใจ



Exponential  
คลิปสอน



Parabola  
คลิปสอน



Absolute  
คลิปสอน



Function  
คลิปสอน



Linear  
คลิปสอน



Inequality  
คลิปสอน

ດោរានໃនអុងស៊ែវចំបៀនអ្នក 50 - 82 មេងប



ទីមេងហើយ  
ការិតាតីគុះ!