

به نام خدا

بخش عملی پروژه درس فرایندهای تصادفی

اعضای گروه:

98108651 مریم عسگری نژاد

98110402 پوریا صفائی

99171366 آرن گل عزیزیان



توضیح فایل‌ها، کلاس‌ها و توابع موجود در پروژه:

PivotSampler:

این بخش از پروژه پیاده سازی الگوریتم **pivot MCMC** برای نمونه گیری تصادفی از یک قدم زن ناخود متقاطع است.

Distance:

این بخش امید ریاضی فاصله یک قدم زن با طول n از مبدا را با کمک نمونه گیری تصادفی به دست می‌آورد. همینطور در این فایل یک تابع برای تخمین زدن مقدار v مربوط به بخش الف وجود دارد.

Turns:

این تابع برای تخمین تعداد تغییر جهت‌های یک قدم زن تصادفی است (مربوط به سوال ب)

BisectorIntersect:

این کلاس برای پیدا کردن تخمین تعداد برخوردهای یک قدم زن با نیم‌سازهای مختصات است. (بخش ج)

CircleHit:

این کلاس برای پیدا کردن تعداد برخوردهای قدم زن با یک دایره به شعاع z است. همچنین در این کلاس یک تابع برای رسم نمودار برای z های مختلف وجود دارد.

Sampler:

این کلاس صرفاً برای نمونه گیری "شبه تصادفی" یک حرکت قدم زن است و در جای خاصی هم استفاده نشده است.

*مابقی فایل‌ها و توابع برای سهولت استفاده از پروژه است. (مثلاً ذخیره نتایج در فایل یا تولید سمپل‌های تصادفی بیشتر با توجه به داده‌های تولید شده **Pivot MCMC** با الگوریتم‌های مختلف)

*در ضمن فایل سمپل هایی که ساختیم بسیار حجیم بودند (یک میلیون رکورد برای هر n) برای همین آنها را نتوانستیم در پروژه قرار دهیم.

Name	Date modified	Type	Size
10_steps_samples.txt	6/26/2023 2:59 AM	Text Document	87,468 KB
20_steps_samples.txt	6/26/2023 2:59 AM	Text Document	175,340 KB
50_steps_samples.txt	6/26/2023 3:00 AM	Text Document	459,296 KB
100_steps_samples.txt	6/26/2023 3:02 AM	Text Document	961,796 KB
200_steps_samples.txt	6/26/2023 3:07 AM	Text Document	1,994,809 KB
500_steps_samples.txt	6/26/2023 6:45 AM	Text Document	5,177,678 KB
1000_steps_samples.txt	6/26/2023 4:12 AM	Text Document	10,815,808 KB

بخش الف)

برای محاسبه v ، دقت کنید که اگر v در رابطه‌ی ذکر شده صدق کند، پس اگر ما بتوانیم یک تخمین برای فاصله برای یک قدم زن به طول $2n$ به دست آوریم سپس یک تخمین هم برای فاصله برای یک قدم زن به طول n به دست آوریم و حاصل را بر هم تقسیم کنیم، آنگاه حاصل به دست آمده خود یک برآوردگر نمایی با پایه 2 برای مقدار v می‌باشد. حال اگر از این مقدار لگاریتم 2 بگیریم، تخمینی برای مقدار v پیدا خواهیم کرد. در عکس زیر این تخمین را برای حالتی که $n = 50$ است مشاهده می‌کنید و میتوان نتیجه گرفت با دقت بالایی مقدار v برابر با 0.75 یا همان $3/4$ است.

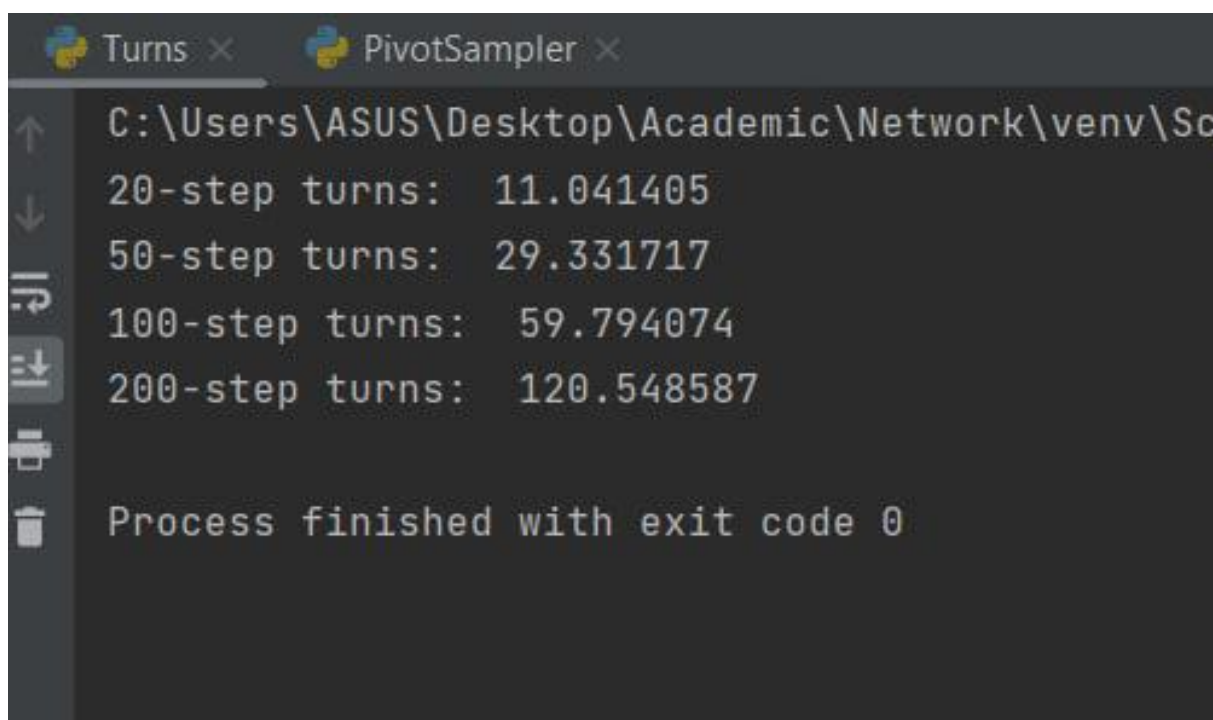
```

Run: Distance x
C:\Users\ASUS\Desktop\Academic\Network\ven
sample loaded!
sample loaded!
Estimated v = 0.749983672754533
Process finished with exit code 0

```

بخش ب)

با توجه به فایل Turn، مقدار تغییر جهت‌های قدم زن را برای مقادیر مختلف n تخمین می‌زنیم. همانطور که در تصویر هم قابل مشاهده است، میتوان نتیجه گرفت که تعداد تغییر مسیرهای قدم زن با دقت بسیار بالایی به عدد $0.6n$ میل میکند.



```
C:\Users\ASUS\Desktop\Academic\Network\venv\Sc
20-step turns: 11.041405
50-step turns: 29.331717
100-step turns: 59.794074
200-step turns: 120.548587

Process finished with exit code 0
```

قسمت ج)

دقت کنید که بنابر تقارن، امید ریاضی تعداد برخوردها با نیمساز ربع اول و سوم برابر است با تعداد برخوردها با نیمساز ربع دوم و چهارم.

آزمایش زیر هم این موضوع را ثابت میکند که به طور متوسط نصف تعداد برخوردها در کل نمونه ها، مربوط به نیم ساز ربع اول و سوم و نصف دیگر مربوط به نیم ساز ربع دوم و چهارم است. (درایه دوم آرایه درصد برخوردها در کل با نیم ساز اول را بیان میکند)

```
BisectorIntersec X
C:\Users\ASUS\Desktop\Academic\Network\venv\Scripts\python.exe
128-step bisector intersections: [4.9837, 0.50334]
256-step bisector intersections: [6.40216, 0.5014]
512-step bisector intersections: [9.01078, 0.4968]
1024-step bisector intersections: [10.95963, 0.50775]
Process finished with exit code 0
```

پس امید ریاضی تعداد برخوردها با هر دو نیمساز برابر است با دو برابر امید ریاضی تعداد برخوردها با نیم ساز ربع اول و سوم. ولی این بدین معنی نمیباشد که حتما این مقدار یک عدد زوج است. چرا که امید ریاضی تعداد برخوردها با یکی از نیمسازها لزوما عدد صحیحی نمیباشد. البته دقت داده های مربوط به تعداد برخوردها در تصویر بالا پایین است. تصویر زیر تعداد برخوردها با نیمسازها را برای n های مختلف با یک میلیون نمونه حساب میکند:

```
BisectorIntersec X
C:\Users\ASUS\Desktop\Academic\Network\venv\Scr
50-step bisector intersections: 3.77344
100-step bisector intersections: 4.97849
200-step bisector intersections: 6.424902
```

همانطور هم که میتوان مشاهده کرد، به نظر میرسد نتیجه هر مرحله مقداری در اردر $O(\log n)$ میباشد. (با توجه به تخمین قبلی برای $n=1000$ ، به نظر میرسد برای n های بزرگ که دنباله هندسی هستند، تعداد برخوردها از یک تابع لگاریتمیک بر حسب n پیروی میکنند)

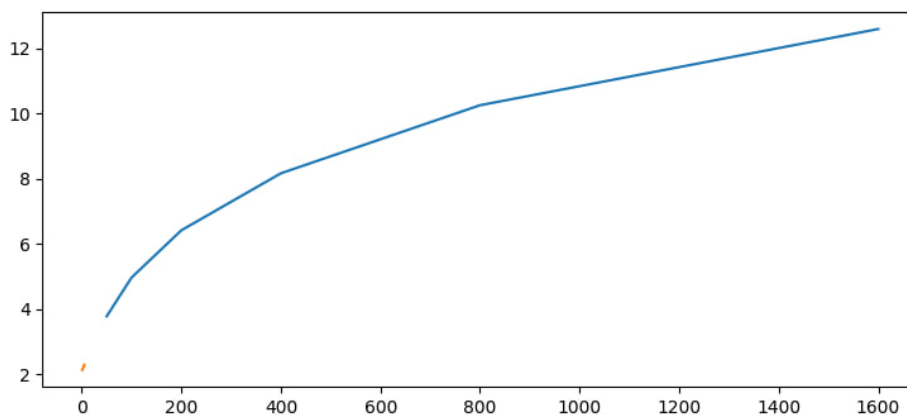
چند نمونه دیگر:

```
BisectorIntersec x
C:\Users\ASUS\Desktop\Academic\Network\venv\Sc
sample generated!
400-step bisector intersections: 8.17121
```

```
BisectorIntersec x
C:\Users\ASUS\Desktop\Academic\Network\venv\Sc
sample generated!
800-step bisector intersections: 10.26251
Process finished with exit code 0
```

```
BisectorIntersec x
C:\Users\ASUS\Desktop\Academic\Network\venv\Sc
sample generated!
1600-step bisector intersections: 12.59262
Process finished with exit code 0
```

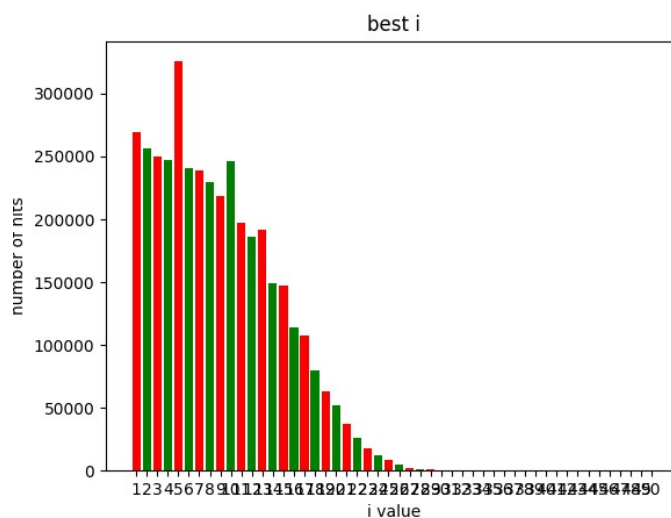
نمودار برخوردها بر حسب n :



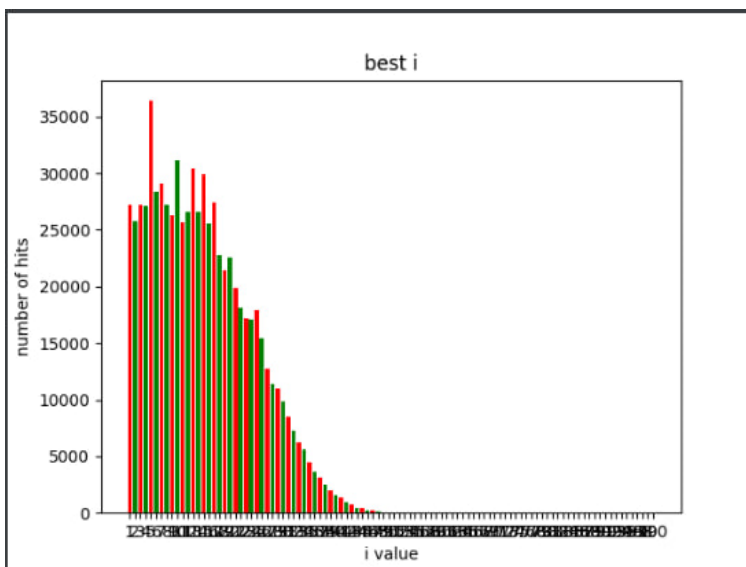
قسمت د)

به کمک فایل CircleHit، مقادیر را برای تعدادی از n های مختلف حساب میکنیم. با توجه به نمودارهای رسم شده، به نظر میرسد که رفتار نمودار به گونه‌ای است که قله‌ی نمودار از در محدوده‌ای از i در $O(\sqrt{n})$ قرار دارد. ($n=1000$ در صفحه بعد)

$n = 50$:



$N = 100$:



N = 1000:

