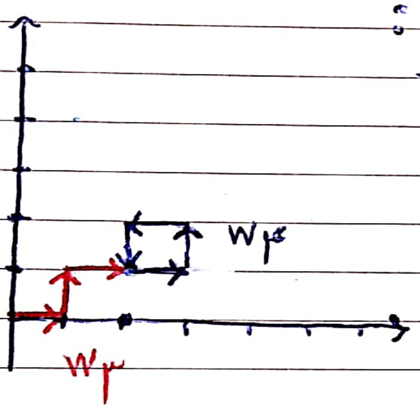
پروژه گشت‌های تصادفی — سوالات تئوری

الف) اگر یک مسیر ناخودمتقاطع به طول m+n را W_{m+n} بنامیم آنگاه می‌دانیم هر W_{n+m} از اتصال یک W_n به یک W_m ساخته می‌شود اما لزوما اتصال هر W_n به هر یک W_m ، W_{m+n} ایجاد نمی‌کند. مثال:

W_3 و W_4 را به صورت زیر در نظر بگیرید:



مشاهده می‌کنیم که ممکن است اتصال یک W_m به یک W_n منجر به مسیر ناخودمتقاطع به طول n+m نشود.

ولی چون هر مسیر ناخودمتقاطع به طول n+m از اتصال ۲ مسیر ناخودمتقاطع به طول های m و n ایجاد می‌شود پس $S_{n+m} \subseteq S_n \times S_m$ اما $S_n \times S_m \not\subseteq S_{n+m}$

که در آن S_{n+m} مجموعه کل مسیرهای ناخودمتقاطع به طول n+m است و S_n و S_m به ترتیب مجموعه کل مسیرهای ناخودمتقاطع به طول های m و n هستند

$S_n \times S_m$ مجموعه‌ی همه‌ی مسیرهایی است که از اتصال یک مسیر ناخودمتقاطع به طول m به یک مسیر ناخودمتقاطع به طول n ایجاد شده است. پس:

$$|S_{mn}| \leqslant |S_n| \times |S_m| \Longrightarrow C_{mn} \leqslant C_m \cdot C_n$$

ب) ابتدا یک لم را بیان کرده و آن را اثبات می‌کنیم.

لم Feket: اگر a_n یک دنباله زیرجمعی باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ وجود دارد و مساوی $\inf \frac{a_n}{n}$ می‌باشد.

اثبات: می‌دانیم $a_n \in R$ زیرا $C_n > 0$ پس $a_n = \log C_n \in R$ می‌باشد.

فرض کنیم $L = \inf \frac{a_n}{n}$ باشد. بنابراین هر $\varepsilon > 0$ عدد k موجود

دارد طوری که $\frac{a_k}{k} < L + \varepsilon$ و $k \geq 1$. (طبق تعریف inf)

بنابراین هر $n > k$، طبق الگوریتم تقسیم می‌دانیم اعداد صحیح p_n و q_n

موجود دارند به گونه‌ای که $n = p_n k + q_n$ و $0 \leq q_n \leq k-1$ باشد.

حال طبق خاصیت زیرجمعی داریم:

$$a_n = a_{p_n k + q_n} \leq a_{p_n k} + a_{q_n} \leq p_n a_k + a_{q_n}$$

$$\xRightarrow{\text{تقسیم بر } n} \frac{a_n}{n} \leq \frac{p_n a_k}{n} + \frac{a_{q_n}}{n} = \frac{p_n k}{n}\,\frac{a_k}{k} + \frac{a_{q_n}}{n}$$

ازآنجاکه $p_n k \leq n$ است پس اگر $n \to \infty$ برود چون اختلاف

$p_n k$ و n حداکثر به اندازه $k-1$ است (q_n) پس:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n k}{n} = 1 \quad (\mathrm{I})$$

از طرفی اگر $B = \max\limits_{1 \le i \le k-1} a_i$ باشد آنگاه B یک مقدار متناهی است

و $a_{q_n} \le a_i$ پس a_{q_n} هم متناهی است پس:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{q_n}}{n} = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}), (\mathrm{II}) \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} \le 1 \times \frac{a_k}{k} + 0 = \frac{a_k}{k} < L + \varepsilon$$

حال چون به ازای هر $\varepsilon > 0$ این k وجود داشت پس $\varepsilon \to 0$ میل

می‌دهیم داریم:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n}{n} = L$$

پس چون a_n یک دنباله زیرجمعی است طبق لم Fekete حد گفته

شده درمورد آن وجود دارد.

اثبات همگرایی $(C_n)^{\frac{1}{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log C_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \log (C_n)^{\frac{1}{n}}$$

در قسمت قبل ثابت کردیم که این حد وجود دارد.

چون تابع نمایی $(\exp)$ پیوسته است پس اگر $\lim_{n\to\infty} \log(C_n)^{\frac{1}{n}}$

وجود داشته باشد $\lim_{n\to\infty} \exp(\log(C_n)^{\frac{1}{n}})$ هم وجود دارد پس :

$$\lim_{n\to\infty} \exp(\log(C_n)^{\frac{1}{n}}) = \lim_{n\to\infty} (C_n)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow$$ وجود دارد

پس همگراست.

* در اینجا فرض کردیم $\log$ در مبنای e است. اگر در مبنای هر عدد دیگری جز e باشد

(اصل) چون x^n پیوسته است پس $\lim_{n\to\infty} x^{(\log_x (C_n)^{\frac{1}{n}})} = \lim_{n\to\infty}(C_n)^{\frac{1}{n}}$

وجود دارد پس $(C_n)^{\frac{1}{n}}$ همگراست.

ج) نشان دهید $c_n \geq 2^n$ و از آن نتیجه بگیرید $\mu \geq 2$.

برای اینکه نشان دهیم $c_n \geq 2^n$ ، باید ثابت کنیم که 2^n یک کران پایین برای تعداد قدم زن های ناخود متقاطع به طول n میباشد: اگر بین تمام قدم زن ها فقط آنهایی را در نظر بگیریم که به سمت جهت مثبت محور حرکت میکنند (بالا یا راست)، تعداد این قدم زن ها در صفحه Z^2 برابر با 2^n میباشد. چرا که در هر قدم دو گزینه دارد (بالا و راست) و تعداد کل قدم ها n میباشد. ■

$$c_n \geq 2^n \xrightarrow[2^n > 0]{c_n > 0} \ln c_n \geq \ln 2^n \longrightarrow \ln c_n \geq n \ln 2$$

$$\longrightarrow \frac{1}{n} \ln c_n \geq \ln 2 \longrightarrow \ln c_n^{\frac{1}{n}} \geq \ln 2$$

باتوجه به اینکه تابع نمایی اکیداً صعودی است داریم:

$$e^{\ln c_n^{\frac{1}{n}}} \geq e^{\ln 2} \rightarrow c_n^{\frac{1}{n}} \geq 2 \rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n^{\frac{1}{n}} \geq 2$$

$$\rightarrow \mu \geq 2 \quad \blacksquare$$

د) نشان دهید $c_n \leq 4.3^{n-1}$ و از آن نتیجه بگیرید که $\mu \leq 3$.

در واقع باید ثابت کنیم که 4.3^{n-1} کران بالایی برای تعداد قدم زن های ناخودمتقاطع به طول n می باشد: اگر مجموعه قدم زن هایی را که هیچ (قدم هایی که به نقطه قبلی برمیگردد.) immediate reversal ندارند در نظر بگیریم، شامل همه SAW ها می شود. تعداد اعضای این مجموعه برابر با 4.3^{n-1} می شود. چرا که در نقطه ابتدایی در ۴ جهت می تواند قدم بردارد و در $n-1$ قدم بعدی در سه جهت میتواند قدم بردارد: $4 \times 3^{n-1}$ $\blacksquare$

$$c_n \leq 4 \times 3^{n-1} \longrightarrow \ln c_n \leq \ln 4 + \ln 3^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{n}} \frac{1}{n} \ln c_n \leq \frac{1}{n} \ln 4 + \frac{1}{n} \ln 3^{n-1}$$

$$\longrightarrow \ln c_n^{\frac{1}{n}} \leq \ln 4^{\frac{1}{n}} + \ln 3^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\xrightarrow{e} e^{\ln c_n^{\frac{1}{n}}} \leq e^{\left(\ln 4^{\frac{1}{n}} + \ln 3^{\frac{n-1}{n}}\right)} = e^{\ln 4^{\frac{1}{n}}} \times e^{\ln 3^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$\longrightarrow c_n^{\frac{1}{n}} \leq 4^{\frac{1}{n}} \times 3^{\frac{n-1}{n}}$$

حال اگر $n \to \infty$ میل بدیم داریم:

$$\lim_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{n-1}{n}} = 3$$

پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{\frac{1}{n}} = \mu \leq 3 \qquad \blacksquare$$

۵) نشان دهید $2 < \mu < 3$.

اثبات $2 < \mu$:

$$c_n \geq 2^n > 2^{n-1} \rightarrow c_n > 2^{n-1} \rightarrow \ln c_n > \ln 2^{n-1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{n} \ln c_n > \frac{1}{n} \ln 2^{n-1} \rightarrow \ln c_n^{\frac{1}{n}} > \ln 2^{\frac{n-1}{n}}$$

$\xrightarrow{e} e^{\ln c_n^{\frac{1}{n}}} > e^{\ln 2^{\frac{n-1}{n}}} \to c_n^{\frac{1}{n}} > 2^{\frac{n-1}{n}}$

حال اگر $n \to \infty$ میل بدیم داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{n-1}{n}} = 2$

پس داریم:

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n^{\frac{1}{n}} > 2 \to \mu > 2$ ■

اثبات $\mu < 3$:

$c_n \leq 4 \times 3^{n-1} < 4 \times 3^n \to c_n < 4 \times 3^n$

$\to \ln c_n < \ln 4 + \ln 3^n \to \frac{1}{n} \ln c_n < \frac{1}{n} \ln 4 + \ln 3$

$\to \ln c_n^{\frac{1}{n}} < \ln 4^{\frac{1}{n}} + \ln 3$

$\to e^{\ln c_n^{\frac{1}{n}}} < e^{\ln 4^{\frac{1}{n}}} \times e^{\ln 3} \to c_n^{\frac{1}{n}} < 4^{\frac{1}{n}} \times 3$

حال اگر $n \to \infty$ میل بدیم داریم:

$\lim\limits_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{n}} = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$

$\to \lim\limits_{n\to\infty} c_n^{\frac{1}{n}} < 3 \to \mu < 3$ ■

۹) مقدار حدی $\frac{c_n}{s_n}$ را محاسبه کنید.

با توجه به اینکه s_n تعداد قدم زدن های معمولی به طول n میباشد پس داریم:

$$s_n = 4^n$$

چرا که n قدم داریم و در هر قدم به ۴ جهت میتوانیم حرکت کنیم. با توجه به اینکه $c_n \leqslant 4 \times 3^{n-1}$ داریم:

$$0 \leqslant c_n \leqslant 4 \times 3^{n-1} \to 0 \leqslant \frac{c_n}{4^n} \leqslant \frac{4 \times 3^{n-1}}{4^n}$$

$$\to 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{4^n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{4 \times 3^{n-1}}{4^n}$$

حال با توجه به اینکه $\lim \frac{4 \times 3^{n-1}}{4^n} = \lim \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$ داریم:

$$0 \leqslant \lim \frac{c_n}{4^n} \leqslant 0 \to \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{s_n} = 0$$

که این یعنی با افزایش تعداد قدم ها، احتمال

Date No

کمتری برای پیدا کردن SAW وجود دارد، به طوری که در $n \to \infty$ ، احتمال وجود SAW به صفر میل میکند.