

به نام خداوند هستی بخش



طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها – تمرین شماره ۱

نیمسال دوم، ۹۴-۹۵

به نکته‌های زیر توجه کنید:

- تلاش کنید الگوریتمی با کمترین پیچیدگی زمانی و حافظه مصرفی به دست آورید.
- پیچیدگی زمانی و پیچیدگی حافظه مصرفی الگوریتم خود را به دست آورید.
- درستی همه‌ی الگوریتم‌ها نیاز به اثبات دقیق دارند. همچنین هر گام از الگوریتم باید به قدری شرح داده شود که پیاده سازی آن روشن باشد.
- اگر همانندی بین دو برگه بیش از اندازه باشد، به شدت برخورد می‌شود.

پرسش یکم:

n اسکی‌باز و n چوب اسکی داریم. طول قد اسکی‌بازها (H_i) و چوب‌های اسکی (S_i) متفاوت است. الگوریتمی ارایه دهید که به هر اسکی‌باز یک چوب اسکی نسبت دهد به طوری که مجموع اختلاف طول چوب اسکی هر اسکی‌باز با درازای قد او کمینه شود. یعنی اگر S_i به اسکی‌باز H_{j_i} نسبت داده شده باشد، باید مقدار $\sum |S_i - H_{j_i}|$ کمینه شود.

پرسش دوم:

n کار داریم که اجرای کار i ام نخست نیازمند S_i ثانیه از زمان یک ابررایانه و پس از پایان این بخش، نیازمند p_i ثانیه از زمان یک رایانه‌ی معمولی است. یک ابررایانه و بیشمار رایانه‌ی معمولی داریم که می‌توانند همزمان کار کنند. الگوریتمی ارایه دهید که ترتیبی برای اجرای کارها بدهد که همه‌ی کارها در کمترین زمان اجرا شوند.

پرسش سوم:

الف) در پرسش زمان‌بندی کارها (تعدادی بازه) روی یک ماشین، فرض کنید هر کار باید هر روز اجرا شود، یعنی هر کار زمان آغاز S_i و پایان f_i دارد و اگر آن کار برای اجرا برگزیده شود، باید هر روز در زمان S_i آغاز شود و هیچ کار دیگری قبل از زمان f_i نمی‌تواند آغاز شود. به عنوان مثال یک کار ممکن است ساعت ۱۰ شب آغاز گردد و ۲ صبح پایان یابد و کار دیگری ۱ صبح آغاز و ۳ صبح تمام شود. چون این دو کار تداخل دارند، تنها یکی از آن‌ها می‌تواند برای اجرا انتخاب شود. برای اجرای کارها تنها یک ماشین داریم که شبانه روز می‌توانیم از آن استفاده کنیم. هدف اجرای بیشینه‌ی کارها بدون تداخل است. الگوریتمی برای حل این پرسش طراحی کنید و درستی آن را ثابت کنید.

ب) در پرسش بالا، فرض کنید عمق داده‌ی ورودی همیشه کمتر از ۱۰ است. (یادآوری: در پرسش بازه‌ها عمق برابر

بیشترین شمار کارهایی است که که همگی در یک زمان مشترک اند). نشان دهید که در این حالت الگوریتمی وجود دارد که در زمان $O(n \log n)$ می تواند پاسخ بهینه را بیابد.

پرسش چهارم:

گیرید X مجموعه‌ای n بازه بر روی محور اعداد حقیقی باشد. یک زیرمجموعه از بازه‌ها مانند Y که $Y \subseteq X$ را یک مجموعه‌ی پوشا می‌نامیم اگر بازه‌های درون Y ، بازه‌های درون X را بپوشانند. به بیان دیگر هر عدد حقیقی که درون یکی از بازه‌ها در X قرار دارد همچنین در یکی از بازه‌های Y باشد. اندازه‌ی یک مجموعه‌ی پوشا تعداد بازه‌های آن است. الگوریتمی ارایه دهید که کوچکترین مجموعه‌ی پوشا را برای X در کمترین زمان ممکن بدست آورد. فرض کنید به عنوان ورودی به شما دو آرایه‌ی $X_L[1..n]$ و $X_R[1..n]$ داده می‌شود که معادل نقاط انتهایی چپ و راست بازه‌ها در X است.

پرسش پنجم:

گیرید X مجموعه‌ای از n بازه بر روی محور اعداد حقیقی باشد. یک مجموعه‌ی P از نقطه‌ها X را میخ می‌کند؛ اگر هر بازه در X حداقل یکی از نقطه‌های P را دربرگیرد. الگوریتمی ارایه دهید که کوچکترین مجموعه را پیدا کند که X را میخ کند.

پرسش ششم:

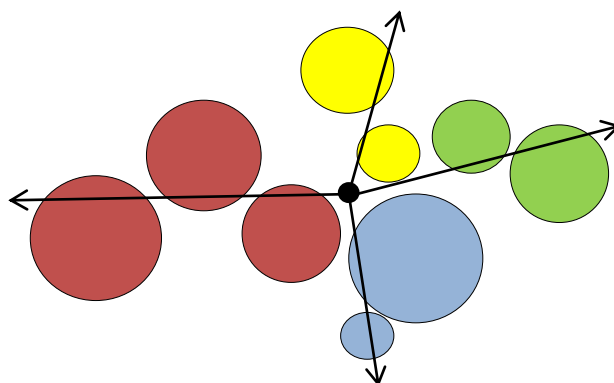
گیرید شما یک فروشنده در کشوری هستید که n گونه‌ی مختلف از سکه با ارزش‌های $1 = c_1 < c_2 < \dots < c_n$ دارد. قانونی در این کشور وجود دارد که می گوید باید در پس دادن مانده‌ی پول به مشتری از کمترین تعداد ممکن سکه استفاده شود.

الف) در کشور ایران از یک الگوریتم حریصانه‌ی ساده به این صورت استفاده می‌کنند که همیشه بزرگترین سکه را از مقدار پول کم می‌کنند و به طور بازگشتی بقیه‌ی پول را به همین صورت پرداخت می‌کنند. نشان دهید این الگوریتم همیشه کمترین تعداد سکه را بدست نمی‌آورد.

ب) نشان دهید اگر ارزش سکه‌ها به صورت $b^0, b^1, b^2, \dots, b^k$ برای b صحیح و بزرگتر از ۲، باشد. الگوریتم شرح داده شده در بخش الف پاسخ بهینه را به دست می‌آورد.

پرسش هفتم:

در «سرخ دره» یک مسابقه برگزار شده است، به این صورت که تعدادی بادکنک در اطراف مسابقه دهنده وجود دارد و او باید تمام بادکنک‌ها را بدون تکان خوردن از سر جایش بترکاند! تفنگی در اختیار شماست که گلوله‌های بسیار قوی دارد، یک گلوله - ی تفنگ شرکت کننده در یک خط مستقیم پیش می‌رود و هرچه بادکنک در مسیر آن باشد را می‌ترکاند. هرچقدر تعداد گلوله‌هایی که استفاده می‌کند کمتر باشد جایزه‌ی بیشتری می‌گیرد. به بیان دقیق تر مجموعه‌ای از n دایره در صفحه‌ی مختصات به شما داده می‌شود، هر کدام با یک شعاع r و مختصات مرکز آن به صورت (x, y) مشخص شده اند. شما در مرکز مختصات ایستاده‌اید. کمترین تعداد نیم‌خط‌های شروع شونده از مرکز را به دست آورید که از تمام دایره‌ها بگذرند.



الف) فرض کنید نیم خطی شروع شونده از مرکز وجود دارد که هیچ بادکنکی را قطع نمی کند. یک الگوریتم حریصانه برای حل این پرسش ارایه دهید.

ب) الگوریتمی ارایه دهید که پاسخی با حداکثر خطای یک نسبت به پاسخ بهینه بدست آورد. یعنی اگر پاسخ بهینه m باشد، الگوریتم شما باید پاسخ m یا $m + 1$ بدست آورد.

پ) الگوریتمی ارایه دهید که پاسخ این پرسش را در $O(n^2)$ بیابد.

امتیازی: الگوریتمی ارایه دهید که پاسخ این پرسش را در $O(n \log n)$ بیابد.

فرض کنید که تابعی در اختیار شما قرار گرفته است که در زمان $O(1)$ مشخص می کند که یک نیم خط از یک دایره می گذرد یا خیر)

پرسش هشتم:

یک کوله پشتی با حجم C و n بسته به شما داده شده است. حجم بسته i ام را با S_i و ارزش آن را با V_i نشان می دهیم. می خواهیم تعدادی از بسته ها را در کوله پشتی قرار دهیم به شکلی که مجموع حجم آن ها کمتر از C باشد و مجموع ارزش آن ها بیشینه شود. فرض کنید A برابر با مجموع ارزش ها در حالت بهینه باشد. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ ارایه دهید که یک چیدمان از بسته ها با حجم حداکثر C و ارزش حداقل $\frac{A}{2}$ پیدا کند.

پرسش نهم:

مردم «سرخ دره» به تازگی یک استخر برای بازی کودکان ساخته اند. آن ها برای پر کردن استخر N منبع مختلف آب دارند. منبع i ام آب را با دمای G_i و نرخ R_i به درون استخر می ریزد. در آغاز تمام منابع ها خاموش اند و هر منبع تنها یک بار می تواند روشن شود و یک بار نیز خاموش گردد. عمل خاموش یا روشن کردن یک منبع هیچ زمان اضافه ای نمی گیرد. همچنین چند منبع می توانند همزمان روشن باشند. پژوهشگران دریافته اند برای این که کودکان هم از بازی لذت ببرند و هم کسی غرق نشود استخر باید در کمترین زمان ممکن دقیقاً با حجم V و با دمای X پر شود. کمترین زمان ممکن برای پر کردن استخر با شرایط بالا چیست؟

(فرض کنید اگر آبی با حجم V_0 و دمای X_0 با آبی با حجم V_1 و دمای X_1 در هم آمیخته شوند، آبی با حجم $V_0 + V_1$ و دمای $\frac{V_0 X_0 + V_1 X_1}{V_0 + V_1}$ پدید می آید. همچنین فرض کنید آب استخر تبادل گرمایی با پیرامون ندارد)

پرسش آخر – پیاده سازی:

پویا یک دستگاه بستنی سازی دارد که از k لوله ی موازی از آن بستنی خارج می شود. او باید n بستنی لیوانی برای یکی از مشتریان آماده کند. در ابتدا در لیوان های مختلف مقادیر متفاوتی از خوراکی های متنوع ریخته و سپس با استفاده از دستگاه بستنی سازی قصد دارد روی آن ها بستنی بریزد. مشکل این جاست که ارتفاع خوراکی های داخل لیوان های مختلف متفاوت است و مشتری از ابتدا تعیین کرده بود که به نسبت اندازه ی کمترین ارتفاع پر شده در بین بستنی های لیوانی به او پول پرداخت خواهد کرد. هم چنین پویا تنها قادر است m بار از دستگاه خود استفاده کند که هر بار از k لوله ی آن بستنی خارج شده و ارتفاع لیوان های زیر آن یک واحد افزایش می یابد. هدف پویا این است که در نهایت کمترین ارتفاع بستنی در لیوان ها بیشینه شود.

الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن اعداد n, m, k و لیستی از a_i ها که هر کدام نشان دهنده ی ارتفاع محتویات داخل لیوان i - ام قبل از ریختن بستنی داخل آن است، بیشترین مقداری که کمترین ارتفاع بستنی در لیوان ها می تواند داشته باشد را بدست آورد.

ورودی:

در اولین خط شامل اعداد صحیح n, m و k است که با فاصله از هم جدا شده اند. ($1 \leq k \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 10^5$)
سپس در خط دوم، اعداد صحیح a_1, a_2, \dots, a_n با فاصله از هم آمده اند. ($1 \leq a_i \leq 10^9$)

خروجی:

یک عدد صحیح که مقدار بیشترین ارتفاع برای کوتاه ترین بستنی است.

ورودی	خروجی
7 2 4 2 2 2 2 1 1 1	2
2 7 1 7 10	12

- برای تمرین‌های پیاده‌سازی هم در این مجموعه و هم در آینده، لازم است شناسه‌ای روی سایت [شیرکد \(Sharecode\)](#) ایجاد کنید که آدرس ایمیل آن شناسه دقیقاً همان آدرس ایمیلی باشد که بر روی سامانه‌ی دروس (CECM) در پروفایل خودتان تعیین کرده‌اید.
- به یاد داشته باشید که در صورت قبول (*accept*) نشدن پاسخ شما، نمره‌ای از سوال پیاده‌سازی نخواهید گرفت.