

به نام خداوند هستی بخش



طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها - تمرین شماره ۶ نیمسال دوم، ۹۴-۹۵

به نکته‌های زیر توجه کنید:

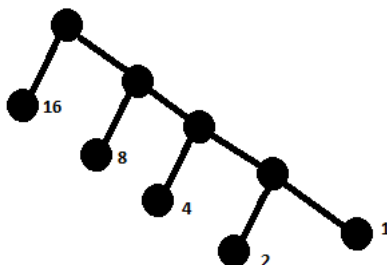
- تلاش کنید الگوریتمی با کمترین پیچیدگی زمانی و حافظه مصرفی به دست آورید.
- پیچیدگی زمانی و پیچیدگی حافظه مصرفی الگوریتم خود را به دست آورید.
- درستی همه‌ی الگوریتم‌ها نیاز به اثبات دقیق دارند. همچنین هر گام از الگوریتم باید به قدری شرح داده شود که پیاده سازی آن روشن باشد.
- اگر همانندی بین دو برگه بیش از اندازه باشد، برخورد می‌شود.

پرسش یکم:

چند نقطه روی یک صفحه داده شده است، می‌خواهیم با یک چند ضلعی ساده آن‌ها را به هم وصل کنیم. فرض کنید یک الگوریتم با $O(T)$ برای این کار ارائه شده است. (از جزئیات آن آگاه نیستیم) ثابت کنید می‌توان الگوریتم مرتب سازی اعداد را در $O(n + T)$ انجام داد. میدانیم مرتب سازی بر مبنای مقایسه را نمی‌توان با کمتر از $O(n \log n)$ انجام داد، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پرسش دوم:

کاهش (یک پرسش به دیگری) باید با دقت انجام شود. در این پرسش نمونه‌ای از شیوه‌ی نادرست کاهش را آورده ایم. می‌خواهیم نشان دهیم که پیچیدگی الگوریتم *Huffman encoding* که پیش‌تر دیده‌اید، از $\Omega(n \log n)$ است. مشاهده می‌شود که اگر درخت به طور کلی از توازن خارج شود، می‌تواند برای مرتب سازی به کار آید.



بنابراین ساختن یک درخت به سختی مرتب‌سازی است. و بدین ترتیب کران پایین $\Omega(n \log n)$ ثابت می‌شود. نادرستی اثبات بالا در کجاست؟

پرسش سوم:

پرسش زیر را که شکل دیگری از پرسش بیشینه تطابق گراف دوبخشی ست در نظر بگیرید: $2n$ دانش آموز می-خواهند در n دانشگاه پذیرفته شوند. گراف دوبخشی را در نظر بگیرید که دو بخش آن دانش آموزها و دانشگاهها هستند و یال بین یک دانش آموز و یک دانشگاه کشیده شده است اگر دانشگاه مورد نظر آن دانش آموز را بپذیرد. الگوریتمی پیدا کنید که شمار دانش آموزانی که پذیرفته می شوند بیشینه شود با این شرط که در هر دانشگاه حداکثر دو دانش آموز پذیرفته شوند. این پرسش را با کاهش به پرسش بیشینه تطابق دوبخشی حل کنید.

پرسش چهارم:

نشان دهید این پرسش $NP - complete$ است: یگ گراف $G = (V, E)$ و عدد صحیح k داده شده است، می خواهیم بدانیم آیا G زیر درخت فراگیری مانند T دارد به گونه ای که هر گره در T درجه ی کمتر یا برابر k داشته باشد.

پرسش پنجم:

نشان دهید این پرسش $NP - complete$ است: گراف بی جهت $G = (V, E)$ و عدد صحیح k داده شده است، می خواهیم بدانیم آیا G k گره دارد به گونه ای که زیر گراف القایی آن ها دور نداشته باشد.

پرسش ششم:

نشان دهید اگر یک الگوریتم چند جمله ای تقریبی وجود داشته باشد که بتواند هر گراف را با کمتر از $\frac{4}{3}$ کمترین تعداد رنگی که برای رنگ آمیزی آن نیاز است رنگ کند، آنگاه $P = NP$