PC Dérivation des fonctions d'une variable réelle

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$

I. Fonction dérivable

I.1. Définition

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable en $x_0 \in \mathcal{I}$, non bord de $\mathcal{I}$, si l'application $\varphi : \mathcal{I} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0 , limite notée $f'(x_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ ou $D(f)(x_0)$

théorème et développement limité à l'ordre 1 :

f dérivable en $x_0 \Longleftrightarrow \exists\ V \in \mathbb{R}^n \quad \forall\ x \in \mathcal{I} \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)V + o(x - x_0)$

Dans ce cas $V = f'(x_0)$

Corollaire : Si f dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 (réciproque fausse)

I.2. Dérivée à droite. Dérivée à gauche

définition : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable à droite (respectivement à gauche) en $x_0 \in \mathcal{I}^\circ$ si l'application

$$\begin{array}{rl} \varphi : \mathcal{I} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ x & \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

admet une limite finie à droite (respectivement à gauche) en x_0

limite notée $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$)

théorème : f dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(x_0)$=$f'_g(x_0)$

Corollaire : Si f dérivable à droite (respectivement à gauche) en x_0 alors f est continue à droite (respectivement à gauche) en x_0 (réciproque fausse)

I.3. Fonction dérivée

définition : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable sur $\mathcal{I}$ si $\forall\ x \in \mathcal{I} \quad f$ est dérivable en x

On note $\begin{array}{rl} f' : \mathcal{I} & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto f'(x) \end{array}$ la fonction dérivée de f

On note $\mathcal{D}(\mathcal{I},\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathcal{I}$

Si de plus f' est continue sur $\mathcal{I}$, on dit que f est de classe c^1 sur $\mathcal{I}$ et on note $\mathcal{C}^1(\mathcal{I},\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe c^1 sur $\mathcal{I}$

On a $\mathcal{C}^1(\mathcal{I},\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{I},\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}(\mathcal{I},\mathbb{R}^n)$ et toutes les réciproques sont fausses

I.4. Propriétés

1. linéarité : $f, g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dérivables en $x_0 \in \mathcal{I}$(respectivement sur $\mathcal{I}$) $\alpha \in \mathbb{K}$ alors

$\alpha f + g$ est dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$)

(ou $\mathcal{D}(\mathcal{I},\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathcal{I},\mathbb{R}^n)$)

et $(\alpha f + g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + g'(x_0)$

2. Composantes dans une base : $\begin{array}{rl} f : \mathcal{I} & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto (f_1(x), ... f_n(x)) \end{array}$ dérivable en $x_0 \in \mathcal{I}$(respectivement sur $\mathcal{I}$)

alors f est dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) $\Longleftrightarrow \forall\, i \in \{1,..,n\}$ $\;f_i$ dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$)

et $f'(x_0) = (f_1'(x_0), .., f_n'(x_0))$

Exemple : $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 dont $(1,i)$ est une base

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}$
$\quad x \longmapsto (\mathcal{R}e(f))(x) + i(\mathcal{I}m(f))(x)$

f est dérivable en $x_0 \Longleftrightarrow \mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont dérivables en x_0

et $f'(x_0) = (\mathcal{R}e(f)')(x_0) + i(\mathcal{I}m(f))'(x_0)$

3. Composition avec une application linéaire : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable en $x_0 \in \mathcal{I}$(respectivement sur $\mathcal{I}$)

alors $uof : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $\quad uof$ est dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) et $(uof)'(x_0) = u(f'(x_0))$

4. Composition avec une application bilinéaire : $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bilinéaire

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable en $x_0 \in \mathcal{I}$(respectivement sur $\mathcal{I}$) $\quad g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ dérivable en $x_0 \in \mathcal{I}$(respectivement sur $\mathcal{I}$)

alors on définit $B(f,g) : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^m$
$\quad x \longmapsto B(f(x), g(x))$

$B(f,g)$ est dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) et $(B(f,g))'(x_0) = B(f'(x_0), g(x_0)) + B(f(x_0), g'(x_0))$

Généralisation : $E_1,..., E_n$, F $n+1$ espaces vectoriels de dimension finie

$\varphi : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ application n-linéaire

$i \in \{1,..,n\}$ $\quad f_i : \mathcal{I} \longrightarrow E_i$ dérivable en $x_0 \in \mathcal{I}$(respectivement sur $\mathcal{I}$)

alors $\varphi(f_1, ..., f_n) : \mathcal{I} \longrightarrow F$ $\qquad \varphi(f_1, ..f_n)$ est dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$)
$\quad x \longmapsto \varphi(f_1(x), ..., f_n(x))$

et $(\varphi(f_1, .., f_n))'(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(f_1(x), ..., f_{i-1}(x_0), f_i'(x_0), f_{i+1}(x_0), .., f_n(x_0))$

5. Composition : $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ intervalles de $\mathbb{R}$ $\quad \varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J} \qquad f : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Si φ dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) et f dérivable en $f(x_0)$ (respectivement sur $\mathcal{J}$) alors

$fo\varphi$ est dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) et $(fo\varphi)'(x_0) = (f'o\varphi)(x_0)\ \varphi'(x_0)$

6. Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$: Si u et v sont dérivables en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) , alors uv est dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) , et $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$

Si u et v sont dérivables en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) , et v ne s'annule pas en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) , alors

$\dfrac{u}{v}$ est dérivable en x_0 (respectivement sur $\mathcal{I}$) et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x_0) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}(x_0)$

7. Cas des fonctions numériques bijectives : Si $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue strictement monotone dérivable à dérivée ne s'annulant pas , alors $f^{-1} : f(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{I}$ est dérivable sur $f(\mathcal{I})$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'(f^{-1})}$

I.5. Dérivées usuelles

f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

II. Dérivées successives

II.1. Définition

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, si f dérivable sur $\mathcal{I}$, on a défini $f' : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Si f' est continue sur $\mathcal{I}$, f est dite de classe c^1 sur $\mathcal{I}$

Si f' est dérivable sur $\mathcal{I}$, on dit que f est deux fois dérivable sur $\mathcal{I}$ et $f'' = (f')'$.

Si de plus, f'' est continue sur $\mathcal{I}$, f est dite de classe c^2 sur $\mathcal{I}$.

$p \in \mathbb{N}^*$ si $f^{(p)}$ est continue sur $\mathcal{I}$, f est dite de classe c^p sur $\mathcal{I}$

et si $f^{(p)}$ est dérivable sur $\mathcal{I}$, on dit que f est $p+1$ fois dérivable sur $\mathcal{I}$ et $f^{(p+1)} = (f^{(p)})'$.

appelée dérivée $p+1$ ème de f

f est de classe c^∞ sur $\mathcal{I}$ si $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad f^{(p)}$ existe

II.2. Propriétés

$p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$

1. L'ensemble $\mathcal{C}^p(\mathcal{I},\mathbb{R}^n)$ des fonctions de classe c^p de $\mathcal{I}$ à valeurs sur $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathcal{I},\mathbb{R}^n)$

et $\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^p(\mathcal{I},\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{I},\mathbb{R}^n) \\ f & \longmapsto & f^{(p)} \end{array}$ est linéaire

2. $\begin{array}{rcl} f : \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{array}$

on a f est de classe c^p sur $\mathcal{I} \Longleftrightarrow \forall\ i \in \{1,..,n\}$ $\quad f_i$ est de classe c^p sur $\mathcal{I}$

et $f^{(p)} = (f_1^{(p)},..,f_n^{(p)})$

3. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ $\quad f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe c^p sur $\mathcal{I}$

alors uof est de classe c^p sur $\mathcal{I}$ et $(uof)^{(p)} = u(f^{(p)})$

4. Formule de Leibniz : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad f$ et g de classe c^p sur $\mathcal{I}$

$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^q$ $\qquad$ bilinéaire

alors $B(f,g)$ est de classe c^p sur $\mathcal{I}$ et $(B(f,g))^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B(f^{(k)}, g^{(p-k)})$

Application : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K} \quad g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K} \quad f$ et g de classe c^p sur $\mathcal{I}$

alors alors fg est de classe c^p sur $\mathcal{I}$ et $(fg)^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$

5. $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ intervalles de $\mathbb{R}$ $\quad \varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J} \qquad f : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Si φ de classe c^p sur $\mathcal{I}$ et f de classe c^p sur $\mathcal{J}$ alors $fo\varphi$ est de classe c^p sur $\mathcal{I}$

III. Rappels première année

III.1. Théorème de Rolle

ROLLE Michel 1652 Ambert - 1719 Paris. Michel Rolle commence sa carrière à Paris comme copiste et clerc de notaire. Brillant calculateur, il s'est fait connaître en résolvant en 1682 un problème d'Ozanam : "Trouver quatre nombres tels que la différence de deux quelconques soit un carré et que la somme de deux quelconques des trois premiers soit encore un carré."

Remarqué par Colbert, Rolle entre à l'académie des sciences et s'adonne à l'algèbre. Il s'oppose à la géométrie analytique de Descartes ainsi qu'au calcul différentiel dont Varignon et Saurin étaient les ardents défenseurs.

Rolle tentera d'expliquer de manière rigoureuse la règle des signes et tout particulièrement le "- par - donne + ", ce qui lui vaudra les critiques de Descartes.

théorème : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$
alors $\exists\ c \in\ ]a,b[\quad f'(c)=0$

III.2. Accroissements finis

Egalité des accroissements finis : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$,

alors $\exists\ c \in\ ]a,b[\quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

(ou alors $\exists\ \theta \in\ ]0,1[\quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(a + \theta(b-a))$)

Inégalité des accroissements finis : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$,

alors $|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \displaystyle\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|$

ou si $\forall\ x \in\ ]a,b[\quad m \leq f'(x) \leq M \quad$ alors $\forall\ x \in [a,b] \quad m(b-a) \leq f(x) \leq M(b-a)$

Application : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathcal{I}$, dérivable sur $\mathcal{I}$, telle que $\forall\ x \in \mathcal{I} \quad |f'(x)| \leq M$

alors f est M-lipschitzienne

théorème de la limite de la dérivée : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ c^1 sur $]a,b]$ (respectivement sur $[a,b[$) telle que $\lim\limits_{x\mapsto a^+} f'(x) = l$ finie (respectivement $\lim\limits_{x\mapsto b^-} f'(x) = l$ finie) , alors f est c^1 sur $[a,b]$

III.3. Sens de variation

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe c^1

$f' = 0$ sur $\mathcal{I} \Longleftrightarrow f$ est constante

$f' \geq 0$ sur $\mathcal{I} \Longleftrightarrow f$ est croissante

$f' \leq 0$ sur $\mathcal{I} \Longleftrightarrow f$ est décroissante

III.4. Cas des fonctions à valeurs complexes

Le théorème de Rolle et l'inégalité des accroissements finis sont faux, mais on a l'inégalité des accroissements finis:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ c^1 sur $[a,b]$ alors $|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

et on a, $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe c^1, $f' = 0$ sur $\mathcal{I} \Longleftrightarrow f$ est constante

III.5. Formules de Taylor

a/ Inégalité de Taylor-Lagrange

LAGRANGE Joseph Louis, Comte 1736 Turin - 1813 Paris : D'origine franco-italienne, il s'intéresse très tôt aux mathématiques, en particulier au calcul différentiel et intégral, et à l'astronomie. À 19 ans, il enseigne les mathématiques à l'École d'artillerie de Turin. À 23 ans, il publie ses "Actes de la société privée"où il aborde des sujets de physique mathématique : isopérimètres, surfaces minimales , acoustique, hydrodynamique... Il entretint avec d'Alembert de nombreuses correspondances. Euler le fait venir à Berlin et élire à l'Académie des sciences de Berlin. Puis Lagrange s'installe à Paris à l'invitation de Louis XVI. Membre de diverses commissions scientifiques, comme celle du système métrique, il traverse la Révolution sans encombres. Membre fondateur du bureau des longitudes, savant universel, Lagrange a été anobli par Napoléon et inhumé au Panthéon. Ses travaux portent sur la théorie des fonctions de variables réelles et complexes,les équations différentielles et aux dérivées partielles, la résolution des équations algébriques, les intégrales et fonctions elliptiques, le calcul des variations.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ c^{n+1} sur $[a,b]$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \mathrm{M}_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{où } \mathrm{M}_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

b/ Formule de Taylor-Young

YOUNG William Henry 1863 Londres - 1942 Lausanne. Wlliam Young a étudié au Peterhouse College de l'université de Cambridge. Professeur de mathématiques en de nombreuses universités, dont Calcutta , Lausanne, Liverpool , Aberystwyth , les travaux de Young portent principalement en analyse sur les espaces fonctionnels, espaces L^p, le développement en série des fonctions et le calcul différentiel et intégral dont il publie son plus marquant ouvrage : The fundamental theorems of the differential calculus (1910).

Young a donné une expression du reste dans la formule de Taylor

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ c^{n-1} sur $\mathcal{I}$ et $f^{(n)}(a)$ existe , alors il existe une fonction $\varepsilon : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathcal{I} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\mapsto a} \varepsilon(x) = \varepsilon(a) = 0$$

Cas des fonctions usuelles

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$

$\forall\, x \in \,]-1,+\infty[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$.

Cas particulier où $\alpha = -1$ $\quad (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x) \qquad \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$

$\forall\, x \in \,]-1,+\infty[\quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$

$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0.$

IV. Développements limités

IV.1. Définition

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K} \quad a \in \bar{\mathcal{I}}\,,\, n \in \mathbb{N}$

$a \in \mathbb{R}$, f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $\leq n$ et une fonction $\varepsilon : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que

$\forall\, x \in \mathcal{I} \quad f(x) = \mathrm{P}(x-a) + (x-a)^n\, \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \mapsto a} \varepsilon(x) = 0$

P s'appelle la partie régulière d'ordre n du développement limité à l'ordre n de f

$a = +\infty$ ou $a = -\infty$, f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $\leq n$ et une fonction $\varepsilon : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que

$\forall\, x \in \mathcal{I} \quad f(x) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \mapsto a} \varepsilon(x) = 0$

P s'appelle la partie régulière d'ordre n du développement limité à l'ordre n de f

f admet au plus un développement limité à l'ordre n en a

On se ramène à 0 en posant $u = x - a$ si $a \in \mathbb{R}$ $\quad u = \frac{1}{x}$ si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$

Remarques : Si une fonction$f$ admet un développement limité d'ordre $n \geq 0$ en $a \in \mathbb{R}$ de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k$, alors $\lim_{x \mapsto a} f(x) = \alpha_0$. On peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = \alpha_0$

Si la fonction ainsi prolongée admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$, alors elle est dérivable en a et $f'(a) = \alpha_1$

Si la fonction ainsi prolongée admet un développement limité à l'ordre $n \geq 2$, on ne peut plus en déduire que f est deux fois dérivable.

IV.2. Propriétés

1/ Si f est $\mathcal{C}^{(n-1)}$ sur $\mathcal{I}$ et $f^{(n)}(a)$ existe (hypothèses de Taylor-Young), alors f admet un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

2/ Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière P, alors
$\forall\, p \in \{0..n\}$ f admet un développement limité à l'ordre p en 0 de partie régulière le polynôme P tronqué à l'ordre p

3/ Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière P, et f paire (respectivement impaire), alors le polynôme P est pair (respectivement impair).

4/ Si f et g admettent toutes deux un développement limité à l'ordre n en 0 de parties régulières respectives P et Q , $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors $\alpha f + \beta g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière αP+βQ.

5/ Si f et g admettent toutes deux un développement limité à l'ordre n en 0 de parties régulières respectives P et Q , alors fg admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière le polynôme (PQ) tronqué à l'ordre n.

6/ $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{J}$
Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière P et g admet un développement limité à l'ordre n en $a = f(0)$ de partie régulière Q , alors gof admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière Q(P(x) $- a$) tronqué à l'ordre n.

7/ Si g admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière Q , avec Q(0)=$g(0) = b_0 \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 que l'on obtient par :

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{b_0(1 + \frac{b_1}{b_0}x + .. + \frac{b_n}{b_0}x^n + x^n\varepsilon(x))} = \frac{1}{b_0}\left(1 + \frac{b_1}{b_0}x + .. + \frac{b_n}{b_0}x^n + x^n\varepsilon(x)\right)^{-1} = \frac{1}{b_0}\ (1+u)^{-1}$$

et on développe

Exemple: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1} =$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

8/ Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière P et f admet une primitive F sur $\mathcal{I}$, alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de partie régulière la primitive de P prenant la valeur F(0) en 0

Exemple : $\arctan(x)$

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 + .. + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$

et arctan(0)=0 donc $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + .. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

V. Fonctions convexes

définition : $\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathcal{I}$ si

$\forall\ (x,y) \in \mathcal{I}^2 \quad \forall\ t \in [0,1] \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

f est concave sur $\mathcal{I}$ si $-f$ est convexe sur $\mathcal{I}$

Remarque : Le graphe d'une fonction convexe (respectivement concave) est toujours en dessous (respectivement au dessus) de ses cordes.

théorème : croissance des pentes : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$

On a équivalence entre :

(i) f est convexe

(ii) $\forall\ x_0 \in \mathcal{I} \quad x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $\mathcal{I} \backslash \{x_0\}$

théorème des trois pentes : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe sur $\mathcal{I}$

alors $\forall\ (a,b,c) \in \mathcal{I}^3 \quad a < b < c \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$

théorème : caractérisation des fonctions convexes dérivables : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathcal{I}$

On a équivalence entre :

(i) f est convexe

(ii) f' est croissante

(iii) le graphe de f est au-dessus de chaque tangente

caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathcal{I}$

On a équivalence entre :

(i) f est convexe

(ii) $f'' \geq 0$

Complément : théorème : inégalité de convexité : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$

On a équivalence entre :

(i) f est convexe

(ii) $\forall\ n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{I}^n \quad \forall\ (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1 \quad f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$