PC Rappels : Équations différentielles linéaires

I. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

définition : Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est du type $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$ (E)
on appelle équation homogène associée $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$ (H)

On suppose $a,b,c:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{K}$ continues sur $\mathcal{I}$ (avec $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Sur un intervalle où a ne s'annule pas, l'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est $x\longmapsto e^{\int -\frac{b}{a}(x)dx}$

Sur un intervalle où a ne s'annule pas, toute solution de (E) s'écrit y_0+y_H où y_0 solution particulière de (E) et y_H une solution de (H)

Résolution de (E) : méthode de variation de la constante

Pour trouver une solution particulière de (E), on résout (H) on trouve y_H: $x\longmapsto \lambda e^{\int -\frac{b}{a}(x)dx}$, puis on fait varier la constante en posant $y(x)=\lambda(x)e^{\int -\frac{b}{a}(x)dx}$

Remarques : 1/ Il se peut que (E) admette une solution évidente y_0, les solutions sont alors y_0+y_H

2/ **principe de superposition :** si $c=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i c_i$. On détermine une solution particulière y_i de chaque équation $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c_i(x)$ alors $y_0=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i y_i$ est solution particulière de (E).

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

définition : Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est du type
$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=d(x)$ (E) $a\neq 0$ $d:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{K}$ continue sur $\mathcal{I}$

d'équation homogène associée $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$ (H)

Résolution de (H) : L'équation caractéristique associée est : (**) $ar^2+br+c=0$

On se place sur $\mathbb{K}$

Si (**) a deux racines distinctes r_1 et r_2 alors toute solution de (H) est $x\longmapsto \alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$
avec comme cas particulier si $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ et $r_1=\bar{r_2}=u+iv$ $(\Delta<0)$ une solution de (H) est
$x\longmapsto e^{ux}(\alpha\cos(vx)+\beta\sin(vx))$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

Si (**) a une racine double r_0 alors toute solution de (H) s'écrit $x\longmapsto e^{r_0x}(\alpha x+\beta)$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$

Sur un intervalle où a ne s'annule pas, toute solution de (E) s'écrit y_0+y_H où y_0 solution particulière de (E) et y_H une solution de (H)

Résolution de (E) : si d est de la forme $x\longmapsto P(x)e^{\varphi x}$ P polynôme et $\varphi\in\mathbb{C}$

on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $x\longmapsto Q(x)e^{\varphi x}$ avec Q polynôme de degré d°P+ordre de multiplicité de φ dans (**)

Le principe de superposition peut aussi s'appliquer.