PC Matrices

I. Matrices

I.1. Définition

Une **matrice** à q lignes et p colonnes est un tableau déléments de $\mathbb{K}$ à q lignes et p colonnes

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p} = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{q1} & . & . & . & a_{qp} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à q lignes et p colonnes.

Sur $\mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K})$, on définit une loi + interne et une loi . externe à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$par
si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$ $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda.A = (\lambda a_{ij})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$

$(\mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension pq

La base canonique est $(E_{i,j})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$ où tous les termes sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne qui vaut 1

ie $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1\leq k\leq q, 1\leq l\leq p}$

Une **matrice colonne** est une matrice de $\mathcal{M}_{(q,1)}(\mathbb{K})$, une **matrice ligne** est une matrice de $\mathcal{M}_{(1,p)}(\mathbb{K})$

I.2. Produit de matrices

si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq q}$ $C = BA = (c_{ij})_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq p}$

on a $c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} b_{ik} a_{kj}$

Propriétés : associativité : sous réserve de la taille des matrices: $A(BC) = (AB)C$

distributivité : sous réserve de la taille des matrices $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + M)B = AB + MB$

$AI_p = A$, $I_q A = A$ $A0_p = 0_{q,p}$, $0_q A = 0_{q,p}$

bilinéarité de $(B, A) \longmapsto BA$

théorème : $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{(r,q)}(\mathbb{K})$ $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K})$ $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ $(E_{i,l} \in \mathcal{M}_{(r,p)}(\mathbb{K}))$

I.3. Transposée

Si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$, on définit la **transposée** de A par $A^T = {}^tA = (a_{ji})_{1\leq j\leq p, 1\leq i\leq q}$

alors $\mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{K})$
$A \longmapsto A^T$ est un isomorphisme

théorème : $A \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{(r,q)}(\mathbb{K})$ $(BA)^T = A^T B^T$

$(A^T)^T = A$

I.4. Python

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

A = np.array([[1,2,3],[4,5,6]])

$A[i,j]$ pour accéder à l'élement A_{ij}

Attention, les indices commencent à zéro ie $0 \leq i, j \leq n-1$

np.zeros((2,3)) renvoie la matrice à deux lignes et deux colonnes nulle

np.eye(3) renvoie I_3

np.diag([1,2,3]) renvoie la matrice diagonale avec 1,2,3 sur la diagonale

+ pour additionner les matrices, * pour la multiplication par un scalaire

np.dot(A, B) pour multiplier la matrice A par la matrice B

np.transpose(A) renvoie A^T

II. Matrices carrées

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$=$\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$

théorème : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 non commutative, ie $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n^2, $\times$ est associative, distributive par rapport à + ,non commutative ($n \geq 2$) et d'élément neutre I_n .

$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

formule du binôme : si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec A **et** B **commutent** alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

II.1. Matrices particulières

définition : $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est

diagonale si $\forall (i,j) \in \{1, ... n\}^2 \quad i \neq j \Longrightarrow m_{ij} = 0$

scalaire si $M = \lambda I_n \quad \lambda \in \mathbb{K}$

triangulaire inférieure si $\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2 \quad i < j \Longrightarrow m_{ij} = 0$

triangulaire supérieure si $\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2 \quad i > j \Longrightarrow m_{ij} = 0$

théorème : L'ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n dont une base est $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale, ce produit est commutatif.

théorème : L'ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ dont une base est $(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$

et le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure , produit non commutatif en général.

théorème : L'ensemble des matrices triangulaires inférieures $\mathcal{T}_n^i(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ dont une base est
$(E_{i,j})_{1\leq j\leq i\leq n}$

et le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure , produit non commutatif en général.

définition : $M \in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** si $M^T = M$

$M \in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** si $M^T = -M$

théorème : Les sous-ensembles des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $((E_{i,i})_{1\leq i\leq n}\ ,\ (E_{i,j}+\mathrm{E}_{j,i})_{1\leq i<j\leq n})$

Une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{i,j}\text{-}E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$

II.2. Matrices inversibles

définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = BA = I_n$
On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles

théorème : $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe, groupe linéaire d'ordre n (non commutatif en général)

ie $\forall\ (A,B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ avec $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

et $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

théorème : Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $A^T \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Cas particulier : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow ad - bc \neq 0 \qquad$ Dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Calcul de A^{-1} par opérations élémentaires.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de lignes $(L_1,\cdots,L_n)$ et de colonnes $(C_1,\cdots,C_n)$

On appelle **matrice de dilatation** $D(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$

$D_i(\lambda)A$ est obtenue à partir de A en remplacant L_i par λL_i

et $AD_i(\lambda)$ est obtenue à partir de A en remplacant C_i par λC_i

On appelle **matrice de transposition** $P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$

$P_{ij}A$ est obtenue à partir de A en échangeant L_i et L_j

et AP_{ij} est obtenue à partir de A en échangeant C_i et C_j

On appelle **matrice de transvection** $T_{ij} = I_n + \lambda E_{ij}$

$T_{ij}A$ est obtenue à partir de A en remplacant L_i par $L_i + \lambda L_j$

et AT_{ij} est obtenue à partir de A en remplacant C_i par $C_i + \lambda C_j$

Application au calcul de l'inverse :

Si $\text{rg}(A) = n$, en effectuant des opérations élémentaires,
on obtient $AM_1M_2\cdots M_q = I_n$ donc $A^{-1} = M_1M_2\cdots M_q$

III. Systèmes linéaires

On considère le système linéaire à p équations et n inconnues le système

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Représentation matricielle associée : si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$

le système $\mathcal{S}$ se représente par $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Le système homogène associé est $\mathcal{H} :\ AX = 0$

L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Le système est compatible (ie admet une solution) si B est combinaison linéaire des éléments de A. Dans ce cas si X_0 est une solution de $\mathcal{S}$, toute solution de $\mathcal{S}$ est de la forme $X_0 + X_{\mathcal{H}}$ où $X_{\mathcal{H}}$ est une solution de $\mathcal{H}$

IV. Lien avec les applications linéaires

IV.1. Matrice d'un vecteur

E $\mathbb{K}$ ev de dimension p et $\mathcal{B}$=$(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E

$x \in E$ $\quad x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, la matrice de x dans $\mathcal{B}$ est la matrice colonne des coordonnées de x $\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$=$\text{M}_{\mathcal{B}}(x)$

et l'application $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \text{M}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$ est un isomorphisme d'ev

La matrice du système de vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ est la matrice de $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$ dont les colonnes représentent les coordonnées des x_j dans la base $\mathcal{B}$

IV.2. Matrice d'une application linéaire

E $\mathbb{K}$ ev de dimension p et $\mathcal{B}=(e_1, ..., e_p)$ une base de E
F $\mathbb{K}$ ev de dimension q et $\mathcal{C}=(f_1, ..., f_q)$ une base de F

$u \in \mathcal{L}(E, F) \quad \forall j \in \{1...p\} \quad \exists!(a_{1j}, ...a_{qj}) \in \mathbb{K}^q \qquad u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} f_i$

alors $A=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{q1} & . & . & . & a_{qp} \end{pmatrix}$ est la matrice de u dans $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ notée $\mathrm{M}u_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

et l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}u_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \end{array}$ est un isomorphisme

Cas particulier : $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}u_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \end{array}$ est un isomorphisme, appelé isomorphisme canonique

donc $\mathcal{L}(E, F)$ est un ev de dimension qp dont une base est $(u_{ij})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$ où les u_{ij} sont définis par $\forall k \in \{1..p\} \qquad u_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i$

E $\mathbb{K}$ev de dimension p de base $\mathcal{B}$, F $\mathbb{K}$ev de dimension q de base $\mathcal{C}$, G $\mathbb{K}$ev de dimension r de base $\mathcal{D}$

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A=Mu_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ $\qquad v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $B=Mv_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ $\qquad$ alors $BA=M(v o u)_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$

si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$ $\qquad$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq q}$ $\qquad$ $C = BA = (c_{ij})_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq p}$

théorème : $u(x) = y$ se représente par $Y = AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1j} x_j \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{p} a_{qj} x_j \end{pmatrix}$

V. Changement de bases

E $\mathbb{K}$ev de dimension p et $\mathcal{B}=(e_1, ..., e_p)$ une base de E (ancienne base de E) et $\mathcal{B}'=(e'_1, ..., e'_p)$ une base de E (nouvelle base de E)

définition : La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice constituée des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$, c'est $Mid_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

Si $x \in E$ alors $M_{\mathcal{B}}(x)=\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \; M_{\mathcal{B}'}(x)$ $\quad$ (ou $X = PX'$)

F $\mathbb{K}$ev de dimension q et $\mathcal{C}$ une base de F (ancienne base) et $\mathcal{C}'$ une base de F (nouvelle base)

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ $\quad$ $A=Mu_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ $A'=Mu_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$ alors

$$
\begin{aligned}
Y = AX &\iff P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}Y' = AP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X' \\
&\iff Y' = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}^{-1}AP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'
\end{aligned}
$$

ie $A'={P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}}^{-1}\ A\ P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

(que l'on retient par $A'=Q^{-1}AP$, Q et P faisant référence aux dimensions de E et F)

Dans le cas d'un endomorphisme u de E, $A' = P^{-1}AP$ où $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

VI. Rang

$A \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K})$, le rang de A est le rang des vecteurs colonnes de A, noté $rg(A)$

Lien avec application linéaire : $A \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K})$, alors $\exists\ u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ $A = Mu_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

On a $Ker(A) = Ker(u)$, $Im(A) = Im(u)$, $rg(A) = rg(u)$, $dim(Ker(A)) + rg(A) = p$

théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible $\iff rg(A) = n$

$\iff Ker(A) = \{0\}$

$\iff Im(A) = \mathbb{K}^n$

théorème : On a équivalence entre, si $A \in \mathcal{M}_n$

(i) A inversible à droite ($\exists\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $AB = I_n$)

(ii) A inversible à gauche ($\exists\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $CA = I_n$)

Dans ce cas A inversible et $A^{-1} = B = C$

théorème invariance du rang par composition avec une matrice inversible :

$A \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{GL}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ $rg(BA) = rg(A)$ et $rg(AC) = rg(A)$

théorème : $rg(A)=r \iff \exists\ Q \in \mathcal{GL}_q(\mathbb{K})\ \exists\ P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = Q\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{q-r,r} & 0q-r,p-r \end{pmatrix}P$

Corollaire : $rg(A) = rg(A^T)$ (et donc $rg(A) \leq \inf(p,q)$)

VII. Trace d'une matrice carrée

VII.1. Définition et propriétés

définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la trace de A est le scalaire $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

théorème : tr est une forme linéaire et $\forall\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ $tr(AB) = tr(BA)$

Remarque : $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\forall\ P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$

On dit aussi que la trace est invariante par similitude.

théorème et définition : E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base de E, alors $tr(Mf_{|\mathcal{B}})$ est indépendante de $\mathcal{B}$ et s'appelle trace de l'endomorphisme f, notée $tr(f)$

théorème : Si p projecteur d'un $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension finie, alors $tr(p) = rg(p)$

VII.2. Matrices semblables

définition : $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. A est semblable à B si $\exists\ P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad B = P^{-1}AP$

Remarque : A et B semblables alors $rg(A) = rg(B)$ et $tr(A) = tr(B)$. La réciproque est fausse.

Propriété : La relation "être semblable" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

VIII. Matrices blocs

$A \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{K}) \quad q = q_1 + .. + q_s \qquad p = p_1 + ... + p_r$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & . & . & A_{1,r} \\ . & . & . & 0 \\ A_{s,1} & . & . & A_{s,r} \end{pmatrix} \qquad A_{i,j} \in \mathcal{M}_{q_i,p_j}(\mathbb{K}) \quad \text{est une matrice blocs}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_{s,s} \end{pmatrix} \qquad A_{i,i} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K}) \quad \text{est une matrice diagonale par blocs}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & . & . & A_{1,r} \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_{s,r} \end{pmatrix} \qquad A_{i,j} \in \mathcal{M}_{q_i,p_j}(\mathbb{K}) \quad \text{est une matrice triangulaire supérieure par blocs}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ A_{s,1} & . & . & A_{s,r} \end{pmatrix} \qquad A_{i,j} \in \mathcal{M}_{q_i,p_j}(\mathbb{K}) \quad \text{est une matrice triangulaire inférieure par blocs}$$

Sous réserve de taille des blocs, les opérations sur les matrices restent valables sur les matrices blocs