PC

Espaces vectoriels normés (evn)

$\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Normes sur un $\mathbb{K}$- espace vectoriel

I.1. Définition

E $\mathbb{K}$espace vectoriel

Une norme sur E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

(i) $\forall\, x \in E \quad N(x) = 0 \iff x = 0$ (propriété de séparation)

(ii) $\forall\, x \in E \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (propriété d'homogénéité)

(iii) $\forall\, (x, y) \in E^2 \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

On dit que (E, N) est un evn

Corollaire : $\forall\, (x, y) \in E^2 \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

définition : Si (E, N) est un evn et F un sous-espace vectoriel de E , alors N_F la restriction de N à F est une norme, appelée norme induite par N sur F

I.2. Exemples

a/ Norme associée à un produit scalaire : E $\mathbb{R}$espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $<\ ,\ >$ et $\|x\| = \sqrt{<x, x>}$

$\|\ .\|$ est une norme sur E

d'où si $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $<x, y> = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

l'application $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ appelée **norme euclidienne**

si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $<A, B> = tr(A^T B)$

l'application $A \longmapsto \|A\| = \sqrt{tr(A^T A)} = \sqrt{\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appelée **norme euclidienne**

Si $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ $(a < b)$ muni du produit scalaire $<f, g> = \displaystyle\int_a^b f(t) g(t) dt$

l'application $f \longmapsto \|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f^2(t) dt}$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**

Remarque : Ces normes se généralisent avec $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$

$E = \mathbb{C}^n \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^2}$

Si $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ $(a < b)$ $\qquad \|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2(t)dt}$

b/ Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$:

Norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Norme infinie : $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

Norme 1 : $\|X\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

Généralisation : E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n , $(e_1, ..., e_n)$ base de E , si $x \in E \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

Norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$

Norme infinie : $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

c/ Norme de la convergence uniforme (cvu) sur $\mathcal{B}(\mathcal{I},\mathbb{K})$:

théorème : Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$ alors $\sup(k\mathcal{A}) = k \sup \mathcal{A}$

$\mathcal{B}(\mathcal{I},\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{K}$

Si $f \in \mathcal{B}(\mathcal{I},\mathbb{K})$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{I}} |f(x)|$

$\|.\|_\infty$ est une norme

d/ Normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$:

norme de la convergence en moyenne quadratique : $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2(t)dt}$

norme de la convergence en moyenne : $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$

I.3. Distance associée

définition : (E,N) evn, on appelle distance associée à N, l'application

$$d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(x,y) \longmapsto N(x-y)$$

On a : $\forall\ (x,y,z) \in E^3 \quad d(x,y)=0 \iff x=y$

$$d(x,y)=d(y,x)$$
$$d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$$

On en déduit: $\forall\ (x,y,z) \in E^3 \quad |d(x,z)-d(z,y)| \le d(x,y)$

définition : $A \subset E$, A non vide, on appelle distance de x à A , l'application $d(x,A) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a)$

définition : (E,N) espace vectoriel normé, d distance associée à N

$a \in E \quad r \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle

boule ouverte de centre a de rayon r , $\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E; d(a,x) < r\}$

boule fermée de centre a de rayon r , $\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E; d(a,x) \le r\}$

sphère de centre a de rayon r , $\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E; d(a,x) = r\}$

Si $a=0$ et $r=1$, on parle de boule unité ouverte ou fermée ou sphère unité.

définition : $A \subset E$, A non vide ,

A est convexe si $\forall\ (x,y) \in A^2 \quad [x,y] \subset A$ (ie $\forall\ t \in [0,1] \quad tx+(1-t)y \in A$)

A est bornée si $\exists\ a \in E \quad \exists\ r > 0 \quad A \subset \mathcal{B}(a,r)$

théorème : Les boules d'un espace vectoriel normé sont convexes

I.4. Normes équivalentes

définition : E espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2

N_1 et N_2 sont équivalentes si $\exists\ (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad aN_1 \le N_2 \le bN_1$

(ie $\exists\ (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall\ x \in E \quad aN_1(x) \le N_2(x) \le bN_1(x)$)

donc N_1 et N_2 sont non équivalentes si $\forall\ (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \exists\ x \in E \quad aN_1(x) > N_2(x)$ ou $N_2(x) > bN_1(x)$

donc (si $a = \dfrac{1}{n}$ ou $b=n$), s'il existe une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ $\quad \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} = +\infty \quad$ ou $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty$

alors N_1 et N_2 sont non équivalentes.

théorème admis : Si E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.

Exemple important : E=$\mathbb{K}^n$ de dimension n, on a donc $\|\ .\ \|_\infty$, $\|\ .\ \|$ et $\|\ .\ \|_1$ équivalentes

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_1 \le n\|X\|_\infty$$

$$\|X\|_\infty \le \|X\| \le \sqrt{n}\|X\|_\infty$$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|X\| \le \|X\|_1 \le n\|X\|$

Propriété : Soit E muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2, alors

A partie de E est bornée pour N_1 est équivalent à A est bornée pour N_2.

I.5. Applications lipschitziennes

définition : $(E, \| \, . \, \|_E)$ espace vectoriel normé $(F, \| \, . \, \|_F)$ espace vectoriel normé

$f : E \longrightarrow F$ est lipschitzienne si $\exists \, k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \, (x, y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$

II. Suites dans un espace vectoriel normé

II.1. Définition

$(E, \| \, . \, \|)$ $\mathbb{K}$espace vectoriel normé, une suite $(u_n)_n$est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow E$, suite notée u ou $(u_n)_n$.

On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans E, $E^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

II.2. Vocabulaire

La suite $(u_n)_n$ est constante si $\forall \, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n (= u_0)$

La suite $(u_n)_n$ est stationnaire si $\exists \, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_{n+1} = u_n (= u_{n_0})$

La suite $(u_n)_n$ est périodique de période T si $\forall \, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+T} = u_n$

Une suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_n$ est une suite $u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante (on montre qu'alors $\varphi(n) \geq n$)

II.3. Suites bornées

définition : La suite $(u_n)_n$ est bornée si $\exists \, M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \, n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\|_E \leq M$

théorème : L'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des suites bornées est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$

norme sur $\mathcal{B}(E)$: on pose $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_E$

$\| \, . \, \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(E)$

II.4. Convergence

La suite $(u_n)_n$ est convergente si $\exists \, l \in E \quad \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \|u_n - l\|_E = 0$,

ie $\forall \, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow \|u_n - l\|_E \leq \varepsilon$

Une suite non convergente est divergente

théorème : Si l existe alors l est unique , notée $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$

Remarque : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (u_n - l) = 0$

théorème : Une suite convergente est bornée (réciproque fausse)

théorème : Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente vers la même limite (réciproque fausse)

II.4. Propriétés des limites

linéarité : Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de $E^{\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers l et l' alors

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\alpha u_n + v_n) = \alpha l + l'$

produit par une suite bornée: Soit $(u_n)_n \in$ de $E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_n \in$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec $(u_n)_n$ converge vers O_E et $(\alpha_n)_n$ bornée (respectivement $(u_n)_n$ bornée et $(\alpha_n)_n$ converge vers 0)

alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\alpha_n u_n) = 0$

produit : Soit $(u_n)_n \in$ de $E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_n \in$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec $(u_n)_n$ converge vers l et $(\alpha_n)_n$ converge vers α

alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\alpha_n u_n) = \alpha l$

norme : Soit $(u_n)_n \in$ de $E^{\mathbb{N}}$ avec $(u_n)_n$ converge vers l alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \|u_n\|_E = \|l\|_E$

II.5. Limites et normes

théorème : E muni de deux normes $\| \|_E$ et N_E, alors

$(\forall (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}} \quad (u_n)_n$ converge vers 0_E pour $N_E \Longrightarrow \quad (u_n)_n$ converge vers 0_E pour $\| \|_E)$

$\Longleftrightarrow \exists\, \alpha > 0 \; \| \|_E \leq \alpha N_E$

théorème (généralisation) : E muni de deux normes $\| \|_E$ et N_E, alors

$(\forall (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}} \quad (u_n)_n$ converge vers l pour $N_E \Longrightarrow (u_n)_n$ converge vers l pour $\| \|_E) \Longleftrightarrow$

$\exists\, \alpha > 0 \; \| \|_E \leq \alpha N_E$

théorème (généralisation) : E muni de deux normes $\| \|_E$ et N_E, alors

$(\forall (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}} \quad (u_n)_n$ converge vers l pour $N_E \Longleftrightarrow (u_n)_n$ converge vers l pour $\| \|_E) \Longleftrightarrow$

N_E et $\| \|_E$ sont équivalentes

donc la convergence d'une suite et la valeur de la limite ne dépend pas du choix de la norme si E de dimension finie

Cas de la dimension finie : théorème : E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension finie p, $(e_1, .., e_p)$ base de E

Soit $(u_n)_n \in$ de $E^{\mathbb{N}}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} u_{n,k} e_k$ alors

$$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \forall\, k \in \{1, .., p\} \quad \lim_{n \mapsto +\infty} u_{n,k} = l_k \qquad \text{avec } l = \sum_{k=1}^{p} l_k e_k$$

III. Topologie d'un espace vectoriel normé

$(E, \| \|_E)$ espace vectoriel normé

III.1. Ouvert. Fermé

définition : $\Omega \subset E$, Ω est un ouvert de E si $\Omega = \emptyset$ ou

$\forall\, x \in \Omega \quad \exists\, r \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$

$F \subset E$, F est un fermé de E si $E \setminus F$ ouvert de E

théorème : Toute boule ouverte de E est un ouvert de E, toute boule fermée est un fermé de E

Une sphère est un fermé de E

théorème : 1. La réunion quelconque d'ouverts est un ouvert de E

L'intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E

2. L'intersection finie d'ouverts est un ouvert de E

La réunion finie de fermés est un fermé de E

mais l'intersection quelconque d'ouverts peut ne pas être un ouvert de E et la réunion quelconque de fermés peut ne pas être un fermé de E

théorème : invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente :

E espace vectoriel normé muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2, alors (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes ouverts (et les mêmes fermés)

théorème : E espace vectoriel normé de dimension finie p (toutes les normes sont équivalentes), l'étude topologique de E se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme

III.2. Point intérieur. Intérieur

définition : E espace vectoriel normé , $A \subset E$ et $A \neq \emptyset$

$a \in E$ est un point intérieur à A si $\exists\ r > 0 \quad \mathcal{B}(a, r) \subset A \quad$ (donc $a \in A$)

L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A (donc $\mathring{A} \subset A$)

théorème : A ouvert de $E \Longleftrightarrow \mathring{A} = A$

III.4. Point adhérent. Adhérence

définition : E espace vectoriel normé , $A \subset E$ et $A \neq \emptyset$

$a \in E$ est un point adhérent à A si $\forall\ r > 0 \quad \mathcal{B}(a, r) \cap A \neq \emptyset$

L'adhérence de A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A (donc $A \subset \bar{A}$)

théorème : caractérisation séquentielle des points adhérents

$a \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists\ (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \quad \lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = a$

théorème : A fermé de $E \Longleftrightarrow \bar{A} = A$

théorème : caractérisation séquentielle des fermés

A fermé $\Longleftrightarrow \forall\ (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = a$, alors $a \in A$

III.5. Partie dense

définition : A partie de E est dense si $\bar{A} = E$

III.6. Frontière

définition : E espace vectoriel normé , $A \subset E$ et $A \neq \emptyset$, on a $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, on appelle frontière de A , $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$