PC Dénombrement

I. Rappels

I.1. Ensembles finis

définition : Deux ensembles A et B sont équipotents s'il existe une bijection de A sur B

A est un ensemble fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit équipotent à $\{1, .., n\}$, n est alors unique et appelé Cardinal de A , noté $Card(A)$ ou $\#A$ ou $|A|$.

Par convention $Card(\emptyset) = 0$.

Remarque : L'équipotence est une relation d'équivalence.

Exemples : 1. E ensemble de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^n

2. E et F deux ensembles finis alors $E \times F$ est fini et $Card(E \times F) = Card(E)Card(F)$

donc le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles finis est fini et de cardinal le produit des cardinaux de ces ensembles finis.

3. E et F deux ensembles finis alors $E^F = \{f : E \longrightarrow F\}$ et $Card(E^F) = Card(F)^{Card(E)}$

théorème : Tout sous-ensemble F d'un ensemble fini E est un ensemble fini,

et si $F \subset E$ avec $Card(F) = Card(E)$ alors $E = F$.

théorème : E et F deux ensembles finis de même cardinal , soit $f : E \longrightarrow F$

alors f bijective $\Longleftrightarrow f$ injective

$\Longleftrightarrow f$ surjective

I.2. Opérations sur les cardinaux

théorème : E ensemble fini,

1. $A \subset E$, $\bar{A}$ son complémentaire noté aussi $E \setminus A$ ou C_E^A, alors $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$

2. $A \subset E \quad B \subset E$ alors $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

et $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ si $A \cap B = \emptyset$

3. Si $A \subset B$, alors $Card(B \setminus A) = Card(B) - Card(A)$

II.3. Listes, arrangements et combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n :

définition : On appelle p-liste (ou p-uplet) de E, tout p-uplet $(x_1, \cdots, x_p)$ où $x_i \in E$

On appelle p-arrangement de E (ou arrangement de p éléments de E), toute p-liste $(x_1. \cdots, x_p)$ où $x_i \in E$ et si $i \neq j \quad x_i \neq x_j$

(L'ordre est important)

théorème : Le nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n est le nombre d'injections de E dans E et vaut

$$\begin{cases} \mathrm{A}_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n \\ 0 \text{ si } p > n \end{cases}$$

définition : Une permutation de E de cardinal n est n-arrangement de E.

théorème : Le nombre de permutations de E est $n!$

définition : Une p-combinaison de E est une partie de E à p éléments $\{x_1, .., x_p\}$ où $x_i \in E$ (sans ordre).

théorème : Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble de cardinal n est

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)..(n-p+1)}{p!} \text{ si } p \leq n \\ 0 \text{ si } p > n \end{cases}$$

théorème : si $p \leq n$ $\qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

si $n \geq 1 \quad 1 \leq p < n \qquad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ $\qquad$ (triangle de Pascal)

PASCAL Blaise 1623 Clermont-Ferrand - 1662 Paris : Philosophe de renom, auteur des "Pensées", mathématicien et physicien. Sa mère meurt alors qu'il n'a que 3 ans, il est élevé par son père Étienne Pascal, comptable et mathématicien reconnu. À 12 ans, Blaise démontre des théorèmes classiques de géométrie euclidienne, à 16 ans, il écrit, en latin, un "Essay pour les coniques ". À 19 ans, Pascal met au point une machine à calculer (limitée aux additions et soustractions) que l'on peut admirer à Clermont-Ferrand, et qu'il présenta à la reine Christine de Suède par ces mots : "Cet ouvrage, Madame, est une machine pour faire les règles d'arithmétique sans plume et sans jetons". Sa principale contribution en physique porte sur l'hydrostatique et l'étude de la pression atmosphérique. À la mort de son père, il se retire quelques temps du monde scientifique et entre au couvent de Port-Royal, tout en poursuivant son oeuvre scientifique et philosophico-religieuse.

Propriété : si $1 \leq p \leq n$ $\qquad p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

Formule du binôme : $(a,b) \in E^2$ avec $ab = ba$

alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

II. Ensembles dénombrables

définition : Un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$(ou s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$)

donc il existe $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto x_n \end{array}$ $\qquad$ bijective d'où $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$

définition : Un ensemble est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

théorème : Un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.

Corollaire : Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Corollaire : E est au plus dénombrable s'il existe une injection entre E et $\mathbb{N}$.

théorème : $\mathbf{Z}$ est dénombrable

théorème : $\mathbb{N}^2$ est dénombrable

théorème : Si E et F sont deux ensembles dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable

Corollaire : Si $E_1, \cdots, E_p$ sont p ensembles dénombrables, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est dénombrable

théorème : Une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

III. Notions sur les familles sommables

définition : I au plus dénombrable, $\forall\ i \in I \quad x_i \in \mathbb{R}_+$, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si $\mathcal{S}= \{\sum\limits_{i\in J} x_i ; J \subset I, J \text{ fini } \}$ est majoré.

Dans ce cas $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sup \mathcal{S}$.

Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on convient de noter $\sum\limits_{i\in I} x_i = +\infty$.

Remarque : le programme autorise cette notation, à manier avec précaution.

On peut aussi écrire $\sum\limits_{i\in I} x_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

définition : I au plus dénombrable, $\forall\ i \in I \quad x_i \in \mathbb{C}$, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

Remarque : Pour I=$\mathbb{N}$, la sommabilité d'une famille correspond à la convergence absolue de la série associée.

Remarque : si $\forall\ i \in I \quad x_i \geq 0$, $(x_i)_{i\in I}$ est non sommable alors $\sum\limits_{i\in I} x_i = +\infty$

mais si si $\forall\ i \in I \quad x_i \in \mathbb{C}$, $(x_i)_{i\in I}$ est non sommable , on ne sait rien de $\sum_{i\in I} x_i$

Propriétés admises :

1. Croissance : I au plus dénombrable, $\forall\ i \in I \quad (x_i, y_i) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $\forall\ i \in I \quad x_i \leq y_i$ et la famille $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} x_i \leq \sum_{i\in I} y_i$

2. Linéarité : I au plus dénombrable, $\forall\ i \in I \quad (x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$ avec les familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sommables, alors $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$ la famille $(\lambda x_i + y_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I}(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$

3. Sommation par paquets : I au plus dénombrable, J au plus dénombrable tel que $(I_n)_{n\in J}$ soit une partition de I ,

$\forall\ i \in I \quad x_i \in \mathbb{C}$, avec la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\forall\ n \in J$ la famille $(x_i)_{i\in I_n}$ est sommable

$\sum \left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$ converge et $\sum_{n\in J}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right) = \sum_{i\in I} x_i$

4. Théorème de Fubini : Soit I et J au plus dénombrables et $(u_{p,q})_{(p,q)\in I\times J}$ une famille sommable de complexes, alors

$\forall\ p \in I \quad \sum_{q\in J} u_{p,q}$ converge et si on note $U_p = \sum_{q\in J} u_{p,q}$ alors $\sum U_p$ converge

$\forall\ q \in J \quad \sum_{p\in I} u_{p,q}$ converge et si on note $V_q = \sum_{p\in I} u_{p,q}$ alors $\sum V_q$ converge

et $\displaystyle\sum_{(p,q)\in I\times J} u_{p,q} = \sum_{p\in I}\left(\sum_{q\in J} u_{p,q}\right) = \sum_{q\in J}\left(\sum_{p\in I} u_{p,q}\right)$

FUBINI Ghirin Guido 1879 Venise - 1943 New-York : Fils d'un professeur de mathématiques à Venise, Guido Fubini étudie les mathématiques à l'École normale supérieure de Pise où Dini et Bianchi ont dirigé sa thèse "Clifford's parallelism in Elliptic Spaces".Il enseigne à l'université de Pise, puis à Catane et Turin. En 1939, Fubini fuit l'Italie fasciste de Mussolini et s'établit aux Etats-Unis où il est professeur à Princeton, puis à l'université de New-York. Ses travaux portent essentiellement sur la théorie de la mesure et le calcul intégral au sens de Lebesgue.

5. Produit de deux sommes : Si $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad (u_n, v_n) \in \mathbb{C}^2$, et les séries de termes généraux u_n et v_n convergent absolument, alors la famille $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\right)$$