PC Calculs de primitives

I. Primitives des fonctions usuelles

$\displaystyle\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + \text{Cte} \quad (\mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^*)$ $\qquad \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{-1\} \quad \displaystyle\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{Cte} \quad (\mathbb{R}_+^*)$

$a \in \mathbb{C}^* \quad \displaystyle\int (t-a)^n dt = \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1} + \text{Cte} \quad (n \in \mathbf{Z}\backslash \{-1\})$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dt}{t-a}$ séparer partie réelle et imaginaire

$m \in \mathbb{C}^* \quad \displaystyle\int e^{mt} dt = \frac{e^{mt}}{m} + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$

$\displaystyle\int \cos(mt) dt = \frac{\sin(mt)}{m} + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$ $\qquad \displaystyle\int \sin(mt) dt = \frac{-\cos(mt)}{m} + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$

$\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^2(t)} = \tan(t) + \text{Cte} \quad (]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[)$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dt}{\sin^2(t)} = -\frac{1}{\tan(t)} + \text{Cte} \quad (]k\pi, (k+1)\pi[)$

$\displaystyle\int \frac{dt}{\sin(t)} = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| + \text{Cte} \quad (]k\pi, (k+1)\pi[)$

$\displaystyle\int \frac{dt}{\cos(t)} = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \text{Cte} \quad (]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[)$

$\displaystyle\int \tan(t) dt = -\ln|\cos(t)| + \text{Cte} \quad (]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[)$

$\displaystyle\int \frac{dt}{\tan(t)} = \ln|\sin(t)| + \text{Cte} \quad (]k\pi, (k+1)\pi[)$

$m \in \mathbb{C}^* \quad \displaystyle\int \cosh(mt) dt = \frac{\sinh(mt)}{m} + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$ $\qquad \displaystyle\int \sinh(mt) dt = \frac{\cosh(mt)}{m} + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$

$\displaystyle\int \frac{dt}{\cosh^2(t)} = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dt}{\sinh^2(t)} = -\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} + \text{Cte} \quad (\mathbb{R}_*^+ \text{ ou } \mathbb{R}_*^-)$

$\displaystyle\int \frac{dt}{\sinh(t)} = \ln\left|\frac{\sinh\left(\frac{t}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{t}{2}\right)}\right| + \text{Cte} \quad (\mathbb{R}_*^+ \text{ ou } \mathbb{R}_*^-)$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dt}{\cosh(t)} = 2\arctan(e^t) + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$

$\displaystyle\int \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} dt = \ln(\cosh(t)) + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$ $\qquad \displaystyle\int \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} dt = \ln|\sinh(t)| + \text{Cte} \quad (\mathbb{R}_*^+ \text{ ou } \mathbb{R}_*^-)$

$a \in \mathbb{R}^* \quad \displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{|a|}\right) + \text{Cte} = -\arccos\left(\frac{t}{|a|}\right) + \text{Cte'} \quad (]-|a|, |a|[)$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \ln\left(t + \sqrt{t^2+a^2}\right) + \text{Cte} \quad (\mathbb{R})$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-a^2}\right| + \text{Cte} \quad (]-\infty,-|a|[\text{ ou }]|a|,+\infty[)$$

$$\int \frac{dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t+a}{t-a}\right| + \text{Cte} \quad (]-\infty,-|a|[\text{ ou }]-|a|,|a|[\text{ ou }]|a|,+\infty[)$$

II. Formules

II.1. Intégration par parties

théorème : $\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$, $u,v : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe c^1 alors si $(a,b) \in \mathcal{I}^2$

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Applications : 1. directe

2. pour trouver une relation de récurrence

II.2. Formule de changement de variables

théorème : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue sur $[a,b]$, $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ de classe c^1 et bijective

alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du$

III. Intégration des fractions

décomposition en éléments simples dans le cas des pôles simples : Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$.

On suppose Q scindé à racines simples, ie $Q(X) = a_n\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$

alors $\exists\,!\ E \in \mathbb{K}[X]$ $\exists\,!\ (a_1,\cdots,a_n) \in \mathbb{K}^n$ $\displaystyle\frac{P}{Q} = E + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{X-\lambda_k}$

E s'appelle la partie entière de la fraction, c'est le quotient de la division euclidienne de P par Q.

Propriété : $a_k = \displaystyle\lim_{x\mapsto\lambda_k}(x-\lambda_k)\frac{P(x)}{Q(x)}$

décomposition en éléments simples dans le cas des pôles doubles : Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$.

On suppose , ie $Q(X) = (X-\lambda)^2Q_1(X)$ avec $Q_1(\lambda) \neq 0$

alors $\displaystyle\frac{P}{Q} = E + \frac{u}{X-\lambda} + \frac{v}{(X-\lambda)^2} + \frac{P_1}{Q_1}$ $\quad (u,v) \in \mathbb{K}^2$

Propriété : $v = \displaystyle\lim_{x\mapsto\lambda}(x-\lambda)^2\frac{P(x)}{Q(x)}$

et on détermine u avec une valeur particulière de x (non pôle de Q)

décomposition en éléments simples , cas réel : Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\setminus\{0\}$.

On suppose $Q(X) = (X^2+pX+q)Q_1(X)$ avec $p^2-4q<0$ et Q_1 ne s'annule pas en les racines complexes de X^2-pX+q

alors $\displaystyle\frac{P}{Q} = E + \frac{uX+v}{X^2+pX+q} + \frac{P_1}{Q_1}$ $\quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$

Propriété : Soit z une racine complexe de X^2+pX+q

$uz+v=\lim\limits_{x\mapsto z}(x-z)\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ et on identifie partie réelle et partie imaginaire. Après avoir décomposé en éléments simples la fraction, on intègre le polynôme E , les termes en $\dfrac{1}{(x-a_k)^{\alpha_k}}$

puis $\dfrac{vx+w}{(x^2+px+q)^\beta}=\dfrac{v}{2}\dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)^\beta}+\dfrac{w'}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^\beta}$

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^\beta}dx=\begin{cases}\ln(x^2+px+q) & \text{si } \beta=1\\ \dfrac{(x^2+px+q)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta\neq 1\end{cases}$$

$$\int\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)$$

Exemples : 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

IV. Intégration des fractions en sin, cos

$\displaystyle\int\frac{P(\sin(x),\cos(x))}{Q(\sin(x)\cos(x))}dx$: on pose $\omega(x)=\dfrac{P(\sin(x),\cos(x))}{Q(\sin(x)\cos(x))}dx$

Règles de Bioche : si $\omega(-x)=\omega(x)$ on effectue le changement de variables $t=\cos(x)$

si $\omega(\pi-x)=\omega(x)$ on effectue le changement de variables $t=\sin(x)$

si $\omega(\pi+x)=\omega(x)$ on effectue le changement de variables $t=\tan(x)$

sinon on effectue le changement de variables $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

V. Intégration des fractions en sinh, cosh

$\displaystyle\int\frac{P(\sinh(x),\cosh(x))}{Q(\sinh(x)\cosh(x))}dx$, on lui associe $J=\displaystyle\int\frac{P(\sin(x),\cos(x))}{Q(\sin(x)\cos(x))}dx$

Si dans J on pose $t=\cos(x)$ (respectivement $t=\sin(x)$, $t=\tan(x)$), on effectue le changement de variables $t=\sinh(x)$ (respectivement $t=\cosh(x)$, $t=\tanh(x)$)

Sinon on effectue le changement de variables $t=e^x$

VI. Intégrales abéliennes

$\displaystyle\int f(\sqrt{ax^2+bx+c})dx \quad a\neq 0$ et f fraction

On met sous forme canonique $ax^2+bx+c=a\big((x+\dfrac{b}{2a})^2+\delta\big)$

Cas où $a>0$ et $\delta>0$ on effectue le changement de variable $x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{\delta}\sinh(t)$

Cas où $a>0$ et $\delta<0$ on effectue le changement de variable $x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{-\delta}\cosh(t)$

Cas où $a<0$ et $\delta>0$ on effectue le changement de variable $x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{\delta}\cos(t)$ ou $x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{\delta}\sin(t)$