PC Suites de fonctions

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$

I. Modes de convergences

$n \in \mathbb{N} \quad f_n : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$

I.1. Convergence simple (cvs)

définition : La suite de fonctions $(f_n)_n$ cvs sur $\mathcal{I}$ si $\forall\, x \in \mathcal{I}$, la suite $(f_n(x))_n$ admet une limite finie $f(x)$, ce qui défniit une fonction $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$

f est dite limite simple sur $\mathcal{I}$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$

Donc $\forall\, x \in \mathcal{I} \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

I.2. Convergence uniforme (cvu)

définition : La suite de fonctions $(f_n)_n$ cvu sur $\mathcal{I}$ vers f si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

f est dite limite uniforme sur $\mathcal{I}$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$

Donc $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow \forall\, x \in \mathcal{I} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Propriété : cvu $\Longrightarrow$ cvs

I.3. Convergence uniforme sur tout segment

définition : La suite de fonctions $(f_n)_n$ cvu sur tout segement de $\mathcal{I}$ vers f si $\forall\, (a, b) \in \mathcal{I}^2$ $(f_n)_n$ cvu vers f sur $[a, b]$

Propriété : cvu $\Longrightarrow$ cvu sur tout segment de $\mathcal{I} \Longrightarrow$ cvs

Toutes les réciproques sont fausses

II. Conservation des propriétés par cvu

II.1. Continuité

théorème : $n \in \mathbb{N} \quad f_n : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$ f_n continue sur $\mathcal{I}$ et $(f_n)_n$ cvu vers f sur $\mathcal{I}$ (ou cvu sur tout segment de $\mathcal{I}$), alors f est continue sur $\mathcal{I}$

faux avec cvs

II.2. Dérivabilité

théorème : $n \in \mathbb{N} \quad f_n : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$ f_n de classe c^1 sur $\mathcal{I}$ et $(f_n)_n$ cvs vers f sur $\mathcal{I}$ et $(f_n')_n$ cvu vers g (ou cvu sur tout segment de $\mathcal{I}$), alors f est de classe c^1 sur $\mathcal{I}$ et $f' = g$

Extension : $n \in \mathbb{N} \quad f_n : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$ f_n de classe c^k sur $\mathcal{I}$ et $(f_n)_n$ cvs vers f sur $\mathcal{I}$, $(f_n')_n$, .. , $(f_n^{(k-1)})_n$ cvs sur $\mathcal{I}$ et $(f_n^{(k)})_n$ cvu sur $\mathcal{I}$ vers g (ou cvu sur tout segment de $\mathcal{I}$), alors f est de classe c^k sur $\mathcal{I}$ et $f^{(k)} = g$

f est de classe c^∞ si f est de classe c^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

II.3. Intégration

théorème : $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ $\quad$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$ f_n continue sur $[a,b]$ et $(f_n)_n$ cvu vers f sur $[a,b]$

alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim\limits_{n \mapsto +\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

faux avec cvs

théorème de convergence dominée (admis) : (version 1) $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ $\quad$ avec

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ f_n continue sur $[a,b]$ et $(f_n)_n$ cvs vers f sur $[a,b]$ et

$\exists\, \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue (donc intégrable) sur $[a,b]$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad \forall\, x \in [a,b]$ $\quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$

(hypothèse de domination)

alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim\limits_{n \mapsto +\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$