PC Probabilités

I. Espace probabilisé

I.1. Expérience aléatoire

définition : Une expérience est aléatoire si le résultat (ou réalisation ou issue) dépend du hasard, on connaît tous les résultats possibles et on peut reproduire cette expérience.

Une expérience aléatoire se décrit mathématiquement par la donnée de l'ensemble de ses résultats possibles.

On note Ω cet ensemble, appelé univers.

si $\omega \in \Omega$, ω est un résultat possible.

Ω peut être fini, dénombrable ou non.

I.2. Événement

définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

Un événement est une partie de Ω.

si $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est appelé événement élémentaire.

Ω est l'événement certain.

$\emptyset$ est l'événement impossible.

On peut effectuer des opérations sur les événements: non réalisation,réalisation simultanée, réalisation de l'un des événements

langage probabliste	langage ensembliste
résultat de l'expérience	$\omega \in \Omega$
événement A	$A \subset \Omega$
événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événement contraire de A	$\bar{A} = \Omega \setminus A$
A et B	$A \cap B$
A ou B	$A \cup B$

En répétant indéfiniment une expérience aléatoire, on peut être amené à considérer $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

définition : On dit que les événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

définition : On dit que les $(A_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable), forment un système complet d'événements

(SCE) si $\forall\ (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

$\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$

$\forall\ i \in I \quad A_i \neq \emptyset$

Exemple : Si $A \neq \emptyset$, $\{A, \bar{A}\}$ un un SCE

I.3. Tribu

définition : Ω ensemble, on appelle tribu (ou σ-algèbre) sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant

$\Omega \in \mathcal{A}$

$\forall\ A \in \mathcal{A} \quad \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (ie $\mathcal{A}$ stable par passage au complémentaire)

$\forall\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (ie $\mathcal{A}$ stable par union dénombrable)

Propriétés : si $\mathcal{A}$ tribu sur Ω alors

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall\ (A_1, \cdots, A_n) \in \mathcal{A}^n \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Exemples : 1. $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu appelée tribu grossière ou triviale

2. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, appelée tribu pleine ou discrète

3. $A \subset \Omega$ et $A \neq \emptyset$, alors $\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu, appelée tribu engendrée par A

I.4. Espace probabilisable

définition : On appelle espace probabilisable tout couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

I.5. Probabilité

définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application

$\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ vérifiant

$\mathbb{P}(\Omega)$=1

propriété de σ-addiditivité : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \text{ (et donc la série converge)}$$

On appelle espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ espace probabilisé et $\mathbb{P}$ probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

Propriétés : (i) $\mathbb{P}(\emptyset)$=0

(ii) $\forall\ (A, B) \in \mathcal{A}^2$ avec $A \cap B = \emptyset \quad \mathbb{P}(A \cup B)$=$\mathbb{P}(A)$+$\mathbb{P}(B)$

(iii) Généralisation : $\forall\ (A_1,\cdots,A_n)\in\mathcal{A}^n$ événements incompatibles eux à deux, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$

Propriété : $(A_i)_{i\in I}$ SCE, alors $\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)=1$

Propriétés : 1. $\forall\ A\in\mathcal{A}\qquad \mathbb{P}(\bar{A})$=1-$\mathbb{P}(A)$

2. $\forall\ (A,B)\in\mathcal{A}^2$ avec $A\subset B$ alors $\mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B\setminus A)$=$\mathbb{P}(B)$-$\mathbb{P}(A)$ (croissance)

3. $\forall\ (A,B)\in\mathcal{A}^2\qquad \mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$

4. Continuité croissante : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements tels que $\forall\ n\in\mathbb{N}\quad A_n\subset A_{n+1}$, alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)$

5. Continuité décroissante : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements tels que $\forall\ n\in\mathbb{N}\quad A_{n+1}\subset A_n$, alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)$

6. Sous-additivité : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements , alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)$

définition : $A\in\mathcal{A}$, A est un événement
presque négligeable (presque impossible) si $\mathbb{P}(A)$=0
presque sûr (ou presque certain) si $\mathbb{P}(A)$=1

définition : On dit que les $(A_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable), forment un système quasi-complet d'événements si $\forall\ (i,j)\in I^2\quad i\neq j\quad A_i\cap A_j=\emptyset$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=1$

II. Espace probabilisé discret

définition : Un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ est discret si Ω est fini ou dénombrable. On prend $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$.

Les événements élémentaires forment un SCE.

II.1. Espace probabilisé fini

Ω fini , $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$

théorème : Une probablité $\mathbb{P}$ de $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ est déterminée de manière unique par la donnée des $\mathbb{P}(\{\omega_i\})=p_i$, $1\leq i\leq n\qquad p_i\geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

théorème réciproque : Soit $(p_1,..,p_n)$ n réels positifs de somme 1, alors l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{P}:\ \mathcal{P}(\Omega)&\longrightarrow[0,1]\\ A=\{\omega_{\alpha_1},\cdots,\omega_{\alpha_k}\}&\longmapsto\sum_{i=1}^{k}p_{\alpha_i}\end{aligned}$$

est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$

Cas particulier : si tous les p_i sont égaux à p, ie les événements élémentaires sont équiprobables alors

$\sum_{i=1}^{n} p_i = np = 1$ donc $p = \frac{1}{n} = \frac{1}{Card(\Omega)}$

donc $\forall\ A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ probabilité uniforme

II.2. Espace probabilisé dénombrable

Ω ensemble dénombrable, donc $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{A}$=$\mathcal{P}(\Omega)$

théorème : Une probabilité $\mathbb{P}$ de $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ est déterminée de manière unique par la donnée des

$\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$, $n \in \mathbb{N}$ $(p_n \in [0,1]$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1)$

théorème réciproque : Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs de somme 1, alors l'application

$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

$A = \bigcup_{i\in I}\{\omega_i\} \longmapsto \sum_{i\in I} p_i$

III. Conditionnement et indépendance

III.1. Probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle s'introduit à chaque fois qu'une information partielle sur le résultat d'une expérience aléatoire est fournie à l'expérimentateur.

définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$

Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le réel noté $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$ défini par $\mathbb{P}(A|B)$=$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

théorème : Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, l'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$

$A \longmapsto \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A)$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

Application : formule des probabilités composées : $(A, B) \in \mathcal{A}^2$

$\mathbb{P}(A\cap B)$=$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$ si $\mathbb{P}(A) \neq 0$

$\mathbb{P}(A\cap B)$ =$\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$ si $\mathbb{P}(B) \neq 0$

Généralisation : $(A_1, ..A_n) \in \mathcal{A}^n$ avec $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$=$\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots A_{n-1}}(A_n)$

Formule des probabilités totales : Soit $(A_i)_{i\in I}$ un SCE (ou système quasi-complet d'événements) avec $\forall\ i \in I \quad \mathbb{P}(A_i) \neq 0$ (*)

alors $\forall\ B \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)$

Remarque : On utilise la convention $\mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$=0 si $\mathbb{P}(A_n)$=0, donc la formule reste valable sans la condition (*).

Cas particulier : $A \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$, alors $(A, \bar{A})$ est un SCE

donc $\forall\ B \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)+\mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$

Formule de Bayes :

1. (A, B) deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$

alors $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_{A}(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A}(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_{A}(B)+\mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}$

2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un SCE (ou système quasi-complet d'événements)

alors si B événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0 \quad \forall\ j \in I \quad \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$

BAYES Thomas 1702 Londres - 1761 Tunbridge Wells : Théologien protestant, il fait des mathématiques sous la houlette d'Abraham de Moivre et s'intéresse au calcul des probabilités et au calcul diffrentiel ("Introduction to the doctrine of fluxions", 1736). Introduit par De Moivre, il est élu membre de la Royal Society en 1742. Son ouvrage sur les probabbilités, "Essay towards solving a problem in the doctrine of chances"sera publié deux ans après sa mort (1763). Contestées par Boole, mais aussi par Laplace dans ses premiers travaux en calcul des probabilités, les idées de Bayes ne se sont imposées que 20 ans aprs sa mort.

III.2. Indépendance

a/ Indépendance de deux événements :

définition : $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$ espace probabilisé, $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Remarque : Ne pas confondre indépendant et incompatible.

Remarque : si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ (respectivement $\mathbb{P}(A) \neq 0$) , A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A|B)$=$\mathbb{P}(A)$

(respectivement $\mathbb{P}(B|A)$=$\mathbb{P}(B)$)

ie la probabilité de l'un des deux événements n'est pas modifiée par l'information que l'autre est réalisé.

Remarque : cette notion dépend de $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$

Propriété : Un événement presque impossible est indépendant de tout autre événement.

Propriété : A et B sont indépendants $\iff \bar{A}$ et B sont indépendants

$\iff A$ et $\bar{B}$ sont indépendants

$\iff \bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

Corollaire : Un événement presque certain est indépendant de tout autre événement

Remarque : ne pas confondre indépendants et incompatibles

si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, A et B sont incompatibles dit que $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$

et donc $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc A et B sont dépendants

b/ Indépendance de n événements :

définition : $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$ espace probabilisé, $(A_1, .., A_n) \in \mathcal{A}^n$ sont mutuellement indépendants

si $\forall\ I \subset \{1, ..n\}$ $\quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$

Remarque : mutuelle indépendance $\Longrightarrow$ indépendance deux à deux

réciproque fausse