PC Espace préhilbertien réel

HILBERT David 1862 Königsberg - 1943 Göttingen : David Hilbert fait toutes ses études à Königsberg et obtient sa thèse de doctorat en 1885 sur les propriétés invariantes des fonctions sphériques. Professeur à l'université de Königsberg, il entreprend la rédaction de son premier traité, vaste synthèse sur la théorie des corps de nombres algébriques. Puis Hilbert obtient un poste à Göttingen et publie ses cours (527 pages) sur la Théorie des invariants algébriques. Hilbert travaille sur l'analyse fonctionnelle née de la physique mathématique: ce sera la construction d'espaces vectoriels topologiques et fonctionnels abstraits sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ englobant les espaces vectoriels euclidiens (en hommage à Euclide) et hermitiens (en hommage à Hermite). À la demande de Cantor, un Congrès international de mathématiques (CIM) est créé en 1897. Hilbert y énonca ses célèbres 23 grands problèmes ouverts (comme démontrer l'hypothèse du continu, la transcendance de nombres, le problème de la distribution des nombres premiers et la conjecture de Riemann concernant les nombres,...) qui devaient guider les mathématiciens du 20ème siècle. Depuis lors, le CIM se réunit tous les 4 ans et décerne depuis 1936, la médaille Fields.

I. Produit scalaire

I.1. Définition

E $\mathbb{R}$-espace vectoriel , un produit scalaire sur E est une forme $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

i/ bilinéaire

ii/ symétrique : $\forall (x,y) \in E^2 \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

iii/ positive : $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) \geq 0$

iv/ définie : $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (donc si $x \neq 0 \quad \varphi(x) > 0$)

On note $\varphi(x,y) = x.y$ ou $< x, y >$ ou $< x|y >$

Règle de calcul : $\forall (x_1, .., x_n) \in E^n \quad \forall (y_1, .., y_p) \in E^p \quad \forall (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall (\beta_1, .., \beta_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j)$$

définition : E $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ est appelé espace préhilbertien réel

Si de plus E est de dimension finie n, on dit que (E,φ) est un espace euclidien de dimension n.

I.2. Exemples

a/ produit scalaire usuel ou canonique sur $\mathbb{R}^n$: $x.y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$

b/ produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$: $(a < b)$ $\quad < f, g >= \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$

c/ produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $< A, B >= tr({}^t AB) = tr(A^T B)$

d/ produit scalaire sur $l^2\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \{(u_n)_n; \sum u_n^2 \text{ converge}\}$:

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

e/ produit scalaire sur $l^2(\mathcal{I})=\{f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$: f continue sur $\mathcal{I}$ et $\int_I f^2(t)dt$ converge $\}$:

$< f, g >= \int_I f(t)g(t)dt$

f/ produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: $\omega : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad t \longmapsto t^n\omega(t)$ intégrable sur $\mathcal{I}$

$< P, Q >= \int_I \omega(t)P(t)Q(t)dt$

I.3. Norme associée

(E,φ) espace préhilbertien réel, la norme associée est l'application:

$$\begin{aligned} \|\ \| : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)} = \sqrt{< x, x >} \end{aligned}$$

et la distance associée $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$(x, y) \longmapsto \|x - y\|$

Propriétés : $\forall\, x \in E \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *propriété de séparation*

$\forall\, x \in E \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$ *propriété d'homogénéité*

Relation entre normes et produit scalaire :

$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \qquad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y >$

Identité du parallélogramme : $\forall (x, y) \in E^2 \qquad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Identité de polarisation : $\forall (x, y) \in E^2 \qquad < x, y >= \dfrac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall\ (x, y) \in E^2 \quad | < x, y > | \leq \|x\|\ \|y\|$

avec égalité si et seulement si (x, y) sont liés

Corollaire : inégalité triangulaire : $\forall\ (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ avec égalité si et seulement si (x, y) sont positivement liés

théorème : $\forall\ (x, y) \in E^2 \quad |\ \|x\|$ - $\|y\|\ | \leq \|x - y\|$

II. Orthogonalité

E espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $< , >$

II.1. Définitions

$x \in E$ est unitaire si $\|x\| = 1$

$(x, y) \in E^2 \quad x$ et y sont orthogonaux si $< x, y >= 0$

Soit A une partie de E (non vide), $x \in E$ est orthogonal à A si $\forall y \in A \quad <x,y>=0$

Soit A une partie de E, on appelle orthogonal de A,

$A^\perp = \{ x \in E \ ; \forall y \in A <x,y>=0 \} = \{$ ensemble des vecteurs orthogonaux à $A\} \}$

A, B deux parties de E, A est orthogonal à B si $A \subset B^\perp$

Exemples : $E^\perp = \{0\} \qquad \{0\}^\perp = E$

théorème : A, B deux parties de E, on a :

1/ $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

2/ si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$

3/ $A \subset A^{\perp\perp}$

4/ $A \cap A^\perp = \{0\}$

définition famille orthogonale, orthonormale :

Une famille de vecteurs $(x_1, .., x_p)$ de E est orthogonale si

$\forall (i,j) \in \{1, .., p\}^2 \quad i \neq j \Longrightarrow <x_i, x_j>=0$

Elle est orthonormale si $(x_1, .., x_p)$ est orthogonale et $\forall i \in \{1, .., p\} \quad \|x_i\| = 1$

théorème : Une famille de vecteurs orthogonale ne contenant pas 0 est libre

théorème : Toute famille orthonormale est libre

et donc si E est un espace euclidien de dimension n, une famille orthonormale de cardinal n est une base orthonormale de E.

théorème de Pythagore :

1/ $\forall (x,y) \in E^2 \quad <x,y>=0 \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

2/ $\forall (x_1, ...x_p) \in E^p$ si $(x_1, .., x_p)$ famille orthogonale de E, alors

$\|x_1 + .. + x_p\|^2 = \|x_1\|^2 + .. + \|x_p\|^2$

PYTHAGORE de Samos -560?-480? : Astronome, philosophe, musicologue, Pythagore, disciple de Thalès, nous est connu par ses disciples et successeurs, les Pythagoriciens. Aucun écrit de Pythagore ne nous est parvenu. Pythagore a créé son école à Crotone. Il meurt assassiné dans des conditions obscures. On attribue à Pythagore, en son école, l'origine du terme mathématique au sens grec de mathematikos = celui qui veut apprendre, forgé sur mathêma = ce qui est enseigné, la connaissance. Pythagore est le premier théoricien de la technique des nombres: l'arithmétique, sur laquelle il fonde sa philosophie : l'harmonie du Monde est régie par les nombres entiers, le pair, l'impair et la décade : la dizaine. Les Pythagoriciens annoncent une rupture avec le système sexagésimal des Chaldéens dont l'usage se perpétuera cependant en astronomie.

II.2. Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux

F sous-espace vectoriel de E, on a toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$

Si $F \oplus F^\perp = E$, alors $F^\perp$ est le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F

théorème dans le cas de la dimension finie : Si E espace vectoriel euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F \oplus F^{\perp} = E$

donc tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire orthogonal et $dim(F^{\perp}) = dim(E) - dim(F)$ et $F^{\perp\perp} = F$

Corollaire : E espace vectoriel euclidien, alors E admet une base orthonormée

Pratique : procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : Si $\mathcal{B}$=$(x_1, .., x_n)$ est une base de E alors il existe une unique base orthnormée $\mathcal{B}$' de E telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$' soit triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

GRAM Jörgen Pedersen 1850 Nustrup - 1916 Copenhague : Fils d'agriculteur, Jörgen Gram fait ses études secondaires à Haderslev puis à la Kathedralskole de Ribe, collège danois universitaire réputé. Gram s'intéresse à l'algèbre linéaire, une branche alors récente des mathématiques. En 1875, Gram offre ses compétences mathématiques à une compagnie d'assurances dont il deviendra directeur 10 ans plus tard. Son travail le conduit à étudier la statistique, le calcul des probabilités et l'analyse nuérique dans le cadre de la gestion de l'économie forestière. Il introduit en 1883 sa méthode d'orthonormalisation d'une base d'un espace vectoriel, dite de Gram-Schmidt car le mathématicien allemand Erhard Schmidt énonce le même procédé quelques années plus tard.

SCHMIDT Erhard 1876 Tartu - 1959 Berlin : Erhard Schmidt fait ses études à Berlin et à Göttingen sous la direction de Hilbert. Ses travaux portent essentiellement sur l'aspect géométrique de l'algèbre linéaire et le développement de la théorie des espaces de Hilbert. Dans un de ses mémoires sur les équations intégrales Schmidt énonce l'algorithme d'orthonormalisation d'une base d'un espace vectoriel, également attribuée au danois Gram

Application : théorème de la base orthonormée incomplète : E espace vectoriel euclidien de dimension n, soit $(u_1, ..u_p)$ une famille orthonormée de E, alors il existe $(u_{p+1}, .., u_n)$ tels que $(u_1, .., u_n)$ soit une base orthonormée de E

Propriété : Si $(e_1, .., e_n)$ base orthononormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

alors $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i =^t XY = X^T Y$ et $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{^tXX} = \sqrt{X^T X}$

Vecteur normal à un hyperplan : Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ (avec $dim(E) = n$), alors F est un hyperplan dont une équation est $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ et $(a_1, \cdots, a_n)$ est vecteur normal à F, donc $F^{\perp}$ est la droite de vecteur directeur ce vecteur normal.

théorème dans le cas où F est de dimension finie : Si E espace préhilbertien réel alors pour tout sous-espace vectoriel F de E de dimension finie , on a $F \oplus F^{\perp} = E$

donc tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal

II.3. Projecteur orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors $E = F \oplus F^{\perp}$

et si $x \in E$ alors $\exists\,!\ (x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^{\perp} \quad x = x_F + x_{F^\perp}$

x_F est le projeté orthogonal de x sur F et l'application $p_F : x \longmapsto x_F$ est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$, appelé projecteur orthogonal sur F

Expression de $p_F(x)$ en base orthonormée : Si $(e_1, .., e_p)$ est une base orthonormée de F , alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i, x > e_i$$

Cas particulier : Si $F = \mathcal{V}ect(u)^{\perp}$ et $\|u\| = 1$ alors $p_F(x) = x - < x, u > u$

II.4. Distance à un sous-espace vectoriel

Si F sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$, la distance de x à F est $d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$

$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

Si $(e_1, .., e_n)$ est une base orthonormée de F, alors $d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} < e_i, x >^2}$

Cas particulier : Si $F = \mathcal{V}ect(u)^{\perp}$ et $\|u\| = 1$ alors $d(x, F) = | < x, u > |$

III. Isométries vectorielles

E espace euclidien de dimension n

III.1. Définition

définition : $u \in \mathcal{L}(E)$ u est une **isométrie vectorielle** (ou endomorphisme orthogonal) si u conserve la norme , ie $\forall\, x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles.

Exemples : $id_E \in \mathcal{O}(E)$, une symétrie orthogonale, une réflexion (ie symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan) sont des isométries vectorielles.

théorème : $u \in \mathcal{L}(E)$,

u conserve la norme $\Longleftrightarrow$ u conserve le produit scalaire

$\Longleftrightarrow$ l'image d'une base orthonormée de E par u est une base orthonormée de E

théorème : $(\mathcal{O}(E), o)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), o)$ appelé groupe orthogonal de E

ie $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$, $\forall\, (u, v) \in \mathcal{O}(E)^2 \quad uov \in \mathcal{O}(E) \quad$ et $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$

et $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \ ; \ det(u) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe spécial orthogonal de E

Un élément de $\mathcal{SO}(E)$ est appelé isométrie vectorielle positive

Un élément de $\mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ est appelé isométrie vectorielle négative

théorème : $u \in \mathcal{O}(E)$, $\quad Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$

théorème : $u \in \mathcal{O}(E)$, $\quad F$ sous-espace vectoriel de E, alors
F stable par $u \iff F^{\perp}$ stable par u

III.2. Traduction matricielle

définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle

on a $\forall\ (x, y) \in E^2 \quad < u(x), u(y) >=< x, y >$ ce qui se traduit par
$\forall\ (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \quad (AX)^T(AY) = X^TY \qquad$ ou $X^TA^TAY = X^TY$

donc $A^TA = I_n \qquad$ donc $A^{-1} = A$

$$\begin{aligned} A \text{ est orthogonale} &\iff A^TA = I_n \\ &\iff AA^T = I_n \\ &\iff A^{-1} = A \end{aligned}$$

On note $\mathcal{O}_n$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales

$(\mathcal{O}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$
ie $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \forall\ (A, B) \in \mathcal{O}_n^2 \quad AB \in \mathcal{O}_n \quad$ et $A^{-1} \in \mathcal{O}_n$.
et $\mathcal{SO}_n$=$\{A \in \mathcal{O}_n\ ;\ det(A) = 1\}$ est un groupe, appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n (ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$)
Une matrice de $\mathcal{SO}_n$ est une matrice orthogonale droite, une matrice de $\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{SO}_n$ est une matrice orthogonale gauche

Remarque : si $A \in \mathcal{O}_n \quad det(A^TA) = (det(A))^2 = 1 \quad$ donc $det(A) = 1$ ou -1

théorème : $\mathcal{SO}_n$=$\{A \in \mathcal{O}_n\ ;\ det(A) = 1\} \quad \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{SO}_n$=$\{A \in \mathcal{O}_n\ ;\ det(A) = -1\}$

Corollaire : $\mathcal{SO}(E)$=$\{u \in \mathcal{O}(E)\ ;\ det(u) = 1\} \quad \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$=$\{u \in \mathcal{O}_n\ ;\ det(u) = -1\}$

théorème : $A \in \mathcal{O}_n \iff$ les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de E

comme $A \in \mathcal{O}_n \iff A^T \in \mathcal{O}_n$
$A \in \mathcal{O}_n \iff$ les vecteurs lignes de A forment une base orthonormée de E

théorème : $A \in \mathcal{O}_n$, $\quad Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$

III.3. Changement de bases orthonormées

E espace euclidien, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées, alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est orthogonale donc si $f \in \mathcal{L}(E)$ $A = Mf_{B_1}$ $A' = Mf_{B_2}$ alors $A' = P^{-1}AP = P^TAP$

III.4. Orientation d'un espace vectoriel euclidien

E espace euclidien, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées, alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est orthogonale.

ou $det(P) = 1$ et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de même sens.

ou $det(P) = -1$ et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de sens opposé.

Orienter E, c'est choisir des bases toutes de même sens, donc on a deux orientations possibles.

Dans la pratique, on choisit l'orientation directe telle que la base canonique soit positive.

III.5. Étude de la dimension 1

E espace euclidien de dimension 1, e base orthonormée de E

$\mathcal{O}(E)$=$\{id_E, -id_E\}$ et $\mathcal{SO}(E) = \{id_E\}$

et $\mathcal{O}_1$=$\{(1), (-1)\}$ $\mathcal{SO}_1 = \{(1)\}$

III.6. Étude de de la dimension 2

théorème : $\mathcal{O}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

et $\mathcal{SO}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Traduction géométrique : $\mathcal{SO}(E) = \{$ rotations$\}$

$\mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E) = \{$ réflexions$\}$

Propriété : On pose $\mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\mathrm{S}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

On a $\mathrm{R}_\theta\mathrm{R}_{\theta'}$ =$\mathrm{R}_{\theta+\theta'}$ = $\mathrm{R}_{\theta'}\mathrm{R}_\theta$ donc $(\mathcal{SO}_2,\times)$ est commutatif.

$\mathrm{S}_\theta\mathrm{S}_{\theta'} = \mathrm{R}_{\theta-\theta'}$ $\mathrm{S}_{\theta'} = \mathrm{S}_{\theta+\theta'}$ $\mathrm{S}_{\theta'}\mathrm{R}_\theta = \mathrm{S}_{\theta'-\theta}$

théorème : Toute rotation est produit de deux réflexions

IV. Réduction des endomorphismes autoadjoints

E espace vectoriel euclidien

IV.1. Endomorphismes autoadjoints

définition : $u \in \mathcal{L}(E)$, u est autoadjoint *(ex symétrique)* si

$\forall\ (x, y) \in E$ $\quad < u(x), y >=< x, u(y) >$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.

<u>théorème :</u> p projecteur de E, alors p est symétrique si et seulement si p est un projecteur orthogonal.

<u>théorème :</u> $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans une base orthonormée de E, alors
$u \in \mathcal{S}(E) \Longleftrightarrow A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
<u>théorème :</u> si u endomorphisme symétrique alors $Ker(u) = (Im(u))^{\perp}$

<u>théorème :</u> si u endomorphisme symétrique alors si F est un sous-espace vectoriel de E
alors F stable par $u \Longleftrightarrow F^{\perp}$ stable par u

IV.2. Théorème spectral

<u>théorème :</u> A matrice symétrique réelle, les valeurs propres réelles de A sont réelles et les sous-espaces propres asssociés sont deux à deux orthogonaux.

<u>théorème de réduction ou théorème spectral :</u> A matrice symétrique réelle, alors A est diagonalisable en base orthonormée.
ie $\exists\, P \in \mathcal{O}_n \quad \exists\, D \in \mathcal{D}_n \quad P^T A P = D$
ou $u \in \mathcal{S}(E)$, alors u admet une base orthonomée de vecteurs propres (ou u est diagonalisable en base orthonormée).

<u>Remarque :</u> théorème faux sur $\mathbb{C}$

IV.3. Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

<u>définition :</u> u endomorphisme autoadjoint est
positif si $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$
défini positif si $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$
On note $\mathcal{S}_n^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E et $\mathcal{S}_n^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E.

<u>définition :</u> $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est
matrice symétrique positive si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$
matrice symétrique définie positive si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

<u>théorème :</u> $u \in \mathcal{S}(E)$
$u \in \mathcal{S}_n^+(E) \Longleftrightarrow \forall\, x \in E \quad < x, u(x) > \geq 0$
$u \in \mathcal{S}_n^{++}(E) \Longleftrightarrow \forall\, x \in E\ ,\ x \neq 0, \quad < x, u(x) >> 0$

<u>théorème :</u> $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T A X \geq 0$
$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ,\ X \neq 0 \quad X^T A X > 0$