PC Rappels Sup: Fonctions usuelles

1. Fonctions polynômes et fractions rationnelles

$f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$ alors f est continue (même c^∞) sur $\mathbb{R}$ $f(x) \sim a_n x^n$ en $+\infty$ et en $-\infty$

$x \longmapsto ax$ est linéaire et $x \longmapsto ax+b$ est affine

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes définie et continue sur $\mathbb{R}$ privé des pôles (zéros du dénominateur)

2. Logarithme néperien

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$

ln est continue (et même c^∞) sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$\forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ $\ln(x^r) = r \ln x$

Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on définit le logarithme en base a par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Si $a = 10$, on parle du logarithme décimal noté log ou $\log_{10}$.

3. Exponentielle

exp est la solution de l'équation différentielle $y' = y$ prenant la valeur 1 en 0

exp est continue (et même c^∞) sur $\mathbb{R}$ de dérivée elle-même

exp est la fonction réciproque de ln : $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $\forall\ y \in \mathbb{R}_+^*$ $y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln y$

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\ \mathrm{e}^y$ $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ $(\mathrm{e}^x)^r = \mathrm{e}^{rx}$

si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit l'exponentielle en base a par $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$

4. Fonction puissance

$\alpha \in \mathbb{R}$ $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ fonction puissance définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Cette fonction est continue (même c^∞) sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$

$\forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ $x^\alpha\ y^\alpha = (xy)^\alpha$ $x^\alpha\ x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$

fonctions u^v: $u^v(x) = \exp(v(x)\ln(u(x)))$

5. Fonctions hyperboliques

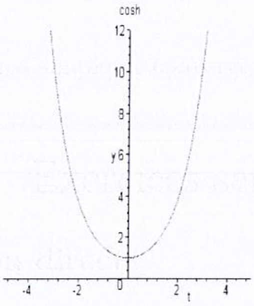
$\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ $\sinh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

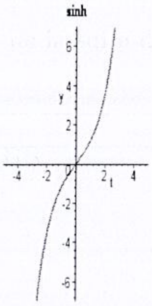
cosh, sinh, tanh sont définies sur $\mathbb{R}$, continues (même c^∞ sur $\mathbb{R}$) de dérivées respectives sinh , cosh ,

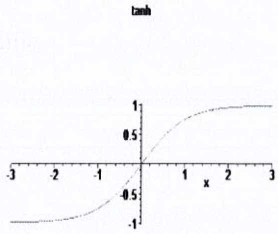
$\dfrac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$

sinh et tanh sont impaires, cosh est paire

On a $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$







6. Fonctions circulaires

$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

cos, sin sont définies sur $\mathbb{R}$, continues (même c^∞) de dérivées respectives -sin , cos

tan est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ (même c^∞ sur cet ensemble) de dérivée $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
sin et tan sont impaires, cos est paire

Leurs fonctions réciproques sont arccos, arcsin, arctan

On a $\forall\,(x,y) \in [0,\pi] \times [-1,1] \quad y = \cos(x) \iff x = \arccos(y)$

$\forall\,(x,y) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \times [-1,1] \quad y = \sin(x) \iff x = \arcsin(y)$

$\forall\,(x,y) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R} \quad y = \tan(x) \iff x = \arctan(y)$

arcsin est définie sur [-1,1] à valeurs sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, continue sur [-1,1] , dérivable (c^∞) sur]-1,1[de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, elle est impaire, strictement croissante.

arccos est définie sur [-1,1] à valeurs sur $[0,\pi]$, continue sur [-1,1] , dérivable (c^∞) sur]-1,1[de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, elle est strictement décroissante.

arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, continue ($c^\infty$) sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, elle est impaire, strictement croissante.

On a $\forall\, x \in [-1,1] \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^* \quad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = sign(x)\,\dfrac{\pi}{2}$ où $sign(x)$ désigne le signe de x