PC Déterminants

I. Applications n-linéaires

I.1. Définition

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

E_1 , $E_2, \cdots, E_n$ n $\mathbb{K}$espaces vectoriels F $\mathbb{K}$espace vectoriel

définition : $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ est n-linéaire si φ est linéaire par rapport à chaque variable ,

ie si $(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$

$E_i \longrightarrow F$

$x_i \longmapsto \varphi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ est linéaire

Remarque : si F=$\mathbb{K}$, on parle de forme n-linéaire.

I.2. Applications n-linéaires alternée

définition : E et F deux $\mathbb{K}$espaces vectoriels , $f : E^n \longrightarrow F$ n-linéaire .

f est alternée si f associe 0 à tout n-uplet ayant deux fois le même vecteur.

théorème : $f : E^n \longrightarrow F$ n-linéaire, alors

f alternée $\Longleftrightarrow \forall\ (x_1, \cdots, x_n) \in E^n \quad i \neq j \quad f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$

II. Déterminants de vecteurs

théorème (admis) : E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n, soit $\mathcal{B}$ une base de E

Il existe une unique forme n-linéaire alternée $det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$=1.

Donc toute forme n-linéaire alternée est combinaison linéaire de $det_{\mathcal{B}}$.

Propriétés : 1. si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , $det_{\mathcal{B}'}$=$det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})det_{\mathcal{B}}$

2. $\forall\ (x_1, \cdots, x_n) \in E^n \quad det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) \neq 0 \Longleftrightarrow (x_1, \cdots, x_n)$ libres dans E

$\Longleftrightarrow (x_1, \cdots, x_n)$ base de E

III. Déterminant d'un endomorphisme

E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n, soit $\mathcal{B}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$

théorème et définition : Le déterminant de $f(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$ et s'appelle le déterminant de f, noté $det(f)$

Propriétés : 1. $det(id_E) = 1$

2. $det(\lambda f) = \lambda^n det(f)$

3. $f \in \mathcal{GL}(E) \iff det(f) \neq 0$

4. $det(fog) = det(f)det(g) = det(gof)$ et si $f \in \mathcal{GL}(E)$ alors $det(f^{-1}) = \dfrac{1}{det(f)}$

IV. Déterminant d'une matrice

définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le déterminant de A est de le déterminant de l'endomorphisme de matrice A ou le déterminant de ses vecteurs colonnes.

ie si $C_1, \cdots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de A $\quad det(A) = det_{\mathcal{B}}(C_1, \cdots, C_n)$

Propriétés

1. Si A a deux colonnes égales alors $det(A) = 0$
2. $det(I_n) = 1$
3. $\lambda \in \mathbb{K} \qquad det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
4. Le déterminant est inchangé en rajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes
5. Si A matrice triangulaire $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$
6. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff det(A) \neq 0$
7. $det(AB) = det(A)det(B) = det(BA)$ et donc si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$
8. $det(A^T) = det(A)$

V. Calcul de déterminants

V.1. Déterminants d'une matrice triangulaire par blocs

théorème: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. alors $det(M) = det(A)det(C)$

théorème: $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. alors $det(M) = det(A)det(C)$

V.2. Développement suivant une rangée

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & . & . & a_{1,j} & . & . & a_{n,n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \\ a_{n,1} & . & . & a_{n,j} & . & . & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

<u>développement suivant la $j^{ème}$ colonne :</u>

$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$ avec $D_{i,k}$ mineur d'indices i, j , déterminant obtenu à partir de A en barrant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne

Suivant la $i^{ème}$ ligne : $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

V.3. Déterminant de Vandermonde

VANDERMONDE Alexandre Théophile 1735 Paris -1796 Paris : Fils de médecin, Vandermonde commence des études de droit. Mais sa rencontre avec d'Alembert l'entraîne vers les sciences, principalement les mathématiques et la chimie. Il entre à l'Académie des sciences en tant qu'adjoint-géomètre suite à son "Mémoire sur la résolution des équations". Vandermonde est, avec l'abbé Henri J.-B. Grégoire, à l'origine de la création du CNAM, Conservatoire des Arts et Métiers, fondé sous la Révolution par la Convention en 1794, la même année que l'École polytechnique et l'École normale supérieure. Ami de Monge, proche de Lavoisier et de Berthollet, Vandermonde intervient dans la mise en place du systme métrique. Les travaux de Vandermonde portent par ailleurs sur les équations linéaires et les déterminants.

$a_0, \cdots, a_n$ $n+1$ scalaires

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ a_0 & a_1 & . & . & . & a_n \\ a_0^2 & . & . & . & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_0^n & a_1^n & . & . & . & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i) \right) V(a_0, \cdots, a_{n-1})$$

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

<u>Remarque : lien avec le problème d'interpolation de Lagrange :</u>

$(a_0, \cdots, a_n)$ $n+1$ scalaires distincts $\forall\ (y_0, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ $\exists!\ P_n \in \mathbb{K}_n[X]$ $\forall\ i \in [\![0, n]\!]$ $P_n(x_i) = y_i$

Si $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$

alors $\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 a_0 + \cdots + \lambda_n a_0^n = y_1 \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_1^n = y_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_n + \cdots + \lambda_n a_n^n = y_n \end{cases}$ ie $V(a_0, \cdots, a_n)^T \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = (V(a_0, \cdots, a_n)^{-1})^T \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

V.4. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

$$\begin{vmatrix} x & 0 & . & 0 & a_0 \\ -1 & x & . & . & a_1 \\ . & \ddots & \ddots & & \\ 0 & . & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & . & . & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

V.5. Python et déterminant

import numpy as np

import numpy.linalg as alg

alg.det(A) renvoie le déterminant de A