PC Rappels sup : Intégration sur un segment

I. Intégrale

I.1. Fonction en escalier

définition: $a < b$, une subdivision de $[a, b]$ est une suite finie notée $\sigma=(a_0, ..., a_n)$ telle que

$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ et le pas de σ est $\max\limits_{0 \leq i \leq n-1}(a_{i+1} - a_i)$

définition: $a < b$, $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0, ..., a_n)$ de $[a, b]$ (**subdivision associée à** f) telle que $\forall\, i \in \{0, .., n-1\}$ $\exists\, \lambda_i \in \mathbb{R}$ $\forall\, x \in]a_i, a_{i+1}[$ $\varphi(x) = \lambda_i$

On définit alors l'intégrale de φ sur $[a, b]$ par $\displaystyle\int_a^b \varphi = \int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\lambda_i$

1. linéarité : $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_a^b (f + \alpha g) = \int_a^b f + \alpha \int_a^b g$

2. positivité : $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ en escalier sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$

3. croissance : $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$ avec $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$

4. inégalité des valeurs absolues : $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

5. relation de Chasles : $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$, alors

$\forall\, c \in]a, b[$ $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

CHASLES Michel 1793 Épernon - 1880 Paris : Polytechnicien, Michel Charles obtient son doctorat sous la houlette de Poisson. Officier du génie, il enseigne la mécanique et la géodésie à l'École Polytechnique puis a une chaire de géométrie à la Sorbonne. Le pricipal de son œuvre sera publié sans son Traité de géométrie supérieure. On lui doit le nom d'homographie (du grec homos=semblable et graphikos=action d'écrire ou de dessinner). Élu à l'Académie des Sciences, Chasles a été le premier président de la Société Mathématique de France, et aussi membre à titre étanger de la Royal Society

I.2. Fonction continue

$a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$,

On pose $\mathcal{A}=\{\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; \varphi$ en escalier sur $[a, b]$ et $\varphi \geq f\}$

$\mathcal{B}=\{\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; \psi$ en escalier sur $[a, b]$ et $\psi \leq f\}$

alors $\displaystyle\inf\{\int_a^b \varphi; \varphi \in \mathcal{A}\} = \sup\{\int_a^b \psi; \psi \in \mathcal{B}\}$.

Ce nombre commun est appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et noté $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \left(\text{ou} \int_a^b f\right)$

Interprétation géométrique : $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire algébrique de la partie du plan délimitée par les courbes d'équations $x = a$, $x = b$, $y = 0$, et $y = f(x)$.

théorème : Sommes de Riemann : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$,

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

Propriétés

1. linéarité : $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\int_a^b (f + \alpha g) = \int_a^b f + \alpha \int_a^b g$

2. positivité : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$

3. croissance : $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ avec $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

4. inégalité des valeurs absolues : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

5. relation de Chasles : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, alors
$\forall\, c \in \,]a,b[\quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

6. théorème : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (*respectivement de signe fixe*) continue sur $[a,b]$, alors
$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f = \tilde{0}$

7. valeur moyenne : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, alors si $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ $\quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Autres propriétés : **1. Intégrales sur un segment symétrique :** Soit $a > 0$ et $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

2. Intégrales d'une fonction périodique sur une période. : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T-périodique et continue

$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

II. Extension

$f : [\min(a,b), \max(a,b)] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

on a défini $\displaystyle\int_a^b f$ si $a < b$

On pose $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ si $b < a$

et $\displaystyle\int_a^a f = 0$

La linéarité, la relation de Chasles restent vraies, l'inégalité des valeurs absolues devient

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right| \quad \text{ou} \quad \left|\int_a^b f\right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f|$$

III. Primitive d'une fonction continue

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathcal{I}$, alors si $a \in \mathcal{I}$

$x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a

Donc toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives et $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a)$ pour toute primitive h de f.

IV. Cas des fonctions à valeurs complexes

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur $[a,b]$

alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + i\int_a^b Im(f)$

Propriétés

La linéarité reste vraie, la relation de Chasles reste vraie

l'inégalité des modules devient $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$

Intégration par parties : si $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe c^1 sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b (uv')(t)dt = [(uv)(t)]_a^b - \int_a^b (u'v)(t)dt$$

Changement de variables : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur $[a,b]$, $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ de classe c^1 et bijective de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Inégalité de Taylor-Lagrange : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe c^{n+1} sur $[a,b]$, alors

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{x\in[a,b]}|f^{n+1}(x)|$$

V. Fonctions continues par morceaux

V.1. Définition

$[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux (cpm) s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, .., a_n)$ de $[a,b]$ (**subdivision associée à** f) telle que

$\forall\, i \in \{0,1,..,n-1\}$ $\quad f_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$

$$x \in]a_i, a_{i+1}[\longmapsto f(x)$$
$$a_i \longmapsto \lim_{x\mapsto a_i^+} f(x)$$
$$a_{i+1} \longmapsto \lim_{x\mapsto a_{i+1}^-} f(x)$$

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ où $\mathcal{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$

donc f est cpm sur $[a,b]$ équivaut à f continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et f admet en tout point de $[a,b]$ une limite à droite et une limite à gauche.

f est cpm sur $\mathcal{I}$ si f cpm sur tout segment de $\mathcal{I}$

Propriété : L'ensemble $\mathcal{CM}(\mathcal{I},\mathbb{K})$ des fonctions cpm sur $\mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathcal{I},\mathbb{K})$.

V.2. Intégrale d'une fonction cpm sur un segment

définition : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm associée à la subdivision σ

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)dt$$

Cette valeur ne dépend pas de la subdivision associée à f choisie.

V.3. Propriétés de l'intégrale d'une fonction cpm sur un segment

1. linéarité : $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ cpm sur $[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_a^b (f+\alpha g) = \int_a^b f + \alpha\int_a^b g$

2. positivité : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$

3. croissance : $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cpm sur $[a,b]$ avec $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$

4. inégalité des modules : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ cpm sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

5. relation de Chasles : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cpm sur $[a,b]$, alors

$\forall\, c \in \,]a,b[\quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

mais $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (*respectivement de signe fixe*) cpm sur $[a,b]$, alors

$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f = \tilde{0}$ est faux

V.4. Primitives d'une fonction cpm

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur $\mathcal{I}$ et $a \in \mathcal{I}$

définition : Une primitive de f est une fonction F continue sur $\mathcal{I}$, avec $F' = f$ en les points où f est continue

théorème : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur $\mathcal{I}$ $\quad a \in \mathcal{I}$

alors $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a