PC Intégrales généralisées (ou impropres)

I. Définition

I.1. I=$[a,b[$, $a \in \mathbb{R}$ $b \in]a,+\infty[\cup \{+\infty\}$

définition: $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur $[a,b[$

On définit alors $F : [a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$
$$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

L'intégrale généralisée de f est convergente si $\lim\limits_{x \mapsto b^-} F(x)$ est finie , on note $\lim\limits_{x \mapsto b^-} F(x) = \int_a^b f = \int_I f$

Sinon l'intégrale généralisée de f diverge

Remarques : 1. L'existence de $\lim\limits_{x \mapsto b^-} F(x)$ ne dépend pas de a

2. Si b est fini et f cpm sur $[a,b]$ alors $\lim\limits_{x \mapsto b^-} F(x) = \int_a^b f(t)dt$, donc on retrouve la définition de l'intégrale sur un segment (intégrale faussement impropre)

I.2. I=$]a,b]$, $a \in]-\infty,b[\cup \{-\infty\}$ $b \in \mathbb{R}$

définition: $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur $]a,b]$

On définit alors $F :]a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$
$$x \longmapsto \int_x^b f(t)dt$$

L'intégrale généralisée de f est convergente si $\lim\limits_{x \mapsto a^+} F(x)$ est finie , on note $\lim\limits_{x \mapsto a^+} F(x) = \int_a^b f = \int_I f$

Sinon l'intégrale généralisée de f diverge

I.3. I=$]a,b[$, $a \in]-\infty,b[\cup \{-\infty\}$ $b \in]a,+\infty[\cup \{+\infty\}$

définition: $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur $]a,b[$

soit $c \in]a,b[$ l'intégrale généralisée de f est convergente si $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes

Sinon l'intégrale généralisée de f diverge

Remarque : Si $a \in \mathbb{R}$ $\int_a^b f(t)dt$ converge $\Longleftrightarrow \int_0^{b-a} f(x+a)dx$ converge

Si $b \in \mathbb{R}$ $\int_a^b f(t)dt$ converge $\Longleftrightarrow \int_0^{b-a} f(b-x)dx$ converge

I.4. Exemples

a. Intégrales de Riemann:

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente $\Longleftrightarrow \alpha > 1$

Extension: si $b > a$, $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est convergente $\Longleftrightarrow \alpha > 1$

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente $\Longleftrightarrow \alpha < 1$

Extension: si $b > a$, $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est convergente $\Longleftrightarrow \alpha < 1$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est toujours divergente et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ aussi

b. logarithme:

$\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)dt$ est convergente

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)dt$ est divergente donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)dt$ est divergente

c. exponentielle:

$\alpha \in \mathbb{R}^*$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt$ est convergente $\Longleftrightarrow \alpha < 0$

Extension: si $\alpha \in \mathbb{C}^*$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt$ est convergente $\Longleftrightarrow Re(\alpha) < 0$

I.5. Premières propriétés

1. linéarité : $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur I, $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent,

alors $\displaystyle\int_I (\alpha f + g)$ converge et $\displaystyle\int_I (\alpha f + g) = \alpha \int_I f + \int_I g$

2. positivité : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur I avec $\displaystyle\int_I f$ convergente, alors $\displaystyle\int_I f \geq 0$

3. croissance : $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cpm sur I vérifiant $f \leq g$ et $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent, , alors $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$

4. relation de Chasles : $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur I avec $\displaystyle\int_I f$ convergente, $c \in]a, b[$ alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Remarque : $\int_a^b f(t)dt$ converge n'implique pas $\lim_{x \mapsto b^-} f(t) = 0$

et $\lim_{x \mapsto b^-} f(x) = 0$ n'implique pas $\int_a^b f$ converge

II. Intégrales généralisées de fonctions positives

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur I

II.1. Théorème fondamental

$I=[a,b[$ **:** si $x \in [a,b[\quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$

alors $\int_a^b f$ converge $\Longleftrightarrow F$ est majorée sur $[a,b[$

$I=]a,b]$ **:** si $x \in]a,b]\quad F(x) = \int_x^b f(t)dt$

alors $\int_a^b f$ converge $\Longleftrightarrow F$ est majorée sur $]a,b]$

II.2. Comparaisons

théorème : $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur I avec $0 \leq f \leq g$

Si $\int_I g$ converge alors $\int_I f$ converge

Si $\int_I f$ diverge alors $\int_I g$ diverge

Les réciproques sont fausses

théorème : $f, g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur $[a,b[$

On suppose $f = O(g)$ en b (ou $f = o(g)$ en b) alors

si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge

si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge

De même

théorème : $f, g :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur $]a,b]$

On suppose $f = O(g)$ en a (ou $f = o(g)$ en a) alors

si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge

si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge

Corollaire : règle de Riemann : 1. $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur $[a, +\infty[$

Si $\exists\ \alpha > 1 \quad f = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ en $+\infty$ (ou $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^\alpha f(x) = 0$) alors $\int_a^{+\infty} f$ converge

Si $\exists\ \alpha \leq 1 \quad \frac{1}{x^\alpha} = O(f)$ en $+\infty$ (ou $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$) alors $\int_a^{+\infty} f$ diverge

2. $f :]0,a] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur $]0,a]$

Si $\exists\ \alpha < 1 \quad f = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ en 0^+ (ou $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x^\alpha f(x) = 0$) alors $\int_0^{a} f$ converge

Si $\exists\ \alpha \geq 1 \quad \frac{1}{x^\alpha} = O(f)$ en 0^+ (ou $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x^\alpha f(x) = +\infty$) alors $\int_0^{a} f$ diverge

théorème : règle des équivalents : 1. $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur $[a, b[$ avec $f \sim_b g$

alors $\int_a^b g$ et $\int_a^b f$ sont de même nature

2. $f, g :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur $]a, b]$ avec $f \sim_a g$

alors $\int_a^b g$ et $\int_a^b f$ sont de même nature

III. Calculs

III.1. Intégration par parties

théorème : $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur I avec $\lim\limits_{x \mapsto a^+} (fg)(x) = l$ et $\lim\limits_{x \mapsto b^-} (fg)(x) = l'$

alors $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature et en cas de convergence

et $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$

III.2. Changement de variables

théorème : $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue sur I, $\varphi : J \longrightarrow I$ bijective de J sur I, strictement croissante de J sur I

et de classe c^1 sur J

alors $\int_J \varphi'(u)(f o \varphi)(u)du$ et $\int_I f(t)dt$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_J \varphi'(u)(f o \varphi)(u)du = \int_I f(t)dt$$

si φ est strictement décroissante de J sur I alors $\int_J \varphi'(u)(f o \varphi)(u)du$ et $\int_I f(t)dt$ sont de même nature et en cas de convergence

$$-\int_J \varphi'(u)(f o \varphi)(u)du = \int_I f(t)dt$$

IV. Intégrales absolument convergentes

$I=[a,b[\ ,\ ]a,b]$ ou $]a,b[$

définition: $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur I

On dit que f a une intégrale absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge

On écrit $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument

théorème : $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm

Si $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge et dans ce cas $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

la réciproque est fausse

Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b |f|$ diverge, on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est semi-convergente

exemple d'intégrale semi-convergente : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$

PC Fonctions intégrables

I. Intégrabilité

I.1. Définition

I=$[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$

définition: $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur I

f est intégrable sur I si $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge (ou si $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument)

Remarques : 1. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm alors f est intégrable sur $I \Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^b f$ converge

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge mais $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

I.2. Propriétés

$f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur I

théorème : si $0 \leq |f| \leq |g|$ alors

si $\displaystyle\int_a^b |g|$ converge alors $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge , ie l'intégrabilité de g entraîne l'intégrabilité de f

si $\displaystyle\int_a^b |f|$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b |g|$ diverge , ie la non-intégrabilité de f entraîne la non-intégrabilité de g

théorème : si $I = [a, b[$ et $f = O(g)$ en b^-

on a de même l'intégrabilité de g entraîne l'intégrabilité de f et la non-intégrabilité de f entraîne la non-intégrabilité de g

de même si I=$]a, b]$ et $f = O(g)$ en a^+

théorème : si $I = [a, b[$ et $|f(x)| \sim_b |g(x)|$

on a l'intégrabilité de g équivaut à l'intégrabilité de f

de même si I=$]a, b]$ et $|f(x)| \sim_a |g(x)|$

théorème : $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue sur I, alors $\displaystyle\int_I |f| = 0 \Longleftrightarrow f = \tilde{0}$

II. Normes

II.1. Norme de la convergence en moyenne

On note $\mathcal{I}(I, \mathbb{K})$=$\{f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur I et intégrable sur I $\}$

théorème : $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$

On note $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})=\{f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue sur I et intégrable sur I $\}$. On a de même

théorème : $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$

Si $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ on pose $N_1(f) = \displaystyle\int_I |f|$

N_1 est une norme sur $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, appelée norme de la convergence en moyenne

II.2. Norme de la convergence en moyenne quadratique

On note $\mathcal{I}_2(I,\mathbb{K})=\{f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur I et f^2 intégrable sur I $\}$

théorème : $\mathcal{I}_2(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$

On note $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{K})=\{f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue sur I et f^2 intégrable sur I $\}$. On a de même

théorème : $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$

théorème : $(f,g) \in \mathcal{I}_2(I,\mathbb{K})^2$ alors $fg \in \mathcal{I}(I,\mathbb{K})$
$(f,g) \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{K})^2$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

Produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$:

On pose
$$< \, , \, > : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_I fg \end{array}$$

$< \, , \, >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{K})$

donc $\|f\|_2 = \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\displaystyle\int_I f^2}$ est une norme sur $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{K})$, appelée norme de la convergence en moyenne quadratique

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\left|\displaystyle\int_I fg\right| \leq \|f\|_2\|g\|_2$

III. Théorèmes

III.1. Théorème de convergence dominée

théorème : (admis) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions cpm $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$
avec la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm et il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm sur I et intégrable sur I telle que
$\forall \, n \in \mathbb{N} \quad \forall \, x \in I \qquad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$

alors $(f_n)_n$ et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\mapsto+\infty} f_n = \int_I f$

III.2. Théorème d'intégration terme à terme

théorème : (admis) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions cpm $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et f_n intégrable sur I

avec la série $\sum f_n$ converge simplement vers f, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm et $\sum \int_I |f_n|$ converge

alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

IV. Intégrales dépendant d'un paramètre

$F(x) = \displaystyle\int_I f(t,x)dt$

$\mathcal{D}_F = \{x \; ; \; t \longrightarrow f(t,x)$ cpm et intégrable sur I $\}$

IV.1. Continuité

théorème : I, J intervalles de $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rl} f : I \times J & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (t,x) & \longmapsto f(t,x) \end{array} \quad \text{vérifiant}$$

$\forall\, t \in I \quad x \longmapsto f(t,x)$ continue sur J

$\forall\, x \in I \quad t \longmapsto f(t,x)$ cpm (et intégrable) sur I

et $\exists\, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm et intégrable sur I telle que $\forall\, (t,x) \in I \times J \quad |f(t,x)| \leq \varphi(t)$

alors F est continue sur J

Extension : I, J intervalles de $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rl} f : I \times J & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (t,x) & \longmapsto f(t,x) \end{array} \quad \text{vérifiant}$$

$\forall\, t \in I \quad x \longmapsto f(t,x)$ continue sur J

$\forall\, x \in I \quad t \longmapsto f(t,x)$ cpm (et intégrable) sur I

et pour tout segment $[a,b]$ de J , $\exists\, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm et intégrable sur I telle que

$\forall\, (t,x) \in I \times [a,b] \quad |f(t,x)| \leq \varphi(t)$

alors F est continue sur J

IV.2. Limite

Théorème de convergence dominée à paramètre continu :

I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{J}$

$$\begin{array}{rl} f : I \times J & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (t,x) & \longmapsto f(t,x) \end{array} \quad \text{vérifiant}$$

$\forall\, t \in I \quad \lim\limits_{x \mapsto a} f(t,x) = l(t)$

$\forall\, x \in I \quad t \longmapsto f(t,x)$ et $t \longmapsto l(t)$ cpm sur I

$\exists\, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm et intégrable sur I telle que $\quad \forall\, (t,x) \in I \times J \quad |f(t,x)| \leq \varphi(t)$

alors l est intégrable sur I et $\lim\limits_{x \mapsto a} F(x) = \int_I l(t)dt$

IV.3. Dérivabilité

théorème de Leibniz : I, J intervalles de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : I \times J &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (t,x) &\longmapsto f(t,x) \end{aligned} \qquad \text{vérifiant } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ existe sur } I \times J$$

$\forall\, t \in I \quad x \longmapsto f(t,x)$ et $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sont continues sur J

$\forall\, x \in I \quad t \longmapsto f(t,x)$ et $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sont cpm et intégrables sur I

et $\exists\, \varphi_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm et intégrable sur I telle que $\forall\, (t,x) \in I \times J \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \varphi_1(t)$

alors F est de classe c^1 sur J et $\forall\, x \in J \quad F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$

Extension : I, J intervalles de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : I \times J &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (t,x) &\longmapsto f(t,x) \end{aligned} \qquad \text{vérifiant } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ existe sur } I \times J$$

$\forall\, t \in I \quad x \longmapsto f(t,x)$ et $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sont continues sur J

$\forall\, x \in I \quad t \longmapsto f(t,x)$ et $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sont cpm et intégrables sur I

et pour tout segment $[a,b]$ de J , $\exists\, \varphi_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm et intégrable sur I telle que

$\forall\, (t,x) \in I \times [a,b] \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \varphi_1(t)$

alors F est de classe c^1 sur J et $\forall\, x \in J \quad F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$

Généralisation : I, J intervalles de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : I \times J &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (t,x) &\longmapsto f(t,x) \end{aligned} \qquad \text{vérifiant } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, .., \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \text{ existent sur } I \times J$$

$\forall\, t \in I \quad x \longmapsto f(t,x)$, $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$, $x \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$,.., $x \longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)$ sont continues sur J

$\forall\, x \in I \quad t \longmapsto f(t,x)\ ,\ t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\ ,\ t \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\ ,..,\ t \longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)$ sont cpm et intégrables sur I

et $\exists\, \varphi_p : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm et intégrable sur I telle que $\forall\, (t,x) \in I \times J \quad \left|\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)\right| \leq \varphi_p(t)$

alors F est de classe c^p sur J et $\forall\, x \in J \quad \forall\, k \in \{1,..,p\} \quad F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)dt$

Extension : I, J intervalles de $\mathbb{R}$

$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ ..,\ \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}$ existent sur $I \times J$

$(t,x) \longmapsto f(t,x)$

$\forall\, t \in I \quad x \longmapsto f(t,x)\ ,\ x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\ ,\ x \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\ ,..,\ x \longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)$ sont continues sur J

$\forall\, x \in I \quad t \longmapsto f(t,x)\ ,\ t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\ ,\ t \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\ ,..,\ t \longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)$ sont cpm et intégrables sur I

et pour tout segment $[a,b]$ de J , $\exists\, \varphi_p : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm et intégrable sur I telle que

$\forall\, (t,x) \in I \times [a,b] \quad \left|\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(t,x)\right| \leq \varphi_p(t)$

alors F est de classe c^p sur J et $\forall\, x \in J \quad \forall\, k \in \{1,..,p\} \quad F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)dt$

Remarque : F est de classe c^∞ si F est de classe c^p pour tout $p \in \mathbb{N}$