PC Limites. Continuité.

I. Limites

I.1. Limite en un point

E , F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

définition : $\mathcal{D} \subset E$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow F \quad a \in \overline{\mathcal{D}} \quad f$ admet une limite en a si :

$\exists\, l \in F \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, \alpha_{\varepsilon,a} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, x \in \mathcal{D} \quad \|x-a\|_E \leq \alpha_{\varepsilon,a} \Longrightarrow \|f(x)-l\|_F \leq \varepsilon$

théorème : Si la limite existe , elle est unique , on écrit $l = \lim\limits_{x \mapsto a} f(x)$ ou $l = \lim\limits_{a} f$

Remarque :
$$l = \lim_{x \mapsto a} f(x) \Longleftrightarrow l = \lim_{h \mapsto 0} f(a+h)$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{x \mapsto a} (f(x)-l) = 0$$

théorème : Toute fonction admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.

I.2. Limites et suites

théorème : caractérisation séquentielle de la limite : $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F \quad a \in \overline{\mathcal{D}}$

f admet pour limite $l \in F$ en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ de points de $\mathcal{D}$ convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_n$ converge vers l

Remarque : sert principalement à démontrer qu'une fonction n'a pas de limite.

I.3. Extensions

a/ Cas E=$\mathbb{R}$. Limites à droite et à gauche

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$ $\quad F$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

$f : \mathcal{I} \longrightarrow F$ admet une limite à droite en a si :

$\exists\, l \in F \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, \alpha_{\varepsilon,a} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, x \in \mathcal{I} \quad 0 \leq x-a \leq \alpha_{\varepsilon,a} \Longrightarrow \|f(x)-l\|_F \leq \varepsilon$

Si la limite existe , elle est unique , on écrit $l = \lim\limits_{x \mapsto a^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto a, x \geq a} f(x)$

$f : \mathcal{I} \longrightarrow F$ admet une limite à gauche en a si :

$\exists\, l \in F \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, \alpha_{\varepsilon,a} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, x \in \mathcal{I} \quad 0 \leq a-x \leq \alpha_{\varepsilon,a} \Longrightarrow \|f(x)-l\|_F \leq \varepsilon$

Si la limite existe , elle est unique , on écrit $l = \lim\limits_{x \mapsto a^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto a, x \leq a} f(x)$

Propriété : f admet une limite en a si et seulement si f admet en a une limite à droite et une limite à gauche égales.

b/ Limites infinies

E=$\mathbb{R}$. F $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\exists\, m \in \mathbb{R} \quad]m,+\infty[\subset \mathcal{I}$

$f : \mathcal{I} \longrightarrow F$ admet une limite en $+\infty$ si :

$\exists\, l \in F \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, \alpha_{\varepsilon,\infty} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, x \in \mathcal{I} \quad x \geq \alpha_{\epsilon,\infty} \Longrightarrow \|f(x)-l\|_F \leq \varepsilon$

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\exists\ m \in \mathbb{R} \quad]-\infty, m[\ \subset \mathcal{I}$

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite en $-\infty$ si :

$\exists\ l \in F \quad \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\ \alpha_{\varepsilon,\infty} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\ x \in \mathcal{I} \quad x \leq -\alpha_{\varepsilon,\infty} \Longrightarrow \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$

<u>F=$\mathbb{R}$.</u> E $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. $\mathcal{D} \subset E$

$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en $a \in \bar{\mathcal{D}}$ pour limite $+\infty$ si :

$\forall\ A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\ \alpha_{A,a} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\ x \in \mathcal{D} \quad \|x - a\|_E \leq \alpha_{A,a} \Longrightarrow f(x) \geq A$

$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en $a \in \bar{\mathcal{D}}$ pour limite $-\infty$ si :

$\forall\ A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\ \alpha_{A,a} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\ x \in \mathcal{D} \quad \|x - a\|_E \leq \alpha_{A,a} \Longrightarrow f(x) \leq -A$

<u>$E = F$=$\mathbb{R}$.</u>

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\exists\ m \in \mathbb{R} \quad]m, +\infty[\ \subset \mathcal{I}$ ou $]-\infty, m[\ \subset \mathcal{I}$

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en $+\infty$ pour limite $+\infty$ si :

$\forall\ A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\ \alpha_{A,\infty} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\ x \in \mathcal{I} \quad x \geq \alpha_{A,\infty} \Longrightarrow f(x) \geq A$

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en $+\infty$ pour limite $-\infty$ si :

$\forall\ A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\ \alpha_{A,\infty} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\ x \in \mathcal{I} \quad x \geq \alpha_{A,\infty} \Longrightarrow f(x) \leq -A$

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en $-\infty$ pour limite $+\infty$ si :

$\forall\ A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\ \alpha_{A,\infty} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\ x \in \mathcal{I} \quad x \leq -\alpha_{A,\infty} \Longrightarrow f(x) \geq A$

$f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en $-\infty$ pour limite $-\infty$ si :

$\forall\ A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\ \alpha_{A,\infty} \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\ x \in \mathcal{I} \quad x \leq -\alpha_{A,\infty} \Longrightarrow f(x) \leq -A$

<u>**Remarque :**</u> le théorème de caractérisation séquentielle de la limite reste vrai si $a = +\infty$ ou $-\infty$ et si $l = +\infty$ ou $-\infty$

<u>I.4. Propriétés des limites</u>

<u>**théorème : lien avec une base de F :**</u> $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$ avec $(e_1; \cdots, e_p)$ base de F

$$x \longmapsto \sum_{k=1}^{p} f_k(x) e_k \qquad \text{où } f_k : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$a \in \bar{\mathcal{D}}$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\ k \in [\![1, \cdots, p]\!] \quad \lim\limits_{x \mapsto a} f_k(x) = l_k$ avec $l = \sum\limits_{k=1}^{p} l_k e_k$

<u>**théorème : linéarité :**</u> $f, g : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F \quad a \in \bar{\mathcal{D}}$ avec $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l \quad \lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = l'$

Alors $\forall\ \lambda \in \mathbb{K} \quad \lim\limits_{x \mapsto a} (\lambda f + g)(x) = \lambda l + l'$

<u>**théorème de composition des limites :**</u> E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{D} \subset E$, $\mathcal{D}' \subset F$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow F \quad g : \mathcal{D}' \longrightarrow G$ avec $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$, $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \mapsto l} g(x) = l'$

alors $\lim\limits_{x \mapsto a} (gof)(x) = l'$

<u>**Autres propriétés :**</u>

théorème : produit par une application scalaire : $\mathcal{D} \subset E$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow F \quad g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$

avec $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \mapsto l} g(x) =$ l' alors $\lim\limits_{x \mapsto a} (gf)(x) = ll'$

théorème : produit par une application bornée : $\mathcal{D} \subset E$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow F \quad g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = 0_F$ et g bornée au voisinage de a (respectivement f bornée au voisinage de a et $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = 0$) alors $\lim\limits_{x \mapsto a} (gf)(x) = 0_F$

théorème : limite et norme : $\mathcal{D} \subset E$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow F$ avec $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l$

alors $\lim\limits_{x \mapsto a} \|f(x)\|_F = \|l\|_F$

théorème : quotient par une application scalaire : $\mathcal{D} \subset E$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow F \quad g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$

avec $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = l'$ avec $l' \neq 0$

alors $\dfrac{f}{g}$ est définie dans un voisinage de a et $\lim\limits_{x \mapsto a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l}{l'}$

Cas où F=$\mathbb{R}$:

théorème de compatibilité avec la relation d'ordre :

$f, g : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l \quad \lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = l'$

alors si $\forall\ x \in \mathcal{I} \quad f(x) < g(x)$ (respectivement $f(x) \leq g(x)$) , on a $l \leq l'$

théorème des gendarmes : $f, g, h : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\forall\ x \in \mathcal{I} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

on suppose $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = l$

Rappel des formes indéterminées : ∞ - ∞ ; $0 * \infty$; $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; 1^∞

II. Relations de comparaison

E , F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $\mathcal{D} \subset E$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow F \quad \varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K} \qquad a \in \bar{\mathcal{D}}$

II.1. Relation de domination

f est dominée par φ au voisinage de a si

$\exists\ M \in \mathbb{R}_+ \quad \exists\ \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\ x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(a, \alpha) \backslash \{a\} \quad \|f(x)\|_F \leq M|\varphi(x)|$

On écrit f=$O(g)$ en a

II.2. Relation de négligeabilité

f est négligeable devant φ au voisinage de a si

$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\ \alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\ x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(a, \alpha) \backslash \{a\} \quad \|f(x)\|_F \leq \varepsilon|\varphi(x)|$

On écrit f=$o(g)$ en a

Remarque : Si $f = o(g)$ en a, alors $f = O(g)$ en a

II.3. Relation d'équivalence (que pour des fonctions scalaires)

$f, g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K} \qquad a \in \bar{\mathcal{D}}$

f est équivalente à g au voisinage de a si $f - g = o(g)$ en a on écrit $f \sim_a g$

Si g n'est pas la fonction nulle, $f \sim_a g \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \mapsto a} \dfrac{f}{g} = 1$

Propriétés :

1/ $f \sim_a g$ et $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l$

2/ $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors $f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$

3/ $f \sim_a g$ alors $\dfrac{1}{f} \sim_a \dfrac{1}{g}$

4/ $e^f \sim_a e^g \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \mapsto a} (f - g)(x) = 0$

5/ Pas de somme d'équivalents

6/ Si $f = g + h$ en a avec $h = o(g)$ en a alors $f \sim_a g$

7/ $f \sim_a g$ $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f^α et g^α soient définies alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$

8/ Si f admet en a un développement limité non réduit à 0, alors f est équivalente en a au premier terme non nul du développement limité.

III. Continuité

III.1. Définitions

E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$ est continue en $a \in \mathcal{D}$ si

$\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = f(a)$

f est continue sur $\mathcal{D}$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

III.2. Propriétés

1. $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$

f est continue en $a \in \mathcal{D}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers a, alors $(f(u_n)_n)$ converge vers $f(a)$.

2. $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$ $(e_1, \cdots, e_p)$ base de F

$$x \longmapsto \sum_{k=1}^{p} f_k(x) e_k \qquad \text{avec } f_k : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$$

f est continue en $a \in \mathcal{D}$ (respectivement sur $\mathcal{D}$) $\Longleftrightarrow \forall\ k \in [\![1, \cdots, p]\!]$ f_k est continue en a (respectivement sur $\mathcal{D}$)

3. $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$, $g : \mathcal{D}\text{'} \subset F \longrightarrow G$ avec $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$', alors

si f continue en $a \in \mathcal{D}$ (respectivement sur $\mathcal{D}$) et g continue en $f(a)$ (respectivement sur $\mathcal{D}$'), alors gof est continue en a (respectivement sur $\mathcal{D}$)

4. $f, g : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$

si f et g continues en $a \in \mathcal{D}$ (respectivement sur $\mathcal{D}$) et λ dans $\mathbb{K}$, alors $\lambda f + g$ est continue en a (respectivement sur $\mathcal{D}$)

5. $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$ et $g : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$

si f et g continues en $a \in \mathcal{D}$ (respectivement sur $\mathcal{D}$) , alors fg est continue en a (respectivement sur $\mathcal{D}$)

6. $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$ et $g : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$

si f et g continues en $a \in \mathcal{D}$ et $g(a) \neq 0$ (respectivement sur $\mathcal{D}$ et g ne s'annule pas) , alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a (respectivement sur $\mathcal{D}$)

Exemple : Une fonction lipschitzienne est continue.

III.3. Restriction. Prolongement :

Restriction : $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$ continue sur $\mathcal{D}$, , soit $A \subset \mathcal{D}$, alors la restriction de f à A est continue sur A

Prolongement par continuité : $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow F$ continue sur $\mathcal{D}$, alors $\tilde{f} : \mathcal{D}' \longrightarrow F$ est un prolongement par continuité de f si $\tilde{f}$ est continue sur $\mathcal{D}'$ et $\tilde{f}_{\mathcal{D}}=f$

III.4. Continuité sur un fermé borné :

théorème des bornes atteintes admis : $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $\mathcal{D}$ fermé borné de E et f continue sur $\mathcal{D}$, alors f est bornée et atteint ses bornes (ie $\exists\ (c,d) \in \mathcal{D}^2 \quad f(c) = \min\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x) \qquad f(d) = \max\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$)

III.5. Lien avec les ouverts et les fermés :

théorème : $f : \mathcal{D} \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$, f continue sur $\mathcal{D}$, alors si $a \in \mathbb{R}$

$\{x \in \mathcal{D}\ ;\ f(x) > a\}$ est un ouvert de E

$\{x \in \mathcal{D}\ ;\ f(x) \geq a\}$ est un fermé de E

$\{x \in \mathcal{D}\ ;\ f(x) = a\}$ est un fermé de E

III.6. Propriétés des fonctions à valeurs réelles

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$

1. $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en a (respectivement sur $\mathcal{I}$) alors f^+ ,f^- sont continues en a (respectivement sur $\mathcal{I}$) où $f^+(x) = \sup(f(x), -f(x)) \quad f^-(x) = \inf(f(x), -f(x))$

car $f^+ = \dfrac{f + |f|}{2} \quad f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$

2. $f, g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en a (respectivement sur $\mathcal{I}$) alors $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues en a (respectivement sur $\mathcal{I}$)

car $\sup(f,g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2} \qquad \inf(f,g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$

3. théorème de continuité sur un segment : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes ($m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ existent et $\exists\ (x_1, x_2) \in [a,b]^2\ m = f(x_1)$ $M = f(x_2)$)

4. théorème : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathcal{I}$ telle que $\exists\ (a,b) \in \mathcal{I}^2 \quad f(a)f(b) < 0$ alors $\exists\ c \in \mathcal{I} \quad f(c) = 0$

5. théorème des valeurs intermédiaires : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ f continue sur $\mathcal{I}$ alors $f(\mathcal{I})$ est un intervalle

Corollaire : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$ alors $f([a,b])=[m,M]$ avec $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

6. théorème de bijection monotone : $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathcal{I}$ alors

f est une bijection de $\mathcal{I}$ sur $f(\mathcal{I})$ si et seulement si f est strictement monotone sur $\mathcal{I}$

7. théorème : $f : \mathcal{I} \longrightarrow f(\mathcal{I})$ continue strictement monotone, alors f^{-1} est continue sur $f(\mathcal{I})$ et strictement monotone de même sens de monotonie que f

IV. Continuité des applications linéaires

IV.1. Théorème

E, F, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a équivalence entre :
(i) f continue sur E
(ii) f continue en 0_E
(iii) f bornée sur la boule unité fermée
(iv) $\exists\ k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\ x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$
(v) f lipschitzienne

théorème : E $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, F $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ,$f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f continue sur E.

IV.2. Applications multilinéaires

théorème : E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés tous trois de dimension finie, $B : E \times F \longrightarrow G$ bilinéaire, alors B est continue sur $E \times F$ et $\exists\ k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\ x \in E \quad \forall\ y \in F \quad \|B(x,y)\|_G \leq k\|x\|_E\|y\|_F$

Généralisation : $E_1, \cdots, E_n, F$ $n+1$ $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés tous de dimension finie, $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ n-linéaire, alors φ est continue sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ et

$$\exists\ k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\ (x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \quad \|\varphi(x_1,\cdots,x_n)\|_F \leq k\prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}$$

Exemples : 1. E espace vectoriel euclidien $\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & < x,y > \end{array}$ est bilinéaire donc continue sur E^2

2. E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ base de E $det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire donc continue

3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,..,x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k \end{array}$ est une forme linéaire donc continue

et par produit de telles fonctions $(x_1,..,x_n) \longmapsto P(x_1,..,x_n)$ polynôme en $(x_1,...,x_n)$ est continue sur $\mathbb{K}^n$

4. $\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$ est bilinéaire donc continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$