PC Réduction des endomorphismes

I. Éléments propres

I.1. Sous-espaces vectoriels stables

E $\mathbb{K}$espace vectoriel $\quad f \in \mathcal{L}(E)$

définition : F sous-espace vectoriel de E est stable par f si $f(F) \subset F$

et $f_F : \begin{array}{l} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ s'appelle endomorphisme induit par f sur F

Exemples : 1. $\{0\}$ et E sont stables par f

2. $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont stables par f

3. $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifiant $fog = gof$ alors le noyau et l'image de l'un des endomorphismes sont stables par l'autre

Droites stables

théorème : E $\mathbb{K}$espace vectoriel , D droite de E (ie sous-espace vectoriel de dimension 1) $\quad f \in \mathcal{L}(E)$

On a équivalence entre *(i)* D est stable par f

(ii) $\forall\, x \in D \quad \exists\, \lambda_x \in \mathbb{K} \quad f(x) = \lambda_x x$

(iii) $\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall\, x \in D \quad f(x) = \lambda x$

Cas de la dimension finie

E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n , F , G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et soit $\mathcal{B}=\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G \quad f \in \mathcal{L}(E)$

F stable par $f \iff M_{f_\mathcal{B}}= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

Généralisation : F_1 ,.., F_p p sous-espaces vectoriels de E avec $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$,

on prend $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{F_1} \cup ...\cup \mathcal{B}_{F_p}$ une base adaptée

alors $\forall\, i \in \{1,..,p\}$ F_i stable par $f \iff M_{f_\mathcal{B}}= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_p \end{pmatrix}$ (matrice diagonale par blocs)

I.2. Éléments propres d'un endomorphisme

définition : E $\mathbb{K}$espace vectoriel $\quad f \in \mathcal{L}(E)$

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si $\lambda id_E - f$ est non injective , ie $\exists\, x \in E \quad x \neq 0 \quad f(x) = \lambda x$

Un tel x est appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ (donc un vecteur propre est non nul)

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est $E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda id_E) = Ker(\lambda id_E - f)$

Le spectre de f, noté $Sp(f)$ est l'ensemble des valeurs propres de f

Remarques : 1. $\lambda \in Sp(f) \Longleftrightarrow \lambda id_E - f$ est non injective

2. $0 \in Sp(f) \Longleftrightarrow f$ non injective

3. Si $\lambda \in Sp(f)$ et x vecteur propre associé à λ alors $\mathcal{V}ect(x) \subset E_\lambda(f)$

4. Si $\lambda \in Sp(f)$, alors $E_\lambda(f)$ est stable par f et $f_{E_\lambda(f)}$ est l'homothétie de rapport λ

I.3. Traduction matricielle

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exists! \ f \in \mathcal{L}(E) \quad A = M_{|f_\mathcal{B}}$ (E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n)

Les éléments propres de A sont les éléments propres de f

ie $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si $\exists \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad X \neq 0 \quad AX = \lambda X$

Un tel X est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ (donc un vecteur propre est non nul)

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est $E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n) = Ker(\lambda I_n - A)$

Le spectre de A, noté $Sp(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A

Donc

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A) &\Longleftrightarrow \lambda I_n - A \text{ non injective} \\ &\Longleftrightarrow \lambda I_n - A \text{ non bijective} \\ &\Longleftrightarrow rg(\lambda I_n - A) < n \\ &\Longleftrightarrow det(\lambda I_n - A) = 0 \end{aligned}$$

I.4. Exemples

1. Si f homothétie de rapport k, alors $Sp(f) = \{k\}$ et $E_k(f) = E$
2. p projecteur alors $Sp(f) = \{0, 1\}$ et $E_0(p) = Ker(p) \quad E_1(p) = Im(p)$
3. s symétrie alors $Sp(s) = \{-1, 1\}$ et $E_1(s) = Ker(s - id_E) \quad E_{-1}(s) = Ker(s + id_E)$

I.5. Polynômes d'endomorphismes

E $\mathbb{K}$espace vectoriel, $\quad P \in \mathbb{K}[X] \quad P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_kX^k$

définition :

$f \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme de l'endomorphisme f est l'endomorphisme

$$P(f) = a_0 id_E + a_1 f + \cdots + a_p f^p = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k \qquad \text{avec } f^0 = id_E$$

P est polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$

Propriétés : $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \alpha \in \mathbb{K}$

$f \in \mathcal{L}(E) \qquad (\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f) \qquad (PQ)(f) = P(f)oQ(f) = Q(f)oP(f)$

$Ker(P(f))$ et $Im(P(f))$ sont stables par f.

$(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2 \qquad$ avec $fog = gof \qquad$ alors $P(f)oQ(g) = Q(g)oP(f)$

I.6. Polynômes de matrices

$P \in \mathbb{K}[X] \quad P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p = \sum_{k=0}^{p} a_kX^k$

définition :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme de la matrice A est la matrice $P(A) = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_pA^p = \sum_{k=0}^{p} a_kA^k$

avec $A^0 = I_n$

P est polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$

Propriétés : $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \alpha \in \mathbb{K}$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad (\alpha P + Q)(A) = \alpha P(A) + Q(A) \qquad (PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$

$Ker(P(A))$ et $Im(P(A))$ sont stables par A.

$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \qquad$ avec $AB = BA \qquad$ alors $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$

Cas des matrices semblables : $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ semblables, $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(A)$ sont semblables.

I.7. Propriétés des sous-espaces propres

théorème : E $\mathbb{K}$espace vectoriel $\quad f \in \mathcal{L}(E)$, des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont libres.

théorème : $f \in \mathcal{L}(E) \quad Sp(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, alors la somme des sous-espaces propres de f est directe,

ie $\sum_{i=1}^{p} Ker(f - \lambda_i id_E) = \oplus_{i=1}^{p} Ker(f - \lambda_i id_E)$

théorème : Si $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $fog = gof$, alors $E_\lambda(f)$ est stable par g

Si $E = \oplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$, alors dans une base adaptée à cette décomposition la matrice de g est diagonale par blocs.

théorème : Si $f \in \mathcal{L}(E)$. $P \in \mathbb{K}[X]$

Si x vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors x est vecteur propre de $P(f)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$

théorème : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$ P annulateur de f alors $Sp(f) \subset \{\text{racines de } P\}$

La réciproque est fausse

théorème : Des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont libres et

$\sum_{i=1}^{p} Ker(A - \lambda_i I_n) = \oplus_{i=1}^{p} Ker(A - \lambda_i I_n)$

théorème : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$

Si x vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors x est vecteur propre de $P(A)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$

théorème : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ P annulateur de A alors $Sp(A) \subset \{\text{racines de } P\}$

La réciproque est fausse

I.8. Polynôme caractéristique

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \lambda \in Sp(A) \Longleftrightarrow det(\lambda I_n - A) = 0$

définition : On pose $\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$, χ_A est appelé polynôme caractéristique de A

et donc $\lambda \in Sp(A) \Longleftrightarrow \lambda$ racine de χ_A

lien avec les endomorphismes : $f \in \mathcal{L}(E)$ où E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n ,

le polynôme caractéristique de f est $det(\lambda Id_E - f)$

théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\chi_A(\lambda) = \lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(A)$

Propriété : Si χ_A est scindé (vrai dans $\mathbb{C}$) , de racines $\lambda_1, .., \lambda_n$ alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A)$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$

théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $Card(Sp(A)) \leq n$

Si $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$, alors $Sp(A) \neq \emptyset$

théorème : $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n, F sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $\chi_{f_F} \;/\; \chi_f$

Ordre de multiplicité

définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in Sp(A)$, on appelle ordre de multiplicité de λ , noté $\omega(\lambda)$

l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_A

ie $(X - \lambda)^{\omega(\lambda)}/\chi_A$ et $non((X - \lambda)^{\omega(\lambda)+1}/\chi_A)$

théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\lambda \in Sp(A)$ alors $1 \leq dim(E_\lambda(A)) \leq \omega(\lambda)$

théorème : $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et A et B semblables, alors $\chi_A = \chi_B$, donc

A et B ont les mêmes valeurs propres avec mêmes ordres de multiplicité.

I.8. Théorème de Cayley-Hamilton

CAYLEY Arthur 1821 Richmond - 1895 Cambridge. Cayley étudie au King's College School de Londres où ses professeurs remarquent son aptitude aux mathématiques. Mais la pression familiale le conduit à étudier le droit au Trinity College de Cambridge. Devenu avocat, il exercera de 1849 1863 tout en se passionnant pour les langues et les mathématiques : il publie à 20 ans des articles de mathématiques dans le Cambridge mathematical Journal. Il obtient une chaire de professeur de mathématiques à l'Université de Cambridge et est membre de la Royal Society of London. Ses travaux portent sur la géométrie projective, les formes quadratiques, une nouvelle classification des courbes algébriques planes. Avec Sylvester, il développe une nouvelle branche des mathématiques : l'algèbre linéaire et ses transformations. L'ensemble, colossal, de ses travaux est réunie dans les Collected Mathematical Papers (13 volumes). Il recoit la médaille De Morgan, et la médaille Copley de la Royal Society, une distinction en principe octroyée aux physiciens et biologistes. Cayley développe la notion d'espace vectoriel de dimension n, introduit, avec Sylvester, la notion de matrice et en expose l'usage en faisant emploi des déterminants.

HAMILTON William Rowan 1805 Dublin - 1865 Dublin . Fils de juriste,Hamilton étudie et pratique dès 5 ans les langues anciennes. Orphelin à 14 ans, son oncle, James Hamilton, le prend sous son aile. Hamilton entre à 18 ans au Trinity College de Dublin et étudie les mathématiques et l'astronomie, et soumet à l'Académie royale de Dublin un correctif à la Mécanique céleste de Laplace et une théorie sur le rayonnement. Astronome titulaire à 22 ans de la chaire d'astronomie de l'Académie royale, il complète ses travaux en optique et rénove tant la mécanique céleste qu'analytique (dite aujourd'hui mécanique hamiltonienne) et développe une méthode de résolution d'équations différentielles par le calcul des variations. Hamilton aboutit aux concept de vecteur, d'espace vectoriel, d'algèbre associative à divisions et de corps commutatif.

C'est à Frobenius que l'on doit la démonstration rigoureuse du théorème de Cayley-Hamilton.

théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $f \in \mathcal{L}(E)$) alors χ_A (χ_f) est annulateur de A (de f).

II. Réduction des endomorphismes en dimension finie

II.1. Diagonalisation des endomorphismes

E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n

définition : $f \in \mathcal{L}(E)$, f est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale

théorème : $f \in \mathcal{L}(E)$ f diagonalisable $\Longleftrightarrow$ il existe une base de E formée de vecteurs propres de f

$$\Longleftrightarrow E = \oplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$$
$$\Longleftrightarrow dim(E) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} dim(E_\lambda(f))$$
$$\Longleftrightarrow \chi_f \text{ est scindé et } \forall\ \lambda \in Sp(f) \quad \omega(\lambda) = dim(E_\lambda(f))$$

Caractérisation par les polynômes annulateurs

théorème : E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$, f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.

Cas particulier : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $(dim(E) = n)$, a n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable et tout sous-espace propre est de dimension 1.

théorème : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(f)$ est diagonalisable et toute base de vecteurs propres de f est base de vecteurs propres de $P(f)$.

théorème : E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$, si f est diagonalisable alors f induit sur tout sous-espace stable un endomorphisme diagonalisable.

II.2. Diagonalisation des matrices

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exists ! \ f \in \mathcal{L}(E) \quad A = M_{|f_{\mathcal{B}}}$ (E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n)

A est diagonalisable si f l'est

théorème : A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ A semblable à une matrice diagonale

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \exists\ Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad Q^{-1}AQ = D \text{ avec } D \text{ diagonale}\\
&\Longleftrightarrow \chi_A \text{ est scindé et } \forall\ \lambda \in Sp(A) \quad \omega(\lambda) = dim(Ker(A - \lambda I_n))\\
&\Longleftrightarrow n = \sum_{\lambda \in Sp(A)} dim(E_\lambda(A))\\
&\Longleftrightarrow \text{il existe un polynôme scindé à racines simples annulateur de } A
\end{aligned}$$

Cas particulier : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable et tout sous-espace propre est de dimension 1.

II.3. Trigonalisation

E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension n

définition : $f \in \mathcal{L}(E)$, f est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure

définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure

théorème : A (f) est trigonalisable si et seulement si χ_A (χ_f) est scindé sur $\mathbb{K}$

Corollaire : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A trigonalisable.

Pratique n=2 : χ_A est de degré 2,

ou χ_A a deux racines distinctes et A diagonalisable

ou χ_A a une racine double λ si $A = \lambda I_2$ A diagonalisable

ou $A \neq \lambda I_2$ alors A non diagonalisable mais trigonalisable

$dim(E_\lambda(A)) = 1$ soit e_1 une base de $E_\lambda(A)$, on choisit e_2 tel que (e_1, e_2) base de E

Si P est la matrice de passage de la base canonique à (e_1, e_2) alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

et on peut choisir e_2 tel que $k = 1$

Pratique n=3 : χ_A est de degré 3

ou χ_A a trois racines distinctes alors A est diagonalisable

ou χ_A a une racine double λ et une racine simple μ

si $dim(E_\lambda(A)) = 2$ alors A diagonalisable si $dim(E_\lambda(A)) = 1$ alors A non diagonalisable mais trigonalisable, on choisit e_μ base de $E_\mu(A)$ et e_λ base de $E_\lambda(A)$

on choisit e_3 tel que $(e\mu, e_\lambda, e_3)$ base de E , si P est la matrice de passage de la base canonique à (e_μ, e_λ, e_3) alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

et on peut choisir e_3 tel que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

ou χ_A a une racine triple λ

si $dim(E_\lambda(A)) = 3$ alors $A = \lambda I_3$

si $dim(E_\lambda(A)) = 2$, soit (e_1, e_2) une base de $E_\lambda(A)$

on choisit e_3 tel que (e_1, e_2, e_3) base de E , si P est la matrice de passage de la base canonique à (e_1, e_2, e_3) alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

et on peut choisir, quitte à modifier e_1 et e_2, e_3 tel que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

si $dim(E_\lambda(A)) = 1$, on pose $B = A - \lambda I_3$, on calcule B^2 $(B \neq 0)$ et B^3 $(B^3 = 0)$

on choisit e tel que $B^2(e) \neq 0$, on vérifie que $(B^2(e), B(e), e)$ libre donc base de E , si P est la matrice de passage de la base canonique à $(B^2(e), B(e), e)$ alors $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

III. Python

import numpy as np
import numpy.linalg as alg

La fonction poly du module numpy appliquée à une matrice carrée renvoie la liste des coefficients du polynôme caractéristique par degré décroissant.

A = np.array([[8,0,9],[-3,-1,-3],[-6,0,-7]])
np.poly(A) renvoie [1. 0. -3. -2.] (signifie $x^3 + 0x^2 - 3x - 2$)

La fonction eigvals du module numpy.linalg renvoie les valeurs propres de la matrice.

alg.eigvals(A) renvoie [-1. 2. -1.]

Pour obtenir en plus les vecteurs propres associés. il faut employer la fonction eig. Cette fonction renvoie un tuple constitué de la liste des valeurs propres et d'une matrice carrée. La $i$ème colonne de cette matrice est un vecteur propre associé à la $i$ème valeur de la liste des valeurs propres.

L=alg.eig(A) renvoie

(array([-1., 2., -1.]), array([[0. , 0.80178373, -0.70710678], [1. , -0.26726124, 0.], [0. , -0.53452248, 0.70710678]]))

IV. Applications

IV.1. Puissance d'une matrice

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si A diagonalisable , $\exists\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, et $A^p = P \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix} P^{-1}$

Si A trigonalisable alors $\exists\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad P^{-1}AP = T$, alors $A^p = PT^pP^{-1}$

Cas $n = 2$:
$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 + N$
$N^2 = 0$
donc par le binôme de Newton $\quad T^p = \lambda^p I_2 + p\lambda^{p-1}N$

Cas $n = 3$:
et si $T = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda I_2 + N \end{pmatrix}$ on a $T^p = \begin{pmatrix} \mu^p & 0 \\ 0 & (\lambda I_2 + N)^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^p & 0 \\ 0 & \lambda^p + p\lambda^{p-1}N \end{pmatrix}$

(car $N^2 = 0$)

et si $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_3 + N$ on a $T^p = \lambda^p I_3 + p\lambda^{p-1}N + \binom{p}{2}\lambda^{p-2}N^2$

(car $N^3 = 0$)

IV.2. Complément : suites récurrentes

$X_{p+1} = AX_p$ avec $X_p = \begin{pmatrix} u_p^1 \\ u_p^2 \\ . \\ . \\ u_p^n \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Alors $X_p = A^pX_0$ (calcul de P^{-1})

IV.3. Complément : systèmes différentiels

$(\mathcal{S}) \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t) \\ . \\ . \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$, système que l'on écrit $X'(t) = AX(t) + B(t)$

Avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ . \\ . \\ b_n(t) \end{pmatrix}$

$b_i : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathcal{I}$.

On suppose A diagonalisable donc $\exists\ P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & .0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

On pose $X = PY$ alors $(\mathcal{S}) \Longleftrightarrow Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t)$

Si $B = 0$ (système sans second membre) , en posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ on a $\forall\ i \in \{1,..n\}\quad y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$

donc $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ puis $X = PY$ (pas de calcul de P^{-1})

Si $B \neq 0$, on calcule P^{-1} et $P^{-1}B$ alors $\forall\ i \in \{1,..n\}\quad y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) + z_i(t)$

On résout puis $X = PY$

Remarque : si A trigonalisable

$\exists\ P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\qquad P^{-1}AP = T\quad T$ triangulaire supérieure

En posant $X = PY$ on a de même $Y' = TY + P^{-1}B$
donc calcul de P^{-1}

On résout en démarrant par la dernière ligne