PC Espaces vectoriels

I. Définitions

I.1. Rappel

$\mathbb{K}= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (éventuellement $\mathbb{Q}$) , E ensemble ,

$(E,+,.)$ espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$ev si $+$ loi interne sur E ($+ : E \times E \longrightarrow E$) vérifiant :

$(E,+)$ groupe commutatif (ie $\forall\ (x, y, z) \in E^3$ $\quad (i)\ x + y = y + x \qquad (ii)\ (x + y) + z = x + (y + z)$

$(iii)\ x + 0_E = 0_E + x = x \qquad (iv) \quad x + (-x) = (-x) + x = 0_E$)

. loi externe à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ ($. : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) vérifiant:

$\forall\alpha \in \mathbb{K} \quad \forall(x, y) \in E^2 \qquad \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \qquad (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \qquad \alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$

$\forall x \in E \qquad 1_{\mathbb{K}}.x = x$

Terminologie : Les éléments de E s'appellent des vecteurs (du latin *vehere* transporter), la notion d'ev provient de l'étude des translations en géométrie : une translation qui "transporte " les points correspond à un vecteur

Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires (du latin *scala* échelle) : la multiplication des vecteurs par un même scalaire modifie l'échelle des transformations ponctuelles qui leur sont associées

Remarques :

1/ $0_E \in E$ donc $E \neq \emptyset$

2/ $\forall\alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \qquad \alpha.x=0_E \Longrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$

3/ $\forall\alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \qquad -(\alpha.x) = (-\alpha).x = \alpha.(-x)$

I.2. Sous-espace vectoriel

$(E,+,.)$ $\mathbb{K}$ev

définition : $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si $+$ et $.$ sont stables sur F et F muni des restrictions de $+, .$ à F est un $\mathbb{K}$ev.

théorème de caractérisation : $F \subset E$ est un sev de E si et seulement si
$F \neq \emptyset$ et $\forall(x, y) \in F^2$ $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \alpha.x + \beta.y \in F$
ou si et seulement si $F \neq \emptyset$ et $\forall(x, y) \in F^2$ $\forall\alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha.x + y \in F$

I.3. Produit d'espaces vectoriels

Si $(E_i,+,.)_{i\in I}$ est une famille de $\mathbb{K}$ev , on munit $E=\prod\limits_{i\in I} E_i$ des lois

$+ : E \times E \longrightarrow E \qquad . : \mathbb{K}\times E \longrightarrow E$

définies par si $(x, y) \in E^2$ $x = (x_i)_{i\in I}$ $\quad y = (y_i)_{i\in I}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\qquad x + y = (x_i + y_i)_{i\in I} \qquad \alpha.x = (\alpha.x_i)_{i\in I}$

alors $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$ev appelé espace vectoriel produit des E_i

I.4. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

définition : Une combinaison linéaire des n vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ de E est $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

théorème : Une intersection quelconque de sev de E est un sev de E

définition : $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, le sev engendré par A , $\mathcal{V}ect(A)$ est le plus petit sev (au sens de l'inclusion) de E contenant A , c'est l'intersection de tous les sev de E contenant A.

théorème : $\mathcal{V}ect(e_1, \cdots, e_n)$={ combinaisons linéaires des éléments de A}

$$=\{x \in E \; ; \exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \alpha_1.e_1 + \cdots + \alpha_n.e_n\}$$

définition : $(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice si $\mathcal{V}ect(e_1, \cdots, e_n) = E$

I.5. Famille libre, famille liée

définition : $(x_1, \cdots, x_p)$ famille de vecteurs de E est libre si

$$\forall\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j.x_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall j \in \{1, \cdots, p\} \quad \alpha_j = 0$$

La famille est liée si elle n'est pas libre.

Propriétés :

1/ Une famille contenant 0_E est liée

2/ $\{x\}$ est libre ssi $x \neq 0_E$

3/ Si on enlève des vecteurs à une famille libre, elle reste libre; si on rajoute des vecteurs à une famille liée, elle reste liée.

4/ Une famille est liée ssi l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres

5/ L famille libre de E et $x \in E$ tel que $L \cup \{x\}$ est liée alors x est combinaison linéaire des éléments de L

exemple important : La famille de polynômes $(P_0, \cdots, P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$ est dite de degrés échelonnés si $d^\circ P_0 < \cdots < d^\circ P_n$

Toute famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.

I.6. Bases

définition : Une base est une famille génératrice et libre

théorème : La famille $(b_1, ... b_p)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E de s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de cette famille $x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j b_j$

les α_j s'appellent les coordonnées ou composantes de x

II. Applications linéaires

définition : (E, F) deux $\mathbb{K}$ev u est linéaire de E dans F si

$\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$

(ou $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad u(\alpha x + y) = \alpha u(x) + u(y)$)

(ou $\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $u(\alpha x) = \alpha u(x)$)

si u bijective, u isomorphisme

si $E = F$ $\quad u$ endomorphisme (endomorphisme bijectif= automorphisme)

$F= \mathbb{K}$ $\quad u$ forme linéaire

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F (et $\mathcal{L}(E)$=$\mathcal{L}(E,E)$)

et $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E

Propriétés : $u(0_E) = 0_F$

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire

La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme

Structure : $(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ $\mathbb{K}$ev

$(\mathcal{GL}(E),o)$ groupe (non commutatif en général)

ie vérifie $\forall \ (f,g) \in \mathcal{GL}(E)^2 \qquad fog \in \mathcal{GL}(E)$ et $f^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$

Applications linéaires, familles libres, liées

$u \in \mathcal{L}(E,F)$

si $(x_1,\cdots,x_p)$ famille de vecteurs liés de E, alors $(u(x_1),\cdots,u(x_p))$ famille liée dans F

si $(x_1,\cdots,x_p)$ famille de vecteurs libres de E et u injective alors $(u(x_1),\cdots,u(x_p))$ famille libre de F

si $(x_1,\cdots,x_p)$ famille génératrice de E, alors $(u(x_1),\cdots,u(x_p))$ famille génératrice de $u(E)$

Détermination d'une application linéaire

E, F deux $\mathbb{K}$ev $\qquad$ si E possède une base $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_p)$, alors pour toute famille $(y_1,\cdots,y_p)$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant $\forall i \in \{1,\cdots,p\}$ $u(e_i) = y_i$

(c'est $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \quad \longmapsto \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i$)

et u injective $\iff (y_1,\cdots,y_p)$ libre dans F

u surjective $\iff (y_1,\cdots,y_p)$ génératrice de F

u bijective $\iff (y_1,\cdots,y_p)$ base de F

Noyau-Image d'une application linéaire

$u \in \mathcal{L}(E, F)$

L'image réciproque de tout sev de F est un sev de E , en particulier $u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E; u(x) = 0_F\}$ est un sev de E , **noyau** de u noté $Ker(u)$

L'image directe de tout sev de E est un sev de F, en particulier $u(E) = \{y \in F \quad \exists x \in E \quad y = u(x)\}$ est un sev de F , **image** de u noté $Im(u)$

et u injective $\Longleftrightarrow$ $Ker(u)=\{0_E\}$

u surjective $\Longleftrightarrow$ $Im(u)=F$

théorème : solution d'équation linéaire : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$, $b \in F$ vecteur donné, est $\emptyset$ si $b \notin Im(u)$: $x_0 + Ker(u)$ si $b \in Im(u)$ avec $u(x_0) = b$

III. Somme de sous-espaces vectoriels

III.1. Définition

$(E, +, .)$ $\mathbb{K}$ev

définition : $E_1, \cdots, E_p$ p sev de E , la somme de ces p sev est le sev engendré par $\bigcup_{i=1}^{p} E_i$, notée $\sum_{i=1}^{p} E_i$

théorème de caractérisation :

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = \{x \in E \; ; \exists (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i\}$$

III.2. Somme directe

$(E, +, .)$ $\mathbb{K}$ev

définition : $E_1, \cdots, E_p$ p sev de E , la somme est directe si

$$\forall \, (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Longrightarrow \forall \, i \in \{1, \cdots, p\} \quad x_i = 0$$

On écrit $\sum_{i=1}^{p} E_i = \oplus_{i=1}^{p} E_i$

Remarque : La somme est directe si tout élément de $\sum_{i=1}^{p} E_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $x_i \in E_i$

théorème : $E_1 + E_2$ est directe ssi $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

théorème : $E_1 + \cdots + E_p$ est directe ssi $\forall \, i \in \{1, \cdots, p-1\} \quad (E_1 + E_2 + \cdots + E_i) \cap E_{i+1} = \{0\}$

Remarque : $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe $\Longrightarrow \forall \, (i, j) \in [1, p] \quad i \neq j \quad E_i \cap E_j = \{0\}$

la réciproque est fausse

III.3. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

définition : E_1 , E_2 deux sev de E. E_1 et E_2 sont supplémentaires si $E_1 \oplus E_2 = E$

IV. Espaces vectoriels de dimension finie

IV.1. Dimension

$(E,+,.)$ $\mathbb{K}$ev est de dimension finie s'il admet une famille génératrice de cardinal fini (ou $E = \{0\}$)

sinon E est de dimension infinie

théorème de la base extraite : E $\mathbb{K}$ev de dimension finie non réduit à $\{0\}$, G famille génératrice de E alors il existe une base de E contenue dans G.

théorème de la base incomplète : E $\mathbb{K}$ev de dimension finie non réduit à $\{0\}$, L famille libre (finie) de E alors il existe une base de E contenant L.

théorème existence de bases : E $\mathbb{K}$ev de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet une base de cardinal fini.

théorème : E $\mathbb{K}$ev ayant une base de cardinal $n \geq 1$ alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée, toute famille libre a au plus n vecteurs, toute famille génératrice a au moins n vecteurs

théorème de la dimension : Dans un $\mathbb{K}$ev E de dimension finie non réduit à $\{0\}$, toutes les bases ont le même nombre d'éléments , appelé dimension de E , noté $dim(E)$

Par convention dim$\{0\}$=0

Remarque : $dim(E)$ dépend de $\mathbb{K}$

théorème de caractérisation des bases : E $\mathbb{K}$ev de dimension $n \geq 1$ alors toute famille libre (respectivement génératrice) de n vecteurs est une base de E.

théorème dimension d'un sev : E $\mathbb{K}$ev de dimension n , F sev de E alors F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$

et $dim(F) = dim(E) \iff E = F$

théorème : dimension du produit: $E_1, \cdots, E_p$ p $\mathbb{K}$ev de dimensions finies alors $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie égale à $\sum_{i=1}^{p} dim(E_i)$

IV.2. Rang d'un système de vecteurs

définition : $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, le rang de $(x_1, \cdots, x_n)$ est la dimension de $Vect(x_1, \cdots, x_n)$

IV.3. Base adaptée

théorème et définition : E $\mathbb{K}$ev de dimension finie. F et G deux sev de E de dimensions finies vérifiant $E = F \oplus G$, soit $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G, alors $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E appelée base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$

Généralisation : Si $E_1 \dots E_p$ sont p sev de dimensions finies et en somme directe, soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i,

alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p}\mathcal{B}_i$ est une base de $\oplus_{i=1}^{p} E_i$ appelée base adaptée à la décomposition $\oplus_{i=1}^{p} E_i$

partition (ou fractionnement) d'une base : E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension finie

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on considère un découpage de $\mathcal{B}$ sous la forme $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$

On note si $1 \leq i \leq r \quad E_i = \mathcal{V}ect(\mathcal{B}_i)$

Alors les E_i sont en somme directe et $E = \oplus_{i=1}^{r} E_i$

IV.4. Dimension de la somme

théorème : formule de Grassmann E_1, E_2 deux sev de E de dimensions finies, alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie

et $dim(E_1 + E_2) = dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)$

GRASSMANN Hermann Günther 1809 Stettin -1877 Stettin: À l'issue de ses études en mathématiques et sciences physiques, il obtient un poste de professeur de mathématiques au lycée de Stettin tout en poursuivant des recherches dans le domaine des mathématiques appliquées. Étudiant le phénomène des marées, il développe le calcul vectoriel dans son traité "Die Ausdehnungs Lehre"(Théorie de l'extension linéaire). Il publie ensuite la science des grandeurs extensives ou la théorie de l'espace et une théorie de l'électrodynamique. Ses travaux mathématiques portent ainsi sur le concept nouveau d'espaces vectoriels abstraits de dimension supérieure à 3.

théorème : $E_1, \cdots, E_p$ p $\mathbb{K}$ev de dimensions finies alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie et

$$dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} dim(E_i)$$

théorème : cas d'égalité $E_1, \cdots, E_p$ p $\mathbb{K}$ev de dimensions finies

$$dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} dim(E_i) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} E_i = \oplus_{i=1}^{p} E_i$$

V. Théorème du rang

V.1. Théorème du rang

définition : E, F $\mathbb{K}$espaces vectoriels , $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $Im(u)$ de dimension finie

alors $rg(u) = dim(Im(u))$

théorème du rang :

E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension finie, F $\mathbb{K}$espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

$dim(E) = rg(u) + dim(Ker(u))$ et tout supplémentaire de $Ker(u)$ dans E est isomorphe à $Im(u)$

théorème : caractérisation des isomorphismes E , F deux $\mathbb{K}$espaces vectoriels de même dimension n, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors on a équivalence entre

(i) u bijective

(ii) u injective

(iii) u surjective

(iv) $Ker(u) = \{0\}$

(v) $Im(u) = F$

(vi) $rg(u) = n$

(vii) u transforme une base de E en une base de F

V.2. Invariance du rang

théorème : Invariance du rang par composition avec un isomorphisme

E $\mathbb{K}$ev de dimension p, F $\mathbb{K}$ev de dimension q . $u \in \mathcal{L}(E,F)$

alors si $v \in \mathcal{GL}(E)$ $\quad rg(uov)=rg(u)$ $\qquad$ et si $w \in \mathcal{GL}(F)$ $\quad rg(wou) = rg(u)$

V.3. Interpolation de Lagrange

LAGRANGE Joseph Louis, Comte de- 1736 Turin -1813 Paris : D'origine franco-italienne Joseph-Louis Lagrange est le cadet d'une fratrie de onze enfants dont les dix premiers meurent encore enfants. Brillant élève, il s'intéresse très tôt aux mathématiques, en particulier les travaux de Newton sur le calcul différentiel et intégral, et à l'astronomie en découvrant les travaux de Halley. À 19 ans, on lui confie un poste d'enseignement des mathématiques à l'École d'artillerie de Turin. À 23 ans , il publie "Actes de la société privée"où il aborde des sujets de physique mathématique : isopérimètres, surfaces minimales acoustique, hydrodynamique, point de départ de sa "Mécanique analytique". Euler le fait venir à Berlin en tant que mathématicien et élire à l'Académie des sciences de Berlin. Il y restera 20 ans. Lagrange s'installe ensuite à Paris à l'invitation de Louis XVI. Membre fondateur du bureau des longitudes, savant universel, Lagrange est anobli par Napoléon et inhumé au Panthéon. Ses travaux portent entre autres, sur les équations différentielles et aux dérivées partielles, la résolution des équations algébriques, les formes quadratiques et l'arithmétique, les intégrales et fonctions elliptiques, le calcul des variations.

L'interpolation de Lagrange généralise l'interpolation linéaire qui assimile le graphe d'une fonction f sur le segment $[a,b]$ en un segment de droite passant par $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$.

On choisit $a_0, \cdots, a_n$ $n+1$ points distincts de $[a,b]$ et on cherche un polynôme P dont le graphe passe par $\begin{pmatrix} a_i \\ f(a_i) \end{pmatrix}$ pour $0 \leq i \leq n$. On dit que ce polynôme interpole f en $(a_0, \cdots, a_n)$

théorème : $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts, alors

$\forall\ (y_0, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \quad \exists!\ P_n \in \mathbb{K}_n[X] \quad \forall\ i \in [0, \cdots, n] \quad P_n(a_i) = y_i$

et si $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifie $\forall\ i \in [0, \cdots, n] \quad P_n(a_i) = y_i$ $\quad$ alors $P = P_n + Q\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$ $\quad$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$

théorème : détermination des polynômes de Lagrange : $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$ deux à deux distincts

$\forall\, j \in [1, n] \quad \exists!\ L_j \in \mathbb{K}_n[X] \quad \forall\, i \in [0, \cdots, n] \quad L_j(a_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$

et $L_j(X) = \displaystyle\prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}$

$(L_0, \cdots, L_n)$ sont les polynômes de Lagrange associés à $(a_0, \cdots, a_n)$

théorème : $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et

$\forall\, P \in \mathbb{K}_n[X] \quad P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$

en particulier $1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i$

VI. Endomorphismes particuliers

1. L'identité, id_E est l'endomorphisme $x \longmapsto x$
2. L'homothétie de rapport $k \in \mathbb{K}$ de E est l'endomorphisme de E défini par $x \longmapsto kx$
3. $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si $pop = p$, alors $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ et p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$

Remarque : si p projecteur de E, alors $Im(p) = Ker(p - id_E)$

4. $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$ sont deux projecteurs associés si p et q sont deux projecteurs ($pop = p$ et $qoq = q$) et $poq = qop = 0$ et $p + q = id_E$. On a alors $Ker(p) = Im(q) = Im(id_E - p)$ et $Ker(q) = Im(p)$

5. $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $sos = id_E$, alors $E = Ker(s - id_E) \oplus Ker(s + id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $Ker(s - id_E)$ de direction $Ker(s + id_E)$

théorème: $s \in \mathcal{L}(E)$, s symétrie si et seulement si il existe $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$ couple de projecteurs associés tels que $s = p - q = 2p - id_E$

VII. Formes linéaires

définition: Un hyperplan de E $\mathbb{K}$espace-vectoriel est un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire de dimension 1

Remarque: Si E est de dimension n, un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$

théorème: E $\mathbb{K}$espace vectoriel, H sous-espace vectoriel de E

H est un hyperplan de $E \iff \forall\, a \in E \setminus H \quad E = H \oplus Vect(a)$

théorème: E $\mathbb{K}$espace vectoriel, H sous-espace vectoriel de E

H est un hyperplan de $E \iff \exists\, \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \quad \varphi \neq 0 \quad H = Ker(\varphi)$

théorème: équation d'un hyperplan: E $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension finie n, $(e_1, \cdots, e_n)$ base de E

H est un hyperplan de E alors $\exists\, (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0, \cdots, 0\} \quad H = \{x \in E; \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\}$