PC Rappels Sup : Suites et séries réelles et complexes

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Généralités

I.1. Définition

Une suite $(u_n)_n$est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs sur $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$espace vectoriel

I.2. Vocabulaire

La suite $(u_n)_n$ est **constante** si $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n = (u_0)$

La suite $(u_n)_n$ est **stationnaire** si $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_{n+1} = u_n = (u_{n_0})$

La suite $(u_n)_n$ est **bornée** si $\exists$ M $\in \mathbb{R} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq$M

La suite $(u_n)_n$ est **périodique** de période T si $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_{n+T} = u_n$

Une **suite extraite ou sous-suite** de $(u_n)_n$ est une suite $u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante (on montre qu'alors $\varphi(n) \geq n$)

Cas réel :

La suite $(u_n)_n$ est **croissante (strictement croissante)** si $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$ $(u_n < u_{n+1})$

La suite $(u_n)_n$ est **décroissante (strictement décroissante)** si $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq u_{n+1}$ $(u_n > u_{n+1})$

La suite $(u_n)_n$ est **majorée** (respectivement **minorée**) si $\exists$ M $\in \mathbb{R} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq$ M (respectivement $\exists$ m $\in \mathbb{R} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad$ m $\leq u_n$)

I.3. Convergence

La suite $(u_n)_n$ est **convergente** si $\exists\ l \in \mathbb{R} \quad \forall\ \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$

Une suite non convergente est **divergente**

théorème : Si l existe alors l est unique , notée $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$

Remarque : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (u_n - l) = 0$

théorème : Une suite convergente est bornée (réciproque fausse)

théorème : L'ensemble des suites convergentes vers 0 est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

théorème : Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente vers la même limite (réciproque fausse)

mais : Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l, alors $(u_n)_n$ converge vers l

I.4. Propriétés des limites

théorème : Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergeant respectivement vers l et l' alors

Si $\alpha \in \mathbb{K} \quad \lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\alpha u_n + v_n\ ) = \alpha l + l'$

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (u_n v_n) = ll' \qquad \lim\limits_{n \mapsto +\infty} |u_n| = |l| \qquad \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \overline{u_n} = \overline{l}$

Si $l' \neq 0$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l}{l'}$

théorème : Si $(u_n)_n$ suite bornée et $(v_n)_n$ suite convergeant vers 0 alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (u_n v_n) = 0$

I.5. Cas complexe

théorème : $(u_n)_n$ suite complexe est convergente si et seulement si $Re(u_n)$ et $Im(u_n)$ sont deux suites réelles convergentes

On a alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} Re(u_n) + i \lim\limits_{n \mapsto +\infty} Im(u_n)$

théorème : Si le module et l'argument de $(u_n)_n$ sont deux suites (réelles) convergentes , alors la suite $(u_n)_n$ converge et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} |u_n| \, e^{i \lim\limits_{n \mapsto +\infty} arg(u_n)}$

I.6. Suites particulières

La suite $(u_n)_n$ est **arithmétique** (de raison r) si $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$. On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$

La suite $(u_n)_n$ est **géométrique** (de raison r) si $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = ru_n$. On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 r^n$

Dans ce cas si $r \neq 1 \quad u_{n_0} + ... + u_n = u_{n_0} \dfrac{1 - r^{n-n_0+1}}{1-r}$

La suite $(u_n)_n$ est **affine ou arithmético-géométrique.** si $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
On pose $v_n = u_n - l$ avec l vérifiant $l = al + b$, alors $(v_n)_n$ soit géométrique de raison a.

Suite doublement récurrente : $(u_n)_n$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
On lui associe l'équation caractéristique $(*)$: $r^2 - ar - b = 0$
Si $(*)$ a deux racines distinctes r_1 et r_2 alors $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
(avec dans $\mathbb{R}$ si $r_1 = \bar{r_2} = ke^{i\theta} \quad u_n = k^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$)
Si $(*)$ a une racine double r, alors $u_n = r^n(\alpha n + \beta)$

I.7. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

$\mathcal{I}$ intervalle réel , f: $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$ continue
On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 \in \mathcal{I}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$
Si f est croissante sur $\mathcal{I}$, alors $(u_n)_n$ est monotone.
Si f est décroissante, alors les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de monotonie contraire.
Si $(u_n)_n$ converge vers l, alors $f(l) = l$

II. Cas des suites réelles

II.1. Limites et encadrement

théorème : Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites réelles convergeant vers l et l' respectivement et si $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq v_n$ (ou $u_n < v_n$) alors $l \leq l'$

théorème : Si $(u_n)_n$ est une suite réelle convergeant vers $l > 0$ (respectivement $l < 0$) alors $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_n > 0$ (respectivement $u_n < 0$)

théorème d'encadrement ou " des gendarmes " : Soient trois suites réelles $(u_n)_n$ $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ vérifiant $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$, on suppose que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} w_n = l$ alors la suite $(v_n)_n$ converge vers l

II.2. Cas particuliers de divergence : limites infinies

$(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ si $\forall\, A > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A$

$(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ si $\forall\, A > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Longrightarrow u_n \leq -A$

Rappel des formes indéterminées : $0.\infty$; $\infty - \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 1^∞

II.3. Théorème fondamental

Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée et si la suite est croissante non majorée, elle tend vers $+\infty$

Une suite décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée et si la suite est décroissante non minorée , elle tend vers $-\infty$

II.4. Suites adjacentes

Deux suites réelles sont adjacentes si l'une est croissante , l'autre décroissante et leur différence converge vers 0

théorème : Deux suites adjacentes sont convergentes vers la même limite

Exemple : Les suites $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+..+\dfrac{1}{n!}$ et $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+..+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{nn!}$ sont adjacentes (et convergent vers e)

III. Relations de comparaison dans $\mathbb{K}$

III.1. Relation de domination

La suite $(u_n)_n$ est **dominée** par la suite $(\alpha_n)_n$ si $\exists\, M > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq M|\alpha_n|$

On écrit $u_n = O(\alpha_n)$

Si $(\alpha_n)_n$ n'est jamais nulle , on a $u_n = O(\alpha_n)$ si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{\alpha_n}\right)_n$ suite bornée

III.2. Relation de négligeabilité

La suite $(u_n)_n$ est **négligeable** par la suite $(\alpha_n)_n$ si $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq \epsilon|\alpha_n|$

On écrit $u_n = o(\alpha_n)$

Si $(\alpha_n)_n$ n'est jamais nulle , on a $u_n = (\alpha_n)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_n}{\alpha_n} = 0$

Exemples : $\alpha > 0$ $\beta \in \mathbb{R}$ $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ $\quad n^\beta = o(\mathrm{e}^{\alpha n})$

$a \in \mathbb{C} \quad a^n = o(n!)$

$n! = o(n^n)$

Remarque : $u_n = o(1) \iff \lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$

III.3. Relation d'équivalence

La suite $(u_n)_n$ est **équivalente** à la suite $(\alpha_n)_n$ si $u_n - \alpha_n = o(\alpha_n)$,

ie si $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Longrightarrow |u_n - \alpha_n| \leq \epsilon|\alpha_n|$

On écrit $u_n \sim \alpha_n$

Si $(\alpha_n)_n$ n'est jamais nulle , on a $u_n \sim \alpha_n$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{\alpha_n} = 1$

Remarque : Seule la suite nulle est équivalente à 0

Propriétés :

1/ $\sim$ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive)

2/ Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = l$ et $l \neq 0$ alors $u_n \sim l$

3/ Si $u_n \sim \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \alpha_n = l$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = l$

4/ Si $u_n \sim \alpha_n$ et $v_n \sim \beta_n$ alors $u_n v_n \sim \alpha_n \beta_n$

5/ $e^{u_n} \sim e^{\alpha_n} \iff \lim\limits_{n\mapsto+\infty}(u_n - \alpha_n) = 0$

6/ Si $(u_n)_n$ et $(\alpha_n)_n$ suites strictement positives avec $u_n \sim \alpha_n$ et non$(\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \alpha_n = 1)$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(\alpha_n)$

7/ Si $u_n = v_n + \alpha_n$ et $v_n = o(\alpha_n)$ alors $u_n \sim \alpha_n$

IV. Séries

IV.1. Définition

Soit la suite $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on appelle **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, le couple de suites $((u_n)_n,(S_n)_n)$ où $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

S_n s'appelle la $n^{ème}$ **somme partielle** de cette série.

L'ensemble de séries est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Remarque : si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est définie à partir d'un rang n_0 , on complète par $u_0 = ... = u_{n_0-1} = 0$

IV.2. Convergence

La série $\sum u_n$ de terme général u_n est convergente si la suite $(S_n)_n$ converge. On note alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$

et on appelle **reste de rang** n de la série $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Sinon la série est divergente.

L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

IV.3. Condition nécessaire de convergence

Si $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0. La réciproque est fausse.
Si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

IV.4. Exemples

série géométrique : $q \in \mathbb{C}$ $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

et si $n_0 \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$

série de Riemann : $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

RIEMANN Bernhard 1826 Hanovre - 1866 Selesca : Gauss dirige sa thèse sur les fonctions d'une variable complexe en l'université de Göttingen (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer vernderlichen complexen Größe = Fondements pour une théorie générale des fonctions d'une variable complexe). Avec sa théorie des surfaces, généralisée à n dimensions (variétés), Riemann introduit les géométries non euclidiennes. En analyse, Riemann développe la théorie des fonctions abéliennes, des fonctions elliptiques et publie une rigoureuse théorie de l'intégration pour les fonctions bornées sur un intervalle fermé

exponentielle : $x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

théorème : série emboîtée ou télescopique : la suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

IV.5. Séries à termes positifs

définition : La série $\sum u_n$ est à termes positifs si $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$
ou $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \quad u_n \geq 0$

Si $(-u_n)_n$ vérifie l'une de ces propriétés , la série est à termes négatifs mais les critères suivants restent valables.

théorème fondamental : $\sum u_n$ série à termes positifs , alors

$\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est majorée.

théorème de comparaison : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs vérifiant $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq v_n$ alors

$\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

$\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge

Les réciproques sont fausses.

Corollaires 1. : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs vérifiant $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$)

alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge ; $\quad \sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge

Les réciproques sont fausses.

2. Règle de Riemann :

$\sum u_n$ série à termes positifs vérifiant $\exists\ \alpha > 1 \quad u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $\left(\text{ou } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ alors $\sum u_n$ converge

$\sum u_n$ série à termes positifs vérifiant $\exists\ \alpha \leq 1 \quad \frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ (ou $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$) alors $\sum u_n$ diverge

3. Règle des équivalents : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs vérifiant $u_n \sim v_n$

alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature (mais en cas de convergence on n'a pas nécessairement $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$)

4. Technique de comparaison: encadrement des sommes partielles par la méthode des rectangles:

a/ Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue décroissante,
on définit pour $n_0 \geq a$ et $n \geq n_0 \quad u_n = f(n)$

On a $\forall\, n > n_0 \quad u_n \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt \qquad$ et $\forall\, n \geq n_0 \quad \int_{n}^{n+1} f(t)dt \leq u_n$

donc en sommant $\forall\, n > n_0 \quad \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq u_{n_0} + \int_{n_0}^{n} f(t)dt$

b/ Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue croissante,
on définit pour $n_0 \geq a$ et $n \geq n_0 \quad u_n = f(n)$

On a $\forall\, n > n_0 \quad \int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq u_n \qquad$ et $\forall\, n \geq n_0 \quad u_n \leq \int_{n}^{n+1} f(t)dt$

donc en sommant $\forall\, n > n_0 \quad u_{n_0} + \int_{n_0}^{n} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt$

exemple : constante d'Euler

On prend $f(x) = \frac{1}{x}$ définie, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ à valeurs positives

si $n \geq 1 \quad \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{t}dt$

soit $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n) \qquad$ ou $0 \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1$

donc si $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \qquad (v_n)_n$ est bornée

et $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{c} \qquad$ avec $c \in]n, n+1[$ par égalité des accroissements finis

donc $(v_n)_n$ est décroissante, et minorée donc converge.

donc $\lim_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est finie, appelée constante d'Euler , notée $\gamma \quad$ (on a $0 < \gamma < 1$)

EULER Leonhard 1707 Bâle - 1783 Saint-Pétersbourg : Né d'un père pasteur, Leonhard étudie les lettres, la théologie et la médecine. Elève de Jean Bernoulli, il se fait connaître à l'Académie des sciences de Paris à 18 ans par divers mémoires (théorie des marées, propagation du son).
Il travaille à Saint-Pétersbourg puis à Berlin, puis est membre associé de l'Académie des sciences de Paris. Vers la fin de sa vie, alors aveugle, il revient à Saint-Pétersbourg.

Son travail porte sur l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière, mécanique des solides...), et les mathématiques de l'arithmétique à la géométrie différentielle.
On lui doit entre autres la notation π, e pour l'exponentielle, i tel que $i^2 = -1$

exemple : recherche d'équivalent : déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

on pose $f(x) = \ln(x)$ f est définie, continue et croissante sur $[1,+\infty[$ à valeurs positives

$\forall\ n > 1\quad \ln(1) + \displaystyle\int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \int_1^{n+1} f(t)dt$

soit $n\ln(n) - n + 1 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \sim n\ln(n)$

exemple : séries de Bertrand : $\sum u_n$ où $\forall\ n \geq 2\quad u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$

Si $\alpha < 0$ ou ($\alpha = 0$ et $\beta < 0$) alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement

Si $\alpha = \beta = 0$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 1$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement

Sinon si $\alpha > 1$ alors soit $\lambda \in]1,\alpha[$ alors $\forall\ \beta$ $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^\lambda u_n = 0$ donc par règle de Riemann , $\sum u_n$ converge

si $\alpha < 1$ soit $\lambda \in]\alpha, 1]$ alors $\forall\ \beta$ $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^\lambda u_n = +\infty$ donc par règle de Riemann , $\sum u_n$ diverge.

si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} nu_n = +\infty$ donc par règle de Riemann , $\sum u_n$ diverge.

si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ alors $\sum u_n$ diverge.

si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ f est définie, continue et décroissante sur $[2,+\infty[$ à valeurs positives

$\forall\ n > 2\quad \displaystyle\int_2^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=2}^{n} u_k \leq u_2 + \int_2^n f(t)dt$

or $\displaystyle\int_2^n f(t)dt = \begin{cases} \dfrac{(\ln(n))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}}{1-\beta} \text{ si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \text{ si } \beta = 1 \end{cases}$

donc si $\beta \leq 1$ $\quad \lim \mapsto +\infty \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = +\infty$ et $\sum u_n$ diverge

et si $\beta > 1$ $\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \leq u_2 + \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}$

donc la somme partielle de la série à termes positifs est majorée, donc $\sum u_n$ converge

Finalement $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ converge $\Longleftrightarrow$ ($\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$))

BERTRAND Joseph Louis Franois 1822 Paris - 1900 Paris: Premier à l'École polytechnique à 17 ans, premier à l'agrégation deux années plus tard , d'abord ingénieur des Mines, fonction qu'il délaissera pour

l'enseignement au lycée Saint-Louis puis au Collège de France, il est ensuite élu à l'Académie des Sciences puis à l'Académie .
Les travaux de Bertrand portent sur l'arithmétique , le calcul différentiel et intégral, les probabilités ainsi que sur l'astronomie, la thermodynamique, l'électricité.

V. Compléments

V.1.Comparaison logarithmique

théorème : Si $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0\ ,\quad v_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge ; $\quad \sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge

théorème : 1. Si $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ et $\exists\, k \in]0{,}1[\quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$

alors $\sum u_n$ converge et $0 \leq R_n \leq \dfrac{k u_n}{1-k}$

2. Si $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement

Règle de d'Alembert : Si $\sum u_n$ est une série à termes strictement positifs vérifiant $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$

$(l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$

alors si $l < 1$ on a $\sum u_n$ converge

si $l > 1$ on a $\sum u_n$ diverge (et même divergence grossière)

si $l = 1$ pas de conclusion

D'ALEMBERT Jean le Rond , 1717 Paris - 1783 Paris : Enfant naturel d'un commissaire d'artillerie, abandonné sur les marches de la chapelle parisienne de Saint-Jean-Le-Rond,il est recueilli par un vitrier qui recevra secrètement une pension pour son éducation.
D'Alembert entre à l'Académie des sciences à 24 ans. D'Alembert fut un savant universel : dynamique, mécanique des fluides, mécanique céleste, cordes vibrantes, théorie des vents et marées. Il introduit les premières équations aux dérivées partielles du second ordre. Auteur d'un traité sur la précession des équinoxes et l'oscillation de l'axe de rotation de la Terre, nutation, on lui doit le principe de la quantité de mouvement, dit principe de d'Alembert.
Diderot fait appel à d'Alembert pour l'Encyclopédie dans laquelle d'Alembert écrit :
Dans une équation (à coefficients réels), les racines imaginaires, s'il y en a, sont toujours en nombre pair. De là il s'ensuit que dans toute équation d'un degré impair, il y a au moins une racine réelle.

V.2. Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

STIRLING James 1692 Glasgow - 1770 Londres : Après desétudes au Balliol College d'Oxford et la publication d'un traité sur les cubiques (courbes algébriques du troisième degré, il part enseigner les mathématiques à Venise. Il publie divers mémoires sur la gravitation, la mécanique, l'hydraulique.
Stirling résout le problème de la recherche des trajectoires orthogonales d'une famille de courbes.
De retour à Londres, il rencontre Abraham de Moivre qui deviendra son ami et est élu à la Royal Society.

V.3. Séries absolument convergentes

définition : La série $\sum u_n$ est **absolument convergente** ou la suite $(u_n)_n$ est **sommable** si $\sum |u_n|$ est convergente.

théorème : $\sum u_n$ absolument convergente $\Longrightarrow \sum u_n$ converge (la réciproque est fausse)

théorème : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum(u_n + v_n)$ est absolument convergente et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$

théorème : $(u_n)_n$ suite complexe, on suppose qu'il existe $(v_n)_n$ suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ avec $\sum v_n$ converge, si $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$) alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

V.4. Séries alternées

définition : La série $\sum u_n$ est alternée si $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n u_n$ est de signe fixe

théorème: critère spécial des séries alternées : Soit $\sum u_n$ une série alternée avec $(|u_n|)_n$ suite décroissante convergeant vers 0 alors $\sum u_n$ converge et $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |R_n| \leq |u_{n+1}|$

V.5. Produit de Cauchy

CAUCHY baron Augustin-Louis 1789 Paris - 1857 Sceaux : Polytechnicien à 16 ans, il démontre quatre ans plus tard la formule de Descartes-Euler : $S - A + F = 2$ relative aux polyèdres convexes où S, F et A désignent les nombres de sommets, de faces et d'arêtes.
Ingénieur des ponts et chaussées, Cauchy dirige les travaux de la construction du port de Cherbourg mais il préfère après son élection à l'Académie des sciences, enseigner au Collège de France, à l'École Polytechnique et à la Sorbonne.
Cauchy étudie les suites et séries numériques, la théorie des fonctions d'une variable complexe (on lui doit la notation lim) et la théorie des résidus.
La carrière de Cauchy a été contrariée par les événements politiques : disgracié à la révolution de 1830, il quitte la France pour l'Italie. Cauchy retrouve une chaire d'astronomie à la faculté des sciences de Paris en 1838, qu'il quitte en 1852 suite au coup d'État de Louis-Napoléon Bonaparte . Il retrouve son poste en 1854

définition : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries , le produit de Cauchy de ces deux séries est la série de terme général $\displaystyle w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$

théorème : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$

Application à l'exponentielle complexe : $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$\displaystyle e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad e^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}$ sont deux séries absolument convegentes, donc on peut effectuer un produit de Cauchy de ces deux séries alors $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}$

donc $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

VI. Plan d'étude d'une série

1/ Vérifier que $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$

2/ Série à termes positifs (ou négatifs)
Si $u_n > 0$, règle de d'Alembert
règle des équivalents
règle de Riemann
majoration par une série convergente, minoration par une série divergente
comparaison séries-intégrales

3/ Séries alternées ie $(-1)^n u_n$ de signe fixe
critère spécial des séries alternées
dl (dl$_2$ ou dl$_3$)

4/ Autres séries (sans signe ou à termes complexes)
étude de la convergence absolue
sinon ?