PC Séries de fonctions

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$

I. Modes de convergences

$n \in \mathbb{N} \quad u_n : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$

I.1. Convergence simple (cvs)

définition : La série de fonctions $\sum u_n$ cvs sur $\mathcal{I}$ si $\forall\ x \in \mathcal{I}$, la série $\sum u_n(x)$ converge.

On note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

S est dite fonction somme des u_n sur $\mathcal{I}$

Remarque : Il s'agit de la cvs de la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$

I.2. Convergence uniforme (cvu)

définition : La série de fonctions $\sum u_n$ cvu sur $\mathcal{I}$ si $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ cvu sur $\mathcal{I}$

ie $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \|\sum_{k=0}^{n} u_n - S\|_\infty = \lim_{n\mapsto+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$

Propriété : cvu $\Longrightarrow$ cvs

définition : La série de fonctions $\sum u_n$ cvu sur tout segment de $\mathcal{I}$ si $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathcal{I}$

Propriété : cvu $\Longrightarrow$ cvu sur tout segment de $\mathcal{I}$ $\Longrightarrow$ cvs

Toutes les réciproques sont fausses

I.3. Convergence normale (cvn)

définition : La série de fonctions $\sum u_n$ cvn sur $\mathcal{I}$ si $\sum \|u_n\|_\infty$ converge

définition : La série de fonctions $\sum u_n$ cvn sur tout segment de $\mathcal{I}$ si $\forall\ (a,b) \in \mathcal{I}^2 \quad \sum \|u_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge

Propriété : cvn $\Longrightarrow$ cvu $\Longrightarrow$ cvs

cvn sur tout segment $\Longrightarrow$ cvu sur tout segment $\Longrightarrow$ cvs

cvn $\Longrightarrow$ cvu sur tout segment

Toutes les réciproques sont fausses

Propriété : $\sum u_n$ cvn sur $\mathcal{I}$ alors $\forall\ x \in \mathcal{I}\quad \sum u_n(x)$ cv absolument.

Propriété : $\sum u_n$ cvn sur $\mathcal{I}$ alors $\forall\ x \in \mathcal{I}\quad \sum u_n(x)$ cv absolument.

II. Conservation des propriétés par cvu

II.1. Continuité

théorème : $n \in \mathbb{N}\quad u_n : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\forall\ n \in \mathbb{N}\ u_n$ continue sur $\mathcal{I}$ et $\sum u_n$ cvu vers S sur $\mathcal{I}$ (ou cvu sur tout segment de $\mathcal{I}$), alors $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathcal{I}$

II.2. Limites

théorème : $n \in \mathbb{N}\quad u_n : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\sum u_n$ cvu sur $\mathcal{I}$

soit $a \in \bar{\mathcal{I}}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \displaystyle\lim_{x \mapsto a} u_n(x) = l_n$, alors $\sum l_n$ cv et $\displaystyle\lim_{x \mapsto a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$

II.3. Dérivabilité

théorème : $n \in \mathbb{N}\quad u_n : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\forall\ n \in \mathbb{N}\ u_n$ de classe c^1 sur $\mathcal{I}$ et $\sum u_n$ cvs vers S sur $\mathcal{I}$ et $\sum u_n'$ cvu (ou cvu sur tout segment de $\mathcal{I}$), alors S est de classe c^1 sur $\mathcal{I}$ et $S' = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$

Extension : $n \in \mathbb{N}\quad u_n : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\forall\ n \in \mathbb{N}\ u_n$ de classe c^k sur $\mathcal{I}$ et $\sum u_n$ cvs vers S sur $\mathcal{I}$, $\sum u_n', \ldots , \sum u_n^{(k-1)}$ cvs sur $\mathcal{I}$ et $\sum u_n^{(k)}$ cvu sur $\mathcal{I}$ (ou cvu sur tout segment de $\mathcal{I}$), alors S est de classe c^k sur $\mathcal{I}$ et $S^{(k)} = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$

S est de classe c^∞ si S est de classe c^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

II.4. Intégration

théorème : $n \in \mathbb{N}\quad u_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\forall\ n \in \mathbb{N}\ u_n$ continue sur $[a,b]$ et $\sum u_n$ cvu vers S sur $[a,b]$

alors $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \int_a^b S(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt$

faux avec cvs

théorème d'intégration terme à terme (admis) : (version 1) $n \in \mathbb{N}\quad u_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\forall\ n \in \mathbb{N}\ u_n$ continue sur $[a,b]$ et $\sum u_n$ cvs vers S sur $[a,b]$ avec S continue sur $[a,b]$ et $\sum \displaystyle\int_a^b |f_n|$ converge

alors $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \int_a^b S(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt$