PC Séries entières

$(a_n)n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la série entière de la variable complexe z associée à la suite $(a_n)_n$ est la série de fonctions $\sum a_n z^n$

I. Rayon de convergence

I.1. Lemme d'Abel

ABEL Niels Henrik 1802 Nedstrand - 1829 Froland : Niels Abel a fait ses études au collège de la cathédrale d'Oslo (Christiania à l'époque). Dès 16 ans, il découvre les œuvres d'Euler de de Lagrange et cherche à résoudre l'équation du 5ème degré. Grâce à une bourse d'études, il se rend à Berlin mais les travaux d'Abel laissent indifférente la communauté mathématique. Abel ne renonce pas et se rend à Paris. Son mémoire, "Sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes", a été mésestimé par Gauss et Legendre puis égaré et retrouvé par Cauchy mais après la mort d'Abel (mort de tuberculose à 27 ans).

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière , s'il existe $\rho > 0$ tel que la suite $(a_n \rho^n)_n$ soit bornée, alors

$\forall\ z \in \mathbb{C} \quad |z| < \rho \quad (a_n z^n)_n$ est dominée par $\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n$ et donc $\sum a_n z^n$ converge absolument

I.2. Rayon de convergence

On pose $\mathcal{A} = \{\rho \geq 0; (a_n \rho^n)_n$ suite bornée $\}$. $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+ \quad 0 \in \mathcal{A}$

donc $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide

définition : si $\mathcal{A}$ non majoré, on pose $R = +\infty$

Si $\mathcal{A}$ majoré, on pose $R = \sup \mathcal{A}$

R s'appelle rayon de convergnce de la série entière $\sum a_n z^n$

définition : On appelle disque ouvert de convergence $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ (inclus dans $\mathbb{C}$)

et intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ (inclus dans $\mathbb{R}$)

Exemple : $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad \sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence 1.

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors

si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument et converge

si $|z| > R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement

si $|z| = R$ alors on ne peut rien dire

théorème : Autres caractérisations du rayon de convergence :

$R = \sup\{|z| \geq 0: \sum a_n z^n$ converge absolument $\} = \sup\{|z| \geq 0: \sum a_n z^n$ converge $\}$

$R = \sup\{|z| \geq 0: \lim\limits_{n \to +\infty} a_n z^n = 0\}$

I.3. Propriétés

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R alors

si $\exists\ z_0 \in \mathbb{C} \quad \sum a_n z_0^n$ converge alors $R \geq |z_0|$

si $\exists\ z_1 \in \mathbb{C}\quad \sum a_n z_1^n$ diverge alors $R \leq |z_1|$

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R_a

$\sum b_n z^n$ série entière de rayon de convergence R_b alors

1. Si $a_n = O(b_n)$ (ou $a_n = o(b_n)$) alors $R_a \geq R_b$
2. si $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad 0 \leq |a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$
3. Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$

Utilisation de la règle de d'Alembert : $\sum a_n z^n$ série entière avec $\forall\ n \in \mathbb{N}\quad a_n \neq 0$

On suppose $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| = l \quad , l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

alors $R = \dfrac{1}{l} = \begin{cases} 0 \text{ si } l = +\infty \\ +\infty \text{ si } l = 0 \\ \dfrac{1}{l} \text{ si } l \in]0, +\infty[\end{cases}$

II. Opérations sur les séries entières

II.1. Somme

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R_a . $\sum b_n z^n$ série entière de rayon de convergence R_b alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence R avec $R \geq \min(R_a, R_b)$

et si $|z| < \min(R_a, R_b)\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Si de plus $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$

II.2. Multiplication par un scalaire non nul

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R_a , $\alpha \in \mathbb{C}^*$ alors $\sum (\alpha a_n) z^n$ a pour rayon de convergence R_a

II.3. Produit de séries entières

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R_a . $\sum b_n z^n$ série entière de rayon de convergence R_b alors $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence R avec $R \geq \min(R_a, R_b)$

où $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

si $|z| < \min(R_a, R_b)\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

III. Propriétés de la somme d'une série entière

III.1. Convergence normale

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$. alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout fermé borné du disque ouvert de convergence faux sur $D(0, R)$

Corollaire : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$

faux sur $]-R, R[$

III.2. Continuité

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction somme $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$ (domaine de définition réel)

On ne sait rien en R et $-R$

Remarque admise : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction somme est continue sur $D(0, R)$ (domaine de définition complexe)

III.3. Dérivation. Intégration

théorème : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R, alors $\sum n a_n z^n$ et $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^n$ ont pour rayon de convergence R

Remarque : Les séries ont le même rayon de convergence mais peuvent avoir des comportements différents au bord

théorème intégration : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors

on pose $S :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{-\infty} a_n x^n$$

alors si $|x| < R$ $\quad \displaystyle\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n-1}}{n+1}$

théorème dérivation : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors

on pose $S :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{-\infty} a_n x^n$$

alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ $\quad$ et $\forall\, x \in]-R, R[$ $\quad S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{-\infty} n a_n x^{n-1}$

Généralisation : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors

alors S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ $\quad$ et $\forall\, x \in]-R, R[$ $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ $\quad S^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{-\infty} n(n-1)..(n-k+1) a_n x^{n-k}$

et $a_k = \dfrac{S^{(k)}}{k!}$

théorème : Soit $f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad$ tel que sur $]-R, R[$ f soit la somme d'une série entière de rayon de convergence $\geq R$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur]-R, R[

IV. Développement en série entière (DSE)

IV.1. Définition

définition : Soit f :]-r, r[$\longrightarrow \mathbb{C}$ est DSE sur]-r, r[s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que $\forall\, x \in$]-r, r[$\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Propriété : Si f est DSE sur]-r, r[, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur]-r, r[et $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad a_k = \dfrac{S^{(k)}}{k!}$

réciproque fausse

IV.2. Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

TAYLOR Brook 1685 Edmonton - 1731 Londres : Savant éclectique, Brook Taylor s'adonne à la musique, la peinture et la philosophie. Formé aux mathématiques par John machin à l'université de Cambridge, on lui doit son traité sur le déveloopement en séries de fonctions : Methous incrementorum directa et inversa.

définition : Soit f :]-r, r[$\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$, on appelle série de Taylor (ou de Mac-Laurin) de f la série entière $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

alors si f DSE sur $]-r, r[$, la série de Taylor de f converge vers f sur $]-r, r[$

Lien avec la formule de Taylor : Soit f :]-r, r[$\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$,

alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n-1)}(t)dt$

donc f est DSE sur $]-r, r[$ si et seulement si $\forall\, x \in$]-r, r[$\quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n-1)}(t)dt = 0$

IV.3. Propriétés

1. Le DSE d'une fonction est unique (s'il existe)

2. f, g :]-r, r[$\longrightarrow \mathbb{C}$ DSE alors $f+g$,fg sont DSE sur]-r, r[et si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

alors $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n \quad (fg)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})x^n$

3. f :]-r, r[$\longrightarrow \mathbb{C}$ DSE alors $x \longmapsto \int_0^x f(t)dt$ est DSE sur]-r, r[et $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

4. f :]-r, r[$\longrightarrow \mathbb{C}$ DSE alors f' est DSE sur]-r, r[et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

IV.4. DSE usuels

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ donc } \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad R = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} \qquad R = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad R = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad R = +\infty$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1 \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \text{ donc } \quad \forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad R = 1$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad R = 1$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n+1} \qquad R = 1$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} \qquad R = 1$$

IV.5. Recherche de solutions DSE d'une équation différentielle linéaire

$(E))\ a_n(x)y^{(n)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = b(x)$ avec $a_0, \cdots, a_n, b :\ ]-r, r[\longrightarrow \mathbb{C}$ DSE

On cherche y sous la forme $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$

On effectue les produits de Cauchy et on égale les DSE par unicité du DSE.

Puis on cherche le rayon de convergence.

Autre application : série génératrice (probas)