PC Fonctions de plusieurs variables

I. Rappels

$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $\quad \mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

I.1. Limites

définition : $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$, f admet une limite en a si

$\exists\, l \in \mathbb{R}^p \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \alpha > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{U} \quad \|x - a\| \leq \alpha \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$

si l existe , l est unique

si f: $(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$

f admet une limite en $a \Longleftrightarrow \forall\, i \in [\![1, p]\!] \quad f_i$ admet une limite en a

donc, quitte à prendre composante par composante, on se ramène aux fonctions de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{R}$.

théorème : $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\, (u_m)_m \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$ avec $\lim\limits_{m \mapsto +\infty} u_m = a$ alors $\lim\limits_{m \mapsto +\infty} f(u_m) = l$

Ce théorème sert surtout à démontrer qu'une fonction n'a pas de limites.

I.2. Continuité

définition : f est continue en $a \in \mathcal{U}$ si $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = f(a)$

f est continue sur $\mathcal{U}$ si f est continue en tout point de $\mathcal{U}$

f est continue en a (respectivement sur $\mathcal{U}$) $\Longleftrightarrow \forall\, i \in [\![1, p]\!] \quad f_i$ est continue en a (respectivement sur $\mathcal{U}$)

Remarque : si $p = 2$ et $n = 1$, la représentation graphique de $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue , (ie $z = f(x, y)$) définit une surface de $\mathbb{R}^3$.

II. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On se ramène aux fonctions $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

II.1. Dérivées selon un vecteur

définition : $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, f admet une dérivée selon le vecteur $\vec{u}$ en a

si $\lim\limits_{t \mapsto 0} \dfrac{f(a_1 + tu_1, \cdots, a_n + u_n) - f(a_1, ..., a_n)}{t}$ est finie ie si $t \longmapsto f(a+t\vec{u})$ est dérivable en 0. Cette limite est notée $\mathrm{D}_{\vec{u}} f(a)$

II.2. Dérivées partielles

définition : $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$, f admet une dérivée partielle en a suivant la i-ème variable

si $\mathrm{D}_{\vec{e_i}} f(a)$ existe , ie $\lim\limits_{t \mapsto 0} \dfrac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{t}$ est finie

$\mathrm{D}_{\vec{e_i}} f(a)$ se note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$

Remarque : l'existence des dérivées partielles ne donne rien sur la continuité.

II.3. Fonctions de classe C^1

$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

Si f admet une dérivée partielle par rappport à la i-ème variable en tout point de $\mathcal{U}$, on peut définir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

définition : f est de classe c^1 sur $\mathcal{U}$ si f admet n dérivées partielles toutes continues sur $\mathcal{U}$

Exemples : 1. Tout polynôme de n variables réelles est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^n$

2. Toute fraction rationnelle de n varaibles réelles est de classe c^1 sur son domaine de définition

Propriétés : 1. linéarité : $f, g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe c^1 sur $\mathcal{U} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

alors $\alpha f + g$ est de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

2. produit $f, g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

alors fg est de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

3. quotient $f, g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$ et g ne s'annule pas

alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

théorème : dl_1 : f est de classe c^1 sur $\mathcal{U}$, alors f admet en tout point de $\mathcal{U}$ un dl_1 et

$\forall\, a \in \mathcal{U} \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in \mathcal{U} \quad f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|)$

Corollaire : f est de classe c^1 sur $\mathcal{U}$ alors f continue sur $\mathcal{U}$

Approximation : $n = 2$, f est de classe c^1 sur $\mathcal{U}$, soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+o(\|(h,k)\|)$$

donc $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ s'approxime linéairement par $h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Si on pose $z-z_0=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, équation d'un plan, appelé plan tangent en (x_0,y_0) à la surface $z=f(x,y)$

II.3. Différentielle

$f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

Soit $a\in\mathcal{U}$, l'application $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$

$$h\longmapsto\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, appelée différentielle de f en a, notée df_a

donc $df_a(h)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ $\quad$ et $f(a+h)=f(a)+df_a(h)+o(h)$

théorème : f,g est de classe c^1 sur $\mathcal{U}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, alors

$d(\alpha f+g)_a=\alpha df_a+dg_a$

$d(fg)_a=f(a)dg_a+g(a)df_a$

si g ne s'annule pas $d\left(\dfrac{1}{g}\right)=-\dfrac{dg_a}{g(a)^2}$ $\qquad d\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g(a)df_a-f(a)dg_a}{g(a)^2}$

II.4. Composée

théorème : règle de la chaîne : $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi_1,\cdots,\varphi_n:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe c^1 sur $\mathcal{I}$

telles que $\forall\ t\in\mathcal{I}\quad(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\in\mathcal{U}$

alors $\psi:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\qquad$ est de classe c^1 sur $\mathcal{I}$

$\qquad t\longmapsto f(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$

et $\psi'(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varphi_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$

Application à la dérivée selon un vecteur :

$f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$ $\quad\vec{u}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

alors $\psi(t)=f(a_1+tu_1,\cdots,a_n+tu_n)$, ψ est de classe c^1 et

et $\psi'(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1+tu_1,\cdots,a_n+tu_n)$

$\mathrm{D}_{\vec{u}}f(a)=\psi'(0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\cdots,a_n)$

théorème : $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

$\mathcal{V}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ $\quad$ $\begin{array}{rcl} x : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ (u,v) & \longmapsto & x(u,v) \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rcl} y : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ (u,v) & \longmapsto & y(u,v) \end{array}$ $\quad$ x, y de classe c^1

alors $h : (u,v) \longmapsto f(x(u,v), y(u,v))$ est de classe c^1 de $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$

et $\dfrac{\partial h}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial h}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Généralisation : $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

$\mathcal{V}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ $\quad$ $x_1, \cdots, x_n : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ de classe c^1

alors $h : (u_1, \cdots, u_n) \longmapsto f(x_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, x_n(u_1, \cdots, u_n))$ est de classe c^1 de $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$

et $\dfrac{\partial h}{\partial u_i} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n)$

Application : coordonnées polaires : $(r, \theta) \longmapsto (x, y) = (r\cos(\theta), \sin(\theta))$ est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$

$f(r, \theta) = g(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial y} = \cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial y} = -r\sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}$$

théorème : caractérisation des fonctions constantes : $f :$

$\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{U}$ ouvert non vide convexe de $\mathbb{R}^n$

f est constante sur $\mathcal{U} \iff f$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$ et $\forall\, a \in \mathcal{U}$ $\quad df_a = 0$

II.5. Gradient

définition : $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

le gradient de f en $a \in \mathcal{U}$ est $\nabla f(a) = \overrightarrow{grad} f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$

donc $df_a(h) = \nabla(f)(a).h = < \nabla(f)(a), h >$

Propriétés : $\nabla(\alpha f + g)(a) = \alpha \nabla f(a) + \nabla g(a)$

$\nabla(fg)(a) = f(a)\nabla g(a) + g(a)\nabla f(a)$

si g ne s'annule pas $\nabla\left(\dfrac{1}{g}\right)(a) = -\dfrac{\nabla g(a)}{g^2(a)}$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(a)=\frac{g(a)\nabla f(a)-f(a)\nabla g(a)}{g^2(a)}$$

Autre expression de la règle de la chaîne : $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

f de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

$\mathcal{I}$ intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi_1,\cdots,\varphi_n:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe c^1 sur $\mathcal{I}$

telles que $\forall\ t\in\mathcal{I}\quad\gamma(t)=(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\in\mathcal{U}$

alors $\psi:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ est de classe c^1 sur $\mathcal{I}$

$\qquad t\longmapsto f(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$

et $\psi'(t)=<\nabla\psi(t),\gamma'(t)>$

donc $\mathrm{D}_{\vec{u}}f(a)=<\nabla f(a),\vec{u}>$

Propriété : $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, f de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

Propriété : $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, f de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

si $\nabla f(a)\neq\vec{0}$, $\nabla f(a)$ est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.

III. Dérivées partielles d'ordre supérieur

III.1. Définition

définition : $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

On suppose que f admet des dérivées partielles sur $\mathcal{U}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$

si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa $j^{ème}$ variable, on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à ses $i^{ème}$ et $j^{ème}$ variables

On note $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$

Généralisation : On peut définir des dérivées partielles d'ordre k : $\quad \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}$

définition : f est de classe c^2 sur $\mathcal{U}$ si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 toutes continues sur $\mathcal{U}$

f est de classe c^k sur $\mathcal{U}$ si f admet des dérivées partielles d'ordre k toutes continues sur $\mathcal{U}$

f est de classe c^∞ si f est de classe c^k pour tout k

théorème : $f,g:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad$ de classe c^k sur $\mathcal{U}$, alors $\alpha f+g$, fg sont de classe c^k sur $\mathcal{U}$ et si g ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe c^k sur $\mathcal{U}$

III.2. Théorème de Schwarz

théorème : (admis) $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ f de classe c^2 sur $\mathcal{U}$

alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $\quad$ si $1 \leq i, j \leq n$

Utilisation : directe ou pour montrer qu'une fonction n'est pas c^2

III.3. Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles

équation aux cordes vibrantes : $\quad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad y\ c^2 \qquad c > 0$

III.4. Matrice hessienne

définition : $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ f de classe c^2 sur $\mathcal{U}$

On appelle matrice hessienne de f en $a \in \mathcal{U}$, la matrice $H_f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Comme f est de classe c^2, $H_f(a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : (admis)

$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ f de classe c^2 sur $\mathcal{U}$

$a \in \mathcal{U}$ $\quad h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in \mathcal{U}$ $\quad$ alors $f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^T h + \dfrac{1}{2} h^T H_f(a) h + o\left(\|h\|^2\right)$

soit pour $n = 2$ $\quad f(a+h) = f(a) + h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} + h_1^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + h_2^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + o(h_1^2 + h_2^2)$

IV. Extrema

définition : $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

f admet un minimum local en $a \in \mathcal{U}$ s'il existe $r > 0$ $\forall\ x \in B(a, r) \cap \mathcal{U}$ $\quad f(a) \leq f(x)$

f admet un maximum local en $a \in \mathcal{U}$ s'il existe $r > 0$ $\forall\ x \in B(a, r) \cap \mathcal{U}$ $\quad f(x) \leq f(a)$

f admet un minimum global en $a \in \mathcal{U}$ si $\forall\ x \in \mathcal{U}$ $\quad f(a) \leq f(x)$

f admet un maximum global en $a \in \mathcal{U}$ si $\forall\ x \in \mathcal{U}$ $\quad f(x) \leq f(a)$

théorème : $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de classe c^1 sur $\mathcal{U}$

si a extremum local de f, alors $\nabla f(a) = 0$ (ie a s'appelle point critique de f)

la réciproque est fausse

théorème réciproque : $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{U}$ ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de classe c^2 sur $\mathcal{U}$

si a est un point critique de f, alors

si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a.

si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a.

Remarque : pour maximum, utiliser $-f$, donc

si $H_{-f}(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un maximum local strict en a.

si $H_{-f}(a) \notin \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de maximum en a.

Cas n=2 : On pose $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$

alors $H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

si $det(H_f(a)) > 0$ et $tr(H_f(a)) > 0$, f admet un minimum strict en a.

si $det(H_f(a)) > 0$ et $tr(H_f(a)) < 0$, f admet un maximum strict en a.

sinon, pas d'extremum, on parle de point selle.