

---

# LIENS ENTRE LES ENSEMBLES DE MANDELBROT, DE JULIA ET LES MÉTHODES DE SOMMABILITÉ DE NØRLUND

JÉRÔME CÔTÉ  
Étudiant au baccalauréat en mathématiques  
Université Laval

Projet de recherche d'été  
Bourse de recherche d'été de l'ISM

Superviser par Pierre-Olivier Parisé et Thomas J. Ransford  
18 septembre 2023

---

## Abstract

Dans ce projet, nous avons étudié la question suivante : que se passe-t-il lorsqu'on applique une méthode de sommabilité à la suite des itérées d'un polynôme à valeurs complexes. Nous avons observé que l'application d'une méthode de sommabilité à la suite des itérées ne modifie pas l'ensemble de Julia généré (et par ricochet les ensembles de Mandelbrot associés) lorsqu'on se restreint à une famille de méthode de sommabilité : les méthode de Nørlund. Ces dernières méthodes sont dites linéaires. Par la suite, nous avons investigué le problème de trouver une méthode de sommabilité linéaire qui modifie l'ensemble de Julia. Ceci nous a aussi conduit à l'étude d'une méthode d'accélération de convergence non-linéaire, la méthode d'Aitken, dans l'espoir qu'elle change l'aspect visuel des ensembles de Julia.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Système dynamiques holomorphes	3
2.1. Ensembles de Julia	3
2.2. L'ensemble de Mandelbrot	5
3. Méthodes de sommabilité régulières	6
3.1. Méthode de Cesàro	7
3.2. Premières méthodes de Nørlund	9
3.3. Deuxième méthode de Nørlund	12
3.4. Méthodes régulières exceptionnelles	14
4. Méthodes non-linéaires	17
5. Conclusion	19
Références	21

## 1. INTRODUCTION

La théorie des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui étudie l'évolution d'un système qui suit des règles bien précises. Cette discipline a été initiée par H. Poincaré à la suite de son étude du problème des trois corps. Elle est devenue populaire au sein du public grâce aux expériences de E. Lorenz sur des modèles climatiques en 1963, donnant par ailleurs naissance à l'expression «effet papillon». Désormais, cette théorie mathématique est un outil devenu central à de nombreux domaines des sciences et du génie [4, 5].

Une des branches de la théorie des systèmes dynamiques est la dynamique holomorphe qui étudie la dynamique engendrée par l'itération de fonctions dérivables à valeurs complexes. Elle est née des travaux de deux mathématiciens français, Gaston Julia et Pierre Fatou, publiés entre les années 1917 et 1920. Les travaux de mathématiciens tels que B. Mandelbrot, A. Douady et J. H. Hubbard ont réanimé l'intérêt des chercheurs envers cette théorie. Entre autres, un ensemble a particulièrement attiré l'attention par ces propriétés remarquables : l'ensemble de Mandelbrot.

L'ensemble de Mandelbrot, noté  $\mathcal{M}$ , est l'ensemble constitué des nombres complexes  $c$  tels que la suite des itérées

$$I_c := \{p_c(0), p_c(p_c(0)), \dots, p_c^n(0), \dots\}$$

du polynôme  $p_c(z) := z^2 + c$  est bornée. Les ensembles de Julia remplis, quant à eux, sont définis ainsi :

$$\mathcal{K}_c := \{z \in \mathbb{C} : (p_c^n(z))_{n=0}^\infty \text{ est bornée} . \}$$

où  $p_c = z^p + c$ . D'après un résultat de J. Rivera-Letelier [6], l'ensemble de Mandelbrot est localement connexe au point  $c \in \mathcal{M}$  si la série  $S := \sum_{n \geq 1} 1/|(p_c^{(n-1)})'(c)|$  est convergente. Ici,  $(p_c^{(n-1)})'(c)$  est la dérivée du polynôme évalué au point  $c$ . Ce résultat permet de lier une importante conjecture de la théorie de la dynamique holomorphe, soit la MLC (l'ensemble  $\mathcal{M}$  est localement connexe), à la théorie de la sommabilité. D'ailleurs, ce lien a été renforcé par les travaux de C. Cabrera, P. Makienko et A. Poirier [1]. Ils ont étudié la sommabilité de la série  $S$  selon la méthode d'Abel et les méthodes de Nørlund dans le contexte où la fonction  $p_c$  est remplacée par une fonction rationnelle.

À la vue de ces résultats importants qui relient la théorie des systèmes dynamiques, la MLC et la théorie de la sommabilité, le projet de recherche consiste à adopter un autre point de vue que les auteurs précédents. Il s'agit d'appliquer une méthode de sommabilité à la suite des itérées  $I_c$  plutôt qu'à la série  $S$ , pour l'ensemble de Mandelbrot. De plus, nous appliquerons cette méthode de sommabilité aux ensembles de Julia. Le but est de voir si ces ensembles restent les mêmes après l'application de la méthode de sommabilité.

## 2. SYSTÈME DYNAMIQUES HOLOMORPHES

**2.1. Ensembles de Julia.** Nous nous tournons maintenant vers des systèmes dynamiques engendrés par l'itération d'un polynôme  $f$  de degré au moins deux, c'est-à-dire que

$$(1) \quad f(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$  et  $n \geq 2$ . L'ensemble de Julia rempli associé au polynôme  $f$  est l'ensemble  $\mathcal{K} := \mathcal{K}(f)$  où

$$(2) \quad \mathcal{K}(f) := \{z \in \mathbb{C} : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ est bornée} \}.$$

Dans la définition de  $\mathcal{K}$ ,  $f^n$  est la  $n$ -ième composition de  $f$  :  $f^n := f \circ f \circ \dots \circ f$ . Donc l'ensemble de Julia rempli est l'ensemble des points  $z \in \mathbb{C}$  dont l'orbite sous la fonction  $f$  reste bornée. L'ensemble de Julia  $\mathcal{J}$  est la frontière de l'ensemble de Julia rempli.

Une première propriété des itérations d'un polynôme à valeurs complexes est la suivante.

**Proposition 2.1.** *Soit  $f$  un polynôme complexe tel que présenté dans (1). Pour tout nombre  $M > 1$ , il existe un nombre  $r > 0$  tel que pour tout  $|z| > r$ ,  $|f(z)| \geq M|z|$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'adapter la preuve du [2, lemme 14.1].  $\square$

Une deuxième propriété importante des itérations d'un polynôme est la suivante.

**Proposition 2.2.** *Soit  $f$  un polynôme complexe tel que présenté dans (1). Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Alors la suite  $(f^n(z))_{n \geq 0}$  est bornée si, et seulement si la suite  $(|f^n(z)|^{1/n})_{n \geq 0}$  est bornée.*

*Démonstration.* Si  $(f^n(z))_{n \geq 0}$  est bornée, alors il est clair que  $(|f^n(z)|^{1/n})_{n \geq 0}$  est aussi bornée.

Supposons que  $(|f^n(z)|^{1/n})_{n \geq 0}$  est une suite bornée. Alors il existe un  $M > 1$  telle que  $|f^n(z)| \leq M^n$  pour tout  $n \geq 0$ . Supposons que  $(f^n(z))_{n \geq 0}$  n'est pas bornée. Il existe alors un entier  $n_0$  telle que  $|f^{n_0}(z)| > r$  où le  $r = r(2M)$  est dans la proposition 2.1. Par induction, on obtient que  $|f^{n+n_0}(z)| \geq 2^n M^n |f^{n_0}(z)|$ . Par conséquent, on obtient

$$2^n M^n |f^{n_0}(z)| \leq M^n M^{n_0} \quad (n \geq 0)$$

et donc la suite  $(2^n)_{n \geq 0}$  est bornée... Ce qui est une contradiction.  $\square$

Afin de nous permettre d'illustrer quelques exemples d'ensembles de Julia remplis dans le cadre de notre travail, nous introduisons une notation spéciale pour des cas particuliers de polynômes. On pose

$$(3) \quad p_c(z) = z^p + c \quad (p \geq 2 \text{ entier}, c \in \mathbb{C} \text{ et } z \in \mathbb{C})$$

On pose alors

$$\mathcal{K}_c := \{z \in \mathbb{C} : (p_c^n(z))_{n \geq 0} \text{ est bornée.}\}$$

**Théorème 2.3.** *Soit  $c \in \mathbb{C}$ . Posons  $R := \max \left\{ |c|, 2^{\frac{1}{p-1}} \right\}$ . Alors,  $\mathcal{K}_c \subseteq \overline{D}(0, R)$ .*

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathcal{K}_c$ . Supposons, si possible, que  $|z| > R$ . Nous allons montrer par induction qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$|p_c^n(z)| \geq (1 + \epsilon)^n |z| \quad (n \geq 1).$$

Pour  $n = 1$ , nous avons  $|p_c(z)| = |z^p + c| \geq |z|^p - |c|$ . Comme  $|z| > R = \max \left\{ |c|, 2^{\frac{1}{p-1}} \right\}$ , on a  $|z| > |c| \implies -|z| < -|c|$ . Donc,

$$|z|^p - |c| > |z|^p - |z| = |z|(|z|^{p-1} - 1).$$

Maintenant, comme  $|z| > R$ , on a que  $|z| > 2^{\frac{1}{p-1}}$  implique  $|z|^{p-1} - 1 > 1$ . Ainsi, il existe un certain  $\epsilon > 0$  tel que

$$|z|^{p-1} - 1 = 1 + \epsilon > 1.$$

On obtient donc  $|p_c(z)| \geq |z|(1 + \epsilon)$ .

Maintenant, supposons que, pour  $\epsilon > 0$  choisi de sorte que  $|z|^{p-1} - 1 = 1 + \epsilon$ ,

$$|p_c^n(z)| \geq |z|(1 + \epsilon)^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Alors, on veut démontrer que c'est aussi le cas pour  $n + 1$ . Nous avons

$$p_c^{n+1}(z) = p_c(p_c^n(z)) = (p_c^n(z))^p + c.$$

Ainsi, nous avons

$$|p_c^{n+1}(z)| \geq |(p_c^n(z))^p| - |c|.$$

Avec  $|z| > R = \max \left\{ |c|, 2^{\frac{1}{p-1}} \right\}$  et comme  $1 + \epsilon > 1$ ,

$$-|z|(1 + \epsilon)^n < -|c|(1 + \epsilon)^n < -|c|$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} |p_c^{n+1}(z)| &\geq |p_c^n(z)|^p - |z|(1 + \epsilon)^n \\ &\geq (1 + \epsilon)^{np} |z|^p - (1 + \epsilon)^n |z| \\ &= (1 + \epsilon)^n |z| ((1 + \epsilon)^{np-n} |z|^{p-1} - 1). \end{aligned}$$

Comme  $p \geq 2$ ,  $p - 1 \geq 1$ , cela implique

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon)^{np-n} |z|^{p-1} - 1 &= (1 + \epsilon)^{n(p-1)} |z|^{p-1} - 1 \geq |z|^{p-1} - 1 \\ &= 1 + \epsilon \end{aligned}$$

et ainsi

$$|p_c^{n+1}(z)| \geq (1 + \epsilon)^n |z|(1 + \epsilon) = (1 + \epsilon)^{n+1} |z|.$$

Ceci complète l'induction. Maintenant, comme  $(1 + \epsilon)^n \rightarrow \infty$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |p_c^n(z)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \epsilon)^n |z| = +\infty.$$

Ainsi,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |p_c^n(z)| = +\infty$ . Autrement dit,  $|p_c^n(z)| \rightarrow +\infty$  et est non-bornée. Ceci contredit le fait que  $z \in \mathcal{K}_c$ .  $\square$

On peut être plus précis encore.

**Théorème 2.4.** Soit  $c \in \mathbb{C}$  fixé et posons  $R := \max \left\{ |c|, 2^{\frac{1}{p-1}} \right\}$ . Alors,  $z \in \mathcal{K}_c \iff |p_c^n(z)| \leq R, \forall n \geq 1$ .

*Démonstration.* Supposons que  $z \in \mathcal{K}_c$ . Supposons aussi, si possible, qu'il existe un certain  $n_0 \geq 1$  tel que  $|p_c^{n_0}(z)| > R$ . D'après le théorème précédent avec  $z$  remplacé par  $p_c^{n_0}(z)$ , on trouve que  $|p_c^n(z)| \rightarrow +\infty$ , quand  $n \rightarrow \infty$  (regarder la fin de la dernière preuve). Par conséquent,  $z \notin \mathcal{K}_c$  (par définition). Ceci contredit l'hypothèse que  $z \in \mathcal{K}_c$ . Supposons maintenant que  $|p_c^n(z)| \leq R$ ,  $\forall n \geq 1$ . En particulier, ceci indique que  $(p_c^n(z))_{n=1}^\infty$  est bornée. Donc,  $z \in \mathcal{K}_c$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

Ce dernier théorème permet de créer un algorithme pour générer un ensemble  $\mathcal{K}_c$ . En effet, il faut tout d'abord associer les différents points du plan complexe à un pixel sur une interface graphique. Ensuite, il faut fixer des valeurs de  $p$ ,  $c$  et un maximum d'itérations. Par la suite, on crée une boucle qui itère le polynôme  $p_c$  pour chaque valeur de  $z$ . Si le  $|p_c^n(z)|$  dépasse la valeur de  $R$ , alors le point sera un point noir (il sera en dehors de l'ensemble), tandis que s'il ne dépasse pas la valeur de  $R$ , il sera un point blanc et fera partie de l'ensemble.

**Théorème 2.5.**  $\mathcal{K}_c$  est connexe  $\iff 0 \in \mathcal{K}_c$ .

*Démonstration.* Voir [2, théorème 14.14].  $\square$

**2.2. L'ensemble de Mandelbrot.** L'ensemble de Mandelbrot est très similaire à l'ensemble de Julia rempli. Sa définition repose aussi sur le fait que l'orbite d'un point reste bornée. Rappelons que  $p_c(z) = z^p + c$  où  $p \geq 2$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  et  $c \in \mathbb{C}$ .

**Définition 2.6.** Soit  $p_c(z) = z^p + c$ , alors l'ensemble  $\mathcal{M}$  est défini par :

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : (p_c^n(0))_{n=1}^\infty \text{ est bornée.}\}$$

Donc, à la place de regarder l'orbite des points  $z$  et fixer le point  $c$ , on regarde l'orbite du point 0 en faisant varier le point  $c$ . Lorsque  $p = 2$ , on obtient l'ensemble de Mandelbrot classique tel que mentionné dans l'introduction de ce travail.

**Théorème 2.7.**  $c \in \mathcal{M} \iff \mathcal{K}_c$  est connexe.

*Démonstration.* Montrons la première implication :  $c \in \mathcal{M} \implies \mathcal{K}_c$  est connexe. Prenons  $z \in \mathcal{M}$ , alors  $(p_c^n(0))_{n=1}^\infty$  est bornée. Ainsi,  $0 \in \mathcal{K}_c$ . D'après le théorème 2.5, cela implique que  $\mathcal{K}$  est connexe.

Montrons maintenant la deuxième implication :  $\mathcal{K}_c$  est connexe  $\implies c \in \mathcal{M}$ . Si  $\mathcal{K}_c$  est connexe, alors  $0 \in \mathcal{K}_c$ . Ainsi, l'orbite de 0 est bornée et donc  $c \in \mathcal{M}$ .  $\square$

**Théorème 2.8.**  $\mathcal{M} \subseteq \overline{D}(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$ .

*Démonstration.* Soit  $c \in \mathcal{M}$ . Supposons, pour arriver à une contradiction, que  $c \notin \overline{D}(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$ . Alors,  $|c| > 2^{\frac{1}{p-1}}$ . Nous allons montrer par induction que

$$|p_c^n(0)| \geq (|c|^{p-1} - 1)^{n-1} |c|.$$

Commençons avec  $n = 1$ . Nous avons

$$|p_c(0)| = |0^p + c| = |c| \geq (|c|^{p-1} - 1)^{1-1} |c|.$$

Maintenant, supposons que ça marche avec un certain entier  $n = k$ . Nous avons alors :

$$|p_c^k(0)| \geq (|c|^{p-1} - 1)^{k-1} |c|.$$

Alors, en  $k + 1$  :

$$\begin{aligned} |p_c^{n+1}| &= |(p_c^k(0))^p + c| \\ &\geq |p_c^k(0)|^p - |c| \\ &\geq ((|c|^{p-1} - 1)^{k-1} |c|)^p - |c|. \end{aligned}$$

Comme  $|c| > 2^{\frac{1}{p-1}}$ , cela implique que

$$|c|^{p-1} - 1 > 1 \implies (|c|^{p-1} - 1)^{p(n-1)} > (|c|^{p-1} - 1)^{k-1}, \text{ car } p \geq 2$$

. Ainsi,

$$\begin{aligned} |p_c^{k+1}(0)| &\geq (|c|^{p-1} - 1)^{k-1} |c|^p - |c| \\ &\geq (|c|^{p-1} - 1)^{n-1} |c|^p - (|c|^{p-1} - 1)^{k-1} |c| \\ &= (|c|^{p-1} - 1)^{k-1} |c| (|c|^{p-1} - 1) = (|c|^{p-1} - 1)^n |c|. \end{aligned}$$

Ainsi, l'énoncé est aussi vrai en  $n + 1$ . Posons  $\epsilon > 0$  tel que

$$|c|^{p-1} - 1 = 1 + \epsilon.$$

Ceci est possible puisque  $|c|^{p-1} - 1 > 1$ . Alors, on obtient

$$|p_c^n(0)| \geq (1 + \epsilon)^{n-1} |c|, \quad \forall n \geq 1.$$

Comme  $1 + \epsilon > 1$ , ceci implique que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |p_c^n(0)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \epsilon)^{n-1} |c| = +\infty$ . Autrement dit,  $c \notin \mathcal{M}$ . C'est une contradiction. On doit donc conclure que  $c \in \overline{D}(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$ .  $\square$

**Théorème 2.9.**  $c \in \mathcal{M} \iff |p_c^n(0)| \leq 2^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall n \geq 1.$

*Démonstration.* Montrons d'abord la première implication, c'est-à-dire que  $c \in \mathcal{M}$  implique  $|p_c^n(0)| \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$ . Supposons que  $c \in \mathcal{M}$ . Alors,  $|c| \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$ . D'après un résultat sur les ensembles de Julia remplis avec  $R = \max\{|c|, 2^{\frac{1}{p-1}}\}$ , on obtient que  $|p_c^n(0)| \leq 2^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall n \geq 1.$

Montrons maintenant la deuxième implication :  $|p_c^n(0)| \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$  implique  $c \in \mathcal{M}$ . Si  $|p_c^n(0)| \leq 2^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall n \geq 1$ , alors la suite  $(p_c^n(0))_{n=1}^\infty$  est bornée. Donc,  $c \in \mathcal{M}$ .  $\square$

### 3. MÉTHODES DE SOMMABILITÉ RÉGULIÈRES

Une méthode de sommabilité, notée  $T$ , est un procédé qui permet de transformer une suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes en une nouvelle suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes. Notre attention sera principalement tournée vers les méthodes matricielles. L'ensemble des suites est noté  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$  où  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Définition 3.1.** Une méthode matricielle  $T$  est une application définie sur un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$  déterminée par une matrice  $(a_{m,n})_{m,n \geq 0}$ . Les éléments de la suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  sont donnés par

$$t_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \quad ((s_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$$

si la série converge dans  $\mathbb{C}$ .

Pour une méthode matricielle  $T$  déterminée par une matrice  $(a_{m,n})_{m,n \geq 0}$ , on note cela par  $T = (a_{m,n})_{m,n \geq 0}$ .

Un exemple très populaire de méthode de sommabilité est la méthode de Cesàro.

**Exemple 3.2.** La méthode de Cesàro d'ordre 1, noté  $\sigma$ , génère la suite  $(\sigma_n)_{n \geq 0}$  où

$$\sigma_n := \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

et  $(s_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ . La méthode  $\sigma$  est définie sur tout l'espace  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ . Comme le lecteur peut le remarquer, la suite  $(\sigma_n)_{n \geq 0}$  est constituée des moyennes des  $n$  premiers termes de la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$ .

Les méthodes matricielles qui nous intéressent sont celles dites régulières.

**Définition 3.3.** Une méthode matricielle  $T$  est régulière si pour chaque suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  telle que  $s_n \rightarrow s$ ,

- (1) chaque  $t_n$  est convergent ( $n \geq 0$ ).
- (2)  $t_n \rightarrow s$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Un célèbre théorème permet de caractériser les méthodes matricielles régulières.

**Théorème 3.4** (Silverman-Toeplitz [3, théorème 2]). Soit  $T = (a_{m,n})_{m,n \geq 0}$  une méthode de sommabilité matricielle. La méthode  $T$  est régulière si et seulement si

- i)  $\sum_{n \geq 0} a_{m,n}$  est absolument convergente,  $\forall m \geq 0$ .
- ii) Il existe  $L > 0$  tel que

$$\sum_{n \geq 0} |a_{m,n}| \leq L, \quad (m \geq 0).$$

- iii) Pour chaque  $n \geq 0$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = 0$ .
- iv)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 0} a_{m,n} = 1$ .

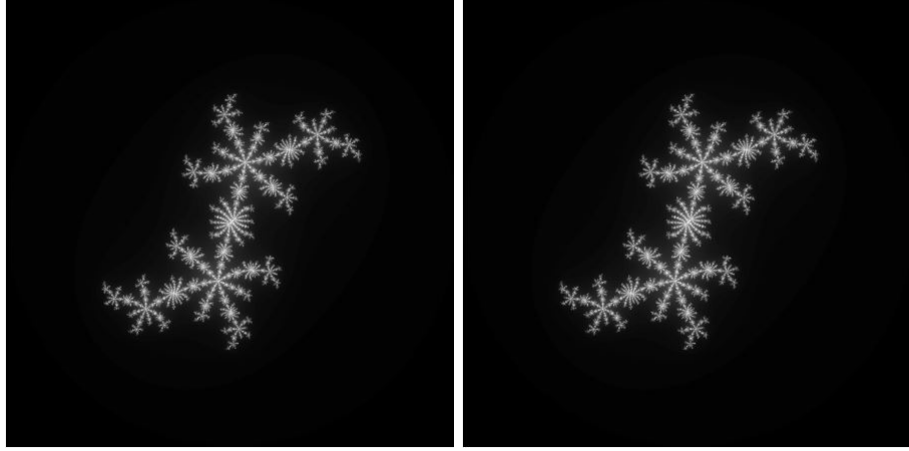
*Démonstration.* Pour la démonstration de ce théorème, voir [3, théorème 2].  $\square$

**3.1. Méthode de Cesàro.** Soit  $f$  un polynôme à valeurs complexes de degré  $n \geq 2$ . Dans le contexte de notre recherche, le premier exemple de méthode utilisée est la méthode de Cesàro. Notons par

$$\mathcal{K}_\sigma := \{z \in \mathbb{C} : (\sigma_n)_{n \geq 0} \text{ est bornée}\}$$

avec  $\sigma_n := \frac{z + f(z) + \cdots + f^n(z)}{n+1}$ . Sous cette méthode, nous avons observé numériquement que l'ensemble de Julia rempli restait le même (voir Figure 1).

Il est en fait possible d'en faire la preuve rigoureusement.



(a) Ensemble de Julia formé normalement. (b) Ensemble de Julia formé avec la méthode de Cesàro.

FIGURE 1. Comparaison des ensembles de Julia formés normalement et ceux formés avec la méthode de Cesàro. ( $c = 0.1429 + 0.6528i$ ).

**Théorème 3.5.** *Pour tout polynôme  $f$  de degré supérieur ou égal à 2, nous avons  $\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{K}$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, on fait l'observation suivante : pour chaque  $n \geq 1$ ,

$$(4) \quad \sigma_n = \frac{f^n(z)}{n+1} + \frac{n}{n+1}\sigma_{n-1}.$$

Nous passons maintenant à la preuve du théorème. On veut montrer que  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\sigma$ . Faisons l'inclusion  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_\sigma$ . Prenons  $z \in \mathcal{K}$ , alors  $f^n(z)$  est bornée ce qui implique qu'il existe un nombre  $M > 0$  tel que  $|f^n(z)| \leq M$  pour tout  $n \geq 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |\sigma_n| &= \left| \frac{z + f(z) + \dots + f^n(z)}{n+1} \right| \\ &\leq \frac{|z| + |f(z)| + \dots + |f^n(z)|}{n+1} \leq \frac{M + M + \dots + M}{n+1} = \frac{M(n+1)}{n+1} = M. \end{aligned}$$

On trouve donc que  $|\sigma_n| \leq M$  et  $(\sigma_n)$  est une suite bornée.

Faisons désormais l'inclusion  $\mathcal{K}_\sigma \subset \mathcal{K}$ . On prend donc  $z \in \mathcal{K}_\sigma$ . Alors, la suite  $(\sigma_n)_{n \geq 0}$  est bornée ; ceci implique qu'il existe un  $M > 0$  tel que  $|\sigma_n| \leq M$ ,  $\forall n \geq 0$ . On procède par contradiction. Supposons que  $\forall M > 0$ ,  $\exists n$  tel que  $|f^n(z)| > M$ . Avec  $M = r$  où  $r$  est celui de la proposition 2.1, il existe alors  $n_0$  tel que  $|f^{n_0}(z)| > r$ . En procédant par induction, on trouve que

$$(5) \quad |f^n(f^{n_0}(z))| \geq 2^n |f^{n_0}(z)|, \quad \forall n \geq 1.$$

D'après (4), nous avons

$$\sigma_{n+n_0} = \frac{n+n_0}{n+n_0+1}\sigma_{n+n_0-1} + \frac{f^{n+n_0}(z)}{n+n_0+1}.$$



Ainsi,

$$|\sigma_{n+n_0}| \geq \frac{|f^{n+n_0}(z)|}{n+n_0+1} - \frac{n+n_0}{n+n_0+1} |\sigma_{n+n_0-1}|.$$

On sait que  $\sigma_m \leq M \ \forall m \geq 0$ . Avec  $m = n + n_0 - 1$ , on obtient

$$\frac{-n-n_0}{n+n_0+1} |\sigma_{n+n_0-1}| \geq -\frac{n+n_0}{n+n_0+1} M.$$

Donc, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$|\sigma_{n+n_0}| \geq \frac{|f^n(f^{n_0})(z)|}{n+n_0+1} - \frac{n+n_0}{n+n_0+1} M.$$

Puis, par (5), on a

$$|f^n(f^{n_0}(z))| \geq 2^n |f^{n_0}(z)|, \ \forall n \geq 0$$

ce qui implique

$$|\sigma_{n+n_0}| \geq \frac{2^n |f^{n_0}(z)|}{n+n_0+1} - \frac{n+n_0}{n+n_0+1} M.$$

En laissant  $n \rightarrow \infty$ , on trouve

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} |\sigma_{n+n_0}| &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n |f^{n_0}(z)|}{n+n_0+1} - M \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n+n_0+1} |f^{n_0}(z)| \right) - M. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n+n_0+1} = \infty$ , on conclut que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n+n_0} = \infty$ . Ceci contredit l'hypothèse que  $(\sigma_n)$  est bornée. Alors, cette hypothèse doit être rejetée et on en conclut que  $z \in \mathcal{K}$ .  $\square$

Lorsqu'on prend le polynôme  $p(z) = p_c(z) := z^p + c$ , comme  $c \in \mathcal{M} \iff 0 \in \mathcal{K}_c$ , on en déduit le fait suivant sur l'ensemble  $M_\sigma$  où

$$\mathcal{M}_\sigma := \{c \in \mathbb{C} : (\sigma_n)_{n \geq 0} \text{ est bornée.}\}$$

$$\text{où } \sigma_n := \frac{p_c(0) + \dots + p_c^n(0)}{n+1}.$$

**Corollaire 3.6.** *Pour tout polynôme  $p_c$  de degré supérieur ou égal à 2, nous avons  $\mathcal{M}_\sigma = \mathcal{M}$ .*

En fait, la méthode de Cesàro fait partie d'une famille de méthodes de sommabilité beaucoup plus grande : les méthodes de Nørlund.

**3.2. Premières méthodes de Nørlund.** Soit  $(q_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres telle que  $q_n \geq 0$  et  $q_0 > 0$  pour tout  $n \geq 0$ . La méthode de Nørlund associée à la suite  $(q_n)$  est la nouvelle suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  où chaque élément est défini par l'expression :

$$(6) \quad t_n := \frac{q_0 s_0 + q_1 s_1 + q_2 s_2 + \dots + q_n s_n}{Q_n}$$

où  $Q_n := q_0 + q_1 + \dots + q_n$ . On suppose que

$$(7) \quad Q_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Cette méthode est notée  $(\overline{N}, q_n)$  au lieu de simplement  $\overline{N}$  pour mettre en évidence la suite  $(q_n)$ . Le lecteur est prié de consulter la section 3.8 du livre d'Hardy pour en savoir plus sur ces méthodes. D'après le [3, théorème 12], la méthode  $(\overline{N}, q_n)$  est régulière si et seulement si (7) est satisfaite.

**Remarque 3.7.** Si on prend  $q_n = 1$ , on obtient la méthode de Cesàro. En particulier, la méthode de Cesàro est régulière.

**Théorème 3.8** (Hardy [3, théorème 15]). Soit une méthode de Nørlund  $(\overline{N}, q_n)$  régulière. Supposons qu'il existe un certain nombre  $\delta > 0$  tel que  $\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \geq 1 + \delta > 1$ . Alors une suite  $s_n \rightarrow s$  ( $n \rightarrow \infty$ ) si et seulement si la suite  $t_n \rightarrow s$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Pour éviter des cas triviaux, supposons qu'à chaque  $\delta > 0$ , il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $\frac{Q_n}{Q_{n-1}} < 1 + \delta$ . Dans ces conditions, on peut montrer qu'il existe une sous-suite  $(n_k)$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q_{n_k}}{Q_{n_k-1}}$ . Afin de simplifier davantage, supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = 1.$$

Donc, la série entière  $\sum_{n \geq 0} Q_n r^n$  a un rayon de convergence de 1. Son rayon de convergence est exactement de 1, car  $\sum_{n \geq 0} Q_n = \infty$ . Ce fait montre que, pour chaque  $R > 1$ , les coefficients  $Q_n$  croissent de l'ordre de  $R^n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Avec la notation grand  $O$ , on note ceci par  $Q_n = O(R^n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  ( $R > 1$ ). De plus, la série entière  $\sum_{n \geq 0} q_n r^n$  a aussi un rayon de convergence de 1. En utilisant ces nouvelles méthodes, on définit

$$\mathcal{K}_{\overline{N}} := \{z \in \mathbb{C} : (t_n)_{n \geq 0} \text{ est bornée.}\}$$

où  $t_n$  est la suite (6) générée en appliquant la méthode  $(\overline{N}, q_n)$  à la suite  $(s_n) = (f^n(z))_{n \geq 0}$  pour un certain  $z \in \mathbb{C}$ .

**Théorème 3.9.** Soit  $f$  un polynôme de degré  $n \geq 2$  et soit  $(\overline{N}, q_n)$  une méthode de Nørlund régulière associée à la suite  $(q_n)$  et satisfaisant

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_m}{Q_{m-1}} = 1.$$

Alors  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\overline{N}}$ .

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.10.** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels telle que  $a_n > 0$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \infty$ , alors pour tout  $C > 1$ , il existe une sous-suite  $(n_k)_{k=1}^\infty$  telle que

$$a_{n_k} > \frac{1}{C^{n_k}} \quad (k \geq 1).$$

*Démonstration.* Procédons par contradiction et supposons qu'il existe un  $C > 1$  telle que pour toute sous-suite  $(n_k)_{k=1}^\infty$ , nous ayons  $a_{n_k} \leq \frac{1}{C^{n_k}}$  ( $k \geq 1$ ). En particulier, ceci est vrai pour la suite  $(1, 2, 3, \dots)$ . Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est convergente, ce qui contredit notre hypothèse.  $\square$

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_{\overline{N}}$ . Soit  $z \in \mathcal{K}$ . Alors, d'après la définition, la suite  $(f^n(z))_{n \geq 0}$  est bornée. Il existe donc un nombre  $M > 0$  tel que

$|f^n(z)| \leq M$  pour tout  $n \geq 0$ . En appliquant la méthode de Nørlund, on obtient

$$\begin{aligned} |t_n| &\leq \frac{q_0|z| + q_1|f(z)| + \dots + q_n|f^n(z)|}{Q_n} \\ &\leq M \left( \frac{q_0 + q_1 + \dots + q_n}{Q_n} \right) = M. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite  $(t_n)$  est bornée et  $z \in \mathcal{K}_{\overline{N}}$ .

Montrons maintenant l'autre inclusion  $K_{\overline{N}} \subseteq \mathcal{K}$ . Soit  $z \in \mathcal{K}_{\overline{N}}$ . Alors, il existe un nombre  $M > 0$  tel que  $|t_n| \leq M$  pour tout  $n \geq 0$ . Remarquons que les moyennes de Nørlund s'écrivent comme

$$t_n = \frac{Q_{n-1}}{Q_n} t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n} f^n(z).$$

Ainsi, on déduit l'inégalité

$$|t_n| \geq \frac{q_n}{Q_n} |f^n(z)| - \frac{Q_{n-1}}{Q_n} |t_{n-1}|.$$

Nous savons que, pour chaque  $C > 1$ ,  $Q_n = O(C^n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Fixons un  $C > 1$  pour le restant de la preuve. D'après le lemme 3.10, il existe une sous-suite  $(n_k)_{k=1}^\infty$  telle que  $q_{n_k} > \frac{1}{C^{n_k}}$ . Ainsi, pour  $k$  suffisamment grand, il existe une constante  $a$  telle que

$$\frac{q_{n_k}}{Q_{n_k}} \geq \frac{a}{(C^2)^{n_k}}.$$

Donc, pour un tel  $k$ , nous obtenons

$$|t_{n_k}| \geq \frac{a}{(C^2)^{n_k}} |f^{n_k}(z)| - M.$$

Supposons, si possible, que la suite  $(f^n(z))$  ne soit pas bornée. Alors, il existe  $n_0$  tel que  $|f^{n_0}(z)| > r$  où le  $r$  est le même que celui dans la proposition 2.1. Par conséquent, en posant  $M = 2C^2$  dans la proposition 2.1 et en procédant par induction, nous obtenons

$$|f^{n+n_0}(z)| > (2C^2)^n |f^{n_0}(z)| \quad (n \geq 0).$$

En utilisant cette inégalité et avec  $k$  assez grand, on en déduit

$$|t_{n_k}| \geq \frac{a}{(C^2)^{n_k}} (2C^2)^{n_k-n_0} |f^{n_0}(z)| - M = a \frac{2^{n_k}}{(2C)^{n_0}} |f^{n_0}(z)| - M.$$

En laissant  $k \rightarrow \infty$ , on obtient  $\limsup_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = \infty$  et donc  $(t_n)_{n \geq 0}$  n'est pas une suite bornée. Ceci contredit notre hypothèse et donc  $(f^n(z))$  doit être une suite bornée.  $\square$

**Remarque 3.11.** *Un autre exemple de la première méthode de Nørlund est la méthode logarithmique où  $q_n = \frac{1}{n+1}$  ( $n \geq 0$ ). Cette dernière est définie ainsi*

$$t_n = \frac{1}{Q_n} \left( s_0 + \frac{s_1}{2} + \dots + \frac{s_n}{n+1} \right) \sim \frac{1}{\log n} \left( s_0 + \frac{s_1}{2} + \dots + \frac{s_n}{n+1} \right)$$

où  $Q_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \sim \log n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Le symbole  $\sim$  indique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\log n} = 1.$$

**3.3. Deuxième méthode de Nørlund.** Il y a un deuxième type de méthode de Nørlund, qui inclut la méthode de Cesàro, mais pas la méthode logarithmique.

Soit  $(p_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels telle que

$$(8) \quad p_0 > 0 \quad \text{et} \quad p_n \geq 0 \quad (n \geq 1).$$

On pose  $P_n := p_0 + p_1 + \dots + p_n$ . Pour une suite  $(s_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ , on pose la  $m$ -ième moyenne de Nørlund par

$$(9) \quad t_n = \frac{p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \dots + p_n s_0}{p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

Une méthode de Nørlund de ce type est régulière si et seulement si

$$(10) \quad \frac{p_n}{p_0 + p_1 + \dots + p_n} \rightarrow 0.$$

Pour plus de détails sur ce deuxième type de méthodes de Nørlund, le lecteur est prié de consulter la section 4.1 de l'ouvrage d'Hardy [3]. Selon cette même référence, une méthode de Nørlund du deuxième type est notée  $(N, p_n)$ .

**Remarque 3.12.** *La deuxième famille de méthodes de Nørlund contient la famille des méthodes de Cesàro d'ordre  $\alpha > 0$ . Pour en savoir plus, voir le [3, chapitre V].*

Pour ce cas de méthodes, nous avons aussi observé un phénomène similaire lorsqu'on l'applique à la suite des itérations d'un polynôme complexe  $f$  de degré plus grand ou égal à 2. On définit l'ensemble  $\mathcal{K}_N$  par

$$\mathcal{K}_N := \{z \in \mathbb{C} : (t_n)_{n \geq 0} \text{ est bornée.}\}$$

$$\text{où } t_n := \frac{z p_n + f(z) p_{n-1} + \dots + f^n(z) p_0}{P_n}.$$

**Théorème 3.13.** *Soit  $f$  un polynôme à valeurs complexes de degré plus grand ou égal à 2 et soit  $(N, p_n)$  une méthode de Nørlund régulière. Alors  $\mathcal{K}_N = \mathcal{K}$ .*

L'inclusion  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_N$  provient de la proposition suivante. C'est en fait toujours vrai lorsque la méthode satisfait (8) seulement.

**Proposition 3.14.** *Soit  $(N, p_n)$  une méthode de Nørlund satisfaisant (8). Alors, si  $(s_n)$  est bornée, cela implique que  $(t_n)$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Si  $|s_n| \leq M$ , pour tout  $n$ , alors

$$\begin{aligned} |t_n| &= \left| \frac{p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \dots + p_n s_0}{p_0 + p_1 + \dots + p_n} \right| \\ &\leq \frac{p_0 |s_n| + p_1 |s_{n-1}| + \dots + p_n |s_0|}{p_0 + p_1 + \dots + p_n} \\ &\leq \frac{p_0 M + p_1 M + p_2 M + \dots + p_n M}{p_0 + p_1 + \dots + p_n} = M. \end{aligned}$$

La proposition est alors bien démontrée.  $\square$

Il est important de savoir que l'implication inverse est fausse. Il y a plusieurs exemples simples qui montrent que  $(t_n)$  est bornée, sans que  $(s_n)$  le soit aussi.

L'inclusion inverse, soit  $\mathcal{K}_N \subset \mathcal{K}$  demande plus de travail. Elle est basée essentiellement sur le théorème suivant.

**Théorème 3.15.** *Soit  $(N, p_n)$  une méthode de Nørlund régulière. Posons  $(s_n)_{n \geq 0}$  une suite complexe et  $(t_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par (9). Si  $|t_n|^{1/n}$  est bornée, alors  $|s_n|^{1/n}$  l'est aussi.*

Bien sûr, la propriété que  $|s_n|^{1/n}$  est bornée est bien plus faible que  $(s_n)$  bornée. Par contre, il y a un cas où elles sont équivalentes : lorsque  $s_n := f^n(z)$ , la  $n$ -ième composition d'un polynôme  $f$  de degré au moins 2 appliquée à  $z$ . Alors, soit  $(s_n)$  est bornée, ou  $|s_n|^{1/n} \rightarrow \infty$  (voir la proposition 2.2). En particulier,  $(s_n)$  est bornée si et seulement si  $|s_n|^{1/n}$  est bornée. En combinant cette observation avec la dernière proposition et le théorème ci-dessus, on obtient ce corollaire :

**Corollaire 3.16.** *Soit  $f$  un polynôme de degré au moins 2,  $z \in \mathbb{C}$  et posons  $s_n := f^n(z)$ . Soit  $(N, p_n)$  une méthode de Nørlund régulière de deuxième type. Alors  $(t_n)$  est bornée si et seulement si  $(s_n)$  est bornée. En particulier,  $\mathcal{K}_N \subset \mathcal{K}$ .*

D'après la proposition 3.14 et le corollaire 3.16, on obtient bel et bien que  $\mathcal{K}_N = \mathcal{K}$ . Il reste maintenant à prouver le théorème 3.15. Pour le prouver, il faut tout d'abord établir ce lemme.

**Lemme 3.17.** *Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels. Supposons qu'il existe des constantes  $A, B > 0$  et un  $N \geq 1$  tel que*

$$(2) \quad a_n \leq A(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) + B, \quad (n \geq N).$$

*Alors il existe une constante  $C$  telle que*

$$(3) \quad a_n \leq C(1 + A)^n, \quad (n \geq 0).$$

*Démonstration.* Choisissons  $C > B$  assez grand pour que  $a_n \leq C(1 + A)^n$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Nous devons prouver par induction sur  $n$  que  $a_n \leq C(1 + A)^n$  pour tout  $n \geq 0$ . Soit  $n \geq N$ , et supposons que  $a_j \leq C(1 + A)^j$  pour  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Alors, par (2), on a

$$\begin{aligned} a_n &\leq A(C + C(1 + A) + \dots + C(1 + A)^{n-1}) + B \\ &= AC \frac{(1 + A)^n - 1}{(1 + A) - 1} + B \\ &= C(1 + A)^n - C + B \leq C(1 + A)^n. \end{aligned}$$

Cela complète l'induction. □

*Preuve du théorème 3.15.* Comme la méthode  $(N, p_n)$  est régulière, la condition (10) indique qu'il existe un entier  $N \geq 1$  tel que  $\frac{p_n}{p_0 + p_1 + \dots + p_n} \leq 1/2$  pour tout  $n \geq N$ , ce qui, après un réarrangement, équivaut à

$$p_n \leq p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1} \quad (n \geq N).$$

Par le lemme 3.17, il existe une certaine constante  $C > 0$  telle que  $p_n \leq C2^n$  pour tout  $n \geq 0$ .

Supposons que  $|t_n|^{1/n}$  soit bornée. Alors, il existe  $R \geq 1$  tel que  $|t_n| \leq R^n$  pour tout  $n \geq 0$ . Maintenant en réarrangeant  $t_n = \frac{p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \dots + p_n s_0}{p_0 + p_1 + \dots + p_n}$ ,  $n \geq 0$ , on obtient

$$p_0 s_n = (p_0 + \dots + p_n) t_n - (p_n s_0 + \dots + p_1 s_{n-1}) \quad (n \geq 0).$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned} p_0|s_n| &\leq (p_0 + \dots + p_n)|t_n| + (p_n|s_0| + \dots + p_1|s_{n-1}|) \\ &\leq (C1 + C2 + \dots + C2^n)R^n + (C2^n|s_0| + \dots + C2|s_{n-1}|) \\ &\leq 2C(2R)^n + C(2^n|s_0| + \dots + 2|s_{n-1}|). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{|s_n|}{(2R)^n} \leq \frac{2C}{p_0} + \frac{C}{p_0} \left( |s_0| + \frac{|s_1|}{2R} + \dots + \frac{|s_{n-1}|}{(2R)^{n-1}} \right).$$

En appliquant le dernier lemme une autre fois, avec  $a_n := \frac{|s_n|}{(2R)^n}$ , nous déduisons qu'il existe une constante  $D$  telle que

$$\frac{|s_n|}{(2R)^n} \leq D \left( 1 + \frac{C}{p_0} \right) \quad (n \geq 0).$$

Alors,  $|s_n|^{1/n} \leq (2R)(1 + \frac{C}{p_0})D^{1/n}$  qui est une suite bornée.  $\square$

**3.4. Méthodes régulières exceptionnelles.** Jusqu'à présent, les méthodes régulières que nous avons essayées génèrent des ensembles de Julia (ou de Mandelbrot) identiques aux originaux. La question suivante se pose : est-ce que ce fait se produit pour toute méthode matricielle régulière ? Dans cette sous-section, nous verrons que la réponse est non !

D'après la proposition suivante, la méthode recherchée devra faire grossir l'ensemble de Julia rempli.

**Proposition 3.18.** *Supposons que  $T = (a_{nk})$  est une méthode de sommabilité matricielle régulière. Soit  $(t_n)_{n \geq 0}$  la suite des moyennes induites par la méthode  $T$ , c'est-à-dire*

$$t_n := \sum_{k \geq 0} a_{nk} s_k \quad (s_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}.$$

*Si  $(s_n)$  est bornée, alors  $(t_n)$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Si  $(s_n)$  est bornée, alors il existe un certain  $S \geq 0$  tel que  $|s_n| \leq S$ ,  $\forall n \geq 0$ . Aussi, comme  $(a_{nk})$  est une méthode de sommabilité régulière, alors la première condition du théorème de Silverman-Toeplitz implique qu'il existe  $A \geq 0$  tel que  $\sum_{k \geq 0} |a_{nk}| \leq A$  pour tout  $n \geq 0$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$|t_n| = \left| \sum_{k \geq 0} a_{nk} s_k \right| \leq \sum_{k \geq 0} |a_{nk}| |s_k| \leq \sum_{k \geq 0} |a_{nk}| S \leq AS.$$

Donc,  $(t_n)$  est également une suite bornée.  $\square$

Par conséquent, pour une méthode matricielle régulière  $T$ , en posant l'ensemble  $\mathcal{K}_T$  associé à un polynôme  $f$  de degré 2 par

$$\mathcal{K}_T := \{z \in \mathbb{C} : (t_n)_{n \geq 0} \text{ est bornée}\}$$

où  $t_n := \sum_{k \geq 0} a_{n,k} f^k(z)$ , on obtient que  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_T$ .

Une première idée que nous avons eu est de considérer la méthode suivante.

**Exemple 3.19.** On définit la méthode  $T = (a_{m,n})_{m,n \geq 0}$  comme suit :

$$(11) \quad a_{m,n} := \begin{cases} 0 & , 0 \leq n < m \text{ et } n > m+1 \\ 1 & , n = m \\ -1/2^{2^m} & , n = m+1. \end{cases}$$

Il est simple de montrer que la méthode  $T$  satisfait les conditions de Silverman-Toeplitz. Prenons le polynôme  $p_0(z) = z^2$ . D'après la proposition 3.18, on sait que  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_T$ . Cependant, le point  $z = 2$  n'appartient pas à  $\mathcal{K}$  et

$$t_n = 2^{2^n} - \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^n}} = 0,$$

ce qui implique que  $2 \in \mathcal{K}_T$ . Autrement dit,  $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{K}_T$ . La figure 3.4 illustre les ensembles de Julia formés normalement et avec la méthode de cet exemple.

L'idée d'associer la suite des itérations de 2 (c'est-à-dire  $s_n := p_0^n(2) = 2^{2^n}$ ) à la suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  avec  $t_n = 0$  se généralise en fait à toute suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  qui est divergente.

**Théorème 3.20.** Soit une suite de nombres complexes divergente  $(s_n)_{n \geq 0}$ . Alors il existe une méthode de sommabilité matricielle régulière  $T = (a_{n,m})$  telle que  $(t_n)$  est identiquement la suite zéro où  $t_n := \sum_{k \geq 0} a_{nk} s_k$ .

Pour prouver ce théorème, il nous faut un lemme.

**Lemme 3.21.** Pour une suite de nombres complexes divergente quelconque  $(s_k)_{k \geq 0}$ , il existe une sous-suite  $(s_{k_n})_{n \geq 0}$  telle que

$$(12) \quad \sup_{n \geq 0} \frac{|s_{k_{n+1}}| + |s_{k_n}|}{|s_{k_{n+1}} - s_{k_n}|} < \infty.$$

*Démonstration.* Il y a deux cas à considérer, celui où  $(s_k)$  est bornée et celui où elle ne l'est pas. Supposons premièrement que  $(s_k)$  est non-bornée. Alors, il existe une sous-suite non-nulle  $(s_{k_n})$  telle que  $|s_{k_{n+1}}| \geq 2|s_{k_n}|$  pour tout  $n \geq 0$ . Donc,

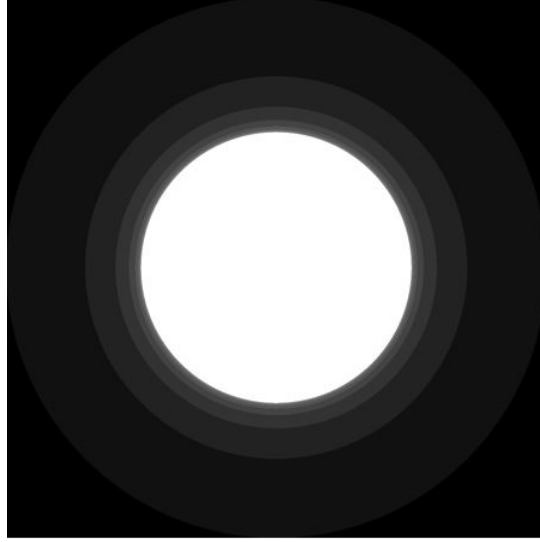
$$\frac{|s_{k_{n+1}}| + |s_{k_n}|}{|s_{k_{n+1}} - s_{k_n}|} = \frac{1 + |s_{k_n}/s_{k_{n+1}}|}{|1 - s_{k_n}/s_{k_{n+1}}|} \leq \frac{1 + |s_{k_n}/s_{k_{n+1}}|}{1 - |s_{k_n}/s_{k_{n+1}}|} \leq \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Ainsi, la condition (12) tient toujours.

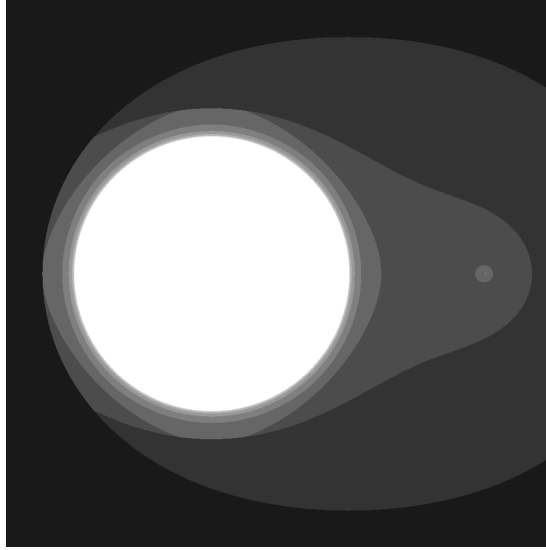
Maintenant, supposons que  $(s_k)$  est bornée, disons  $|s_k| \leq S$  pour tout  $k \geq 0$ . Comme  $(s_k)$  est divergente, elle ne respecte pas le critère de Cauchy. Alors, il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour tout  $N \geq 0$ , il existe  $j, k \geq N$  avec  $|s_j - s_k| \geq \epsilon$ . Donc, en prenant n'importe quel  $N \geq 0$ , il existe  $k \geq N$  tel que  $|s_k - s_N| \geq \epsilon/2$ . En utilisant cette remarque, on peut construire une sous-suite  $(s_{k_n})$  telle que  $|s_{k_{n+1}} - s_{k_n}| \geq \epsilon/2$  pour tout  $n \geq 0$ . On a

$$\frac{|s_{k_{n+1}}| + |s_{k_n}|}{|s_{k_{n+1}} - s_{k_n}|} \leq \frac{S + S}{\epsilon/2} = \frac{4S}{\epsilon}$$

où la condition (12) tient toujours.  $\square$



(a) Ensemble de Julia formé de la manière normale



(b) Ensemble de Julia formé avec la méthode présentée dans l'exemple 3.19

FIGURE 2. Ensemble de Julia formé normalement comparativement à celui formé avec la méthode de l'exemple. ( $c = 0$ )

*Démonstration du théorème 3.20.* D'après le lemme 3.21, il existe une sous-suite  $(s_{k_n})_{k \geq 0}$  telle que la condition (12) tient. Pour tout  $n \geq 0$ , on définit

$$a_{n,k} := \begin{cases} s_{k_{n+1}} / (s_{k_{n+1}} - s_{k_n}) , & k = k_n, \\ -s_{k_n} / (s_{k_{n+1}} - s_{k_n}) , & k = k_{n+1}, \\ 0, & k \neq k_n, k_{n+1}. \end{cases}$$



Cela définit une méthode de sommabilité régulière. En effet, toutes les autres conditions du théorème de Silverman-Toeplitz sont clairement satisfaites, et la première condition est aussi satisfaite, à cause de (12). Finalement, pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$t_n = \sum_{k \geq 0} a_{nk} s_k = a_{n,k_n} s_{k_n} + a_{n,k_{n+1}} s_{k_{n+1}} = \frac{s_{k_{n+1}}}{s_{k_{n+1}} - s_{k_n}} s_{k_n} + \frac{-s_{k_n}}{s_{k_{n+1}} - s_{k_n}} s_{k_{n+1}} = 0.$$

Ceci complète la preuve.  $\square$

Si  $f$  est un polynôme de degré au moins 2 et si  $(s_n)$  est une suite définie itérativement par  $s_n := f(s_{n-1})$ , alors soit  $(s_n)$  est bornée, ou  $|s_{n+1}/s_n| \rightarrow \infty$ . Dans ce dernier cas, la condition (12) est automatiquement satisfaite par la suite complète. Ainsi, on peut simplement prendre  $k_n = n$  dans la construction de cette méthode de sommabilité  $T = (a_{nk})$  du théorème 3.20.

#### 4. MÉTHODES NON-LINÉAIRES

Nous avons tenté d'étudier une méthode non-linéaire : le procédé d'Aitken Delta-2. Il s'agit d'un procédé d'accélération de convergence. Il associe à une suite  $(s_n)$  une nouvelle suite :

$$(13) \quad t_n = \frac{s_n s_{n+2} - s_{n+1}^2}{s_n + s_{n+2} - 2s_{n+1}}.$$

Il est clair que ce procédé est non-linéaire. Il pourrait arriver que le dénominateur vaille 0. Dans ce cas, il suffit de poser  $t_n := +\infty$ .

En appliquant ce procédé à la suite  $(s_n)$  des itérées d'un polynôme  $f$  de degré au moins 2 (c'est-à-dire  $s_n := f^n(z)$  pour  $z \in \mathbb{C}$ ), on peut essayer de créer de nouveaux ensembles de Julia notés  $\mathcal{K}_A$  où la lettre « A » fait référence à Aitken. Comme dans les dernières sections,  $\mathcal{K}$  est l'ensemble de Julia rempli dans lequel  $(s_n)$  reste bornée et  $\mathcal{J}$  est sa frontière, nommé l'ensemble de Julia. Aussi, on note  $P(f)$  l'ensemble des points périodiques de  $f$ .

La première tâche est de déterminer quand la suite  $(t_n)$  sera éventuellement finie, c'est-à-dire s'il existe un  $n_0$  tel que  $t_n \neq \infty$  pour tout  $n \geq n_0$ .

**Théorème 4.1.** *La suite  $(t_n)$  est éventuellement finie si, et seulement si, la suite  $(s_n)$  évite l'ensemble  $P(f) \cap Z(f)$ , où  $Z(f) := \{z \in \mathbb{C} : f(f(z)) - 2f(z) + z = 0\}$ .*

*Démonstration.* Supposons tout d'abord qu'un certain  $s_{n_0} \in P(f) \cap Z(f)$ . Comme  $s_{n_0} \in Z(f)$ , on a  $s_{n_0+2} - 2s_{n_0+1} + s_{n_0} = 0$ , donc  $t_{n_0} = \infty$ . Aussi, comme  $s_{n_0} \in P(f)$ , il existe  $p \geq 1$  tel que  $s_{n_0+kp} = s_{n_0}$  pour tout  $k \geq 0$ . En combinant ces deux observations, on déduit que  $t_{n_0+kp} = \infty$  pour tout  $k \geq 0$ , donc  $(t_n)$  n'est pas éventuellement finie.

Maintenant, supposons que  $(t_n)$  n'est pas éventuellement finie. Alors  $s_n \in Z(f)$  pour une infinité de valeurs de  $n$ . Comme  $Z(f)$  est l'ensemble des zéros d'un polynôme, c'est un ensemble fini. Ainsi, les valeurs de  $s_n$  dans  $Z(f)$  doivent éventuellement se répéter, disons  $s_{n_0} = s_{n_0+p}$ . Alors,  $s_{n_0}$  est un point périodique, donc  $s_{n_0} \in P(f) \cap Z(f)$ .  $\square$

Nous allons maintenant regarder la comportement de la suite  $(t_n)$  si le point initial  $z$  est extérieur à  $\mathcal{K}$ .

**Théorème 4.2.** *Si  $z \notin \mathcal{K}$ , alors  $(t_n - s_n)$  est éventuellement bornée. Alors,  $|t_n| \rightarrow \infty$ .*

**Remarque 4.3.** *En disant éventuellement bornée, il est toujours possible que  $t_n = \infty$  pour un nombre fini de  $n$ .*

*Démonstration.* Si  $z \notin K_f$ , alors  $|s_n| \rightarrow \infty$ , donc  $(s_n)$  évite  $P(f)$ . Par le théorème 4.1, il s'ensuit que  $(t_n)$  est éventuellement finie. Dans les calculs qui suivent, nous supposons que  $n$  est suffisamment grand pour que  $t_n \neq \infty$ . En calculant  $t_n - s_n$ , on trouve :

$$\begin{aligned} t_n - s_n &= \frac{(s_n s_{n+2} - s_{n+1}^2) - s_n(s_n + s_{n+2} - 2s_{n+1})}{s_n + s_{n+2} - 2s_{n+1}} \\ &= \frac{-s_n^2 - s_{n+1}^2 + 2s_n s_{n+1}}{s_n + s_{n+2} - 2s_{n+1}} \\ &= \left( \frac{s_{n+1}^2}{s_{n+2}} \right) \left( \frac{1 + (s_n/s_{n+1})^2 - 2(s_n/s_{n+1})}{1 + (s_n/s_{n+2}) - 2(s_{n+1}/s_{n+2})} \right). \end{aligned}$$

Comme le degré de  $f(z)$  est au moins 2, il existe des constantes  $R, M > 0$  telles que  $|f(z)/z^2| \geq M$  quand  $|z| \geq R$  (la preuve est similaire à la preuve de la proposition 2.1). Quand  $|s_n| \rightarrow \infty$ , il s'ensuit que, pour tout  $n$  suffisamment grand, on a  $|s_{n+1}/s_n^2| \geq M$ . Ainsi, la première parenthèse de la dernière équation est bornée tandis que la seconde tend vers 1. On en conclut que  $(t_n - s_n)$  est éventuellement bornée. Finalement, comme  $|s_n| \rightarrow \infty$  et que  $|t_n| \geq |s_n| - |t_n - s_n|$ , il s'ensuit que  $|t_n| \rightarrow \infty$  également.  $\square$

Nous allons maintenant considérer le comportement de  $(t_n)$  si  $z$  est dans l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}$ . Cela semble plutôt difficile à analyser complètement (même dans le cas spécial où  $f(z) := z^2$  et que  $\mathcal{J}$  est le cercle unité). On se contente du résultat partiel suivant.

**Théorème 4.4.** *Il y a un sous-ensemble  $D$  de  $\mathcal{J}$  qui est dense et qui est tel que  $(t_n)$  est borné quand  $z \in D$ .*

*Démonstration.* Par un résultat bien connu en dynamique holomorphe (voir, par exemple, le [2, théorème 14.10]),  $P(f) \cap \mathcal{J}$  est dense dans  $\mathcal{J}$ . Posons  $F$  comme étant l'union des cycles périodiques qui rencontrent l'ensemble  $Z(f)$  du théorème 4.1. Donc,  $F$  est un ensemble fini et  $D := \mathcal{J} \cap P(f) \setminus F$  est toujours dense dans  $\mathcal{J}$ . Aussi, si  $z \in D$ , alors  $(s_n)$  est une suite périodique et, par le théorème 4.1,  $(t_n)$  est éventuellement finie. Il s'ensuit que  $(t_n)$  est une suite périodique finie et, en particulier, elle est bornée.  $\square$

Finalement, nous allons considérer la comportement de  $(t_n)$  si  $z \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{J}$  (l'intérieur de  $\mathcal{K}$ ). Pour la majorité des polynômes  $f$ , l'intérieur de  $\mathcal{K}$  est l'union finie des bassins d'attraction des cycles attractifs, et nous devons nous concentrer sur ce cas.

**Théorème 4.5.** *Si  $z$  est dans le bassin d'attraction des cycles attractifs qui sont disjoints de  $Z(f)$ , alors  $(t_n)$  est éventuellement bornée.*

*Démonstration.* Sous les hypothèses du théorème,  $|s_n - a_n| \rightarrow 0$ , où  $(a_n)$  est une suite périodique telle que  $a_n + a_{n+2} - 2a_{n+1} \neq 0$  pour tout  $n$ . Par périodicité, il existe une constante  $\delta > 0$  telle que  $|a_n + a_{n+2} - 2a_{n+1}| \geq \delta$  pour tout  $n$ . Il s'ensuit que  $|s_n + s_{n+2} - 2s_{n+1}| \geq \delta/2$  pour tout  $n$  suffisamment grand et donc que  $(t_n)$  est éventuellement bornée.  $\square$

Ce dernier résultat ne couvre pas le cas important quand le cycle attractif est de longueur 1, c'est-à-dire quand c'est un point fixe attractif. En effet, tous les points fixes de  $f$  sont dans  $Z(f)$ . Ce cas est couvert séparément par ce théorème.

**Théorème 4.6.** *Si  $z$  est dans le bassin d'attraction d'un point fixe attractif  $a$  de  $f$ , et si  $s_n \neq a$  pour tout  $n$ , alors  $t_n \rightarrow a$ .*

**Remarque 4.7.** *Évidemment, si  $s_{n_0} = a$  pour un certain  $n_0$ , alors  $s_n = a$  pour tout  $n \geq n_0$  et donc,  $t_n = \infty$  pour tout  $n \geq n_0$ .*

*Démonstration.* Posons  $s_n = a + \delta_n$ . Un calcul montre que  $t_n = a + \epsilon_n$ , où

$$\epsilon_n = \frac{\delta_n \delta_{n+2} - \delta_{n+1}^2}{\delta_n + \delta_{n+2} - 2\delta_{n+1}}.$$

Par hypothèse,  $\delta_n \neq 0$ , donc on peut diviser par ce dernier pour trouver

$$(14) \quad \epsilon_n = \delta_n \left( \frac{\delta_{n+2}/\delta_n - (\delta_{n+1}/\delta_n)^2}{1 + \delta_{n+2}/\delta_n - 2\delta_{n+1}/\delta_n} \right).$$

Maintenant, comme  $a$  est un point fixe attractif de  $f$ , on a  $f(a+h) = a + \lambda h + O(h^2)$ , où  $|\lambda| < 1$ . En utilisant le fait que  $s_{n+1} = f(s_n)$ , on obtient que  $\delta_{n+1} = \lambda \delta_n + O(\delta_n^2)$ . En particulier,  $\delta_{n+1}/\delta_n \rightarrow \lambda$ . Il s'ensuit que le numérateur de (14) tend vers  $\lambda^2 - \lambda^2 = 0$ , tandis que le dénominateur tend vers  $1 + \lambda^2 - 2\lambda = (1 + \lambda)^2 \neq 0$ . Ainsi,  $\epsilon_n \rightarrow 0$  et finalement,  $t_n \rightarrow a$ , comme mentionné.  $\square$

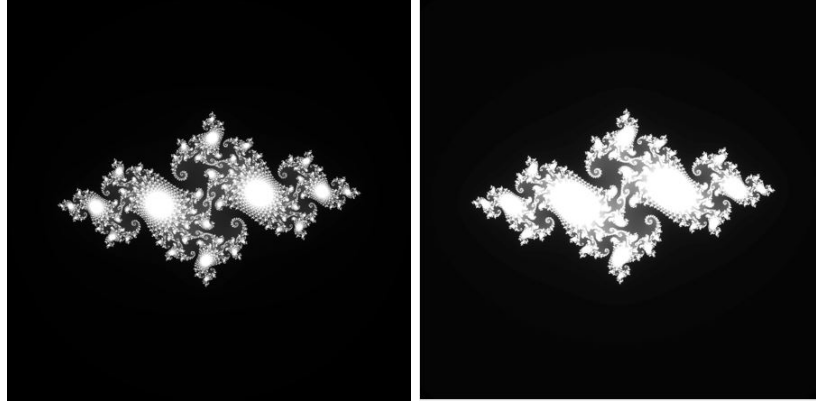
**Remarque 4.8.** *La dernière preuve montre non seulement que  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , mais aussi que  $\epsilon_n/\delta_n \rightarrow 0$ . C'est l'idée centrale derrière la méthode de Aitken comme technique pour accélérer la convergence de suites linéairement convergentes.*

## 5. CONCLUSION

Le but de ce travail était d'étudier les relations entre les méthodes de sommabilité, les ensembles de Julia et l'ensemble de Mandelbrot des polynômes  $p_c$ .

Dans la première partie de ce travail, nous avons remarqué que certaines méthodes, lorsqu'elles sont appliquées à la suite des itérées d'un polynôme, ne modifient pas l'ensemble de Julia associé à ce polynôme et donc ne modifient pas l'ensemble de Mandelbrot associé aux polynômes  $p_c$ . Ces méthodes sont les méthodes de Nørlund (voir les théorèmes 3.5, 3.9, 3.13 et le corollaire 3.6). Ces méthodes particulières appartiennent à une classe de méthodes de sommabilité linéaires nommée méthodes de sommabilité linéaires régulières. Est-ce que ce résultat est valide à toute la classe des méthodes régulières ?

La réponse est non. Nous avons aussi remarqué qu'il existe des méthodes régulières qui font muter l'ensemble de Julia associé à un polynôme. Ceci suggère alors la question suivante.



(a) Ensemble de Julia formé normalement (b) Ensemble de Julia formé avec le procédé Delta-2

FIGURE 3. Comparaison des ensembles de Julia formés normalement et ceux formés avec le procédé Delta-2. ( $c = -0.74543 + 0.11301i$ )

**Question 5.1.** *Peut-on caractériser les méthodes de sommabilité linéaires régulières qui ne changent pas l'ensemble de Julia d'un polynôme ?*

Dans la dernière partie de ce travail, nous avons étudié une méthode non-linéaire : le procédé Delta-2. Nous avons remarqué que  $\mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}$  (voir le théorème 4.2). Rappelons que dans le cas des méthodes linéaires régulières, il s'agit de l'inclusion inverse qui est toujours vraie :  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_T$  pour une méthode linéaire régulière  $T$  (voir théorème 3.18). Ceci nous suggère donc que l'ensemble  $\mathcal{K}_A$  serait relativement différent de  $\mathcal{K}$ .

**Question 5.2.** *Est-ce que c'est le cas ou est-ce que l'inclusion  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_A$  est vraie ?*

Nous avons observé, en fixant un  $R = 2$  dans notre algorithme, que  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_A$ . Cependant, si on augmente le nombre  $R$  jusqu'à 100 et même plus, on observe que  $\mathcal{K}_A$  se rapproche de  $\mathcal{K}$ . La figure 3 montre des images de l'ensemble de Julia construit normalement et construit selon le procédé Delta-2.

Cependant, malgré des évidences numériques, l'inclusion inverse est fausse en générale. En effet, il y a au moins les points fixes ou les points éventuellement fixes d'un polynôme qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $\mathcal{K}_A$  (voir la remarque après le théorème 4.6).

La réponse à la question 5.2 est pour le moment : on ne sait pas. Jusqu'à ce jour, nous ne savons pas exactement à quoi ressemble l'ensemble  $\mathcal{K}_A$ . Les théorèmes 4.4, 4.5, 4.6 sont les premiers pas pour répondre à la question. Donc, il serait bien d'étudier cette question dans le cadre d'un autre travail. Il serait aussi bien de généraliser notre approche à d'autres types de méthodes non-linéaires et peut-être trouver une méthode qui changerait l'ensemble de Julia.

## RÉFÉRENCES

1. Carlos Cabrera, Peter Makienko, and Alfredo Poirier, *On Nörlund-Voronoi summability and instability of rational maps*, Arnold Math. J. **6** (2020), no. 3-4, 523–549. MR 4181723
2. Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, third ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014, Mathematical foundations and applications. MR 3236784
3. G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949. MR 0030620
4. Benoit Mandelbrot, *Les objets fractals*, Flammarion, Editeur, Paris, 1975, Forme, hasard et dimension, Nouvelle Bibliothèque Scientifique. MR 0462040
5. R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261** (1976), no. 5560, 459–467.
6. J. Rivera-Letelier, *Rational maps with decay of geometry : rigidity, thurston's algorithm and local connectivity*, Stony Brook preprint (2000/9), 64 pages, Private communication.