MODELAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR NAVIER STOKES PENTRU STUDIUL MIȘCĂRII CURENȚILOR ATMOSFERICI

Popescu Andrei-Gabriel[1]

[1]anul I, Facultatea de Automatică și Calculatoare, Universitatea Politehnica București

Îndrumător: Prof. Dr. Viorel-Puiu Păun

Abstract

Studiul vizează validarea rezultatelor numerice provenite din aproximarea soluțiilor ecuațiilor Navier-Stokes. Deoarece societatea secolului XXI se confruntă cu marea problemă a poluării și implicit cu efectele ei, printre care și încălzirea globală, soluția tuturor problemelor vine tot din Fizică. Lucrarea analizează implementarea unui algoritm de rezolvare numerica a unei probleme matematice, care, până în momentul de față nu are o soluție analitică pentru spațiul tridimensional, și respectiv aplicația ei în mișcarea aerului atmosferic, un foarte bun exemplu de fluid . Acest lucru demonstrează două aspecte importante cu privire la soluție, pe de-o parte că, putem, folosind astfel de mecanisme de calcul computerizat să anticipăm mișcarea maselor de aer și deci să luăm masuri de ameliorare a poluării in zonele respective, iar pe de-altă parte faptul că, o ecuație matematică aparent fără rezolvare analitică poate totuși sa fie rezolvată, evident, anumite aproximări asumate.

"Un om de ştiinţă este fericit, nu odihnindu-se pe realizările sale, ci prin achiziţionarea continuă de cunoştinţe proaspete."

Max Plank

Considerente

Climatul terestru este o noțiune complexă guvernată de schimburile permanente de energie, sub diverse forme, dintre radiații, procese termodinamice, mișcarea fluidelor și procese climatice a căror natură este foarte diversificată. Una dintre marile probleme ale perioadei moderne este fenomenul de încălzire globală, cauzat de o serie de factori antropici. Pentru înțelegerea acestui fenomen și mai important, pentru soluționarea lui, trebuie să recurgem la natura matematică a problemei. În fizică există mai multe „instrumente" prin care putem aprecia evoluția procesului în cauză, însă, o parte din acestea nu au o rezolvare matematică, analitică până în prezent. În acest sens, pentru soluționarea ecuațiilor de mișcare a maselor de aer, considerat a fi un fluid omogen în modelările care urmează, cunoscute și sub numele de Ecuațiile Navier-Stokes, metodele numerice pot duce la un rezultat satisfăcător și, cel mai probabil, suficient de precis, în cele mai mule dintre cazuri, prin discretizarea anumitor mărimi.

Modul de lucru

Numite după Claude Louis Navier și George Gabriel Stokes, ecuațiile de mișcare a unui fluid incompresibil, iau naștere prin aplicarea legii a doua a lui Newton, aplicată în ipoteza tensiunea fluidului este proporțională cu gradientul vitezei, la care se adaugă gradientul presiunilor :

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\mathbb{T} + \mathbf{f}$$

- T este tensorul tensiunilor
- f reprezintă forțele exterioare

Pentru anumite considerente teoretice :

- Considerăm aerul un fluid incompresibil
- Manifestarea mișcării are loc într-un domeniu finit
- Cunoaștem limitele acestui domeniu și condițiile de margine
- Vitezele nu depășesc limitele naturale medii de circulație a aerului, deci nu există turbulențe

teorema Dufort-Frenkel afirmă că ecuația e mișcare poate fi simplificată până la forma următoare :
--

$$-\nabla^2 u = f\,, \qquad (\nabla^2 \equiv \partial_1^2 + \partial_1^2)$$

unde u este de această data vectorul vitezelor în toate cele trei direcții ale spațiului.

Pentru că vorbim de o aproximare pe un domeniu finit, relația de mai sus poate fi scrisă sub forma :

$$-Lu = f \,,$$

L fiind aproximarea funcției Laplace pe domeniul dat. Problema se reduce la rezolvare unui sistem de ecuații de ordin N = numărul de direcții ale spațiului în care lucrăm. Mediul terestru reprezintă un bun model de ecosistem matematic în care la intervale mici de timp apar perturbații minore în spațiul condițiilor de lucru, astfel că, soluționarea lui poate fi facută cu ajutorul metodei SOR (Succesive Over Relaxation). Acest lucru presupune ca matricea L, pe care o vom nota cu A, sa fie descompusă după regula metodelor iterative :

$$A = A' - E - E'$$

În ordinea apariției descompunerea conține : o matrice diagonală, o matrice superior triunghiulară și una inferior triunghiulară. Metoda de relaxare presupune introducerea unui factor de accelerare a convergenței sistemului, a cărui valoare este calculată statistic :

$$(A' - \omega E)u^{n+1} = \{(1 - \omega)A' + \omega E'\}u^n + \omega f$$

Omega este, în acest caz, dependent la rândul lui de timpul de mișcare luat în calcul, și de dimensiunile spațiului finit.

Pentru diverse valori ale matricei Laplace asociate cu cazuri de domenii finite cunoscute, metoda soluționează sistemul în doua dimensiuni și găsește valori pentru cele doua direcții de deplasare, x si y, in momente de timp t, atunci când se cunosc presiunea atmosferică, p și valorile temperaturilor, T.

Am considerat în cele ce urmează ca domeniul finit este suprafața unui ocean și că temperaturile maselor de aer sunt variate în funcție de poziție. Folosind o aproximație a funcției Laplace convenabilă am obținut următoarele date :

1.0000	1.00000	-1.0000000	1.0000000
0.9766	0.65928	-0.6644227	0.6639700
0.9688	0.57492	-0.5808359	0.5803324
0.9609	0.51117	-0.5169277	0.5171793
0.9531	0.46604	-0.4723329	0.4724223
0.8516	0.33304	-0.3372212	0.3371788
0.7344	0.18719	-0.1886747	0.1886466
0.6172	0.05702	-0.0570178	0.0570070
0.5000	-0.06080	0.0620561	-0.0620530
0.4531	-0.10648	0.1081999	-0.1081721
0.2813	-0.27805	0.2803696	-0.2804342
0.1719	-0.38289	0.3885691	-0.3885725
0.1016	-0.29730	0.3004561	-0.3003726
0.0703	-0.22220	0.2228955	-0.2229314
0.0625	-0.20196	0.2023300	-0.2023288
0.0547	-0.18109	0.1812881	-0.1812581
0.0000	-0.00000	0.0000000	-0.0000000

1.0000	0.00000	0.0000000	0.0000000
0.9688	-0.21388	-0.2279225	-0.2283338
0.9609	-0.27669	-0.2936869	-0.2933988
0.9531	-0.33714	-0.3553213	-0.3551266
0.9453	-0.39188	-0.4103754	-0.4103109
0.9063	-0.51550	-0.5264392	-0.5264190
0.8594	-0.42665	-0.4264545	-0.4263811
0.8047	-0.31966	-0.3202137	-0.3201946
0.5000	0.02526	0.0257995	0.0257981
0.2344	0.32235	0.3253592	0.3253755
0.2266	0.33075	0.3339924	0.3340338
0.1563	0.37095	0.3769189	0.3769373
0.0938	0.32627	0.3330442	0.3329679
0.0781	0.30353	0.3099097	0.3099698
0.0703	0.29012	0.2962703	0.2962728
0.0625	0.27485	0.2807056	0.2806893
0.0000	0.00000	0.0000000	0.0000000

În ordine, poziția pe x a unui punct, poziția pe y, și vitezele asociat.

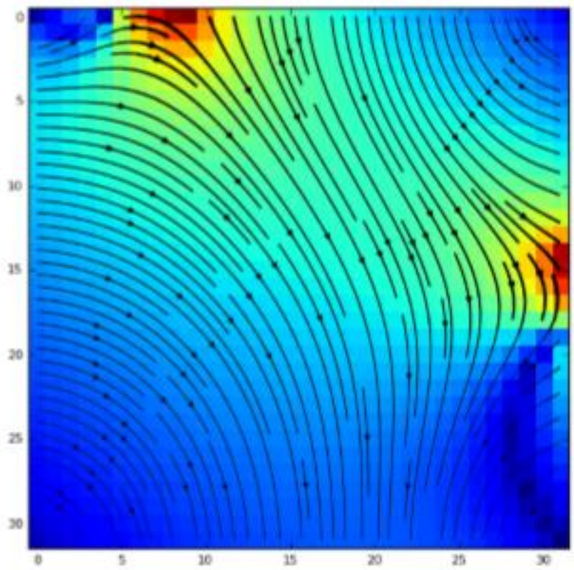
Metoda de rezolvare presupune un volum destul de mare de date, care de cele mai multe ori sunt private. Simularea comportamentului curenților atmosferici pentru un volum finit poate fi însă modelată cu mai puține date, în cazul de față pur teoretice. Pentru rezultatele următoare, mediul de programare folosit a fost Python, principalul motiv pentru alegerea făcută fiind faptul că, la o analiză mai detaliată, este printre puținele limbaje de programare care au în spate o documentație foarte largă pentru CFD (Computational Fluid Dynamics).

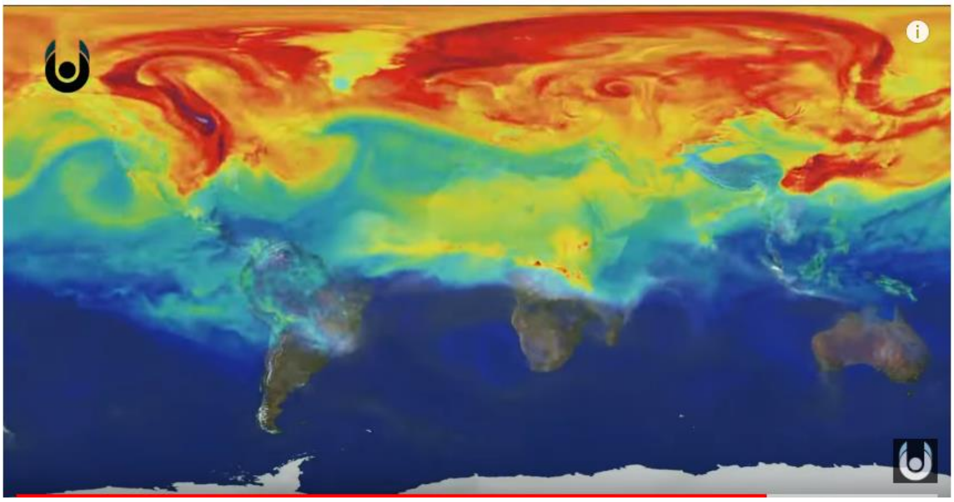
Codul care creează pe baza datelor o imagine a procesului discutat este următorul :

```python
# Autor : Popescu Andrei-Gabriel
# Facultatea de Automatica si Calculatoare, UPB 2018


import numpy as np
import pylab as plab
import matplotlib.pyplot as plt

# vom folosi numpy, o biblioteca folosita penru Scientific Work
# de asemenea pylab, o bibliotec folosita in special la reprezenarea grafica

filename = "data.in.txt"
fileObj = open(filename)

params = {}
linesBeforeData = 0

for line in fileObj:
    line = line.strip()
    linesBeforeData += 1
    if line=="DATA:": break
    if not line.startswith("#"):
        key_value = line.split("=")
        if len(key_value) == 2:
            params[key_value[0].strip()] = key_value[1].strip()

#preluam datele asociate cu marimile pe care vrem sa le reprezentam

header = fileObj.next().split()
fileObj.close();

data = np.loadtxt(filename,skiprows=linesBeforeData + 1, unpack = True)
print(data)
```

```python
#preluam datele asociate cu marimile pe care vrem sa le reprezentam

header = fileObj.next().split()
fileObj.close();

data = np.loadtxt(filename,skiprows=linesBeforeData + 1, unpack = True)
print(data)


# asociem pentru fiecare valuare un tip de date bine stailit

STOP_TIME = float(params["STOP_TIME"])
CFL = float(params["CFL"])
X_CELLS = int(params["X_CELLS"])
Y_CELLS = int(params["Y_CELLS"])
NUM_GHOST_CELLS = int(params["NUM_GHOST_CELLS"])
ORDER_ACCURACY = float(params["ORDER_ACCURACY"])
RK_TIME_STEPS = float(params["RK_TIME_STEPS"])


x = data[0].reshape(X_CELLS,Y_CELLS)[NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS,NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS]
y = data[1].reshape(X_CELLS,Y_CELLS)[NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS,NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS]
u = data[2].reshape(X_CELLS,Y_CELLS)[NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS,NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS]
v = data[3].reshape(X_CELLS,Y_CELLS)[NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS,NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS]
#p = data[4].reshape(X_CELLS,Y_CELLS)[NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS,NUM_GHOST_CELLS:-NUM_GHOST_CELLS]

# definim viteza fluidului

v = u**2 + v**2

plt.contourf(x,y,v)
```

Rezultatul obținut în urma reprezentării grafice :





Concluzii

Datele obținute ne permit sa aproximăm modul în care evoluează temperaturile la nivelul Europei, spre exemplu, într-un interval foarte mare de timp, cu riscul anumitor modificări care ar duce la rău condiționarea matricei A, și deci la incapacitatea de a rezolva problema.

Pe baza acestor rezultate putem lua măsuri de combatere a poluării, principalul generator al fenomenului de încălzire globală, întârziind, chiar și pentru perioade scurte de timp evoluția în rău a modificărilor climatice.

Bibliografie

Scientific Python for CFD Simulations 2013 University of Edinburgh

The governing equations and the dominant balances of flow in the atmosphere and ocean USPC Summerschool, Utrecht 2016 H. E. de Swart

Axel Joel Chorin , Numerical Solution Of The Navier-Stokes Equations

NUMERICAL SOLUTIONS TO THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN TWO AND THREE DIMENSIONS, A thesis submitted to the University of Manchester for the degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Engineering and Physical Sceince, Badr Alkahtani