

Igor Popławski

Rozwiązywanie liniowych równań algebraicznych

Metody numeryczne (MNUB), semestr 24L

Prowadzący: Paweł Mazurek

Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Warszawa 25.03.2024r.

Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do uznania osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu Metody numeryczne została wykonana przeze mnie samodzielnie.

Spis treści

1. Wprowadzenie
2. Lista symboli matematycznych
3. Metodyka i wyniki doświadczeń
4. Rozwiązanie liniowych równań algebraicznych
5. Wnioski
6. Źródła informacji
7. Listing programów

1. Lista symboli matematycznych i akronimów

x, y, z – zmienne skalarne

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ – wektory

$\mathbf{L}, \mathbf{U}, \mathbf{A}$ – macierze współczynników

σ_z, σ_d – odchylenie standardowe

Rozkład LU - Metoda dekompozycji macierzy współczynników na iloczyn macierzy dolnotrójkątnej i górnortrójkątnej.

2.Wprowadzenie

W zadaniu projektowym wykorzystujemy metody rozwiązywania liniowych równań algebraicznych do określenia trajektorii środka ciężkości danej osoby oraz oceniamy wpływ błędów pomiarowych na otrzymane wyniki.

System który rozpatrujemy wykorzystuje impulsowe czujniki radarowe, które nadają krótkie impulsy elektromagnetyczne małej mocy, które następnie odbijają się od wszystkich obiektów znajdujących się w monitorowanej przez nie przestrzeni. Odbite impulsy są następnie przechwytywane przez odbiorniki czujników, które na podstawie czasu, jaki upłynął między nadaniem a odebraniem sygnału, umożliwiają estymację odległości między monitorowaną osobą a tym czujnikiem.

Do określenia współrzędnych środka ciężkości monitorowanej osoby wykorzystujemy cztery impulsowe czujniki radarowe. Wyniki naszych pomiarów zapisane są w macierzach **R**, **D** oraz wektorze **t**, gdzie:

- **R** - rozmiar 4 na 3, wartości reprezentują współrzędne czujników radarowych; kolumny odpowiadają kolejno współrzędnym x , y , z , a wiersze – kolejnym czujnikom;
- **D** - rozmiar 165 na 4, wartości reprezentują dokładne odległości między osobą a czterema czujnikami; kolumny odpowiadają kolejnym czujnikom radarowym, a wiersze – kolejnym chwilom;
- **t** - rozmiar 165 na 1, wartości reprezentują chwile, w których dokonano pomiaru odległości między osobą a czujnikami;

Z naszych danych jesteśmy w stanie ułożyć prosty układ równań by otrzymać współrzędne środka ciężkości osoby dla każdej z chwil w czasie. Nasze równanie przekształcamy do postaci równania (1):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1)$$

A – macierz o wymiarach N na N i niezerowym wyznaczniku postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie $N \in \mathbb{Z}$

x – wektor pionowy o rozmiarach N na 1;

b – wektor pionowy o rozmiarach N na 1;

Metody użyte w zadaniu projektowym:

Rozkład LU

Macierz **A** przedstawiana jest w postaci iloczynu $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$, [1] gdzie macierz **L** jest macierzą dolnotrójkątną postaci:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{N,1} & l_{N,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

a macierz **U** macierzą górnątrojkątną postaci:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,N} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{N,N} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Współczynniki u oraz l to współczynniki otrzymane po zerowaniu macierzy **A** w następujący sposób. Zaczynając od wartości $a_{1,1}$ zerujemy wszystkie wartości pod nią. Dla każdego wiersza niżej przemnażamy więc pierwszy wiersz przez taką wartość by po odjęciu pierwszego wiersza stronami pod $a_{1,1}$ została wartość zero. Wartość przez którą mnożymy wpisujemy w pierwszej kolumnie i danym wierszu macierzy **L**. Schemat ten powtarzamy dla wartości $a_{2,2}$ biorąc pod

lupę drugą kolumnę i wiersze od drugiego w dół, i postępujemy dalej analogicznie wzdłuż diagonal. Tak wyzerowana macierz jest naszą macierzą \mathbf{U} z odpowiednimi współczynnikami u .

Liczba kondycyjna macierzy:

Liczbę kondycyjną macierzy obliczmy na podstawie wzoru [1]:

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \text{cond}_p(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_p \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_p \quad (5)$$

$\|\mathbf{A}\|_p$ - norma macierzy \mathbf{A}

$\|\mathbf{A}^{-1}\|_p$ – norma transponowanej macierzy \mathbf{A}

Jednak posługując się środowiskiem MATLAB możemy użyć wbudowanej funkcji „cond(A)”.

Obliczanie zagregowanego błędu względnego:

Normę euklidesową czyli zagregowany błąd względny wektora obliczmy na podstawie wzoru [1]:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n|^2} \quad (6)$$

x_n - n-ty element wektora

Jednak posługując się środowiskiem MATLAB możemy użyć wbudowanej funkcji „norm(A)”.

3. Metodyka i wyniki doświadczeń

• Zad.1

Mamy podany układ równań:

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1 - x_n)^2 + (\bar{y}_1 - y_n)^2 + (\bar{z}_1 - z_n)^2 &= d_{1,n}^2 \\(\bar{x}_2 - x_n)^2 + (\bar{y}_2 - y_n)^2 + (\bar{z}_2 - z_n)^2 &= d_{2,n}^2 \\(\bar{x}_3 - x_n)^2 + (\bar{y}_3 - y_n)^2 + (\bar{z}_3 - z_n)^2 &= d_{3,n}^2 \\(\bar{x}_4 - x_n)^2 + (\bar{y}_4 - y_n)^2 + (\bar{z}_4 - z_n)^2 &= d_{4,n}^2\end{aligned}\tag{7}$$

Gdzie $n=1,...,165$ i oznacza konkretny moment w czasie w którym dokonano pomiaru

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - współrzędne czujników radarowych;

x_n, y_n, z_n - współrzędne środka ciężkości osoby;

$d_{1,n}, d_{2,n}, d_{3,n}, d_{4,n}$ - odległości między osobą a czterema czujnikami;

Układ równań przekształcono przez odjęcie czwartego równania od trzech pozostałych:

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1 - x_n)^2 + (\bar{y}_1 - y_n)^2 + (\bar{z}_1 - z_n)^2 - (\bar{x}_4 - x_n)^2 - (\bar{y}_4 - y_n)^2 - (\bar{z}_4 - z_n)^2 &= d_{1,n}^2 - d_{4,n}^2 \\(\bar{x}_2 - x_n)^2 + (\bar{y}_2 - y_n)^2 + (\bar{z}_2 - z_n)^2 - (\bar{x}_4 - x_n)^2 - (\bar{y}_4 - y_n)^2 - (\bar{z}_4 - z_n)^2 &= d_{2,n}^2 - d_{4,n}^2 \\(\bar{x}_3 - x_n)^2 + (\bar{y}_3 - y_n)^2 + (\bar{z}_3 - z_n)^2 - (\bar{x}_4 - x_n)^2 - (\bar{y}_4 - y_n)^2 - (\bar{z}_4 - z_n)^2 &= d_{3,n}^2 - d_{4,n}^2\end{aligned}\tag{8}$$

Wymnażamy równania w nawiasach do kwadratu i grupujemy wyrazy z x_n, y_n i z_n :

$$\begin{aligned}\bar{x}_1^2 + x_n^2 + \bar{y}_1^2 + y_n^2 + \bar{z}_1^2 + z_n^2 - \bar{x}_4^2 - x_n^2 - \bar{y}_4^2 - y_n^2 - \bar{z}_4^2 - z_n^2 - 2x_n(\bar{x}_1 - \bar{x}_4) - 2y_n(\bar{y}_1 - \bar{y}_4) - 2z_n(\bar{z}_1 - \bar{z}_4) \\= d_{1,n}^2 - d_{4,n}^2 \\ \bar{x}_2^2 + x_n^2 + \bar{y}_2^2 + y_n^2 + \bar{z}_2^2 + z_n^2 - \bar{x}_4^2 - x_n^2 - \bar{y}_4^2 - y_n^2 - \bar{z}_4^2 - z_n^2 - 2x_n(\bar{x}_2 - \bar{x}_4) - 2y_n(\bar{y}_2 - \bar{y}_4) - 2z_n(\bar{z}_2 - \bar{z}_4) \\= d_{2,n}^2 - d_{4,n}^2 \\ \bar{x}_3^2 + x_n^2 + \bar{y}_3^2 + y_n^2 + \bar{z}_3^2 + z_n^2 - \bar{x}_4^2 - x_n^2 - \bar{y}_4^2 - y_n^2 - \bar{z}_4^2 - z_n^2 - 2x_n(\bar{x}_3 - \bar{x}_4) - 2y_n(\bar{y}_3 - \bar{y}_4) - 2z_n(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) \\= d_{3,n}^2 - d_{4,n}^2\end{aligned}\tag{9}$$

Skracamy wyrazy kwadratowe, przenosimy zmienne bez x_n, y_n i z_n na jedną stronę i mnożymy razy (-1):

$$\begin{aligned}2x_n(\bar{x}_1 - \bar{x}_4) + 2y_n(\bar{y}_1 - \bar{y}_4) + 2z_n(\bar{z}_1 - \bar{z}_4) &= -d_{1,n}^2 + d_{4,n}^2 + \bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 + \bar{z}_1^2 - \bar{x}_4^2 - \bar{y}_4^2 - \bar{z}_4^2 \\2x_n(\bar{x}_2 - \bar{x}_4) + 2y_n(\bar{y}_2 - \bar{y}_4) + 2z_n(\bar{z}_2 - \bar{z}_4) &= -d_{2,n}^2 + d_{4,n}^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{z}_2^2 - \bar{x}_4^2 - \bar{y}_4^2 - \bar{z}_4^2 \\2x_n(\bar{x}_3 - \bar{x}_4) + 2y_n(\bar{y}_3 - \bar{y}_4) + 2z_n(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) &= -d_{3,n}^2 + d_{4,n}^2 + \bar{x}_3^2 + \bar{y}_3^2 + \bar{z}_3^2 - \bar{x}_4^2 - \bar{y}_4^2 - \bar{z}_4^2\end{aligned}\tag{10}$$

Lewą stronę rozkładamy na wektor oraz macierz a prawą zapisujemy jako jedną macierz:

$$\begin{bmatrix} 2(\bar{x}_1 - \bar{x}_4) & 2(\bar{y}_1 - \bar{y}_4) & 2(\bar{z}_1 - \bar{z}_4) \\ 2(\bar{x}_2 - \bar{x}_4) & 2(\bar{y}_2 - \bar{y}_4) & 2(\bar{z}_2 - \bar{z}_4) \\ 2(\bar{x}_3 - \bar{x}_4) & 2(\bar{y}_3 - \bar{y}_4) & 2(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{4,n}^2 - d_{1,n}^2 + \bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 + \bar{z}_1^2 - \bar{x}_4^2 - \bar{y}_4^2 - \bar{z}_4^2 \\ d_{4,n}^2 - d_{2,n}^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{z}_2^2 - \bar{x}_4^2 - \bar{y}_4^2 - \bar{z}_4^2 \\ d_{4,n}^2 - d_{3,n}^2 + \bar{x}_3^2 + \bar{y}_3^2 + \bar{z}_3^2 - \bar{x}_4^2 - \bar{y}_4^2 - \bar{z}_4^2 \end{bmatrix}\tag{11}$$

W ten sposób otrzymujemy równanie postaci $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ gdzie \mathbf{A} po podstawieniu odpowiednich wartości wynosi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -0.4 \\ -4 & 4 & -0.4 \\ -2 & 4 & -0.4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

- **Zad. 2**

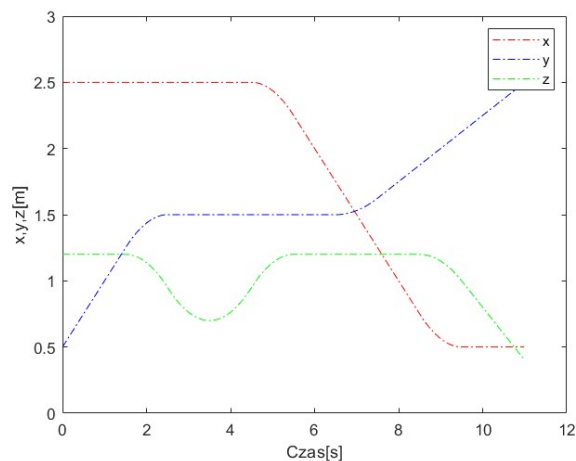
Aby rozwiązać otrzymany układ równań korzystamy z rozkładu LU macierzy **A**. Wartości jej współczynników obliczamy na podstawie wartości x , y i z odczytanych z macierzy **R** opisujących położenie czujników.

Następnie tworzymy macierz **U** jako kopię macierzy **A** oraz macierz **L** wypełnioną zerami i jedynkami po przekątnej. Dalej postępujemy zgodnie z algorytmem opisanym powyżej (patrz „Wprowadzenie – Rozkład LU”).

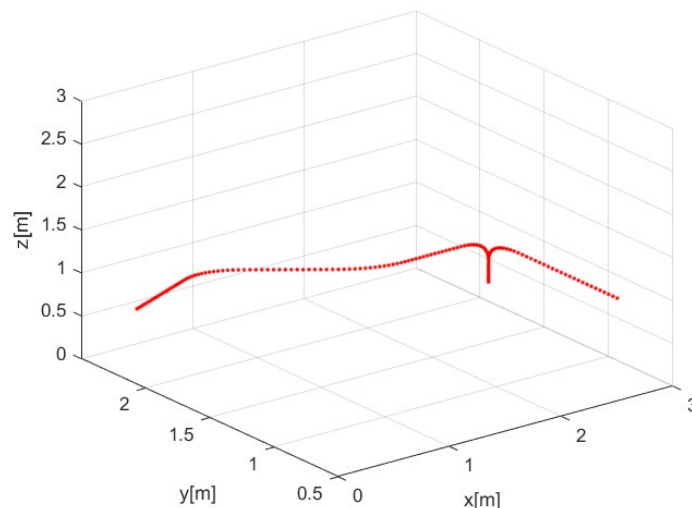
Gdy mamy już macierze **L** i **U** obliczamy wektor rozwiązań **b** który wyliczamy na podstawie równania z pierwszego zadania, tyle razy ile mamy podanych chwil w czasie. Podstawiamy wartości x , y , z i d z macierzy **R** oraz **D** dla wszystkich chwil w czasie. Otrzymane wektory zapisujemy w macierzy **B** o wymiarach 3 na 165.

Następnie dla każdej chwili czasu obliczamy wektor **y** dzieląc **L** na wektor **b**. Po otrzymaniu **y** wyliczamy wektory **x** dzieląc **U** na **y** i wpisujemy te wektory w wiersze macierzy **X**. Otrzymujemy w ten sposób macierz naszych rozwiązań.

Na podstawie wektora **t** oraz wierszy macierzy **X** szkicujemy wykres wartości współrzędnych środka ciężkości osoby w trakcie ruchu oraz wykres trójwymiarowej trajektorii ruchu osoby. Wyniki są przedstawione na Rys. 1 i Rys. 2.



Rysunek 1: wykres wartości współrzędnych środka ciężkości osoby w trakcie ruchu od czasu

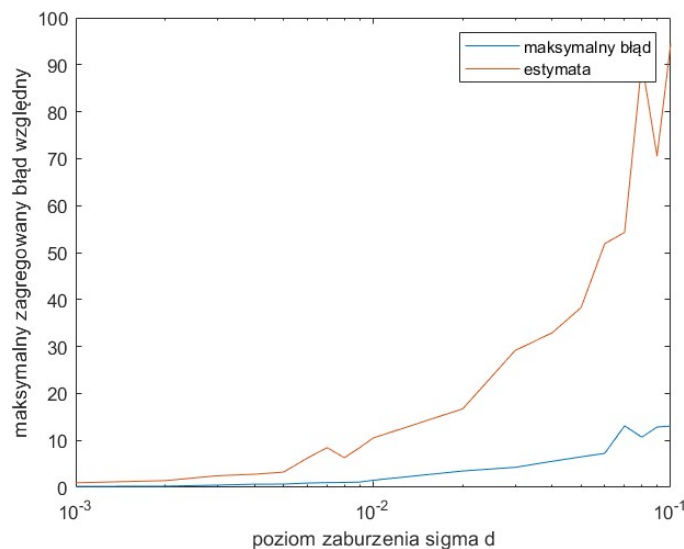


Rysunek 2: wykres trójwymiarowej trajektorii ruchu osoby

- **Zad. 3**

Dla każdej wartości odchylenia generujemy wartości o rozkładzie normalnym i danym odchyleniu i zakłócamy macierz wymnażając wartości macierzy \mathbf{D} przez $1+\sigma_d$. Następnie przeprowadzamy te same kroki jak w Zad.2 jednak po wyliczeniu wektorów \mathbf{x} oraz \mathbf{b} określamy ich zagregowane błędy względne za pomocą funkcji „norm”. Po obliczeniu błędów dla wszystkich chwil w czasie wybieramy maksymalne błędy (za pomocą funkcji „max”) w wektorach ze wszystkich chwil czasu i wpisujemy je do wektorów błędów maksymalnych odpowiadającym \mathbf{x} i \mathbf{b} . Oszacowujemy także błędy rozwiązań \mathbf{x} poprzez wymnożenie liczby kondycyjnej macierzy \mathbf{A} przez maksymalny błąd względny wektora \mathbf{b} . Po tym przechodzimy do powtórzenia algorytmu dla następnego odchylenia standardowego.

Na podstawie otrzymanych wektorów wartości maksymalnego zagregowanego błędu względnego rozwiązania oraz oszacowania tego błędu od poziomu zaburzenia rysujemy zależności od wartości zaburzeń σ_d . Otrzymany wykres został przedstawiony na Rys.3.

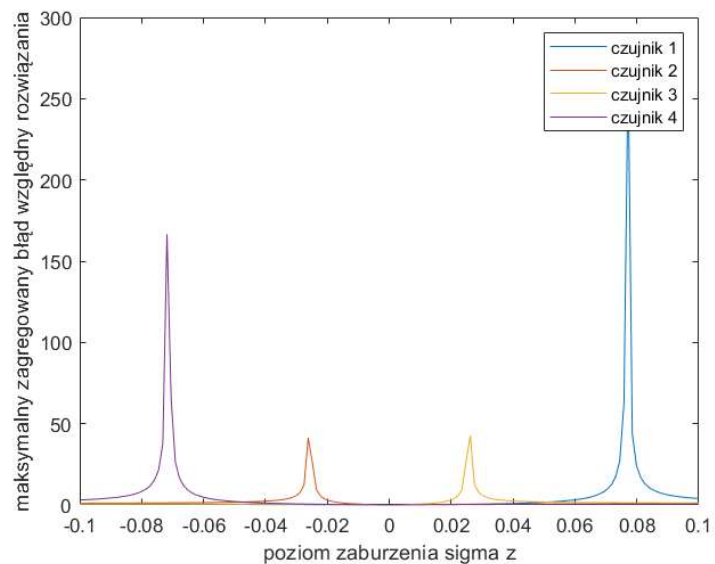


Rysunek 3: wykres zależności wartości maksymalnego zagregowanego błędu względnego rozwiązania oraz oszacowania tego błędu od poziomu zaburzenia σ_d

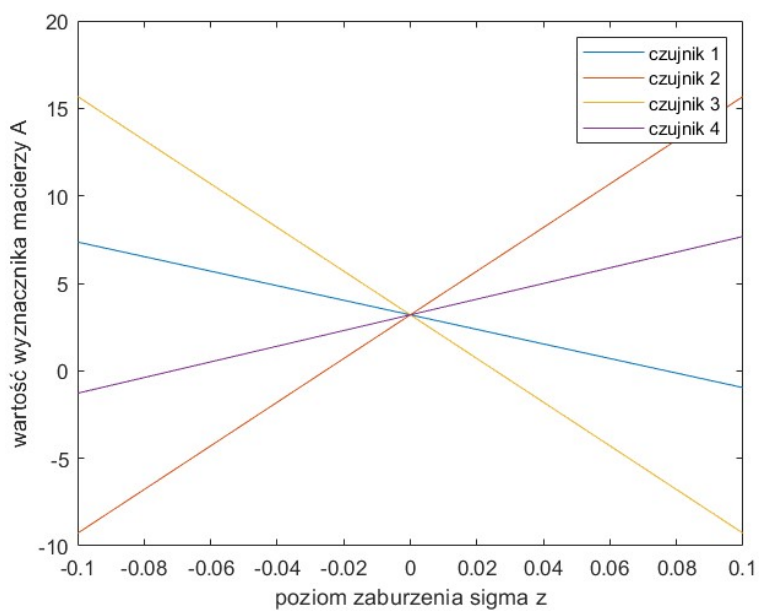
- **Zad.4**

Chcąc zbadać wpływ błędów określenia współrzędnej z położenia czujników radarowych na dokładność estymacji trójwymiarowej pozycji osoby generujemy 150 wartości zaburzenia σ_z rozłożonych równomiernie na przedziale -0.1 do 0.1. Zaburzamy wartość odpowiadającą współrzędnej z dla każdego z czterech czujników przemnażając ją przez $1+\sigma_z$. Następnie ponownie musimy wyliczyć macierz \mathbf{A} zgodnie ze schematem w Zad.1 oraz jej wyznacznik i liczbę kondycyjną. Ponownie także rozkładamy \mathbf{A} na \mathbf{L} oraz \mathbf{U} . Dalej przeprowadzamy te same kroki jak w Zad.2 jednak po wyliczeniu wektorów \mathbf{x} określamy zagregowany błąd względny za pomocą funkcji „norm”. Po obliczeniu błędów dla wszystkich chwil w czasie wybieramy maksymalny błąd wektora ze wszystkich chwil czasu i wpisujemy go do wektora błędów maksymalnych. Po tym przechodzimy do powtórzenia algorytmu dla następnego odchylenia standardowego.

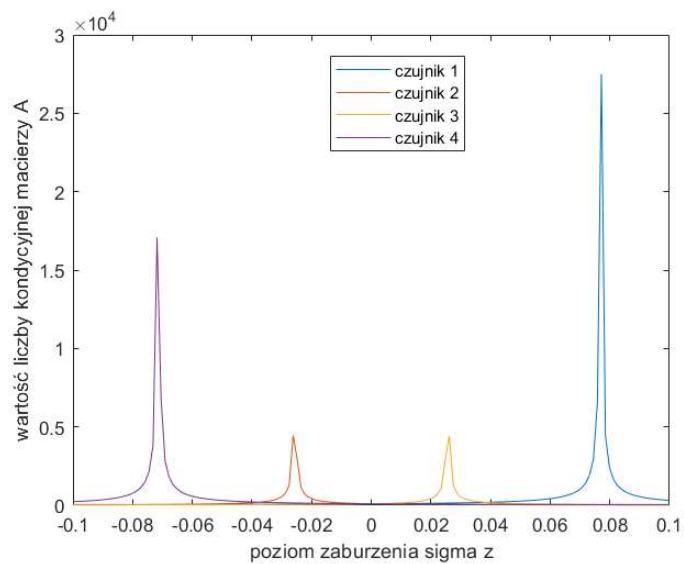
Szkicujemy wykresy zależności wartości maksymalnego zagregowanego błędu względnego rozwiązania oraz wartości wyznacznika i liczby kondycyjnej macierzy \mathbf{A} od poziomu zaburzenia σ_z za pomocą funkcji plot. Otrzymane wykresy zostały przedstawione na Rys.4, Rys.5 i Rys.6.



Rysunek 4: wykresy zależności wartości maksymalnego zagregowanego błędu względnego rozwiązania od poziomu zaburzenia σ_z



Rysunek 5: wykresy zależności wartości wyznacznika macierzy A od poziomu zaburzenia σ_z



Rysunek 6: wykresy zależności wartości liczby kondycyjnej macierzy A od poziomu zaburzenia σ_z

4. Dyskusja wyników eksperymentów numerycznych

• Zad.2

Wyniki otrzymane obliczając wektory rozwiązań metodą LU pokrywają się z rozwiązaniami w macierzy **P** otrzymanymi wraz z projektem co udowadnia skuteczność tej metody. Otrzymane wykresy również się pokrywają i możemy odczytać z wykresu trajektorii ruchu że osoba badana najpierw poruszała się głównie wzdłuż osi x później wzdłuż z i na końcu y.

• Zad.3

Po zaburzeniu macierzy **D** wartościami losowymi o rozkładzie normalnym i odchyleniu σ_d obserwujemy wzrost maksymalnego zagregowanego błędu względnego wraz ze wzrostem σ_d co zgadza się z teorią jako że bierzemy wartość maksymalną czyli najgorszy przypadek wystąpienia błędu. Zależność ta ma charakter wykładniczy. Wartości maksymalnego zagregowanego błędu względnego dochodzą do 20. Oszacowanie tego błędu za pomocą maksymalnego zagregowanego błędu względnego wektora **b** oraz liczby kondycyjnej **A** także wzrasta wykładniczo jednak rośnie znacznie szybciej i dochodzi aż do wartości 100 czyli około 5 razy większej. Możemy też zaobserwować że im większe zaburzenie tym większa różnica między estymatą błędu a jego faktyczną wartością. Tak duża rozbieżność spowodowana jest również dużą liczbą kondycyjną macierzy **A** (wynosi ona około 92).

• Zad.4

Na otrzymanych wykresach zależności liczby kondycyjnej macierzy **A** oraz maksymalnego zagregowanego błędu względnego rozwiązania od poziomu zaburzenia σ_z widzimy wyraźne piki w kilku miejscach. Co więcej wykresy pokazane na Rys.4 oraz Rys.6 są niemal identyczne – różnią się jedynie podziałką na osi y. Wskazuje to na mocne powiązanie wartości liczby kondycyjnej z maksymalnym zagregowanym błędem. Gdy porównamy miejsca pików z Rys.4 oraz Rys.6 z Rys.5 okazuje się że są to punkty przecięcia się linii reprezentujących wartość wyznacznika macierzy **A** przy zaburzeniu danych czujników z osią 0. Okazuje się więc, że maksymalny zagregowany błąd względny rozwiązania oraz liczba kondycyjna macierzy przyjmują największe wartości dla σ_z która powoduje wyzerowanie wyznacznika tej macierzy i rosną tym mocniej im wyznacznik bliższy jest zeru. Na zaburzenie każdego czujnika przypada jeden pik ze względu na to że naraz zakłócamy jedynie jedną wartość współrzędnej z któregoś z czujników, a więc maksymalnie jedynie ostatnią kolumnę macierzy **A**. Przedstawiając to w postaci równania widać to jeszcze lepiej (np. dla zakłócenia czujnika czwartego):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0.4 + a \\ -4 & 4 & 0.4 + a \\ -2 & 4 & 0.4 + a \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 \cdot (0.4 + a) + (-4) \cdot 4 \cdot (0.4 + a) + (-2) \cdot 0 \cdot (0.4 + a) = 3.2 + 8a \quad (13)$$

a – zakłócenie wartości macierzy

Jak widać możemy wybrać jedynie jedną wartość która wyzeruje macierz dla jednej zakłócanej współrzędnej. Warto zauważyć, że gdyby wartość ta nie mieściła się w naszym zadeklarowanym wektorze błędów pik by nie wystąpił. Gdybyśmy natomiast zakłócali różnymi błędami wiele współrzędnych, lub jedną współrzędną ale dla wielu czujników naraz otrzymalibyśmy z wyznacznika macierzy jakieś równanie np. $2a+b$. W takim wypadku dla każdej kombinacji gdzie losowo wygenerowany błąd b byłby równy $-2a$ wyznacznik będzie się zerował więc liczba kondycyjna macierzy oraz maksymalny zagregowany błąd względny będą ogromne dla tych wartości, a samych kombinacji mogłoby być nieskończenie wiele jednak trudno przewidzieć czy i gdzie by się pojawiły.

5.Wnioski

Rozwiązując algebraiczne równania liniowe ważne zastosowanie jest odpowiedniego algorytmu. Widzimy że rozkład LU jest bardzo skuteczny w rozwiązywaniu równań postaci (1). Po zastosowaniu odpowiedniego programu i języka (np. MATLAB) możemy wielokrotnie rozwiązywać układy tego typu stosując rozkład LU i zmieniając dane wejściowe na dowolne wartości otrzymane podczas pomiaru w czasie.

Widzimy jednak jak duży wpływ mogą mieć zakłócenia na wektor rozwiązań, nawet małe zaburzenia danych wejściowych mogą przełożyć się na solidne błędy. Ważne jest więc kontrolowanie zakłóceń w naszych danych wejściowych (stosowanie filtracji, czujników o odpowiedniej dokładności) oraz odpowiednie uwarunkowanie naszej macierzy. Za odpowiednie uwarunkowanie macierzy odpowiada jej wskaźnik uwarunkowania czyli jej liczba kondycyjna, która określa wrażliwość równań liniowych na zaburzenie wektora wyrazów wolnych – im jest ona większa tym gorzej uwarunkowana jest macierz. Ponadto szacując wartość maksymalnego zagregowanego błędu względnego w Zad.2 używaliśmy liczby kondycyjnej by wyznaczyć estymatę co wpłynęło znacząco na różnicę w oszacowaniu i faktycznym błędzie maksymalnym. Macierz idealnie uwarunkowana posiada liczbę kondycyjną 1. Nasza macierz **A** z liczbą kondycyjną około 92 jest więc daleko od ideału. By zniwelować tak duży wpływ zaburzeń na nasze rozwiązania musielibyśmy odpowiednio uwarunkować macierz **A** np. poprzez skalowanie [2].

6.Lista źródeł

[1] Paweł Mazurek – MNUB 24L, wykłady Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Politechnika Warszawska

[2] Jan Verschelde, *Analytic Symbolic Computation, Condition and Scaling*, MCS 563 Lecture 9, 3 February 2014

7.Listing programów

```
load ('MNUB_24L_P1_dane32.mat');
N=165; %zapamiętuje liczbę punktów w czasie
by nie pisać ciągle 165
A=zeros(3,3);
for i=1:3
    A(i,:)=[2*(R(i,1)-R(4,1)), 2*(R(i,2)-
R(4,2)), 2*(R(i,3)-R(4,3))]; %obliczam A po
kolei wierszami na podstawie
przekształconego równania
end

%disp(A);
%rozkład macierzy A na L i U
U=A;
L=eye(3,3);
for i=2:3
    for j=1:i-1
        L(i,j)=A(i,j)/A(j,j);
        U(i,:)=U(i,:)-U(j,:)*L(i,j);
    end
end

%disp(A);
%disp(L);
%disp(U);

B=zeros(N,3);
X=zeros(N,3); %macierz rozwiązań
współrzędnych

for n=1:N
    %obliczam wektor b dla każdej chwili
    czasu na podstawie
    %przekształconego równania i wpisuje w
    macierz B
    for i=1:3
        B(n,i)=D(n,4)*D(n,4)-
D(n,i)*D(n,i)+(R(i,1))^2+(R(i,2))^2+(R(i,3))
^2-(R(4,1))^2-(R(4,2))^2-(R(4,3))^2;
    end

    y=L\B(n,:);
    X(n,:)=U\y; %na podstawie wektora b oraz
    macierzy L i U obliczam wektor x dla każdej
    chwili i wpisuje w wiersz macierzy X
end

%wykres wartości współrzędnych środka
ciężkości osoby w trakcie ruchu.
hold on
plot(t,X(:,1),'r-.');
plot(t,X(:,2),'b-.');
plot(t,X(:,3),'g-.');
hold off

%wykres trówymiarowej trajektorii ruchu
osoby
figure;
scatter3(X(:,1), X(:,2), X(:,3), 'r','.');
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```

```
title('Wykres ruchu');
grid on;

%disp(L*U);
%disp(B);
%disp(X);

%Zaburzenie - zad 3

MaxErrX=zeros(19,1); %wektor błędów max X
MaxErrB=zeros(19,1); %wektor błędów max B
sigmaV=zeros(19,1); %wektor poziomów
zaburzenia
Est=zeros(19,1); %wektor oszacowania błędów

%pętla dla 19 różnych odchyleń sigma
for k=1:19
    Dz=D;
    if k<=10
        sigma=10^(-3)*k;
    else
        sigma=10^(-2)*(k-9);
    end

    Z=randn(N,4)*sigma; %generacja losowych
    zaburzeń o rozkładzie normalnym
    sigmaV(k)=sigma;

    Dz=Dz.*(Z+1); %zaburzenie D
    Bz=zeros(N,3); %zaburzone B
    Xz=zeros(N,3); %zaburzone X
    ErrNormX=zeros(N,1);
    ErrNormB=zeros(N,1);

    for n=1:N
        %obliczenie zaburzonego B
        for i=1:3
            Bz(n,i)=Dz(n,4)*Dz(n,4)-
Dz(n,i)*Dz(n,i)+(R(i,1))^2+(R(i,2))^2+(R(i,3))
^2-(R(4,1))^2-(R(4,2))^2-(R(4,3))^2;
        end

        yz=L\Bz(n,:);
        Xz(n,:)=U\yz;

        %zagregowane błędy względne
        ErrNormX(n)=norm(Xz(n,:)-
X(n,:))/norm(X(n,:));
        ErrNormB(n)=norm(Bz(n,:)-
B(n,:))/norm(B(n,:));
    end

    %maksymalne zagregowane błędy względne
    MaxErrX(k)=max(ErrNormX);
    MaxErrB(k)=max(ErrNormB);
    %obliczanie oszacowanych błędów
    Est(k)=cond(A)*MaxErrB(k);
end

%wykres zależności wartości maksymalnego
zagregowanego błędu względnego rozwiązania
```

```

oraz oszacowania tego błędu od poziomu
zaburzenia
figure;
hold on
semilogx(sigmaV,MaxErrX);
semilogx(sigmaV,Est);
hold off

%Zad 4

CondAz=zeros(150,4); %macierz liczb
kondycyjnych dla różnych zaburzeń A
DetAz=zeros(150,4); %macierz wyznaczników
dla różnych zaburzeń A
sigmaz=linspace(-0.1,0.1,150); %wartości
odchyłeń
MaxErrX4=zeros(150,4);
for l=1:4
    for k=1:150

        Rz=R;
        Rz(1,3)=Rz(1,3)*(sigmaz(k)+1);
        %zaburzenie składowej z w macierzy R dla
        każdego czujnika osobno
        Xz4=zeros(N,3);
        Bz4=zeros(N,3);
        ErrNormX4=zeros(N,1);

        Az=zeros(3,3);
        for i=1:3
            Az(i,:)=[2*(Rz(i,1)-
Rz(4,1)), 2*(Rz(i,2)-Rz(4,2)), 2*(Rz(i,3)-
Rz(4,3))];
        end

        CondAz(k,l)=cond(Az);
        %wpisywanie liczby kondycyjnej dla każdej
        zaburzonej macierzy A
        DetAz(k,l)=det(Az); %wpisywanie
        wartości wyznacznika każdej zaburzonej
        macierzy A

        %rozkład zaburzonego Az na L i U
        Uz=Az;
        Lz=eye(3,3);

        for i=2:3
            for j=1:i-1
                Lz(i,j)=Az(i,j)/Az(j,j);
                Uz(i,:)=Uz(i,:)-
Uz(j,:)*Lz(i,j);
            end
        end

        %obliczanie wektora wyników
        for n=1:N
            for i=1:3
                Bz4(n,i)=D(n,4)*D(n,4)-
D(n,i)*D(n,i)+(Rz(i,1))^2+(Rz(i,2))^2+(Rz(i,
3))^2-(Rz(4,1))^2-(Rz(4,2))^2-(Rz(4,3))^2;
            end

            yz4=Lz\ (Bz4(n,:))';
            Xz4(n,:)=Uz\yz4;

```

```

        %zagregowany błąd względny
        ErrNormX4(n)=norm(Xz4(n,:)-
X(n,:))/norm(X(n,:));
    end

    %maksymalny zagregowany błąd
    względny
    MaxErrX4(k,l)=max(ErrNormX4);
end
end

%wykres zależności liczby kondycyjnej
macierzy A od poziomu zaburzenia
figure;
hold on
plot(sigmaz,CondAz(:,1));
plot(sigmaz,CondAz(:,2));
plot(sigmaz,CondAz(:,3));
plot(sigmaz,CondAz(:,4));
hold off

%wykres zależności wartości wyznacznika
macierzy A od poziomu zaburzenia
figure;
hold on
plot(sigmaz,DetAz(:,1));
plot(sigmaz,DetAz(:,2));
plot(sigmaz,DetAz(:,3));
plot(sigmaz,DetAz(:,4));
hold off

%wykres zależności wartości maksymalnego
zagregowanego błędu względnego rozwiązania
od poziomu zaburzenia
figure;
hold on
plot(sigmaz,MaxErrX4(:,1));
plot(sigmaz,MaxErrX4(:,2));
plot(sigmaz,MaxErrX4(:,3));
plot(sigmaz,MaxErrX4(:,4));
hold off

```