

KOSPI200 변동성 예측성과 : 주기적 모형추정과 다기간 예측*

김 상 환**

〈요 약〉

본 연구는 역사적 변동성(historical volatility), Riskmetrics 지수가중이동평균(EWMA), KOSPI200 옵션의 내재변동성, EGARCH 모형, Component GARCH 모형과 HAR-RV 모형을 대상으로 KOSPI 200 변동성에 대한 예측성과를 분석하였다. 또한 GARCH 모형에 대해서는 매일 모형을 추정하는 대신 3개월이나 6개월을 주기로 추정해도 예측성과에 차이가 없는지를 분석하였다.

1일 후 변동성에 대해서는 EGARCH 모형의 표본외 예측성과가 가장 우수한 것으로 나타났으나, EWMA, VKOSPI와 HAR-RV 모형도 크게 뒤지지 않는 예측성과를 보여주었다. GARCH 모형들의 경우 매일 추정하거나 3개월이나 6개월 마다 추정하거나 변동성 예측성과에 큰 차이를 보이지 않았다. 3일 후, 5일 후와 21일 후의 변동성 예측에서는 EWMA 모형과 GARCH 모형, EGARCH 모형의 예측성과가 우수한 것으로 나타났다.

전체적인 예측능력을 종합해보면, EGARCH 모형이 가장 우수한 것으로 나타났으나 VKOSPI, GARCH 모형에 비해 더 우수하다고 신뢰하기는 어렵다. Diebold-Mariano 검증결과에 의하면, VKOSPI와 GARCH 모형, EGARCH 모형의 예측능력이 같다는 귀무가설이 기각되지 않았기 때문이다. 이는 EGARCH 모형의 예측성과가 더 좋기는 했지만, 예측성과의 상대적 우월성이 통계적으로 유의적인 수준으로 신뢰할 만한 정도는 아님을 의미한다.

주제어 : 변동성예측, 실현변동성, GARCH 모형, 실현변동성 이질적 자기회귀 모형(HAR-RV),
표본외 예측성과

논문접수일 : 2014년 11월 05일 논문수정일 : 2015년 01월 29일 논문게재확정일 : 2015년 02월 04일

* 이 논문은 2013년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원을 받아 연구되었다. 논문에 유익한 논평을 해주신 익명의 심사자에게 감사드린다.

** 충북대학교 경제학과, E-mail : swkim7@chungbuk.ac.kr

www.kci.go.kr

I. 서 론

금융자산수익률의 변동성(volatility)은 자산운용전략이나 위험관리, 파생상품 가격결정 등 금융시장의 거의 모든 부문에서 요구되는 중요한 모수이다. 예를 들어, 파생상품가격은 기초자산의 변동성에 의해 결정되고, 포트폴리오 위험도 구성자산의 변동성이 있어야 측정될 수 있다. 따라서 변동성에 대한 정확도 높은 예측은 금융상품투자나 위험관리의 성패를 좌우하는 결정적인 역할을 한다. 이처럼 금융자산의 변동성은 거의 모든 금융실무에 핵심적인 역할을 하는 투입요소라는 점에서 학계와 업계 모두 변동성을 정확하게 추정하고 예측하기 위한 방법을 개발하는 데에 많은 노력을 기울여왔다.

본 연구는 자산수익률 변동성에 대한 예측모형들의 예측성결과를 비교하여 최적의 예측모형을 찾는 데에 목적이 있다. 변동성 예측은 많은 국내외 학자들에 의해 이미 많은 실증연구가 시도된 바 있어 연구주제로는 식상한 느낌이 드는 것이 사실이다. 그럼에도 불구하고 본 연구를 시도한 이유는 기존 연구에서는 변동성 예측모형의 예측성결과를 평가하는 과정에 실무적인 상황이 충분히 고려되지 못하였기 때문이다. 실무적인 관점에서 보면, 변동성 예측모형의 예측능력도 중요하지만 선택된 예측모형을 매일 새로이 추정해야 하는지 아니면 일정한 주기로 추정해도 되는지도 중요한 이슈이다. 예를 들어 GARCH 모형을 이용할 경우 매번 예측모형을 새로 추정하는 대신 3개월이나 6개월을 주기로 추정해도 예측성결과 별 차이가 없는지는 변동성 예측 담당자에게 실무적으로 중요한 문제이다.

변동성예측성결과를 평가하는 방법에서도 선행연구와 구별된다. 최근의 국내 연구문헌들은 연구대상 기간의 모든 데이터를 이용하여 예측모형들을 추정한 다음 표본내의 변동성에 대한 예측성결과를 측정하고 있는데, 이는 표본외 예측능력에 대한 평가방법으로 적절하지 않다. 예를 들어, 2000년부터 2010년까지의 데이터를 이용하여 추정된 변동성 예측모형으로 2003년의 변동성을 예측한다는 것은 학술적인 연구에서만 가능할 뿐 현실에서는 불가능한 상황이기 때문이다. 본 연구는 예측모형 추정기간을 1기씩 전진시키면서 표본외(out-of-sample) 예측성결과를 평가함으로써 이용가능한 정보에 근거한 미래 변동성 예측능력을 분석하였다.

또한 예측성결과를 평가하는 지표로 평균 제곱오차(MSE), 평균절대오차(MAE) 등이 주로 이용되는데, 이들 지표들은 특정 예측모형이 다른 모형에 비해 유의적으로 우수한 예측능력을 갖는가에 대한 통계적인 검증결과를 제시하지 못하는 한계가 있다. 본 연구는 Diebold-Mariano 검증통계량을 이용함으로써 서로 다른 예측모형의 예측능력에 대한 통계적 검증을 시도하였다.

본 연구는 역사적 변동성, 지수가중이동평균(EWMA), KOSPI200 옵션의 내재변동성인 VKOSPI, GARCH 모형과 HAR-RV 모형을 대상으로 KOSPI200 지수수익률의 변동성에 대한 예측성가를 분석하였다. GARCH 모형 중에서는 표준모형, 지수(exponential) 모형(이하에서 EGARCH로 표기)과 Component 모형(이하에서 CGARCH로 표기)을 이용하였다. 실현변동성 이질적 자기회귀모형(Heterogeneous Autoregressive Model of Realized Volatility, 이하에서 HAR-RV로 표기)을 시도한 것은 국내에서 처음이다. 예측 대상인 실제의 변동성으로는 대부분의 선행연구와 마찬가지로 실현변동성(realized volatility)을 이용하였다.

실증분석결과를 정리하면, EGARCH 예측모형의 예측력이 가장 우수한 것으로 나타났으나 EWMA 모형, 표준 GARCH 모형과 HAR-RV 모형도 EGARCH 모형에 크게 뒤지지 않는 예측력을 보여주었다. GARCH 모형의 경우, 매일 추정할 때에 비해 3개월이나 6개월을 주기로 추정해도 예측력이 거의 비슷하게 나타났다. EGARCH 모형과 CGARCH 모형에서는 일정주기마다 추정할 경우 예측력이 떨어지는 것으로 나타났으나, 그 차이가 크지 않았다. 따라서 GARCH 유형의 모형으로 변동성을 예측하고자 할 경우 예측모형을 매일 추정하기 보다는 3개월이나 6개월 마다 추정하는 것이 예측정확도를 희생하지 않으면서 업무비용을 절감할 수 있는 방법이 될 수 있다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 다음 장에서 국내 선행연구를 중심으로 선행연구문헌을 개관하였다. 제 III장에서는 본 연구에서 다룬 변동성 예측모형들을 설명한 다음 실제의 변동성을 추정하고 예측성가를 평가하는 방법에 대해 기술하였다. 제 IV장에서는 실증분석에 이용한 데이터를 설명하고 변동성 예측성가에 대한 실증분석결과를 정리하였고, 제 V장에서는 연구결과를 정리하고 추가적인 연구과제에 대해 설명하였다.

II. 선행연구 개관

변동성예측에 대한 연구는 주지하다시피 너무 방대하여, 여기에서는 수많은 선행연구들을 정리하기 보다는 참고문헌만 제시하고자 한다. 변동성 예측에 관한 이론적 설명은 Andersen et al.(2006)을 참조하고, 변동성 예측에 관한 실증연구문헌들의 주요 결과는 Poon and Granger (2003), Granger and Poon(2005)을 참조하기 바란다.

많은 연구에도 불구하고 어떤 유형의 예측모형이 우수한가에 대해서는 아직 일관된 결론이 도출되지 않았다. 변동성 예측에 이용된 예측모형의 유형과 범위에 따라 서로 다른 결과가

나타날 수 있고, 예측대상인 변동성의 실제 값을 어떻게 측정하느냐에 따라서도 예측능력 평가결과가 다를 수 있기 때문이다. 또한 예측력을 비교하는 평가기준에 따라서도 결과가 다르게 나타날 수 있다. 최근에는 이러한 한계를 극복하기 위해 변동성 예측모형의 예측성과를 로버스트(robust)하게 평가하는 방법에 관한 연구가 활발하게 이루어지고 있다(Hansen and Lunde, 2005; Patton, 2011).

국내에서는 1990년대부터 변동성 예측에 대해 많은 선행연구들이 발표되었는데, 이들 중 최근 연구문헌만을 정리하기로 한다. 유시용, 고중양(2009)은 2003년 1월 3일부터 2007년 1월 31일까지의 KOSPI200을 이용하여 역사적 분산, 블랙-숄즈모형의 내재변동성과 변동성지수(VKOSPI)의 예측성과를 분석하였다. 변동성 실제값은 두 가지 방법으로 측정하였는데, 22일간의 일별수익률 제곱의 평균과 5분 단위 수익률로 계산한 실현변동성을 이용하였다. 회귀모형으로 예측성과를 분석한 결과, 일별수익률 제곱으로 계산한 변동성에 대해 역사적 변동성이 가장 우수한 예측력을 보였고 그 다음으로 풋옵션 내재변동성, 콜옵션 내재변동성과 변동성지수의 순으로 우수한 예측력을 보였다. 5분 수익률로 측정한 실현 변동성에 대해서도 역사적 변동성이 가장 우수한 예측성과를 보였다. 최영수, 이현정(2010)도 비슷한 표본기간과 예측모형을 대상으로 예측능력을 평가하였다. 다만 실제 변동성으로 이용한 실현변동성을 5분 단위가 아닌 1분 단위 KOSPI200로 계산하였고, 예측모형들의 예측력 평가에 회귀모형이 아닌 교차타당성(cross validation) 방법을 이용한 점에서만 차이가 있다. 그런데 데이터와 예측모형이 비슷함에도 불구하고 실현변동성에 대한 예측성과는 유시용, 고중양(2009)과는 정반대로 변동성지수가 가장 우수한 것으로 나타났다.

황성원, 류혁선(2011)은 2000년 1월 4일부터 2010년 4월 1일까지의 KOSPI200 표본을 이용하여 단순이동평균법(simple moving average), GARCH 모형과 국면전환 GARCH 모형의 예측성과를 분석하였다. 이들도 5분 수익률로 측정한 실현변동성을 변동성 실제값으로 이용하였고, 예측성과를 평가하는 방법으로는 Mincer-Zarnowitz 회귀모형을 이용하였다. 단순이동평균법과 GARCH 모형의 경우 예측치가 실현변동성의 불편추정치라는 가설이 기각된 반면, 국면전환 GARCH 모형은 1일과 5일 변동성에 대한 예측성과가 우수한 것으로 나타났다. 류두진(2012)도 S&P500 지수 변동성을 대상으로 다양한 GARCH 모형의 예측성과를 비교하였는데, 여기에서도 예측성과 평가방법으로 Mincer-Zarnowitz 회귀분석을 이용하였다.

국내 연구문헌들이 이용한 Mincer-Zarnowitz 회귀분석을 이용한 예측능력 평가방법은 다음과 같다. 표본 전체를 이용하여 예측모형을 추정하고, 이렇게 추정된 예측모형에서 표본기간 전체에 대한 변동성 예측치를 한꺼번에 추출한다. 이렇게 계산된 변동성 예측치

$\hat{\sigma}_t$ 가 실제 변동성 σ_t 에 대해 불편 예측치(unbiased prediction)인가는 다음의 회귀식에서 $\alpha=0$ 와 $\beta=1$ 에 대한 검증을 통해 판단한다.

$$\sigma_t = \alpha + \beta \hat{\sigma}_t + \epsilon_t \quad (1)$$

그리고 변동성 예측치 $\hat{\sigma}_t$ 의 예측력은 회귀분석의 R^2 로 평가한다. 그러나 이러한 평가방법은 현재 이용 가능한 데이터를 이용하여 미래의 변동성을 예측할 수 있는 능력, 즉 표본의 예측능력을 평가하는 데에 한계가 있다. 예를 들어, 2000년부터 2010년까지의 데이터를 이용하여 추정된 변동성 예측모형으로 2003년의 변동성을 예측한다는 것은 학술적인 연구에서만 가능할 뿐 현실에서는 불가능한 상황이기 때문이다.

이제 본 연구와는 다른 관점에서 변동성 예측에 대해 접근한 연구문헌에 대해 살펴보기로 한다. 기존 연구문헌들은 대부분 표본내 또는 표본외 예측오차(forecast error)를 이용한 예측성과측정지표(평균제곱오차(mean square error) 등)를 기준으로 변동성 예측모형의 우열을 평가하였다. 그러나 재무이론이나 실무적인 관점에서 보면, 변동성 자체에 대한 예측보다는 포트폴리오 투자성과, 위험관리 또는 파생상품가격결정 등에 미치는 영향을 기준으로 변동성 예측모형을 평가하는 것이 더 실질적인 의미를 갖는다고 할 수 있다. 즉, 다양한 예측모형을 평가할 때 변동성 자체에 대한 예측정확도에 초점을 두는 통계적인 분석보다는 투자수익률이나 가격평가요류 등 재무적인 기준을 이용하는 경제적 평가(economic evaluation)가 더 중요하다는 것이다.

변동성 예측모형에 대한 경제적 평가에 대한 연구로는 변동성 예측치가 포트폴리오의 샤프비율에 미치는 영향을 평가기준으로 이용한 Fleming et al.(2001), Liu(2009), Chiriac and Voev(2011) 등이 있다. 여러 변동성 예측모형의 옵션가격 예측성과를 비교하는 방식으로 최적 변동성 예측모형을 선택한 연구도 Karolyi(1993)에 의해 시도된 바 있다. 이외에도 최근 위험관리에 가장 많이 이용되고 있는 Value-at-Risk(VaR)를 계산하는 데에 어떤 변동성 예측모형이 최적의 예측력을 보이는가에 대한 연구도 활발하게 이루어지고 있다(Giot and Laurent, 2003; Thomas, Sarma, and Shah, 2003; 조담, 2004).

Ⅲ. 변동성 예측모형과 예측력 평가방법

본 연구는 변동성 예측방법으로 역사적 분산(historical variance), 지수가중이동평균

(Exponentially Weighted Moving Average, EWMA), 한국거래소의 변동성지수(VKOSPI), GARCH 모형과 HAR-RV 모형을 고려하였다. GARCH 모형 중에서는 표준 GARCH 모형, EGARCH 모형과 Component GARCH 모형을 이용하였다. 역사적 분산은 일반적으로 예측력이 매우 낮은 것으로 알려져 있지만 업계에서 여전히 많이 이용되고 있고 다른 예측모형의 예측력을 평가하는 벤치마크로 자주 이용되고 있어 예측모형에 포함하였다.

KOSPI200 변동성지수(이하에서는 VKOSPI로 표기)는 KOSPI200 옵션가격에서 계산된 내재변동성(implied volatility)으로서 옵션 투자자들이 예상하는 KOSPI200의 미래 변동성을 나타낸다. VKOSPI의 구체적인 계산방법은 한국거래소 자료를 참조하기 바란다. 본 연구는 한국거래소가 발표하는 변동성지수를 이용하였다.

1. 변동성 예측모형

본 연구에서 이용한 예측모형 중 역사적 분산, 지수가중이동평균, 표준 GARCH 모형과 EGARCH 모형은 이미 많은 선행연구에서 소개된 바 있으므로 부록에서 설명하기로 한다. 이하에서는 본 연구에서 처음으로 시도한 Component GARCH 모형과 실현변동성 이질적 자기회귀모형(Heterogeneous Autoregressive model of Realized Volatility, HAR-RV)에 대해서만 간단하게 설명하기로 한다.

1) 실현변동성 이질적 자기회귀 모형

Andersen et al.(2007)과 Corsi(2009)는 실현변동성에 선형 시계열모형을 적용시킨 실현변동성 이질적 자기회귀 모형(Heterogeneous Autoregressive model of Realized Volatility)을 제안하였다. HAR-RV 모형은 t 기 실현변동성 RV_t^d 을 1일간 실현변동성 RV_{t-1}^d , 1주간 실현변동성 RV_{t-1}^w 과 1달간 실현변동성 RV_{t-1}^m 의 선형함수로 나타낸 것이다.

$$RV_t^d = \alpha + \beta^d RV_{t-1}^d + \beta^w RV_{t-1}^w + \beta^m RV_{t-1}^m + \epsilon_t \quad (2)$$

위식에서 RV_{t-1}^w 와 RV_{t-1}^m 는 다음과 같이 계산한다.

$$RV_{t-1}^w = \frac{1}{5} (RV_{t-1}^d + RV_{t-2}^d + RV_{t-3}^d + RV_{t-4}^d + RV_{t-5}^d)$$

$$RV_{t-1}^m = \frac{1}{22} (RV_{t-1}^d + RV_{t-2}^d + \cdots + RV_{t-21}^d + RV_{t-22}^d)$$

HAR-RV 모형은 변동성의 장기기억(long memory)성질을 적은 수의 모수로 간단하게 모형화하는 데에 성공적인 것으로 평가받고 있다. 또한 일반적인 자기회귀(AR)모형이 시계열변수 y_{t+h} 예측에 이용되듯이, HAR-RV 모형도 미래 변동성 RV_{t+h}^d ($h=1, 2, \dots$)의 예측에 편리하게 이용될 수 있다.

2) Component GARCH 모형

Engle and Lee(1999)는 자산가격 변동성을 장기적인 움직임(permanent component) q_t 과 일시적인 변화(transitory component) $\sigma_t^2 - q_t$ 로 구분하여 추정할 수 있는 Component GARCH 모형을 제안하였다. 일반적인 GARCH(1, 1) 모형은 다음과 같이 일정한 장기변동성 $\bar{\omega}$ 을 기준으로 변화하는 일시적인 변동성 $\sigma_t^2 - \bar{\omega}$ 을 모형화한 데에 반해,

$$(\sigma_t^2 - \bar{\omega}) = \alpha(\epsilon_{t-1}^2 - \bar{\omega}) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - \bar{\omega}), \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (3)$$

Component GARCH 모형은 장기변동성 q_t 를 식 (4)와 같이 AR(1) 과정 형태의 시변하는 변수로 모형화한 다음, 장기추세에서 벗어나는 일시적인 변동성 $\sigma_t^2 - q_t$ 을 식 (5)와 같이 모형화한 것이다.

$$q_t = w + \rho(q_{t-1} - w) + \varphi(r_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) \quad (4)$$

$$(\sigma_t^2 - q_t) = \alpha(\epsilon_{t-1}^2 - q_{t-1}) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - q_{t-1}) \quad (5)$$

따라서 변동성 중에서 장기추세 q_t 의 동학적 움직임은 ρ 에 의해 그 속도가 정해지고, 단기적 변화 $\sigma_t^2 - q_t$ 는 일반적인 GARCH 모형에서와 같이 $\alpha + \beta$ 에 의해 동학적 움직임이 정해진다.

Component GARCH 모형의 장점은 우선 시변변동성의 복잡한 동학적 성질을 적은 수의 모수만으로 추정할 수 있다는 데에 있다. 게다가 Berkes, Gombay, Horvath, and Kokoszka (2004)에서 발견된 자산가격 변동성의 구조적 변화(structural breaks)를 설명하는 데에 Component 모형이 유용한 분석도구가 된다는 점도 중요한 장점이다. 이 모형에 대한 자세한 이론적 설명은 Engle and Lee(1999)을 참조하기 바란다.

2. 예측성과 평가방법

변동성 모형의 예측성과를 평가하기 위해서는 첫째 예측대상인 변동성 참값을 어떻게

측정할 것인가, 둘째 변동성 예측결과를 어떤 기준으로 평가할 것인가를 결정하여야 한다. 본 연구는 실현변동성을 변동성 실제값으로 이용하였고, 로버스트 검증을 위해 일별수익률 제공값에 대한 예측성과도 분석하였다. 예측성과평가를 위해서는 평균제공오차와 평균절대 오차 등 일반적인 평가기준을 이용하였다. 예측모형비교의 신뢰도를 높이기 위해 Diebold-Mariano 검증통계량을 이용하여 특정 예측모형이 다른 모형에 비해 유의적으로 우수한 예측능력을 갖는가에 대한 통계적인 검증도 시도하였다.

1) 변동성 실제값 추정

변동성은 사후적으로도 관측가능하지 않은 잠재변수(latent variable)이므로 변동성 예측에 관한 연구에서 변동성 실제값을 어떻게 추정할 것인가는 중요한 이슈이다. 실현변동성이 개발되기 이전에는 일별수익률 제공값을 변동성의 실제값으로 자주 이용하였다. 일별 수익률 제공값은 비대칭적으로 분포되어 있기 때문에 예측정확도가 떨어진다는 지적(Lopez, 2001)이 있기는 하지만 변동성에 대한 불편추정량(unbiased estimator)라는 점에서 자주 이용되었다.

최근에는 고빈도 자료(high frequency data)가 이용가능하게 됨에 따라 실현변동성(realized variance)을 실제 변동성으로 이용하는 연구문헌이 늘어나고 있다. Andersen and Bollerslev(1998)는 5분 단위 환율수익률 제공의 합(sum of squared five-minute returns)이 사후적인 일별 환율변동성에 대한 최적 추정량이라는 연구결과를 발표하였다. 이들이 제안한 실현변동성은 고빈도 자료이용에 내포된 시장미시구조 잡음으로 인한 편의가 존재함에도 불구하고 많은 연구에서 활발하게 이용되어 왔다. 실현변동성이 이용된 이후 사후적인 변동성은 더 이상 잠재변수가 아니라 “관측 가능한(observable)” 변수로 인식될 정도이다.

실현변동성은 다음과 같이 고빈도 수익률 제공의 합으로 정의된다.

$$RV_t = \sum_{i=0}^{n_t} r_{t,i}^2 \quad (6)$$

여기에서 n_t 는 t 일의 관측치 수를, $r_{t,i}$ 는 t 일의 i 번째 수익률 관측치를 나타낸다. 시장미시구조 잡음이 없다면 관측치 수 n_t 를 늘림에 따라 실제의 변동성을 오차 없이 추정할 수 있는 장점이 있다.

$$E(RV_t | I_{t,0}) = \sigma_t^2, \quad \lim_{n_t \rightarrow \infty} V(RV_t | I_{t,0}) = 0$$

여기에서 $I_{t,0}$ 는 t 일거래 시작시점까지의 정보집합을 나타낸다. 그러나 고빈도 자료에는 시장미시구조 잡음이 내포되어 있어 실현변동성은 편의를 갖게 되고 분산도 커지는 문제를 갖게 된다.

시장미시구조 잡음에 따른 문제점을 해소하기 위해 여러 가지 방법들이 제안되고 있는데, 가장 간단한 방법은 데이터의 빈도를 조절하는 것이다.(Andersen et al., 2000; Bandi and Russel, 2008; Zhang et al., 2005) 1분 또는 그 이하의 주기로 측정된 데이터를 이용할 경우 분산은 줄일 수 있지만 추정편의는 커지게 된다. 반대로 측정주기를 늘리면 편의는 줄지만 분산이 커지게 되는 상충관계가 발생한다. Bandi and Russel(2005)는 이러한 상충관계를 고려할 경우 15분 주기의 데이터를 선택하는 것이 최적이라고 주장하였다.

시장미시구조 잡음을 처리하는 다른 방법으로 Zhang et al.(2005)의 부표본 방법(subsampling method)과 커널 추정방법(kernel-based estimator)도 많이 이용되고 있다. 본 연구에서는 Barndorff-Nielsen et al.(2008)의 커널 방법을 이용하였다. 이 추정방법은 식 (6)의 실현 변동성에 시장미시구조 잡음으로 인한 편의를 수정하기 위한 커널 수정을 더한 것으로 다음과 같다.

$$RV_t^{kernel} = RV_t + \sum_{h=1}^H k\left(\frac{h-1}{H}\right) (\hat{\gamma}_h + \hat{\gamma}_{-h}) \quad (7)$$

여기에서 $k(x)$ 는 $k(0)=1$, $k(1)=0$ 을 만족하는 커널함수이고 $\hat{\gamma}_h$ 는 다음과 같다.

$$\hat{\gamma}_h = \frac{n_t}{n_t - h} \sum_{j=1}^{n_t - h} r_{t,j} r_{t,j+h}$$

데이터로는 5분 주기로 측정한 수익률을 이용하였다.

2) 예측성과 측정방법

예측모형의 예측능력은 일반적으로 예측치와 실제치와의 오차 $e_{t+1} = \hat{\sigma}_{t+1} - \sigma_{t+1}$ 에 의해 평가되는데, 평균오차(mean error, ME), 평균제곱오차(mean squared error, MSE)와 평균제곱오차제곱근(root mean squared error, RMSE), 평균절대오차(mean absolute error, MAE)와 평균절대오차비율(mean absolute percent error, MAPE)가 대표적이다.

$$\begin{aligned}
 ME &= \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} (\hat{\sigma}_t - \sigma_t) \\
 MSE &= \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} (\hat{\sigma}_t - \sigma_t)^2, \text{ SE} = \sqrt{\text{MSE}} \\
 MAE &= \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} |\hat{\sigma}_t - \sigma_t| \\
 MAPE &= \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} \left| \frac{\hat{\sigma}_t - \sigma_t}{\sigma_t} \right|
 \end{aligned}$$

위의 성과측정방법은 예측성과에 대한 양적인 평가기준을 제공하고 여러 모형들의 예측능력을 비교하는 데에 자주 이용되고 있으나 특정 예측모형이 다른 모형에 비해 유의적으로 우수한 예측능력을 갖는가에 대한 통계적인 검증결과를 제시해주지는 못한다. 서로 다른 예측모형이 동일한 예측정확도를 보인다는 귀무가설을 검증하는 데에는 Diebold-Mariano 검증통계량이 널리 이용되고 있다.

Diebold and Mariano(1995)는 예측오차에 따른 손실(loss)을 기준으로 예측성과를 검증한다. 손실함수 $g(\cdot)$ 를 가정하면 모형 1과 모형 2의 예측오차 e_{1t} , e_{2t} 로 인한 손실차이는 $d_t = g(e_{1t}) - g(e_{2t})$ 가 된다. 따라서 모형 1과 모형 2의 예측정확도가 동일하다는 가설은 다음과 같이 설정할 수 있고,

$$H_0: E(d_t) = 0$$

손실차이의 표본평균 $\bar{d} = (1/T) \sum_{t=1}^T d_t$ 에 의해 검증될 수 있다. \bar{d} 를 적절한 표준편차로 나눈 형태인 DM 통계량은 대표본에서 정규분포를 따르게 되는데, 구체적인 수식은 Diebold-Mariano(1995)을 참조하기 바란다.

IV. 예측성과 분석

본 연구는 KOSPI200 변동성에 대한 예측모형을 평가하였다. KOSPI200을 이용한 것은 예측능력 평가대상 중 하나인 변동성지수(VKOSPI)가 KOSPI200 변동성을 예측한 것이기 때문이다. 또한 유시용, 고중양(2009)과 최영수, 이현정(2010) 등 국내 선행연구들이 KOSPI 200을 이용하였기 때문에 선행연구의 분석 결과와 비교하는 데에도 도움이 될 것이기 때문이다.

1. 자료설명

표본 데이터는 2006년 1월 2일부터 2013년 10월 31일까지의 일별 KOSPI200 수익률이다. KOSPI200 지수수익률에 대한 기술통계량을 정리한 <표 1>을 보면, 일반적인 금융자산 수익률과 같이 KOSPI200 수익률도 비대칭적이고 꼬리부분이 굵은 분포를 따른다. 또한 Ljung-Box Q-검증통계량에 의하면, 수익률 자체의 시계열 상관관계는 유의적이지 않은 반면 수익률 제곱 값들은 매우 유의적으로 강한 시계열 상관관계를 갖는다. 이는 KOSPI200 수익률이 시변하는 분산을 갖는다는, 즉 ARCH 성질을 보인다는 것을 의미한다. KOSPI200 수익률이 ARCH 과정의 통계적 성질을 갖는다는 사실은 [그림 1]에서도 확인할 수 있다. 수익률이 급등락하는 기간과 안정적인 움직임을 보이는 기간이 구분되는 변동성 군집현상(volatility clustering)이 뚜렷하게 나타난다.

<표 1> KOSPI200 수익률의 통계적 성질

이 표는 2006년 1월 2일부터 2013년 10월 31일까지의 일별 KOSPI200 수익률의 기초통계량을 정리한 것이다. $Q_k(\cdot)$ 는 과거 1기부터 k 기까지의 시계열상관관계 존재 여부에 대한 Box-Ljung Q-검증통계량이다.

패널 A : 기술 통계량					
평균	최소값	최대값	표준편차	왜도	첨도
0.021	-10.903	11.540	1.521	-0.412	6.333
패널 B : 시계열 통계량					
$Q_5(r_t)$	$Q_{10}(r_t)$	$Q_{15}(r_t)$	$Q_5(r_t^2)$	$Q_{10}(r_t^2)$	$Q_{15}(r_t^2)$
6.95	8.68	11.74	679.89**	1200.00**	1467.05**

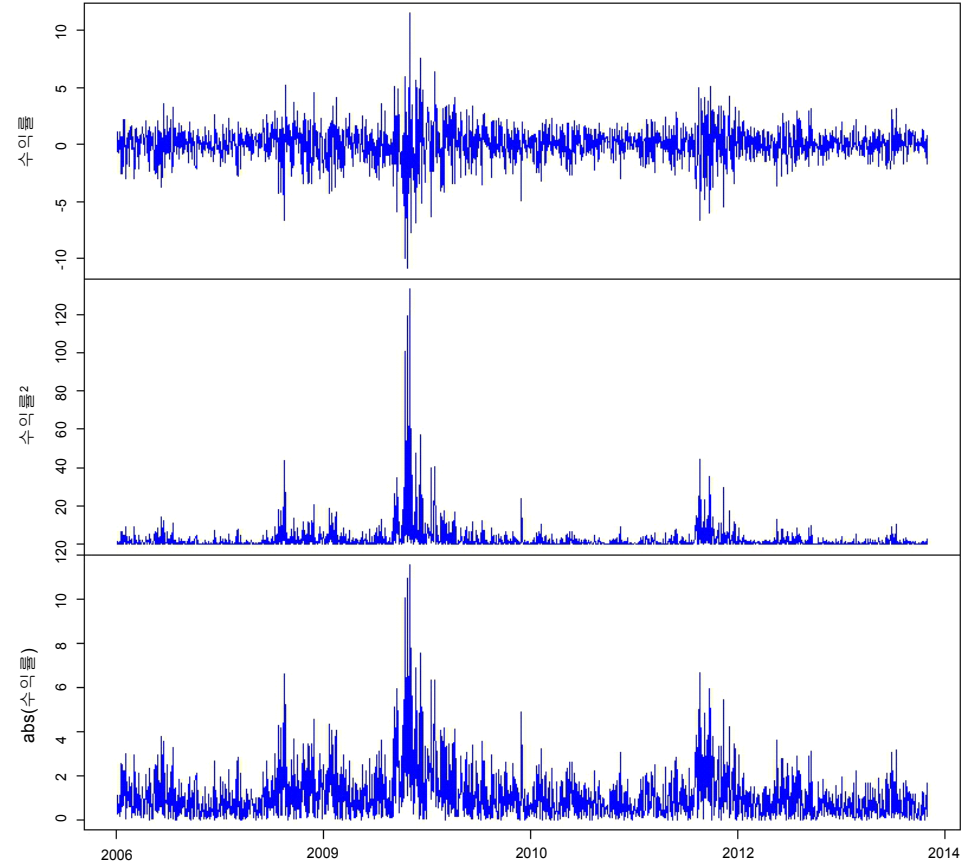
주) *와 **는 각각 유의수준 5%와 1%에서 유의적임을 나타냄.

2. 실증분석

변동성 예측모형의 예측성과평가는 다음과 같은 방법으로 실행하였다. 예측모형들은 500거래일의 수익률을 이용하여 추정하였고, 역사적 변동성만은 통상적인 관례에 따라 표본수를 줄여 250거래일(1년에 해당)의 수익률로 계산하였다. 첫 번째 예측성과평가에서는 데이터를 1일씩 전진시키면서 예측모형을 매번 추정한 다음 1일 후 변동성에 대한 표본외 예측성과를 측정하였다. 두 번째로는 3종류의 GARCH 모형을 대상으로 표본내 기간을 1일씩 전진시키면서 1일 후 변동성에 대한 표본외 예측성과를 평가하되 모형추정은 1개월, 3개월, 6개월, 9개월과 1년 마다 실행하였다. 즉, 추정된 GARCH 모형을 일정기간 동안 다시 추정하지 않고 그대로 이용해도 매일 추정할 경우에 비해 예측성과에 차이가 없는지를

[그림 1] KOSPI200 수익률의 시계열성질

이 그림은 2006년 1월 2일부터 2013년 10월 31일까지의 일별 KOSPI200 수익률, 수익률의 제곱값과 절대값을 그린 것이다.

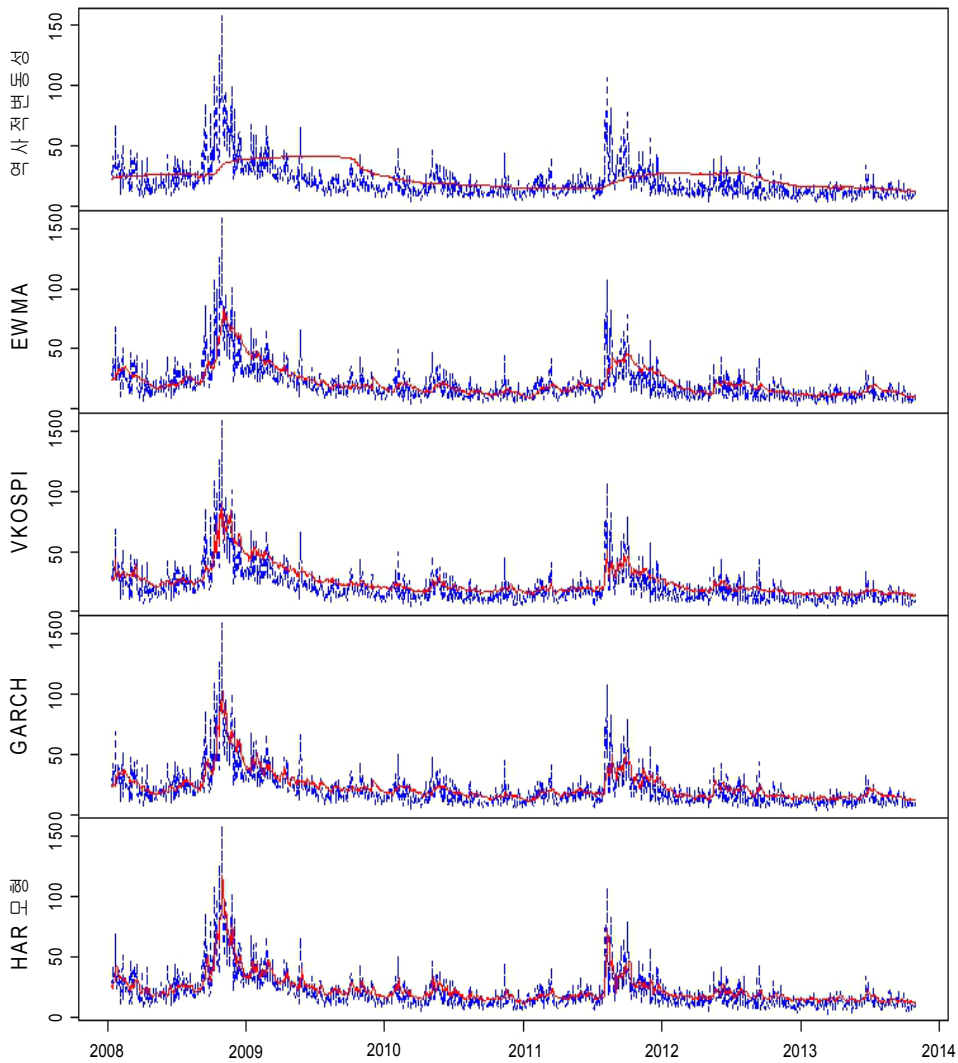


살펴본 것이다. 마지막 작업은 3일, 5일과 21일 후의 변동성에 대한 다기간 예측성과를 분석하였다.

먼저 데이터를 1일씩 전진시키면서 매일 추정한 예측모형들의 변동성 예측치를 그린 [그림 2]를 보면, 역사적 변동성을 제외한 모든 예측모형들이 실현변동성의 움직임을 밀접하게 추적하고 있는 모습을 확인할 수 있다. 역사적 변동성은 실제 변동성의 추세변화를 후행하는 모습을 보였고, EWMA는 VKOSPI나 GARCH, HAR-RV 예측치에 비해 다소 평활화(smoothing)된 모습을 보이고 있다. 예측성과를 정리한 <표 2>에 의하면, EGARCH 모형과 HAR-RV 모형의 표본외 예측성과가 가장 우수한 것으로 나타났다. 그러나 EWMA와 VKOSPI도 이들 모형에 비해 크게 뒤지지 않는 예측성과를 보여주었다. 역사적 분산은

[그림 2] 실현변동성과 예측모형별 변동성 예측치

변동성 예측모형들의 1일 후 변동성 예측치와 실현변동성을 그린 것이다. 2006년 1월 2일부터 2013년 10월 31일까지의 표본기간 중 최초 500거래일은 추정에 이용하였으므로 표본외 예측치는 2008년부터 시작한다. 청색선은 실현변동성을, 적색선은 예측모형별 변동성 예측치를 나타낸다.



업계에서 많이 이용되고 있지만 다른 예측모형들에 비해 예측능력이 크게 떨어졌다. 그리고 모든 예측모형의 평균오차(ME)가 일관되게 음으로 나타나는데, 이는 [그림 2]에서 나타났듯이 변동성 예측모형들이 실현변동성보다 변동성을 항상 작게 예측하고 있기 때문이다.

<표 3>은 예측모형들의 예측력이 동일 한가에 대한 Diebold-Mariano 검증결과를 정리한

것인데, 역사적 분산과 EWMA는 다른 예측모형과 예측능력이 같다는 가설이 기각되었다. 이는 역사적 분산과 EWMA는 VKOSPI, GARCH 모형들과 HAR-RV 모형에 비해 예측능력이 떨어진다는 것을 보여주는 통계적 증거로 볼 수 있다. 반면 VKOSPI, GARCH 모형들과 HAR-RV 모형에서는 예측능력이 같다는 귀무가설이 기각되지 않았다. VKOSPI, 3유형의 GARCH 모형들과 HAR-RV 모형은 <표 2>에서와 같이 표본외 예측성과지표에서 약간의 차이를 보이기는 하지만 이들 중 어느 한 모형이 다른 모형에 비해 통계적으로 신뢰할 정도로 우월하다고 보기는 어려움을 의미한다.

<표 2> 예측성과 평가

변동성 예측모형들의 1일 후 변동성에 대한 표본외 예측성과를 정리하였다. 역사적 변동성은 250일 테이터를 이용하여 측정하였고, EWMA, GARCH, EGARCH, CGARCH 모형과 HAR-RV 모형은 500거래일의 자료를 이용하여 추정하였다. 표본을 1일씩 전진시키면서 예측모형을 매일 추정한 다음 실현변동성에 대한 예측성과를 측정하였다. VKOSPI는 한국거래소에서 발표하는 KOSPI200 변동성지수이다.

	역사적 분산	EWMA	VKOSPI	GARCH	EGARCH	CGARCH	HAR-RV
ME	-4.09	-1.92	-4.33	-2.53	-1.44	-1.99	-2.40
RMSE	14.61	10.65	10.04	10.19	9.78	10.18	9.71
MAE	10.46	7.28	7.78	7.21	6.74	7.06	6.92

<표 3> 예측성과 검증

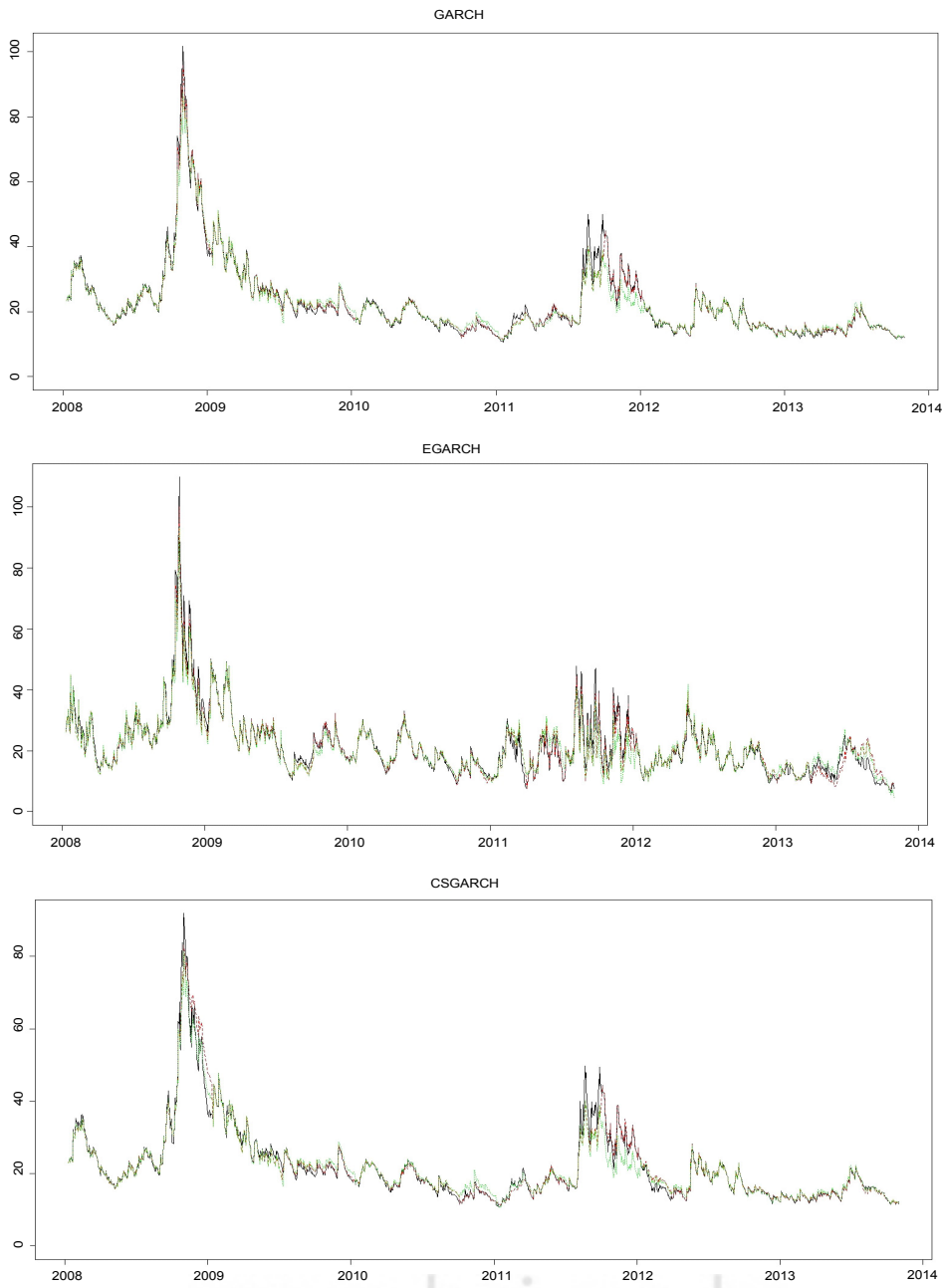
예측모형 1과 모형 2의 예측능력이 동일하다는 귀무가설에 대한 Diebold-Mariano 검증통계량을 정리하였다.

H_0 : 모형 1 예측력 = 모형 2 예측력 vs. H_a : 모형 1 예측력 \neq 모형 2 예측력							
모형 2 \ 모형 1	역사적 분산	EWMA	VKOSPI	GARCH	EGARCH	CGARCH	
EWMA	9.259**						
VKOSPI	8.525**	2.630**					
GARCH	8.808**	3.064**	-0.853				
EGARCH	9.879**	3.523**	1.088	2.163*			
CGARCH	9.848**	4.036**	-0.694	0.106	-2.153*		
HAR-RV	8.312**	3.116**	1.442	2.427**	0.283	1.950	

이제 GARCH, EGARCH와 CGARCH 모형을 일정기간 동안 다시 추정하지 않고 그대로 이용하는 경우의 예측성과를 살펴보기로 한다. [그림 3]은 GARCH 모형들을 매일 추정하여 얻은 변동성 예측치와 3개월과 6개월 마다 계수를 추정한 예측모형에서 얻은 변동성 예측치를 비교한 것이다. GARCH 모형의 경우, 매일 추정하거나 3개월이나 6개월 마다 추정하거나

[그림 3] GARCH 모형과 EGARCH 모형 : 주기적 추정모형의 변동성 예측

표본내 기간을 1일씩 전진시키면서 GARCH, EGARCH와 CGARCH 모형을 매일 추정한 경우와 일정 주기 (3개월, 6개월)마다 추정한 경우의 변동성 예측치를 그린 것이다. 실선은 매일 추정한 경우의 예측치이고, 적색 점선과 녹색 dotdash 선은 각각 3개월과 6개월 마다 추정한 예측모형에서 도출한 변동성 예측치이다.



일부 기간(2011년 4분기) 이외의 모든 기간 동안 변동성 예측치에 큰 차이를 보이지 않았다. 반면 EGARCH 모형과 CGARCH 모형의 경우에는 3개월과 6개월 마다 추정한 모형의 변동성 예측치가 매일 추정된 모형의 예측치에 비해 더 큰 진폭의 변화를 보였다. 특히 2011년 하반기에는 매일 추정한 모형의 변동성 예측치에서 크게 벗어나는 모습이 나타나고 있다. 그러나 이 기간을 제외하면 매일 추정된 모형이나 일정 기간 마다 추정된 모형 모두 전체적으로는 거의 유사한 변동성 예측치를 산출해주고 있다.

예측모형들의 상대적인 예측능력에 대한 통계적인 검증결과를 정리한 <표 4>를 보면, GARCH 예측모형은 매일 추정하거나 일정 주기마다 추정해도 예측능력이 서로 같다는 귀무가설이 기각되지 않았다. 그러나 EGARCH 모형의 경우에는 모든 추정주기에서 기각되었고, CGARCH 모형은 3개월과 9개월의 추정주기에서 기각되었다. 이는 [그림 3]에 나타난 바와 같이 GARCH 모형은 3개월이나 6개월마다 추정해도 매일 추정한 모형의 변동성 예측치와 거의 비슷한 예측치를 계산하는 반면, EGARCH 모형과 CGARCH 모형의 경우에는 일정 주기마다 추정할 경우 변동성 예측치에 큰 차이가 발생한 사실을 반영한 결과로 볼 수 있다.

<표 4> 예측성과 검증

예측모형 1과 모형 2의 예측능력이 동일하다는 귀무가설에 대한 Diebold-Mariano 검증통계량을 정리하였다.

H_0 : 모형 1 예측력 = 모형 2 예측력 vs. H_a : 모형 1 예측력 \neq 모형 2 예측력					
모형 2 \ 모형 1	1개월	3개월	6개월	9개월	12개월
GARCH	1.766	1.120	0.582	2.459*	0.900
EGARCH	3.919**	5.130**	4.913**	2.785**	3.255**
CGARCH	0.341	3.314**	0.842	3.688**	0.936

예측성과를 측정한 <표 5>에 의하면, 그래프에 나타난 바와 같이 GARCH 예측모형은 매일 추정하던 일정 주기마다 추정하던 예측성과에 큰 차이를 보이지 않았다. EGARCH 모형과 CGARCH 모형의 경우에는 일정 주기마다 추정할 경우 RMSE와 MAE 모두 악화되기는 하지만, 그 차이는 크지 않았다. 따라서 실무에서 GARCH 모형을 이용하여 변동성을 예측하고자 할 경우 예측모형을 매일 추정하기 보다는 3개월이나 6개월 마다 추정하는 것이 예측정확도를 희생하지 않으면서 업무비용을 절감할 수 있는 방법이 될 수 있다.

<표 5> 예측성과평가

표본내 기간을 1일씩 전진시키면서 GARCH 모형, EGARCH 모형과 CGARCH 모형을 매일 추정한 경우와 일정 주기(1개월, 3개월, 6개월, 9개월, 12개월)마다 추정한 경우의 예측성과를 측정하였다. GARCH_j는 j개월마다 추정한 GARCH 예측모형을 나타낸다.

	GARCH	GARCH1	GARCH3	GARCH6	GARCH9	GARCH12
ME	-2.53	-2.54	-2.43	-2.16	-2.52	-2.39
RMSE	10.19	10.26	10.25	10.25	10.38	10.28
MAE	7.21	7.25	7.23	7.20	7.34	7.23
	EGARCH	EGARCH1	EGARCH3	EGARCH6	EGARCH9	EGARCH12
ME	-1.44	-1.54	-1.21	-1.03	-2.00	-1.99
RMSE	9.78	9.90	10.12	10.35	10.09	10.46
MAE	6.74	6.84	6.99	7.12	7.22	7.26
	CSGARCH	CSGARCH1	CSGARCH3	CSGARCH6	CSGARCH9	CSGARCH12
ME	-1.99	-2.06	-2.04	-1.75	-2.44	-2.17
RMSE	10.18	10.20	10.46	10.26	10.49	10.24
MAE	7.06	7.10	7.23	7.11	7.36	7.17

다음으로 다기간 예측, 즉 3일 후, 5일 후와 21일 후의 변동성에 대한 예측성과를 측정하였다. 예측모형 중 GARCH 모형들은 3개월마다 계수를 추정하였다. 다기간 예측에서는 EWMA 모형과 GARCH 모형, EGARCH 모형의 예측성과가 가장 우수한 것으로 나타났다. 예측기간이 길어질수록 예측력이 떨어지기는 하지만 이들 3모형은 거의 유사한 예측성과를 보여주었다. VKOSPI는 RMSE는 낮은 수준을 보여주었지만 MAE가 상대적으로 크게 나타났는데, 이는 극단적인 예측오차는 자주 발생하지 않지만 평균적인 예측오차는 크다는 것을 의미한다. 역사적 변동성은 다기간 예측에서도 다른 예측모형과 비교하기 어려울 정도로 나쁜 예측력을 보였다.

마지막으로 로버스트 검증을 위해 변동성 실제값으로 실현변동성 대신 일별 수익률의 제곱값을 이용하여 예측성과를 측정해 보았다. [그림 4]는 예측력이 가장 우수한 EGARCH 모형과 가장 나쁜 역사적 변동성이 일별 수익률의 제곱값으로 계산한 변동성을 얼마나 밀접하게 추적하는가를 그린 것이다. 역사적 변동성은 실현변동성 예측에서와 마찬가지로 실제 변동성의 추세변화에 대해 후행하는 모습을 보인 반면, EGARCH 모형은 실제 변동성의 변화를 밀접하게 예측하고 있음을 확인할 수 있다. 또한 실현변동성에 대한 예측에서와 마찬가지로 역사적 변동성이나 EGARCH 모형 모두 일별 수익률의 제곱값으로 측정한 변동성을 과소 예측하고 있는 것으로 나타났다.

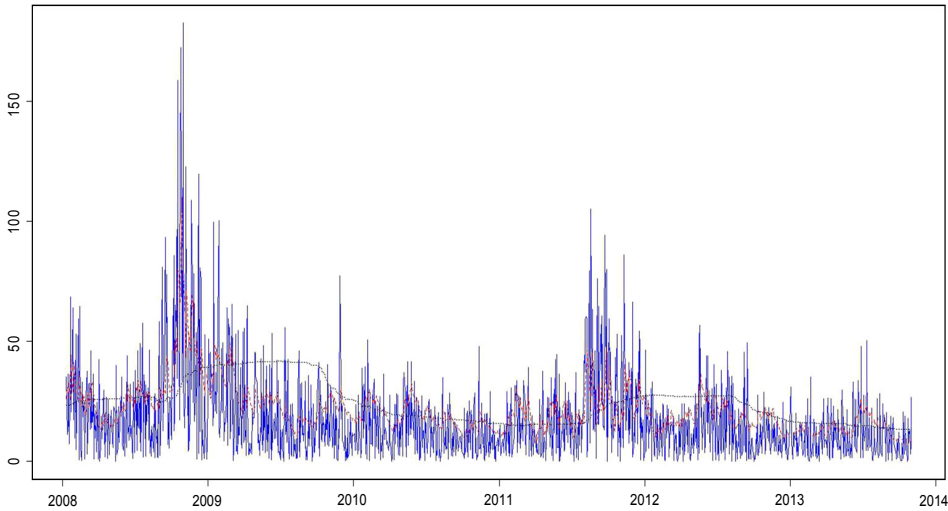
<표 6> 다기간 예측성과평가

변동성 예측모형들의 3일 후, 5일 후와 21일 후 변동성에 대한 예측성과를 정리하였다. 역사적 변동성은 250일 데이터를 이용하여 측정하였고, EWMA, GARCH, EGARCH와 CGARCH 모형은 500거래일의 자료를 이용하여 추정하였다. GARCH3, EGARCH3, CGARCH3 모형은 표본을 1일씩 전진시키면서 변동성 예측치를 계산하되, 계수추정은 3개월 마다 실행하였다. VKOSPI는 한국거래소에서 발표하는 KOSPI200 변동성지수이다.

	역사적 분산	EWMA	VKOSPI	GARCH3	EGARCH3	CGARCH3	HAR-RV
패널 A : 3일 후 변동성 예측							
ME	-4.11	-1.94	-4.35	-2.35	-0.75	-2.16	-2.66
RMSE	14.72	11.05	11.01	10.79	11.01	11.14	11.12
MAE	10.54	7.47	8.25	7.55	7.45	7.66	7.67
패널 B : 5일 후 변동성 예측							
ME	-4.15	-1.98	-4.39	-2.50	-0.43	-2.25	-2.85
RMSE	14.83	11.50	11.39	11.30	11.59	11.69	11.69
MAE	10.61	7.70	8.47	7.85	7.72	7.99	8.11
패널 C : 21일 후 변동성 예측							
ME	-4.44	-2.28	-4.68	-3.66	0.39	-2.87	-4.07
RMSE	15.44	13.37	13.72	13.81	13.72	13.83	15.52
MAE	11.05	8.78	9.65	9.56	8.62	9.36	10.61

[그림 4] EGARCH 예측모형과 역사적 변동성의 일별수익률 제곱 예측

실선은 일별수익률의 제곱으로 계산한 실제 변동성을 나타내고, 점선과 적색 파선은 각각 역사적 변동성과 EGARCH 모형으로 계산한 변동성 예측치를 나타낸다.



일별수익률 제곱값으로 측정한 변동성에 대한 예측성결과를 정리한 <표 7>를 보면 실현변동성에 대한 예측성과와 거의 비슷한 결과를 보여주고 있다. EGARCH 모형이 가장 우수한 예측력을 보여주고 있고 EWMA 모형과 GARCH 모형도 우수한 예측성결과를 나타냈다. 또한 GARCH 모형들의 계수 값을 1개월, 3개월, 6개월, 9개월과 12개월 마다 추정해도 매일 추정한 경우에 비해 예측력이 떨어지지 않는 것으로 나타났다. GARCH 모형, EGARCH 모형과 CGARCH 모형 모두 매일 추정하는 경우에 비해 6개월 마다 추정하는 경우에 오히려 예측성결과가 소폭이나마 개선되는 것으로 나타났다.

<표 7> 일별수익률 제곱값에 대한 예측성과평가

일별 수익률의 제곱값으로 계산한 변동성에 대한 예측성결과를 정리하였다. GARCH_j, EGARCH_j와 CGARCH_j는 각각 j개월마다 추정한 예측모형을 나타낸다.

패널 A : 매일 모형추정							
	역사적 분산	EWMA	VKOSPI	GARCH	EGARCH	CGARCH	HAR-RV
ME	-7.19	-5.01	-7.43	-5.62	-4.54	-5.09	-5.50
RMSE	19.77	17.34	17.33	17.49	16.60	17.23	17.04
MAE	15.10	12.94	13.56	13.31	12.54	13.06	12.96
패널 B : j 개월마다 standard GARCH 모형추정($j = 1, 3, 6, 9, 12$)							
	GARCH1	GARCH3	GARCH6	GARCH9	GARCH12		
ME	-5.64	-5.53	-5.26	-5.62	-5.48		
RMSE	17.49	17.44	17.33	17.49	17.32		
MAE	13.31	13.27	13.19	13.36	13.22		
패널 C : j 개월마다 exponential GARCH 모형추정($j = 1, 3, 6, 9, 12$)							
	EGARCH1	EGARCH3	EGARCH6	EGARCH9	EGARCH12		
ME	-4.63	-4.30	-4.12	-5.09	-5.08		
RMSE	16.60	16.60	16.64	16.68	16.82		
MAE	12.58	12.53	12.53	12.75	12.78		
패널 D : j 개월마다 component GARCH 모형추정($j = 1, 3, 6, 9, 12$)							
	CGARCH1	CGARCH3	CGARCH6	CGARCH9	CGARCH12		
ME	-5.15	-5.14	-4.85	-5.54	-5.26		
RMSE	17.25	17.35	17.13	17.45	17.17		
MAE	13.09	13.11	13.01	13.29	13.10		

V. 결 론

금융자산수익률의 변동성 예측에 관한 실증연구는 이미 많은 연구가 있었기 때문에 연구

주제로 식상한 느낌이 있다. 그럼에도 불구하고 이 주제에 대해 연구를 시도한 데에는 많은 이유가 있다. 우선 재무분야의 학문적 연구에서 뿐만 아니라 실무적으로도 변동성 예측이 매우 중요한 이슈이기 때문이다. 이러한 중요성에도 불구하고 최근의 국내 선행연구들에서 표본의 예측성과평가가 제대로 이루어지지 않아 이에 대한 보완연구가 필요한 것으로 판단하였다. 또한 본 연구는 예측모형을 어떤 주기로 추정하는 것이 효율적인지에 대한 정보를 제공함으로써 변동성 예측업무에 실질적인 도움을 주고자 하였다. 그리고 표본의 예측성과를 평가함과 동시에 예측모형들의 예측력에 관한 통계적 검증도 시도함으로써 분석결과의 신뢰도를 제고한 점도 기존 연구와 차별화된 것이라 할 수 있다. 이외에 실현변동성 자체에 시계열모형을 적용하여 변동성을 예측하는 HAR-RV 모형을 국내에서 처음 시도하였다.

실증분석결과를 정리하면, EGARCH 예측모형의 예측력이 가장 우수한 것으로 나타났으나 EWMA 모형, 표준 GARCH 모형과 HAR-RV 모형도 EGARCH 모형에 크게 뒤지지 않는 예측력을 보여주었다. GARCH 모형의 경우, 매일 추정할 때에 비해 3개월이나 6개월을 주기로 추정해도 예측력은 거의 비슷하였다. EGARCH 모형과 CGARCH 모형에서는 일정주기마다 추정할 경우 예측력이 떨어지는 것으로 나타났으나, 그 차이가 크지 않았다.

변동성예측에 대해서는 여전히 해결해야 할 연구과제들이 많이 있다. 금융자산수익률의 변동성을 추정하거나 예측하는 연구는 주로 일별 데이터나 주별 데이터를 이용하여 단기 변동성을 분석하는 것이 일반적이다. 그러나 각종 연기금들이 장기자산운용전략이나 위험 관리계획을 마련하기 위해서는 월별 변동성이나 연간 변동성 등 장기에 걸친 변동성에 대한 예측이 요구되고 있다. 월별 변동성이나 연간 변동성은 단기 변동성에 비해 추정과 예측을 위한 계량적인 방법론 면에서 큰 제약을 갖는다. 일반적으로 금융자산수익률의 변동성을 추정하거나 예측하는 데에 GARCH 모형이 가장 널리 이용되고 있는데, 동일한 금융수익률 데이터라 하더라도 일별 자료나 주별 자료에는 ARCH 효과가 뚜렷하게 나타나지만 월별 데이터에는 ARCH 효과가 없어지거나 매우 약해지는 현상이 통상적으로 나타나기 때문이다. 월별 데이터를 이용하여 중장기 변동성을 예측하는 문제는 앞으로 해결해야 할 중요한 연구주제가 될 것이다.

참 고 문 헌

- 류두진, 변동성 “예측모형의 실증성과에 관한 연구 : 미국시장을 중심으로”, 금융공학연구, 제11권 제3호, 2012, 59-82.
- 유시용, 고중양, “KOSPI200 실현변동성 예측력 제고에 관한 연구”, 선물연구, 제17권 제1호, 2009, 21-49.
- 최영수, 이현정, “변동성 측정방법에 따른 KOSPI200 지수의 변동성 예측 비교”, 한국 통계학회논문집, 제17권 제2호, 2010, 293-308.
- 황성원, 류혁선, “국면전화 GARCH 모형을 이용한 변동성 구조 분석 및 예측에 관한 실증 연구”, 한국증권학회지, 제40권 제1호, 2011, 171-194.
- 조 담, “주식의 변동성 추정방법이 VaR에 미치는 영향”, 선물연구, 제12권 제2호, 2004, 1-24.
- Anderson, T. G. and T. Bollerslev, “Answering the skeptics : Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts,” *International Economic Review*, 39, (1998), 885-905.
- Anderson, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and P. Labys, “Great realizations,” *Risk*, 13, (2000), 105-108.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, P. F. Christoffersen, and F. X. Diebold, “Volatility and correlation forecasting”, *Handbook of Economic Forecasting*, North Holland : Elsevier, 2006.
- Anderson, T. G., T. Bollerslev, and F. X. Diebold, “Roughing it up : including jump components in the measurement, modeling and forecasting of return volatility,” *Review of Economics and Statistics*, 89(4), (2007), 701-720.
- Bandi, F. M. and J. R. Russell, “Microstructure Noise, Realized Variance, and Optimal Sampling,” *Review of Economic Studies*, 75(2), (2008), 339-369.
- Barndorff-Nielsen, O. E., P. H. Hansen, A. Lunde, and N. Shephard, “Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise,” *Econometrica*, 76(6), (2008), 1481-1536.
- Berkes, I., E. Gombay, L. Horvath, and P. Kokoszka, “Sequential changepoint detection in GARCH(p, q) models,” *Econometric Theory*, 20(6), (2004), 1140-1167.

- Chiriac, R. and V. Voev, "Modelling and forecasting multivariate realised volatility," *Journal of Applied Econometrics*, 26, (2011), 922-947.
- Corsi, F., "A simple approximate long-memory model of realized volatility," *Journal of Financial Econometrics*, 7, (2009), 174-196.
- Diebold, F. X. and R. S. Mariano, "Comparing Predictive Accuracy," *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, (1995), 253-263.
- Engle, R. and G. Lee, "A Permanent and Transitory Component Model of Stock Return Volatility," *Cointegration, Causality, and Forecasting : A Festschrift in Honor of Clive W. J. Granger*, Oxford University Press, 1999.
- Figlewski, S., "Forecasting Volatility," *Financial Markets, Institutions and Instruments*, 6, (February 1997), 1-88.
- Fleming, J., C. Kirby and B. Ostdiek, "The economic value of volatility timing," *Journal of Finance*, 56, (2001), 329-352.
- Giot, P. and S. Laurent, "Market risk in commodity markets : a VaR approach," *Energy Economics*, 25(5), (2003), 435-457.
- Granger, C. W. J. and S. Poon, "Practical issues in forecasting volatility," *Financial Analysts Journal*, 61(1), (2005), 45-56.
- Hansen, P. R. and A. Lunde, "A forecast comparison of volatility models : Does anything beat a GARCH(1, 1)?," *Journal of Applied Econometrics*, 20, (2005), 873-889.
- Karolyi, G. A., "A Bayesian approach to modeling stock return volatility and option valuation," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(4), (1993), 579-595.
- Liu, Q., "On portfolio optimization : How and when do we benefit from high-frequency data?," *Journal of Applied Econometrics*, 24, (2009), 560-582.
- Lopez, J. A., "Evaluating the predictive accuracy of volatility models," *Journal of Forecasting*, 20(2), (2001), 87-109.
- Nelson, D. B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach," *Econometrica*, 59(2), (1991), 347-370.
- Patton, A., "Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies," *Journal of Econometrics*, 160, (2011), 246-256.
- Poon, S. and C. W. J. Granger, "Forecasting volatility in financial markets : a review," *Journal of Economic Literature*, 41(2), (2003), 478-539.

- Thomas, S., M. Sarma, and A. Shah, "Selection of value-at-risk models," *Journal of Forecasting*, 22(4), (2003), 337-358.
- Zhang, L., P. A. Mykland, and Y. Ait-Sahalia, "A tale of two time scales : determining integrated volatility with noisy high frequency data," *Journal of the American Statistical Association*, 100, (2005), 1394-1411.

[부 록] 변동성 예측모형

1. 역사적 분산

역사적 분산은 과거 금융수익률의 표본분산을 변동성 예측치로 이용하는 것이다. 과거 k 기간의 수익률 데이터로 계산한 역사적 분산은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} (r_{t-i} - \bar{r})^2 \quad (1)$$

위 식에서와 같이 모집단평균 μ 에 대한 추정량으로는 표본평균 $\bar{r} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i}$ 을 이용하는 것이 일반적이다. t 기 변동성에 대한 예측치로는 $t-k$ 기부터 $t-1$ 기까지의 데이터로 계산한 표본분산을 이용한다.

역사적 분산을 이용하는 데에는 두 가지 사항을 고려해야 하는데, 첫째 모집단평균 μ 에 대한 추정량으로 이용한 표본평균의 추정오류가 매우 크다는 점에 주의해야 한다. 표본평균 이용의 근본적인 문제는 표본기간이 길어질수록 표본평균의 추정오류가 더 악화된다는 사실이다.¹⁾ 따라서 표본분산을 계산할 때 평균수익률을 0으로 설정하는 것이 오히려 예측성과를 개선하는 방법으로 추천되기도 한다.(Figleswki, 1994) 둘째, 역사적 분산을 계산하는 데에 과거 어느 기간까지의 표본자료를 이용할 것인가도 중요한 결정사항이다. Figlewski(1997)는 추정에 이용하는 표본기간을 늘릴수록 예측오차를 줄일 수 있다며 표본기간 k 를 크게 선택할 것을 주장하였다. 이론적으로는 최적 표본 기간은 예측대상 변수의 통계적 성질에 따라 달라질 것이므로 표본의 예측성과를 최적화 하는 표본기간을 선택하는 것이 최선의 방법이다. 그러나 역사적 분산을 계산하는 일반 적인 관행에 의하면, 월별 데이터를 이용할 경우 10년과 5년의 표본기간을 선택하고, 주별 데이터는 2년 6개월과 1년 3개월, 일별데이터는 6개월과 3개월의 표본기간이 주로 이용된다.

2. 지수가중이동평균(Exponential Weighted Moving Average)

Riskmetrics의 지수가중이동평균(EWMA)은 평균에서 벗어난 거리 $(r_{t-i} - \bar{r})^2$ 를 평균하여

1) 아래 식에서와 같이 표본기간이 길어지더라도($k \uparrow \infty$) 표본평균은 전체기간 동안의 자산가격 움직임보다는 표본시작시점과 종료시점의 가격만으로 결정되기 때문이다.

$$\bar{r} = \frac{\sum r_{t-i}}{k} = \frac{\sum (\ln P_{t-i} - \ln P_{t-i-1})}{k} = \frac{\ln P_t - \ln P_{t-k+1}}{k}$$

변동성을 계산한다는 점에서 역사적 분산과 비슷하다. 차이점은 모든 관측 치에 동일한 가중치를 주는 역사적 분산과 달리, EWMA는 최근 관측치에 큰 가중치를 부여하고 먼 과거의 관측치에는 작은 가중치를 줌으로써 최근의 수익률변화가 변동성에 더 큰 영향을 미치도록 한 것이다. 과거 관측치에 대한 가중치 감소비율(decay rate)을 $\lambda(0 < \lambda < 1)$ 로 표기하면 EWMA는 다음과 같이 계산된다.

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i (r_{t-i} - \bar{r})^2 \quad (2)$$

최적 λ 는 표본외 예측성과를 최적화하는 값으로 정하는 것이 이론적으로 바람직하지만, Riskmetrics 연구보고서는 대부분의 금융데이터의 경우 일별 데이터에 대해서는 λ 를 0.94로, 월별 데이터에 대해서는 0.97로 설정할 것을 권유하고 있다.

t 시점까지의 정보를 이용한 $t+1$ 기의 변동성에 대한 EWMA 예측치 $\widehat{\sigma}_{t+1,EWMA}^2$ 는 다음과 같은 순환방식으로(recursively) 계산할 수 있다.²⁾

$$\widehat{\sigma}_{t+1,EWMA}^2 = \lambda \widehat{\sigma}_{t,EWMA}^2 + (1-\lambda) r_t^2 \quad (3)$$

k 기간 이후의 변동성에 대한 EWMA 예측치는 1기후 예측치와 같다. 이는 IGARCH 모형의 변동성 예측치가 예측기간과 상관없이 일정한 것과 같은 이유에 기인한다.

$$\widehat{\sigma}_{t+k,EWMA}^2 = \widehat{\sigma}_{t+1,EWMA}^2 \quad (4)$$

3. GARCH 모형

GARCH 모형은 많은 선행연구에서 자세히 설명되었으므로 본 연구에 이용된 모형만을 간략하게 설명하기로 한다. 조건부 분산인 σ_t^2 가 다음과 같은 과정을 따를 때 ϵ_t 는 GARCH(p, q) 모형을 따른다고 한다.

2) 식 (3)는 다음에서 확인할 수 있다(수식을 간단히 하기 위해 $\bar{r}=0$ 가정).

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{t+1,EWMA}^2 &= (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{t-i}^2 = (1-\lambda) (r_t^2 + \lambda r_{t-1}^2 + \lambda^2 r_{t-2}^2 + \cdots) \\ &= (1-\lambda) r_t^2 + \lambda (1-\lambda) (r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \cdots) \\ &= (1-\lambda) r_t^2 + \lambda \widehat{\sigma}_{t,EWMA}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (5)$$

위의 표준 GARCH 모형에서는 변동성 σ_t^2 이 과거 충격의 제곱 ϵ_{t-i}^2 에 의해 결정되기 때문에 과거 충격이 양의 방향이든 음의 방향이든 변동성에 동일한 영향을 미치게 된다. 그러나 자산가격의 급락은 변동성을 크게 높이는 반면 자산가격 급등은 변동성에 큰 영향을 주지 못하는 것으로 알려져 있다. 따라서 가격하락 충격이 가격상승 충격에 비해 변동성에 더 큰 영향을 미치는 비대칭적인 성질은 표준적인 GARCH 모형으로는 제대로 설명될 수 없는 한계가 있다.

이러한 한계를 해소하기 위해 Nelson(1991)은 과거 충격이 양의 방향이냐 음의 방향이냐에 따라 변동성에 미치는 영향을 다르게 모형화할 수 있는 EGARCH 모형을 개발하였다. EGARCH(p, q)모형은 다음과 같이 로그 변동성에 대한 확률적 과정으로 나타난다.

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log \sigma_{t-j}^2 \quad (6)$$

여기서 $\eta_t = \epsilon_t / \sigma_t$ 이고, 과거의 가격변화 η_{t-i} 가 현재의 변동성 σ_t^2 에 미치는 비대칭적 영향을 나타내는 $g(\eta_{t-i})$ 는 다음과 같은 형태로 모형화한다.³⁾

$$g(\eta_{t-i}) = \theta \eta_{t-i} + \zeta (|\eta_{t-i}| - E|\eta_{t-i}|) \quad (7)$$

$\theta \neq 0$ 일 때 과거 충격은 변동성에 비대칭적인 영향을 미치게 되며, $\theta < 0$ 인 경우 하락충격이 변동성에 더 큰 영향을 미치게 된다.

GARCH 모형의 경우, k 기간 이후의 변동성에 대한 최적 예측치는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma_{t+k}^2} &= a_0 + (a_1 + b_1) \widehat{\sigma_{t+k-1}^2} \\ &= a_0 \sum_{i=0}^{k-1} (a_1 + b_1)^i + (a_1 + b_1)^{k-1} (a_1 \epsilon_t^2 + b_1 \widehat{\sigma_t^2}) \end{aligned} \quad (8)$$

3) 과거 충격 η_{t-i} 이 양의 방향이냐 음의 방향이냐에 따라 변동성에 비대칭적인 영향을 미치는 현상은 다음 식에서 확인할 수 있다.

$$g(\eta_{t-i}) = \begin{cases} (\theta + \zeta) \eta_{t-i} - \zeta E|\eta_{t-i}| & \text{if } \eta_{t-i} \geq 0 \\ (\theta - \zeta) \eta_{t-i} - \zeta E|\eta_{t-i}| & \text{if } \eta_{t-i} < 0 \end{cases}$$

Forecasting KOSPI200 Volatility : Periodic Model Estimation and Multi-Period Forecast*

Sangwhan Kim**

〈abstract〉

There have already been numerous empirical researches on the forecasting performance of various volatility forecast models. But the forecast evaluation scheme of the recent domestic studies on volatility forecast does not answer the real-life question on which model would produce the best forecasts of the future volatility. This paper performed the moving window estimation each day to calculate the out-of-sample forecast error. It also tried the Diebold-Mariano test to see whether a certain forecast model's superior performance is statistically significant.

We compared the KOSPI200 volatility forecasting performance of historical volatility, Riskmetrics EWMA, VKOSPI, GARCH and HAR-RV. Overall forecast performance of EGARCH model was best, but VKOSPI and EWMA were very close in forecast accuracy. It is not surprising that DM test on the equal forecasting accuracy of EGARCH, VKOSPI and EWMA was not rejected. Another special feature of this paper is the study on whether periodically estimated GARCH models would produce the reasonably accurate forecasts compared with daily estimated model. We found that GARCH models, although estimated every 3 month or 6 month, does not deteriorate in forecast accuracy. EGARCH model's forecast accuracy became worse, when estimated periodically. But the deterioration of forecasting performance is not serious.

Keywords : Volatility Forecast, Realized Volatility, GARCH Model, Diebold-Mariano Statistic,
Out-of-Sample Forecast

* This research was supported by the 2013 financial assistance of Chungbuk National University. I am grateful to two anonymous referees.

** Department of Economics, Chungbuk National University, E-mail : swkim7@cbnu.ac.kr