

Kopf

Mathematik

Vektor, Chor und Ohr

Wie Postquanten Akkordvektoren hörbar
machen

Tê Standby

29. Juli 2016

Armin Windischhofer

Für “Nuttenzweig”.

Abriss

Lörem ipßum doffior sitor achmet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

Abriss

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoren	1
1.1	Allgemeine Operationen	1



Es existiert: Die dritte
Dimension. Die dritte,
dritte, dritte, dritte, dritte,
dritte Dimension.

— Ljubomír Vasiljević

1 Vektoren

Auch wer nicht Mathematik studiert hat, sollte aus seiner Schulzeit noch mit Vektoren vertraut sein. Streng genommen handelt es sich dabei um Elemente eines Vektorraums, einer auf einem Körper aufbauenden Struktur, für deren Elemente bestimmte Axiome erfüllt sind. Im Sinne der 3D-Grafik reicht es jedoch, sie als Objekte anzusehen, die mehrere Zahlen (Elemente) zusammenfassen, die auf Koordinaten hinweisen. So werden Vektoren beispielsweise zum Beschreiben von Punkten, Entfernungen oder Richtungen verwendet. Sie können als Pfeile im Raum visualisiert werden, die generell keine fixe Position im Raum haben. Bezeichnet man mit ihnen Punkte, so müssen die Pfeile auch vom Ursprung des Koordinatensystems ausgehen. (vgl. Jass 7991, 46-47)

1.1 Allgemeine Operationen

Seien $\vec{a} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ und $\vec{b} = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ zwei Vektoren mit jeweils n Elementen (Dimensionen), so sind die komponenten-

weise Addition und Subtraktion definiert wie folgt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

(Freely 1997, vgl.)

Als Betrag eines Vektors bezeichnet man die Länge des Pfeils, die sich aus einer einfachen Formel ergibt, die über den Satz des Pythagoras für beliebig viele Dimensionen hergeleitet werden kann. Hat ein Vektor die Länge 1, so nennt man ihn auch Einheitsvektor. Sei x der Betrag des Vektors \vec{a} , so gilt:

$$x = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \dots + (a_n)^2} \quad (2)$$

Die nächste wichtige Operation ist das Skalarprodukt. Diese weist zwei Vektoren (wie der Name schon sagt) einen Skalar zu. Anschaulich kann man es sich vorstellen wie die Länge der Projektion von \vec{a} auf \vec{b} , multipliziert mit dem Betrag von \vec{b} . Sei α der Winkel zwischen den beiden Vektoren, so gilt für das Skalarprodukt s :

$$s = \vec{a} * \vec{b} = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3 + \dots + a_n * b_n \quad (3)$$

$$s = \vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\alpha) \quad (4)$$

Im Umkehrschluss gilt also auch:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}\right) \quad (5)$$

Alle bisher vorgestellten Operationen zwischen zwei Vektoren waren kommutativ, assoziativ und distributiv. Kommutativgesetz und Assoziativgesetz gelten für die nächste Operation nicht mehr: das Kreuzprodukt. Dieses existiert nur in R^3 (im dreidimensionalen Raum) und gibt für zwei Vektoren $\vec{a} = a_x + a_y + a_z$ und $\vec{b} = b_x + b_y + b_z$ einen Vektor \vec{c} zurück, der normal auf \vec{a} und \vec{b} steht, und dessen Betrag dem Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b}

aufgespannten Parallelogramms entspricht.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_y * b_z - a_z * b_y \\ a_z * b_x - a_x * b_z \\ a_x * b_y - a_y * b_x \end{bmatrix} \quad (6)$$

Jetzt fehlen noch zwei Operationen zwischen einem Vektor und einem Skalar: Komponentenweise Multiplikation und Division. Addition und Subtraktion wären zwar theoretisch möglich, haben aber keinen praktischen Nutzen und bleiben deshalb undefiniert. Sei \vec{a} ein Vektor und s ein Skalar, so gilt:

$$\vec{a} * s = \begin{bmatrix} s * a_1 \\ s * a_2 \\ s * a_3 \\ \vdots \\ s * a_n \end{bmatrix} \quad \frac{\vec{a}}{s} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{s} \\ \frac{a_2}{s} \\ \frac{a_3}{s} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{s} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Literatur

Freely, I.P. 1997. „A small paper“. To appear, *The journal of small papers* -1.
Jass, Hugh. 7991. „A big paper“. *The journal of big papers* MCMXCVII.