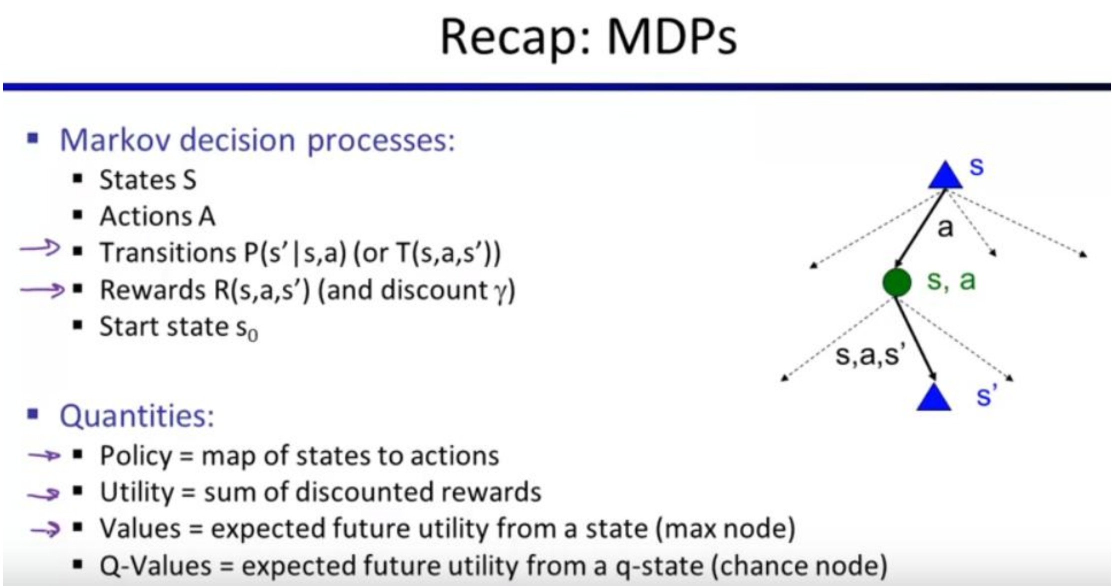
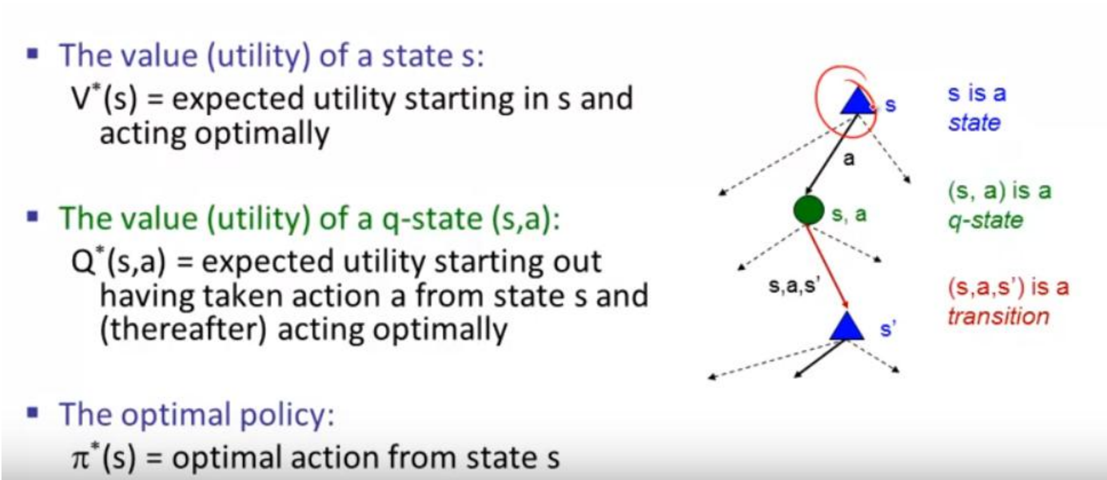
不像监督学习，不是一次决定，需要一直做决定

deterministic model： given s 和 a， s’is deterministic not random!!

stochastic model 随机的





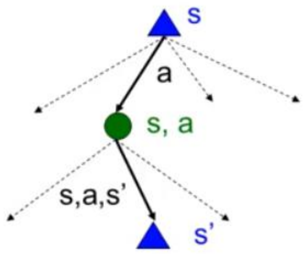
The Bellman Equations

- Definition of "optimal utility" via expectimax recurrence gives a simple one-step lookahead relationship amongst optimal utility values

$$V^*(s) = \max_a Q^*(s,a)$$

$$Q^*(s,a) = \sum_{s'} T(s,a,s')\left[R(s,a,s') + \gamma V^*(s')\right]$$

$$V^*(s) = \max_a \sum_{s'} T(s,a,s')\left[R(s,a,s') + \gamma V^*(s')\right]$$



- These are the Bellman equations, and they characterize optimal values in a way we'll use over and over

$V^*(s)$ 给定 state s 的 value function！！！

$Q^*(s,a)$ chang state 的 value function

从 s 开始，已经 take action a 的情况下的 acuumulated reward，不一定是哪个 state

V 和 Q 本质一样！！！！ 都是 acuumulated reward

只是 Q 的 state 没有确定！！！

$$V^*(s) = \max_a Q^*(s,a)$$

$Q^*(s,a)$： 已经 take action， immediate reward 已经获得， 此选择 $v^*(s')$ 的 S'时， 就是 $v^*(s)$

$$Q^*(s,a) = \sum_{s'} T(s,a,s')\left[R(s,a,s') + \gamma V^*(s')\right]$$

可以 compute each other

$$V^*(s) = \max_a \sum_{s'} T(s,a,s')\left[R(s,a,s') + \gamma V^*(s')\right]$$

Value 不同于 Utility，是期望!!!

MDP

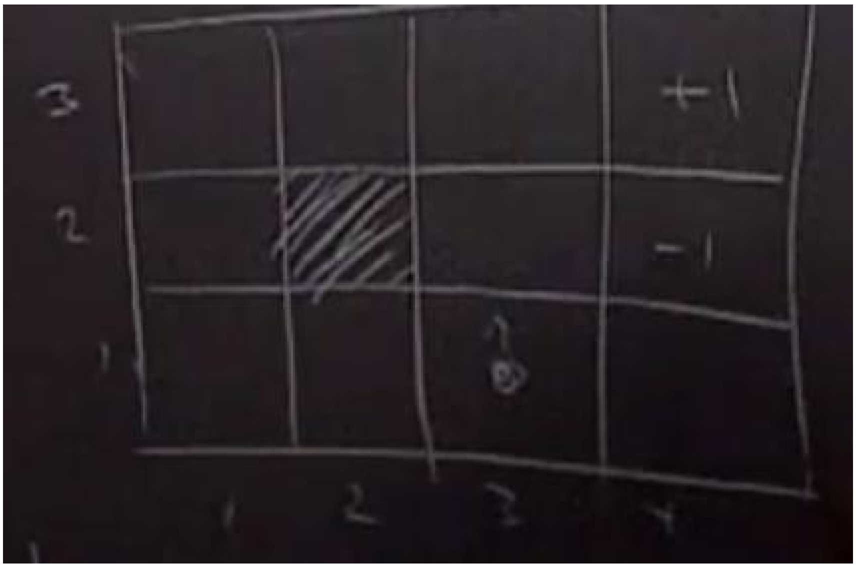
5tuple：(S 状态集 A 行为集 P γ R)

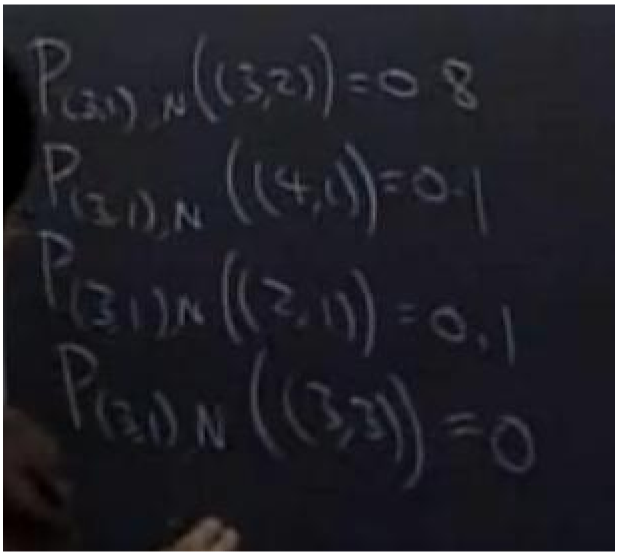
P_{sa} transition distribution ,对于给定 **state**，action 转向下一个 state s’是个概率分布 P(s‘) $\sum P(s')=1$

假设一个 grid，向上概率 0.8，向左 0.1，向右 0.1

γ discount factor

R reward function:map state s to Real bumbers(s->R)

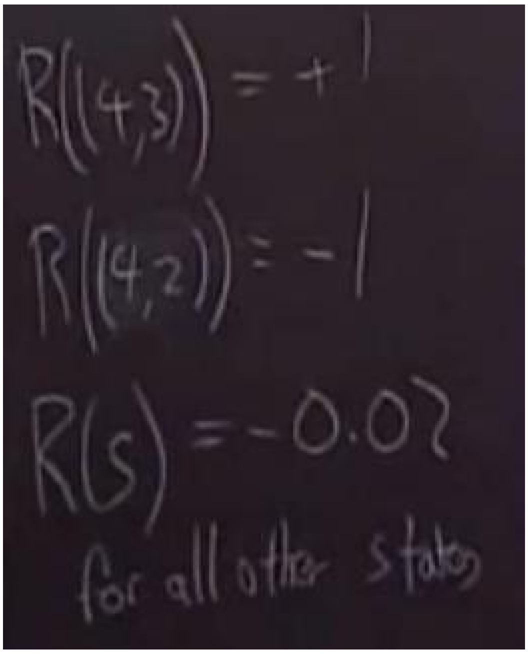




$P_{(s)N}(s')$ transition function

从 s 出发，到达 s’的概率，s’是随机变量!!!

Reward function



at state s0

choose a0

get to s1 N $P_{s_0a_0}$ (draw random from $P_{s_0a_0}$)

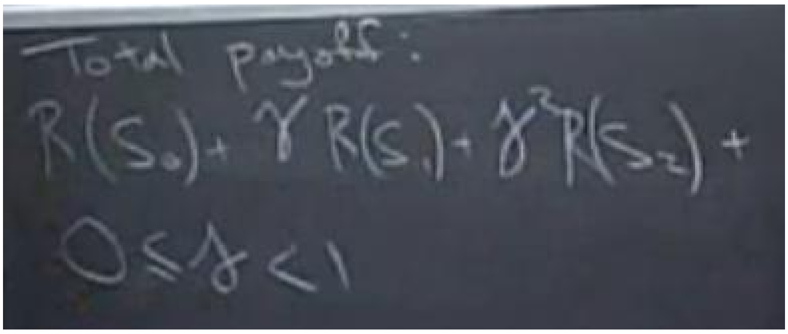
chooser a1

get to s2 N $P_{s_1a_1}$

直到结束

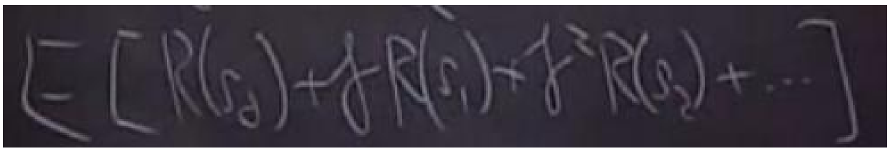
得到一个 state sequence， how well the sequence

total payoff 薪酬 也被成为 gain



金钱在贬值，未来的钱越来越不值钱

Value function：V(s) expection of total payoff of s



当 s_0 =s

V(s)是期望， $s_1, s_2\cdots$ 是从 s 开始到下个 state，是随机变量，要求他们的期望，希望 V(s)最大

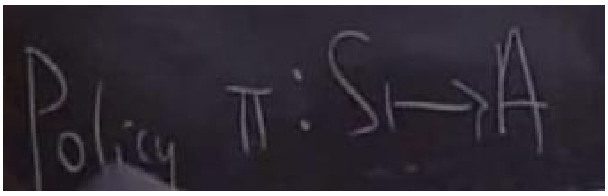
goal：

choose action(a1,a2,....)

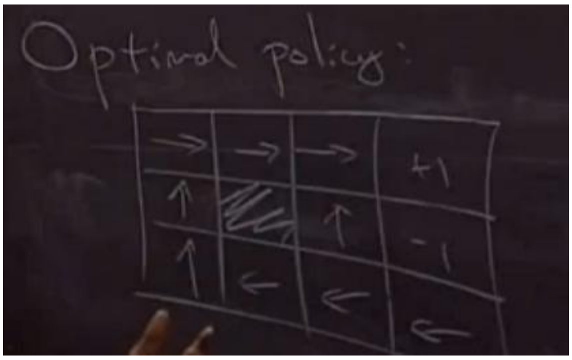
to maximize the s **expection of total payoff of s**

也就是用强化学习算法，计算一个 **optimal policy (denote by π*)**

Policy π is function map one state to one action



得到这个 policy 函数我们就可以，知道每一 state 应该如何走



上面是一个 **optimal policy**，每个 state 应该如何 action

π^* **optimal policy maximize expect total value payoff**

给定一个π 就是一个 policy

V^π

For any π， define a value function V^π： $S \Rightarrow R$

s.t $V^\pi(s)$ is expectation of total payoff if **start in state s,and execute π**。**也就是从 s 开始按照 policy 走到 end，而最终得到的 total payoff**，是 long term reward

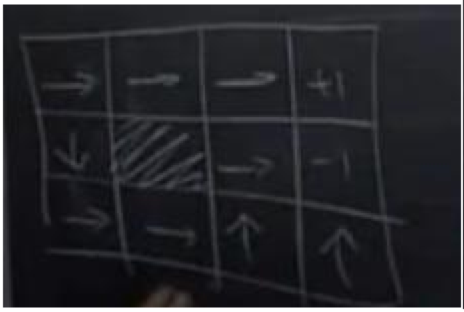
给定一个π，所有 state 的$V^{\pi}(s)$就固定了！！！ 见下图

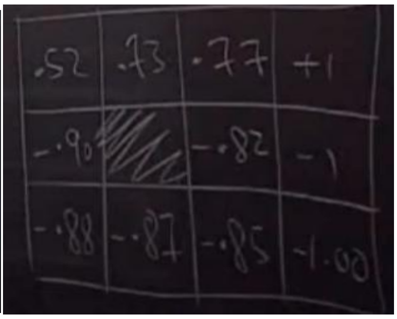
期望是因为 s1 s2..都是随机变量

$$V^{\pi}(s)=E(R(s0)+\gamma R(s1)+\dots|s_0=s,\pi)$$

例子：

given a policy π：得到右边的V^{π} value fucntion:





可以看出右下角的V^{π} (s)很小，因为从这个 state 开始，采取π，就到了-1 而结束，说明是 bad π！！！

变形下：

$$V^{\pi}(s)=E(R(s_0)+\gamma(R(s_1)+\gamma R(s2)+\dots)|s_0=s,\pi)$$

$R(s_0)$ immediate reard 后面是 feature reward

括号里面$(R(s_1)+\gamma R(s2)+\dots)$**是**$V^{\pi}(s_1)$

因此转换成了，只需考虑一步！！！

bellman equation 核心思想：

因为$V^{\pi}(s)$是从 s 起 total payoff，而 R(s)已经固定，只需要计算下一步 state 的$V^{\pi}(s')$，就可以计算$V^{\pi}(s)$

$$V^{\pi}(s)=E(R(s\ )+\gamma V^{\pi}(s')|s_0=s,\pi)$$

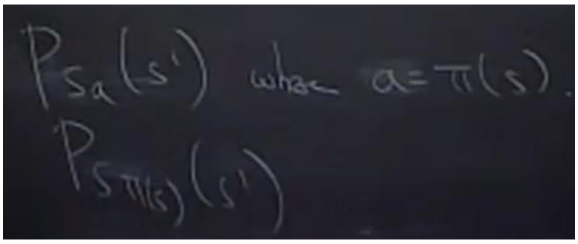
$$V^{\pi}(s)=R(s\ )+E(\gamma V^{\pi}(s'))|s_0=s,\pi)$$

s’是随机变量，要取期望

$V^{\pi}(s)=R(s\ \ )+\gamma\sum P_{s\pi(s)}(s^{'})V^{\pi}(s^{'})$ bellman equation！！！

$P_{s\pi(s)}(s')$是给定起点 s,和π(s) action,所对应的下一步 s’(随机变量)的概率分布

$P_{s\pi(s)}(s')$等价$P_{sa}(s')$：



bellman equation help us solve the value func for policy in closed form 封闭形式的一种解发，可以方便解出所有 state 的$V^{\pi}(s)$

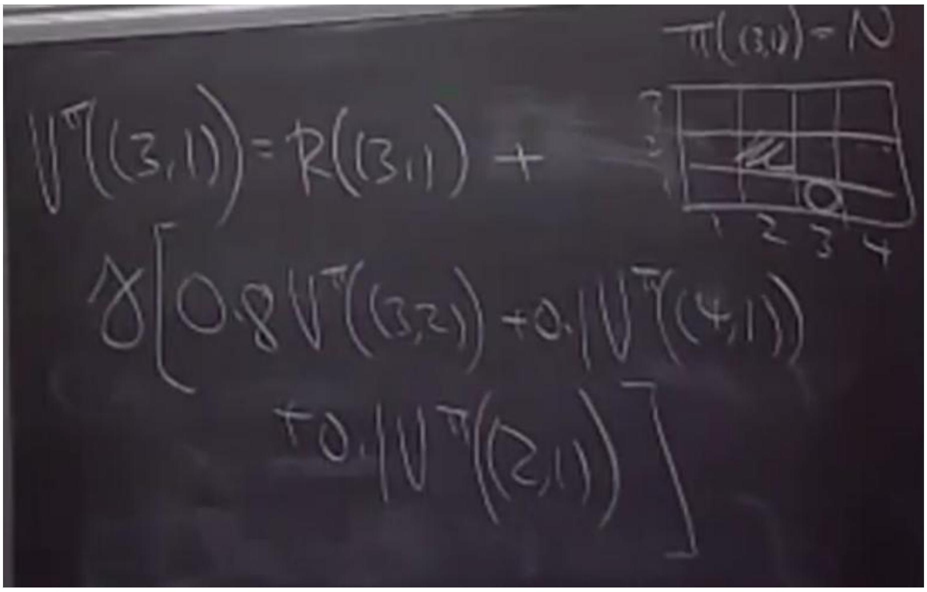
$V^{\pi}(s)=R(s\ \ )+\gamma\sum P_{s\pi(s)}(s^{'})V^{\pi}(s^{'})$

上面 sum 是线性的！！！

通过解决上面 linear system 线性方程组们就可以解出每个 state 的$V^{\pi}(s)$

例子：

起点(3,1) π(3,1)=North ,则 value function $V^{\pi}(3,1)$



我们目标是解出每个 state 的 value function!!!

我们共有 11 个这样的方程，11 个未知数，可以解出！

我们最终想得到一个让所有 state value 都最大的π*，也就是每一步每个 action 都达到$V^*(s)$。也就是让π的每一 action 都达到最优！！！

Optimal value function

$$V^*(s) = \max_{\pi} V^{\pi}(s)$$

起点是 s，遍历所有的策略π，取 V(s)最大的值

π*让 V(s)取最大值

$$V^*(s) = E[R(s_0) + \gamma R(s_1) + \gamma^2 R(s_2) + \ldots \mid \pi^*, s_0 = s]$$

$$V^*(s) = R(s_0) + \gamma E[(R(s_1) + \gamma R(s_2) + \ldots) \mid \pi^*, s_0 = s]$$

以上可以看出一个重要规律，也是最难点：

$R(s_0)$是常数，给定最佳π*下，s 取 optimal value，就要求 s’也要取 optimal value，$V^*(s)$把任务交给$V^*(s')$，即

$V^*(s)=R(s_0)+\gamma V^*(s')$　　递归式

也表示在最佳π*下，所有 state 都取 optimal value

存在这样一个策略，使得所有 state 都取 optimal value

又$V^*(s)=E[R(s_0)+\gamma R(s_1)+\gamma^2 R(s_2)+...|\pi^*,s_0=s]$

即$V^*(s)=\max_{\pi} E[R(s_0)+\gamma R(s_1)+\gamma^2 R(s_2)+...|s_0=s]$

$V^*(s)=R(s)+\max_{\pi} E[\gamma R(s_1)+\gamma^2 R(s_2)+...]$

最终得出：**bellman equation**

$V^*(s)=R(s)+\max_{a}\gamma\sum P_{sa}(s')V^*(s')$

$P_{sa}(s')$只是 s transit to s’的概率分布

mean:当前 s 下采取 a，使得$V^*(s')$期望最大

$V^*(s')$**是因为，s’采取的也是π*最佳策略！！！**

所有下一个 state 都是$V^*(s')$ **optimal value(难点)**

bellman equation

immediate reward+下一个 state value

bellman equation 做的事就算分解，只分解到下一步，得出当前 state 和下一个 state’(exspect furture state)的关系！！！也就是当前的值，只跟下一个状态值有关，也就是将任务推给

了下一个状态!!!

上面的式子是个方程组，a 是参数，我们要求得每一个 state 的 optimal a(best action)，**其实就是求最佳策略函数 π**

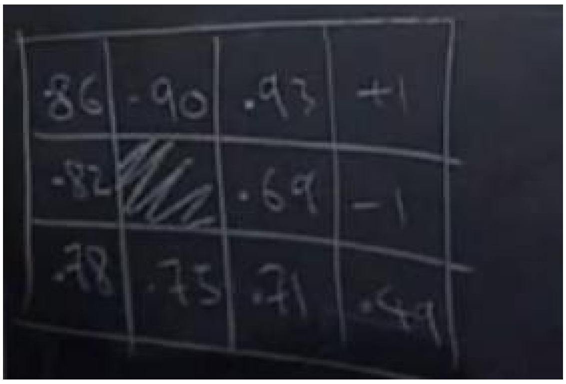
$\pi^*(s)=\arg\max\limits_{a}\sum P_{sa}(s')V^*(s')$ 就得到了**每个 s** **新策略函数!**

得到最佳策略函数，式子是上面化简后的结果

解释：我们处于当前 state s，我们想 choose 一个最佳 action 最大化 **expect furture state** value!!

例子：

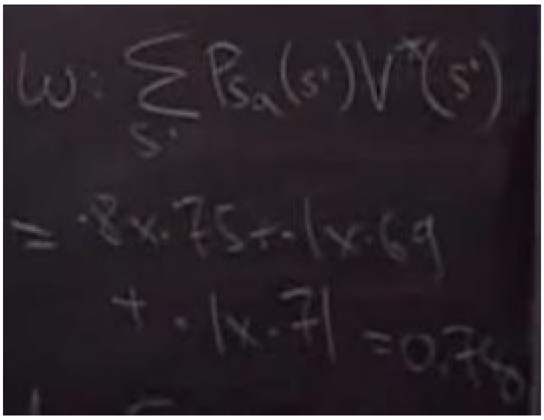
$V^*(s)$



加入在(3,1)state

a=west 时 value 值,向左 0.8 概率向上 0.1，不动 0.1

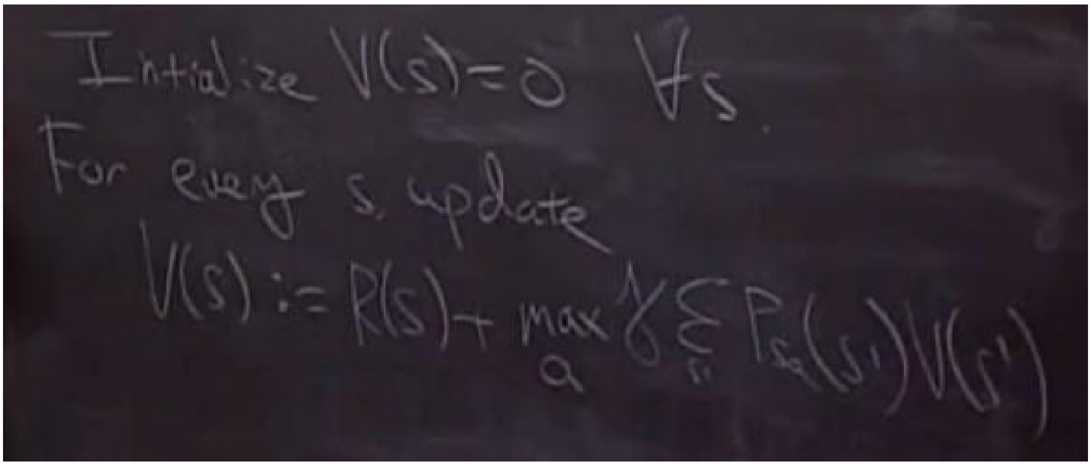
maximize the value



但 policy π太多了，不可能 exhaust 穷尽

方法：

Value iteration algorithm



1. For each state s, initialize $V(s) := 0$.
2. Repeat until convergence {

    For every state, update $V(s) := R(s) + \max_{a \in A} \gamma \sum_{s'} P_{sa}(s')V(s')$.

   }

第二步类似于后向传播

R,P,V,A 都已知,每个 state，穷尽 A，选择最大的 V(s’)

update 策略：

1 synchronous update :simutaneously 计算右边式子同时更新所有状态

2 asynchronous update update a state one time，右面的值会一直变，随着更新后

最后 may converge：$V(s) \to V^*(s)$

计算出$V^*(s)$

算法证明比较复杂！！！

policy iteration

Apart from value iteration, there is a second standard algorithm for finding an optimal policy for an MDP. The **policy iteration algorithm**

1. Initialize π randomly.
2. Repeat until convergence {

   (a) Let $V := V^\pi$.

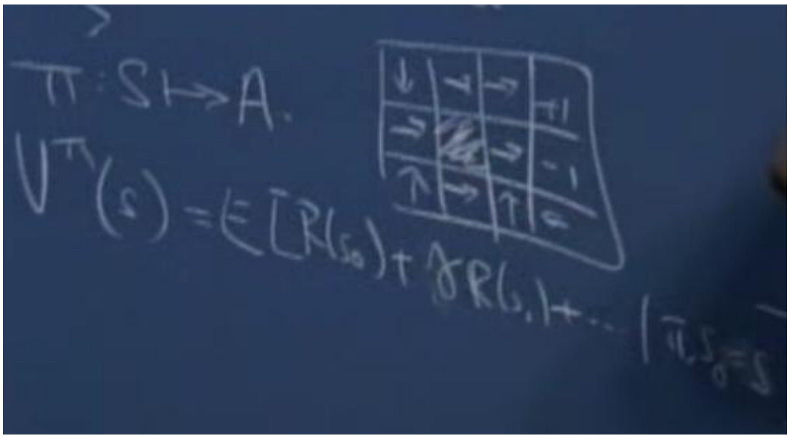
   (b) For each state s, let $\pi(s) := \arg\max_{a\in A} \sum_{s'} P_{sa}(s')V(s')$.

   }

given random initial policy π

repeat{

1 given fixed π， to solve for V^π (if you execute π， from that state， the value you got)



例如计算s_0的V^π

2 update　每个 state，穷尽 A，选择最大的 V(s’)

$$\pi^*(s) := \arg\max_a \sum P_{sa}(s')V^*(s')$$

得到新的 policy 函数，再进行迭代

}

最后 may converge：$V(s) \rightarrow V^*(s)$　$\pi(s) \rightarrow \pi^*(s)$

trade off:上面算法最计算消耗的是$V := V^\pi$

需要用 bellman equation 方程组，解出每个$V^\pi(s)$，再赋给每个 V，每次 iterate 就要解一次方程组

$$V^\pi(s) = R(s) + \gamma \sum P_{s\pi(s)}(s')V^\pi(s')$$

如果 state 太多，选择 value iteration 算法

到目前为止，given a 5tuple：(S 状态集 A 行为集　P　γ　R)

我们可以得到一个最优的 policy!!!

但是 P_{sa} transition probability 我们往往不清楚

需要 learn from data to estimate

$$P_{sa}(s') = \frac{\text{从s，take action a，到s'次数}}{\text{从s take action a的次数}}$$

如果分子或分母为 0，$P_{sa}(s') = \frac{1}{|s|}$

put together：estimate P and 求得 policy

repeat：{

1 take action using some π to get experience for some number of trials. (execute policy π，observe state transition)

2 update estamate of $P_{sa}(s')$，base on 上面 experience

3 value iteration 尝试所有 A，得到 max V

solve bellman equation of V* get estamate V

(Apply value iteration with the estimated state transition probabilities and rewards to get a new estimated value function V)

(question 如果 initialize use the value of previous round，converage faster！！！)

4 用上面得到的各个 state 的 action 更新

update $\pi^*(s) := \arg\max_a \sum P_{sa}(s')V^*(s')$

(Update π to be the greedy policy with respect to V)

}

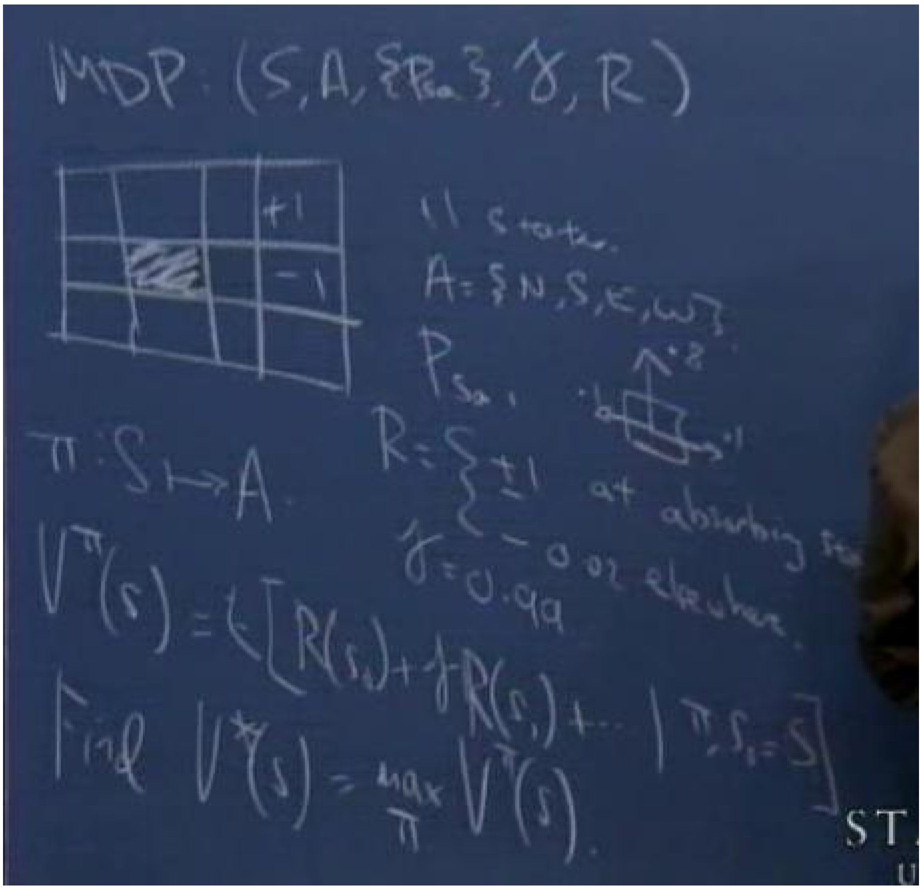
1. Initialize π randomly.
2. Repeat {
   (a) Execute π in the MDP for some number of trials.
   (b) Using the accumulated experience in the MDP, update our estimates for P_{sa} (and R, if applicable).
   (c) Apply value iteration with the estimated state transition probabilities and rewards to get a new estimated value function V.
   (d) Update π to be the greedy policy with respect to V.

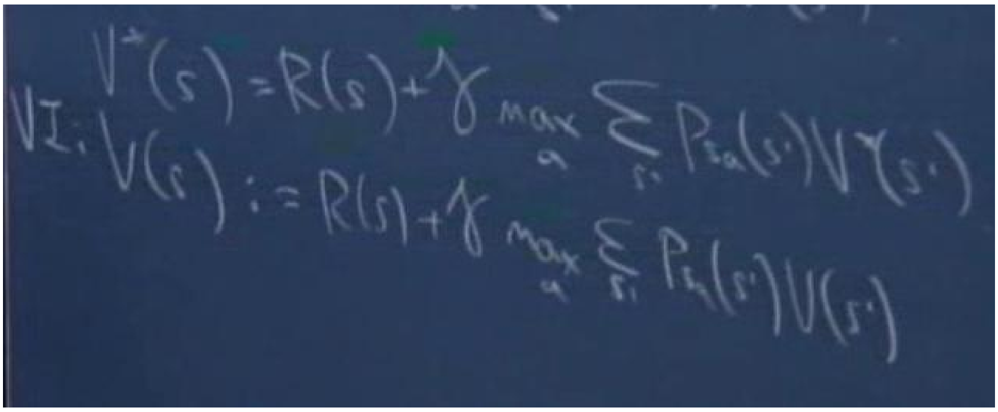
   }

MDP 总结，太精彩了！！！！

最终 state 叫 absorving state

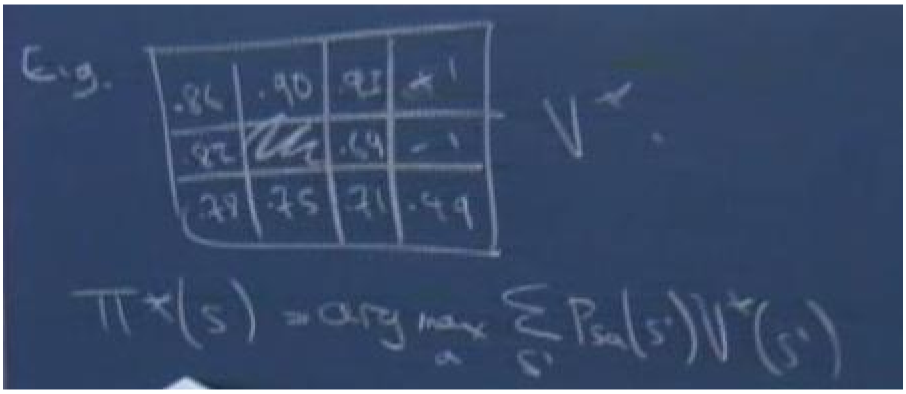
recap





VI(value iteration)compute v*

once we find the v*,we can compute π *



continuous state

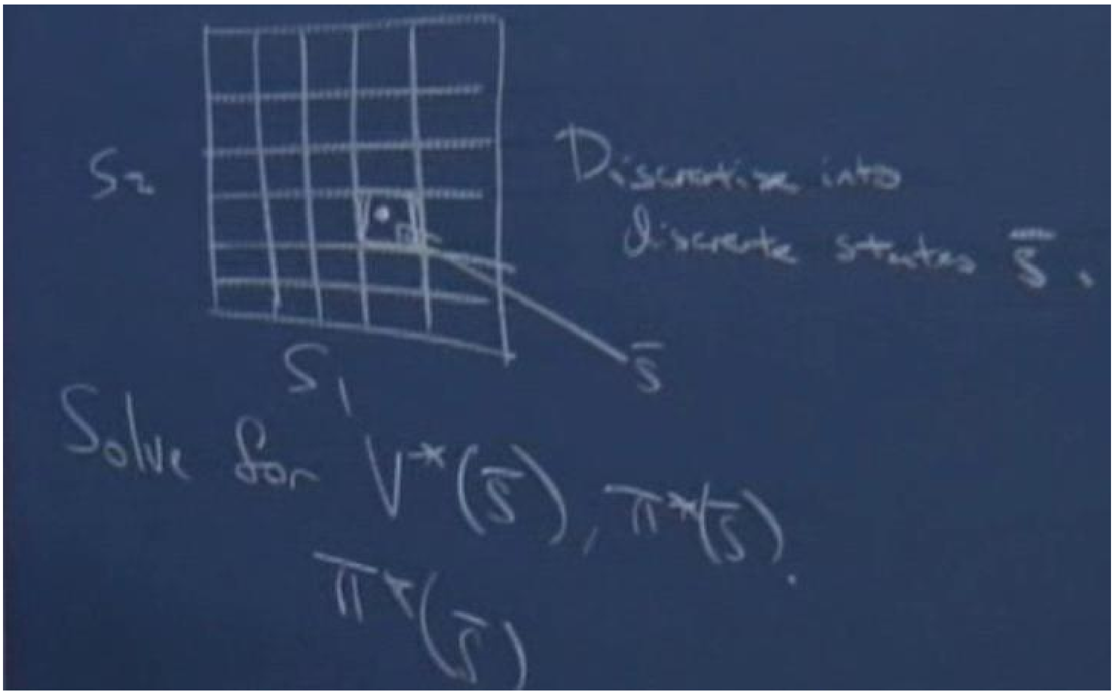
state 可能有很多维度

如 car：(x,y, orientation,v) 4 个维度 而且是连续的

discretization

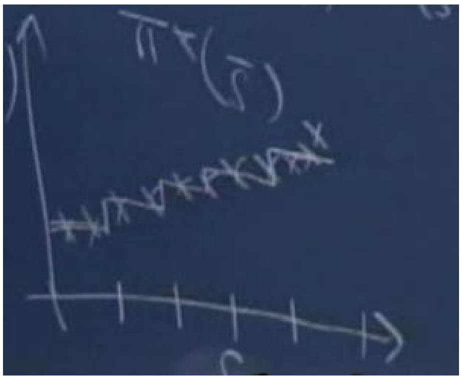
transfer continuous state problem with a finite or discrete set of states and then you can use policy iteration or value iteration to solve for V*(s)-bar

假设有 2dimension continuous state variables



将连续的值，划分为不同的范围 interval　state，处于某个值，就知道属于某个 state

piecewise function　分段函数



approximate this function using something that’s piecewise constant

1 这种代表性不好

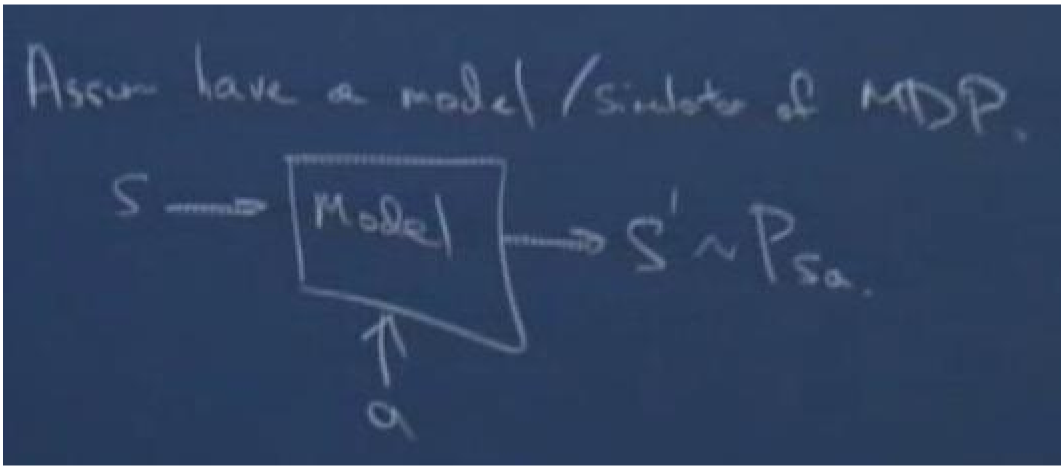
2　数据维度太大，每个 state 就是一个变量

对于维度小的，如上面 2dimension

Value function approximation

我们另外的更好方法 **approximate V* directly**

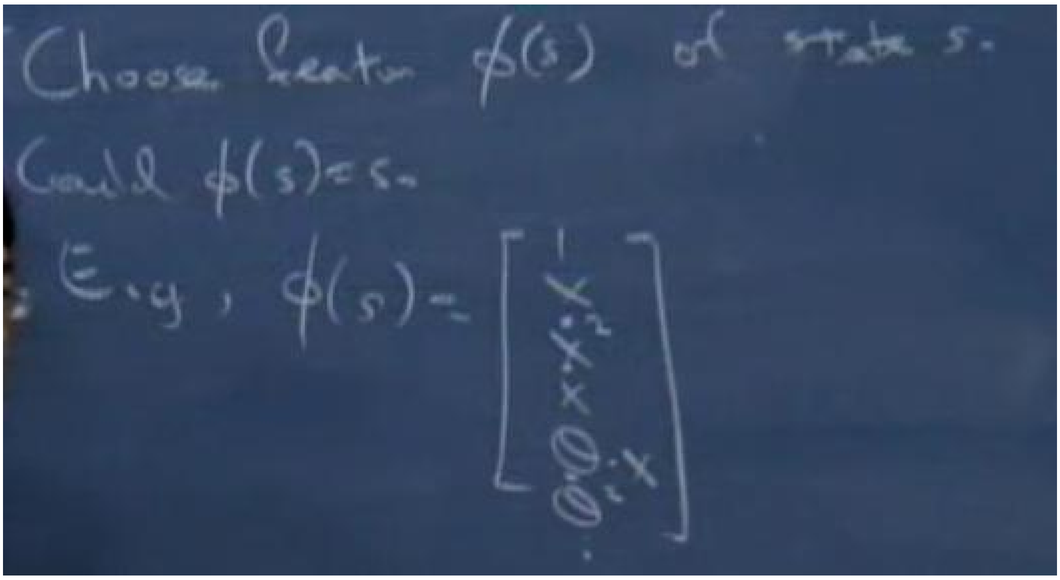
解决问题：Continous State, discrete Action

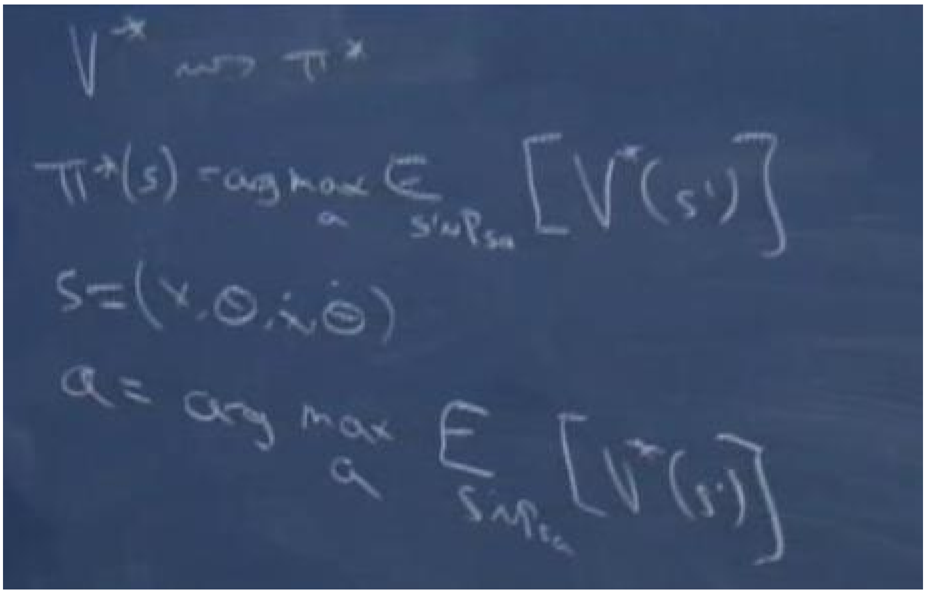


每次 input，相当于一个随机试验，S'是随机变量，随机变量分别服从 P_{sa}，如何确定 model？

方法：learn a model

参看讲义：$\phi(s)$ 是 s feature 的一个 map，feature 的一个组合，和 create new feature。





得到 V*如何计算π*对于 continuous state

只计算当 robot 或 system 的 some specific state 的 action,如上

The optimal action

$$V(f(s,a)) = \theta^T \phi(s')$$
$$where, s' = f(s,a)$$

词汇：暂时的 temporarily　放下 put aside chop 砍

obstacle 障碍　关联 associate　common practice 惯例

helicopter 直升机　resort　to 求助于　度假胜地

More general model

change Reward function

State-action Reward : $R: S \times A \Rightarrow R$

total payoff； $R(s_0, a_0) + \gamma R(s_1, a_1) + \ldots$

可以帮助我们 model problem in which different actions have different cost(机器人，移动 or 不动，耗油不同，cost 不同)

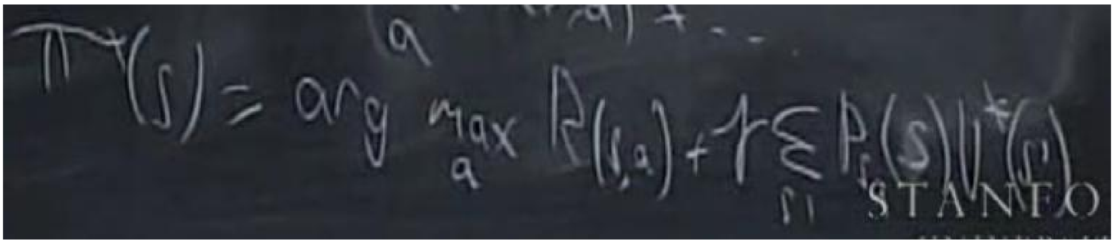
reward 不仅跟状态有关，还和 action 有关！

$$V^*(s) = \max_a R(s,a) + \gamma \sum_{s'} P_{sa}(s') V^*(s')$$

因为 immediate reward 也包含参数 a，因此 max 要提在外面

VI：

$$V(s) := \max_a R(s,a) + \ldots$$

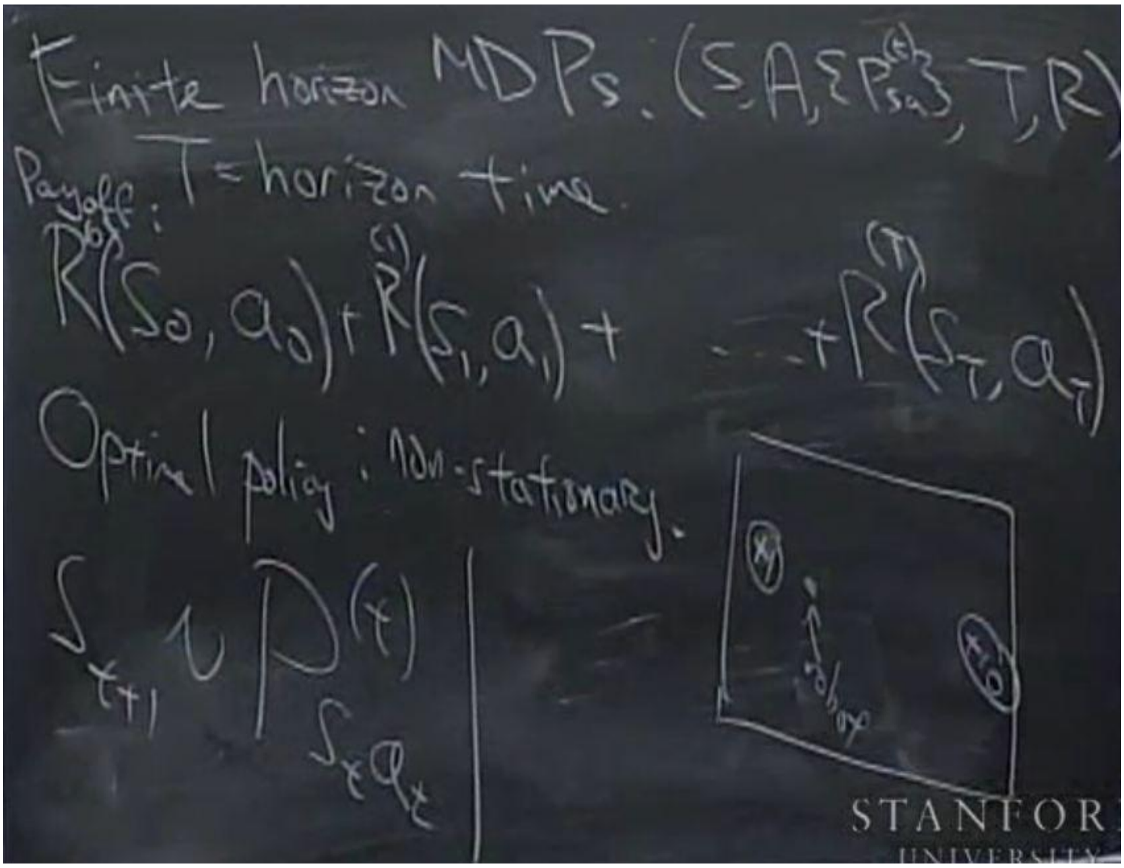


通过 V*,就得到π*

Finite horizon MDPS，一般不用加 gama

也就是时间有限最大是 T，每个 state，reward 对应不同时间：

不同时间 cost 不同，因此 reward 也不同 $R^{(T)}(s_0, a_0)$



最佳策略，non-stationary

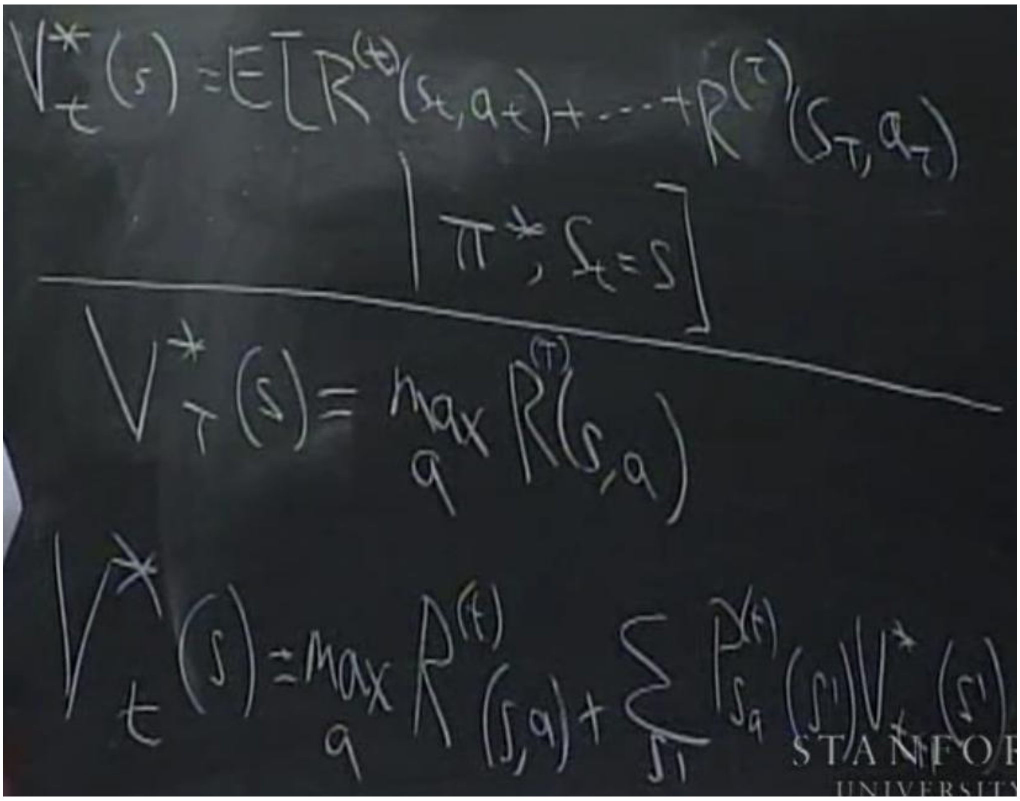
有图，左边+1，右边=10，但由于 finite T，只能取左边近的！

所有 state transition probability $P_{sa}^{(t)}$ 也随着时间变化，是

non-stationary

如何找到 optimal policy？

先求 V*(s)



1 $V_t^*(s)$ 是在 s 下，t 时刻开始时的 optimal value

等于在采取最佳策略π*的情况下得到的 total payoff 期望！！！

2 转成 bellman equation：

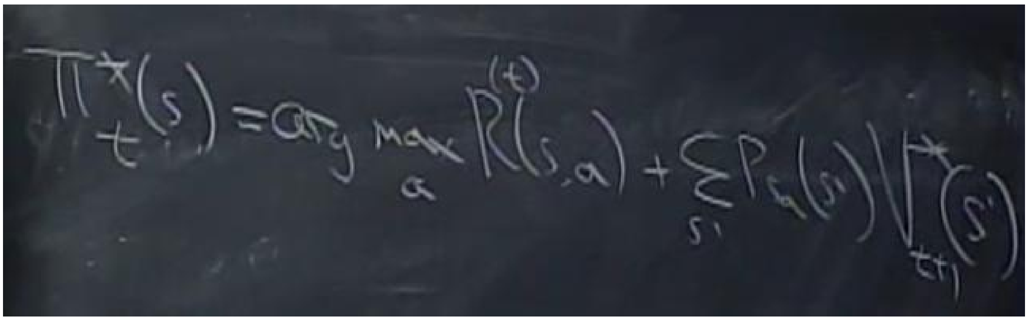
$$V_t^*(s)=\max_a R^{(t)}(s,a)+\sum P_{sa}^{(t)}(s')V_{t+1}^{*}(s')$$

以上是递归是，递归的开始：最后一个时刻 T(最后一次 action)

$$V_T^*(s)=\max_a R^{(T)}(s,a)$$

use dynamic programing algorithm

从后往前计算 $V_{T-1}^*(s)$， $V_{T-2}^*(s)$ ....

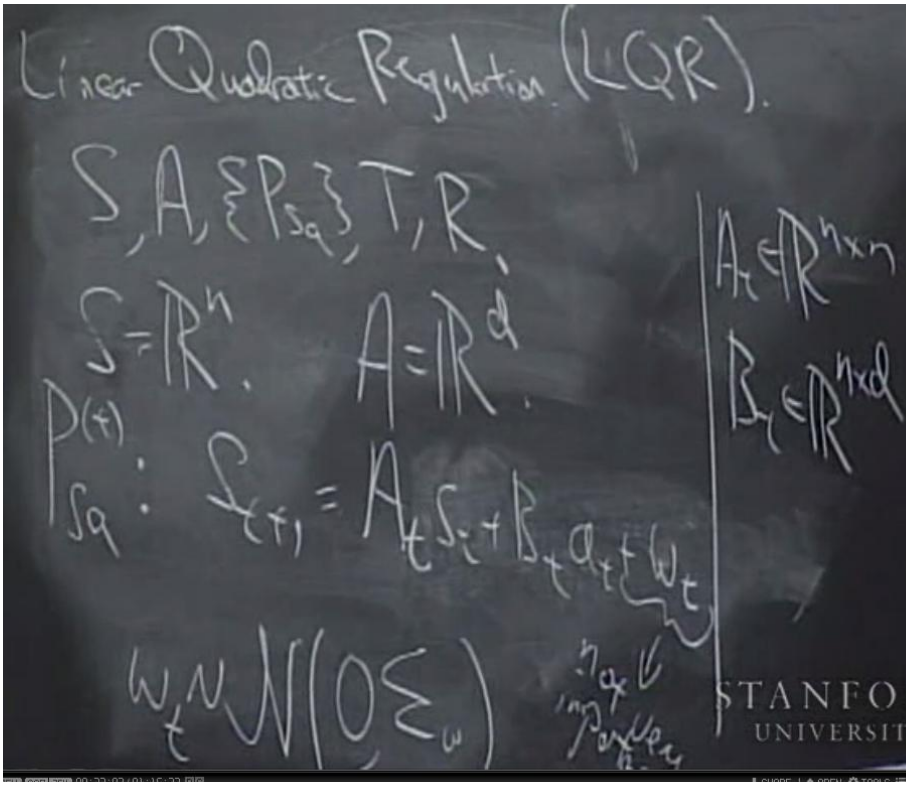


依次计算：$\pi_T^*(s),\pi_{T-1}^*(s),\pi_{T-2}^*(s)$

以上是用 use dynamic programing algorithm for finite MDPS

Linear Quadrastic Regulation(LQR)

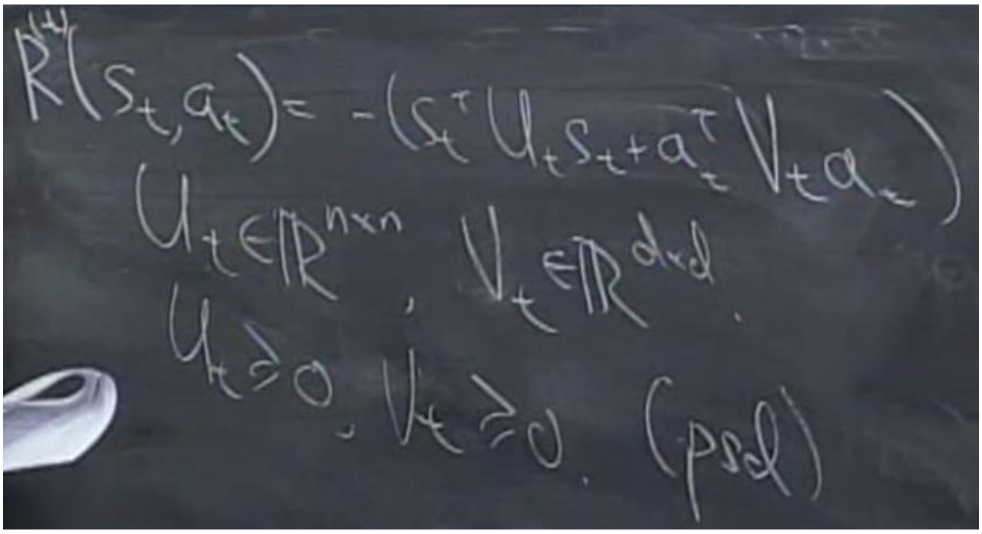
non-stationary dynamic A,B always change



P 还是用 regression　　A,B 的维度？question

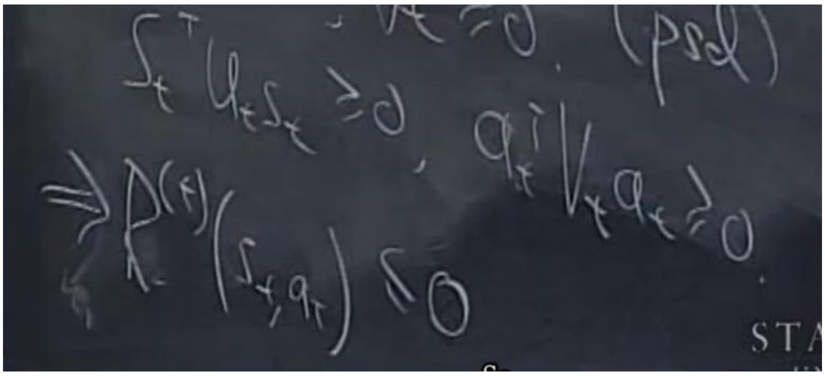
w　N（均值 0，协方差矩阵）

Quadrastic Reward function：

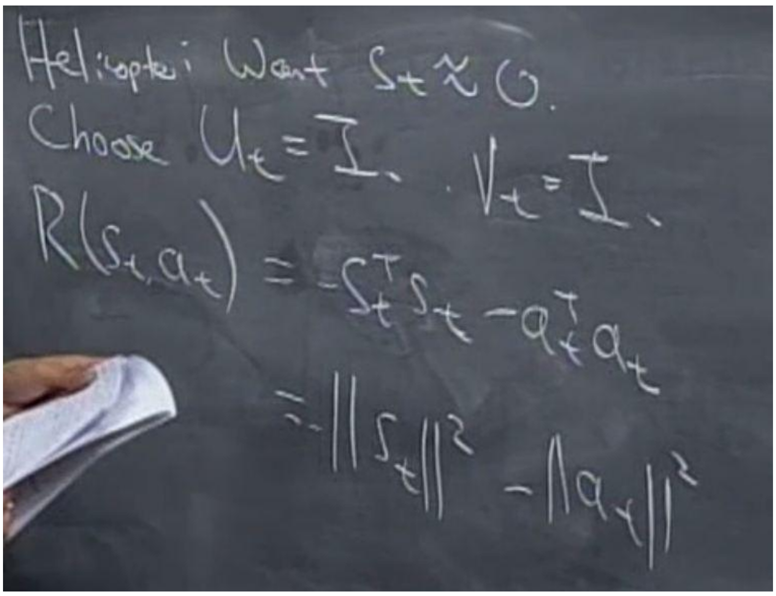


U V 都是 Positive Semi-Definite 半正定矩阵

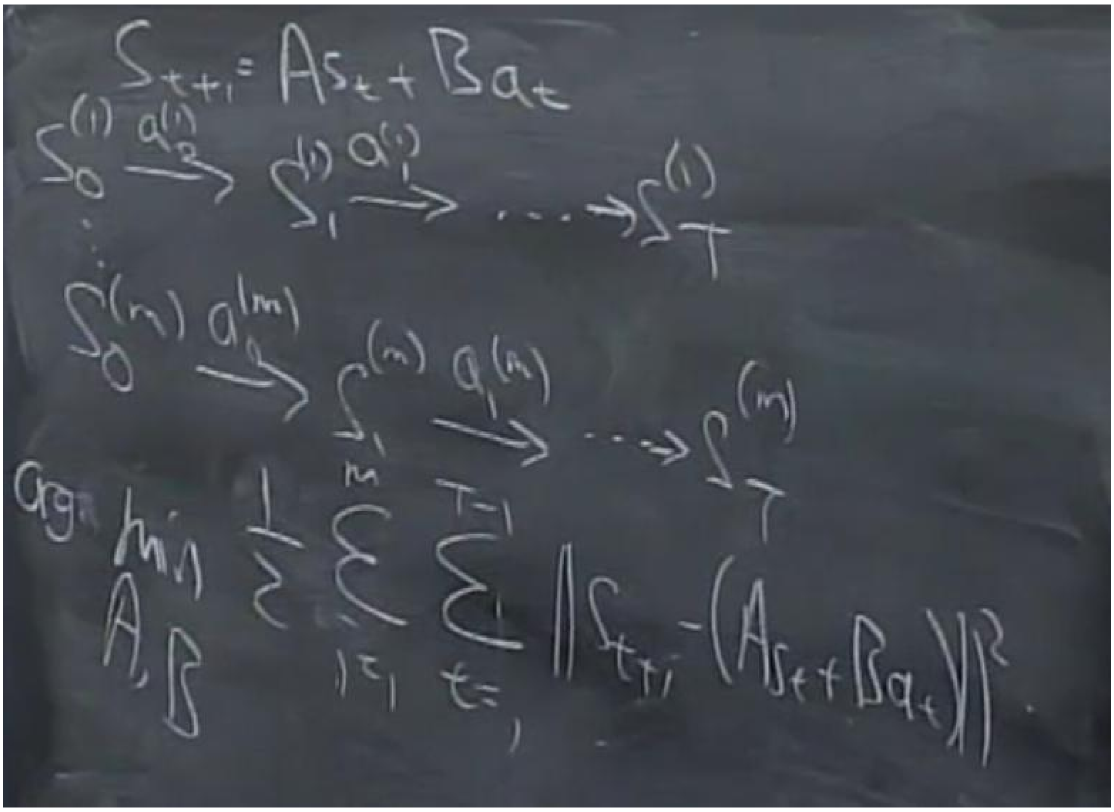
imply：



example：直升机



求 MDP Model



try different your system， and watch what state we get to

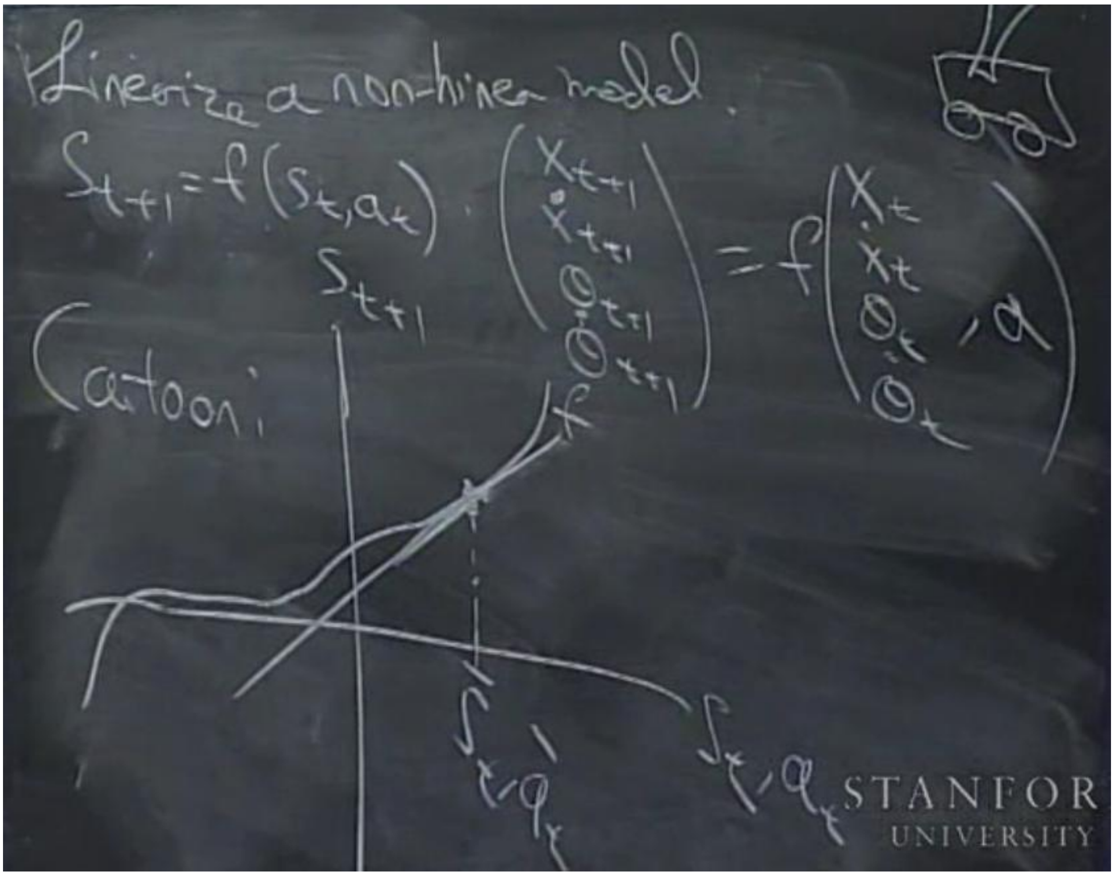
try m time

使得误差平方和最小

另一种求法

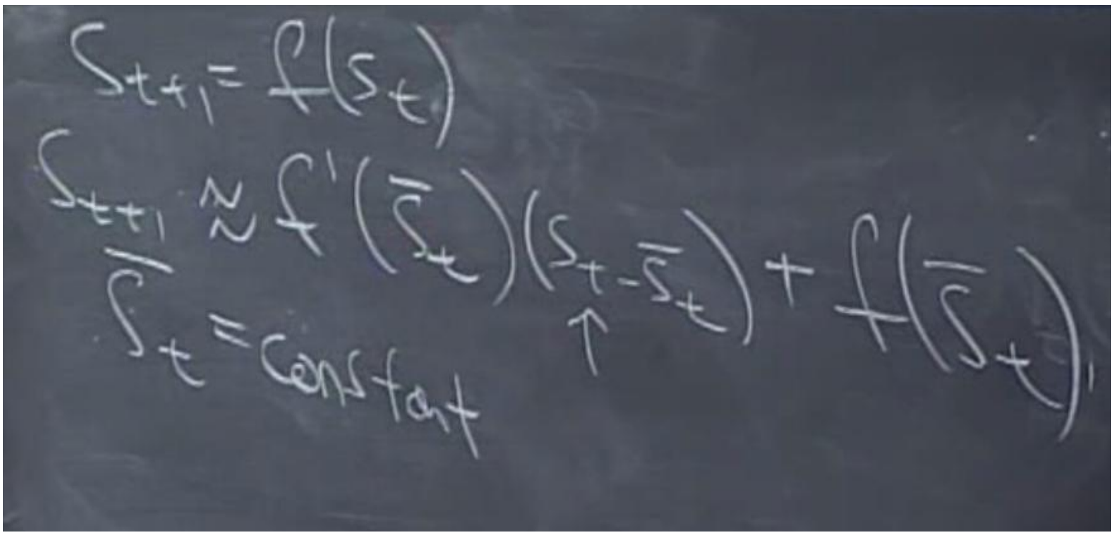
linearize a non –linear model

f 是 non linear model



f 函数图如上

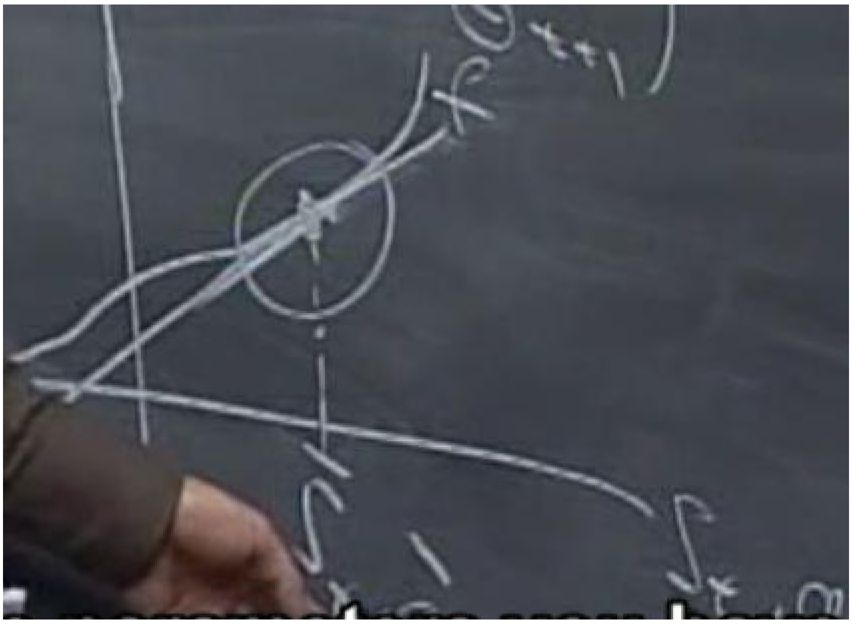
有一点 $\bar{s}$，取这一点的切线，就变成 linear 了！



点斜式 直线方程(s 是单变量，暂时忽略 a),

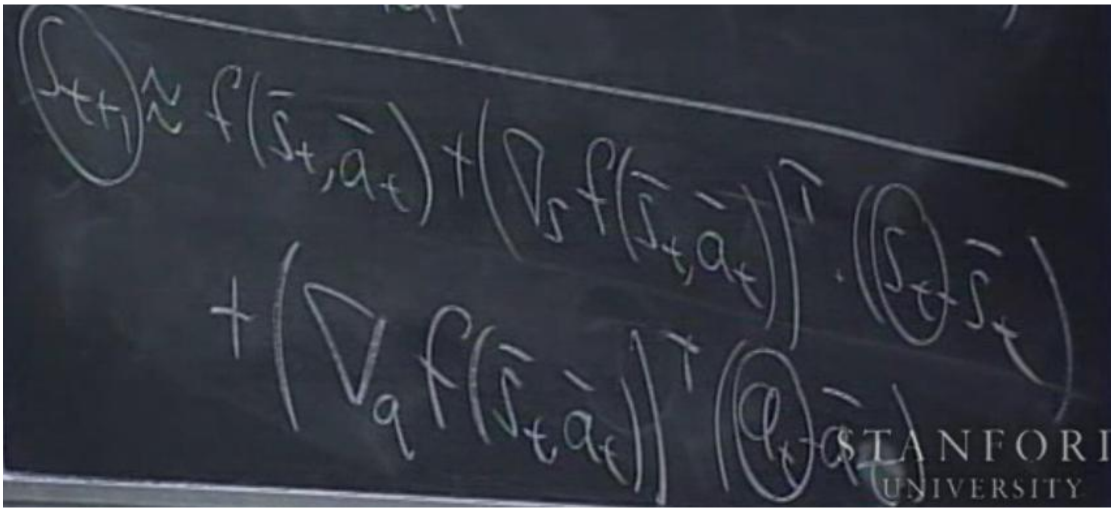
$\bar{s}$ 是个常数，上面成了 s_t 和 s_{t+1} 的线性关系式！

当我们 linearize 曲线时，有些地方 aproximate 比较好，有些不好，所以要将 $\bar{s}$ 周围的点也作为参数，来拟合直线



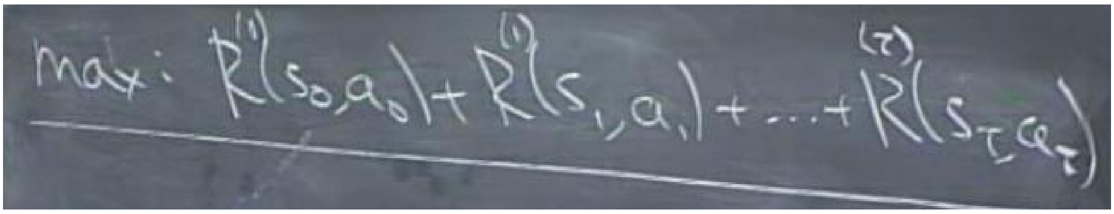
choose the position to linearize， where spent most of time

对于 s，a，linearize 一个平面，倒三角是偏导数



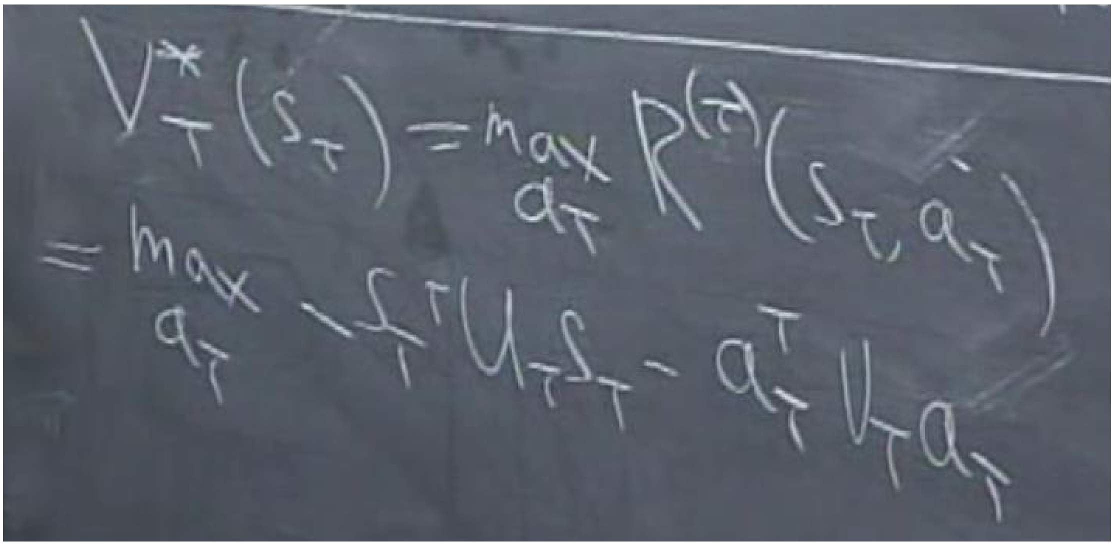
得到了 $s_{t+1} = As_t + Ba_t$

find policy maximize finite horizon reward



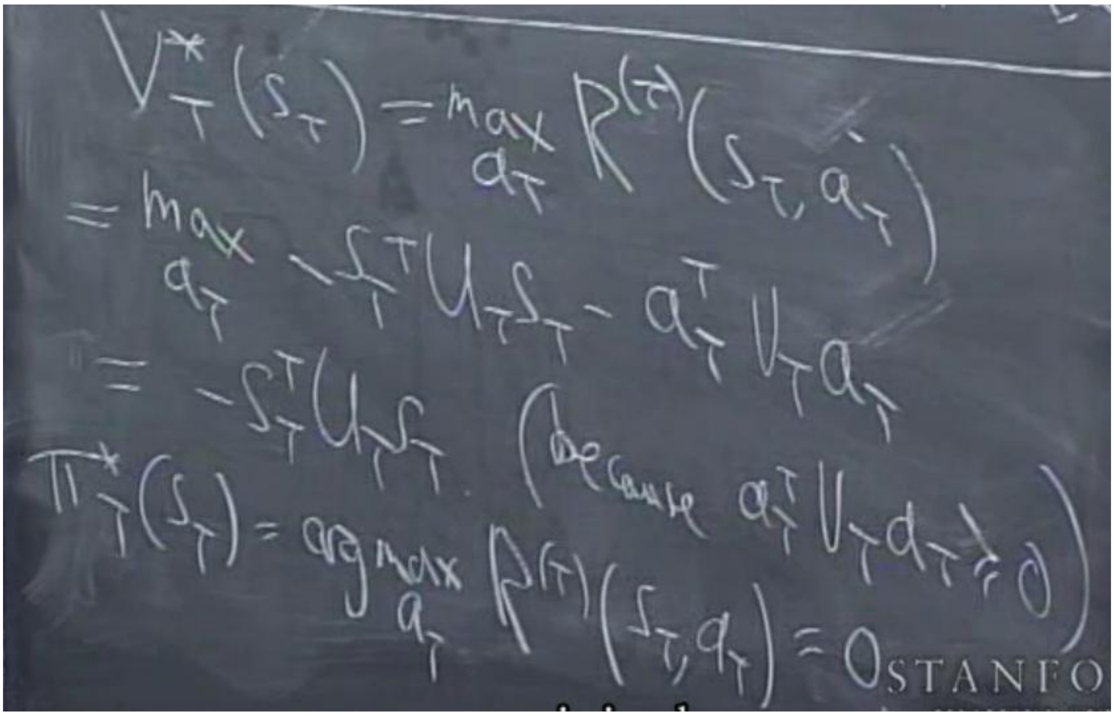
先找：$V_T^*(s_T)=\max_{a,T} R^{(T)}(s_T,a_T)$

然后再 backforward to $V_{T-1}^*(s_{T-1})$ .....



上边的 T donte 矩阵 transpose 转置

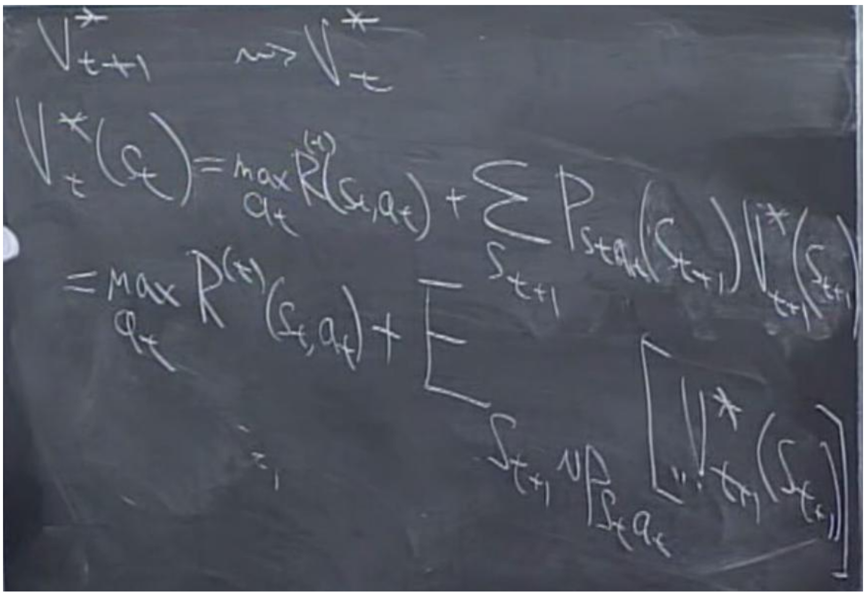
下边 T time



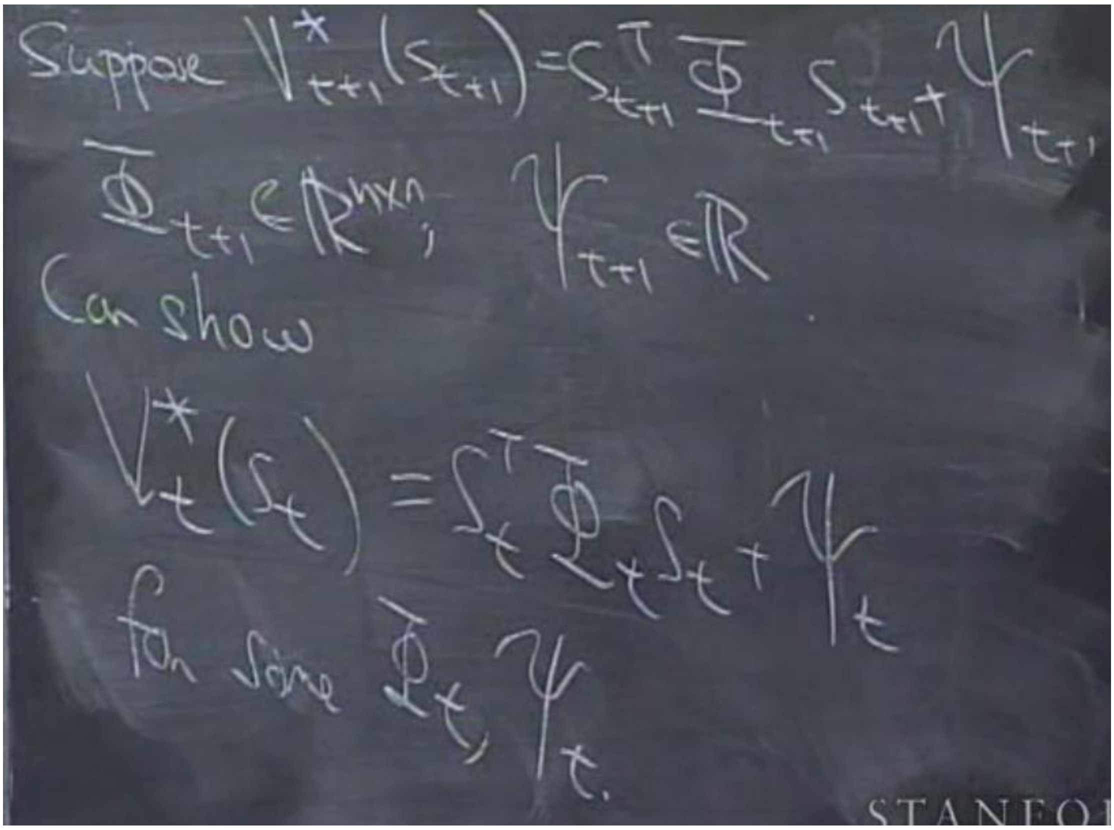
question：因为 UV 都是正定矩阵，因此乘积都是正的，整个式子是负的，max=0

右边的为正，为啥就等于左边的呢？？？

our goal：dynamic program step：$V_{t+1}^* \to V_t^*$



LQR 有个 porperty，每个V_t^* can be represented as quadrastic function



假设V_{t+1}^*是以上 quadrestic 形式　Φ 是矩阵，Ψ 是实数

我们带入上面的式子，可以得到相同的形式的V_t^*，条件是找到合适的Φ，Ψ。LQR 的 porperty！！！

s 是向量$(x1,x2,x3)^T$

Φ 是一个 3*3 矩阵

$s^T\Phi s$ 很奇妙，他是 x1,x2,x3 的所有二次的组合，依据Φ 的变化而变化

如：

$x1 \quad x2 \quad x3$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix} = x1^2 + x2^2 + x3^2$$

start the recursion

已知$V_t^*(s_t) = -s_t^T U_t s_t$

$V_t^*(s_t) = s_t^T \Phi_t s_t + \Psi_t$

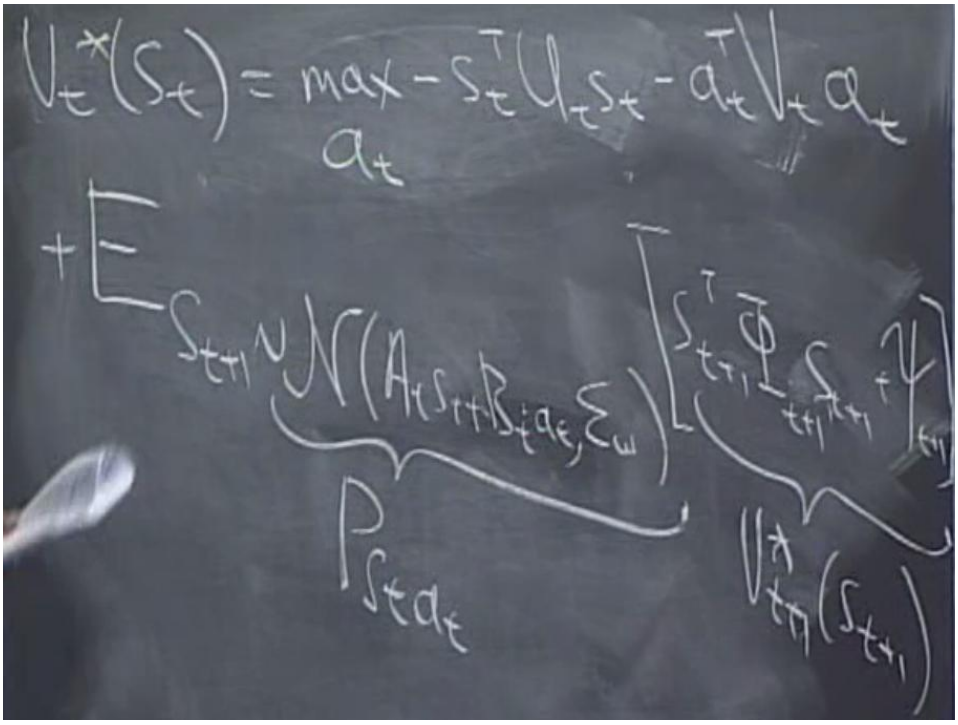
从头开始推：

$V_T^*(s_T) = -s_T^T U_T s_T$

因此，$\Phi_T = -U_T \quad \Psi_T = 0$

$V_T^*(s_T) = s_T^T \Phi_T s_T + \Psi_T$

转为 bellman equation 求解：



$V_t^*(s_t) = \max_{a_t} - s_t^T U_t s_t - a_t^T V_t a_t + E_{s_{t+1} \sim \mathrm{N}(A_t s_t + B_t s_t, \varepsilon_w)}(s_{t+1}^T \Phi_{t+1} s_{t+1} + \Psi_{t+1})$

$-s_t^T U_t s_t - a_t^T V_t a_t$ 是 immediate reward

$s_{t+1} \sim \mathrm{N}(A_t s_t + B_t s_t, \varepsilon_w)$ 下一个 state draw from distribution

因为 $s_{t+1} = A_t s_t + B_t s_t + \varepsilon_w$ 正态分布

$\mathrm{N}(A_t s_t + B_t s_t, \varepsilon_w) = P_{s_t a_t}$ state transition probability

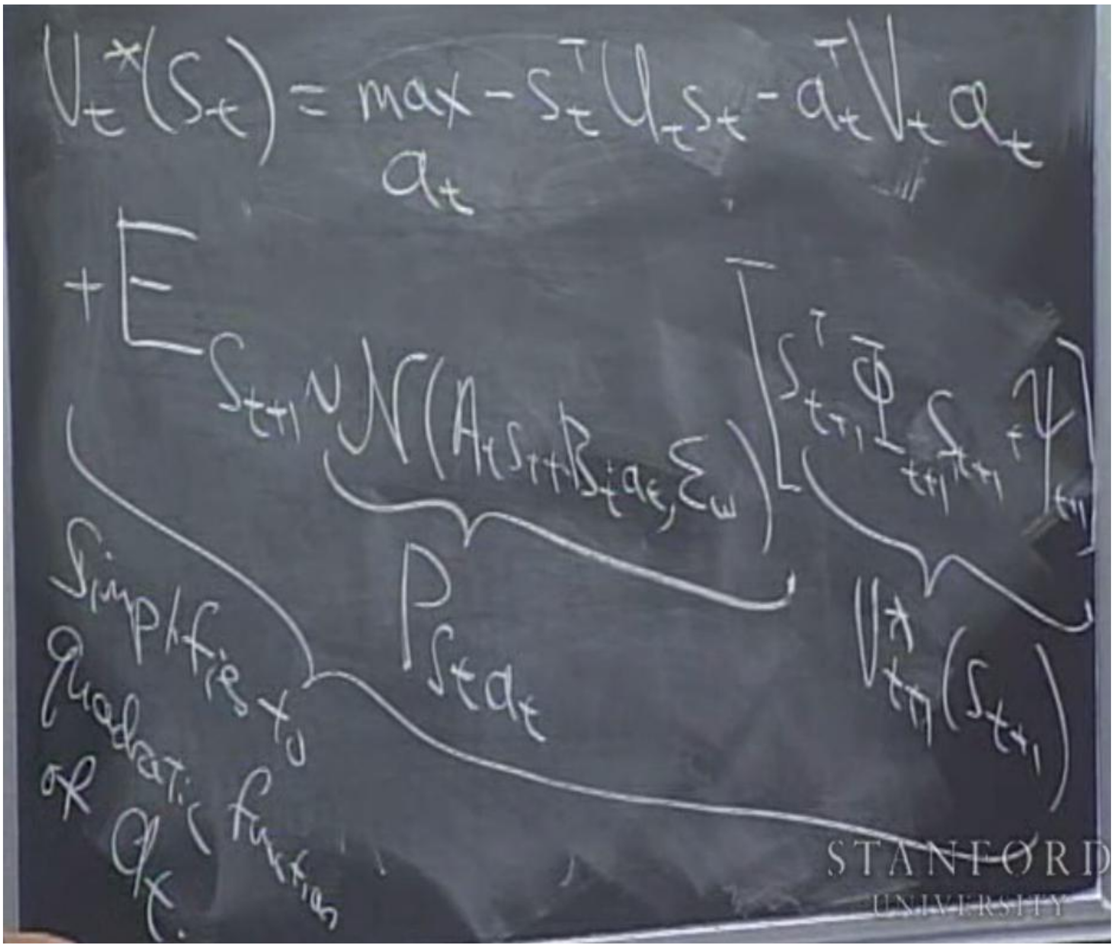
加上 $V_{t+1}^*(s_{t+1})$ 的期望

bellman 就是 dynamic programing！！！

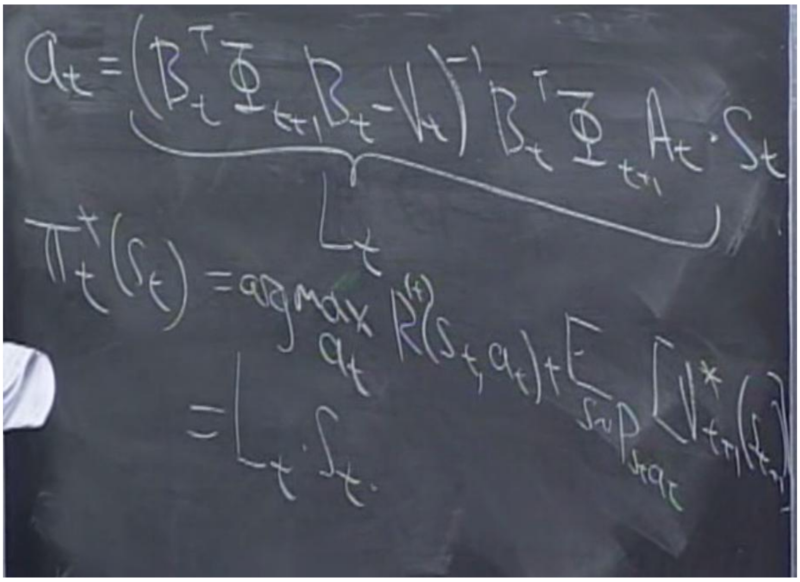
展开 expand $E_{s_{t+1} \sim \mathrm{N}(A_t s_t + B_t s_t, \varepsilon_w)}(s_{t+1}^T \Phi_{t+1} s_{t+1} + \Psi_{t+1})$ 化简为：

是一个 quadrastic function of a_t

再回到前面公式：



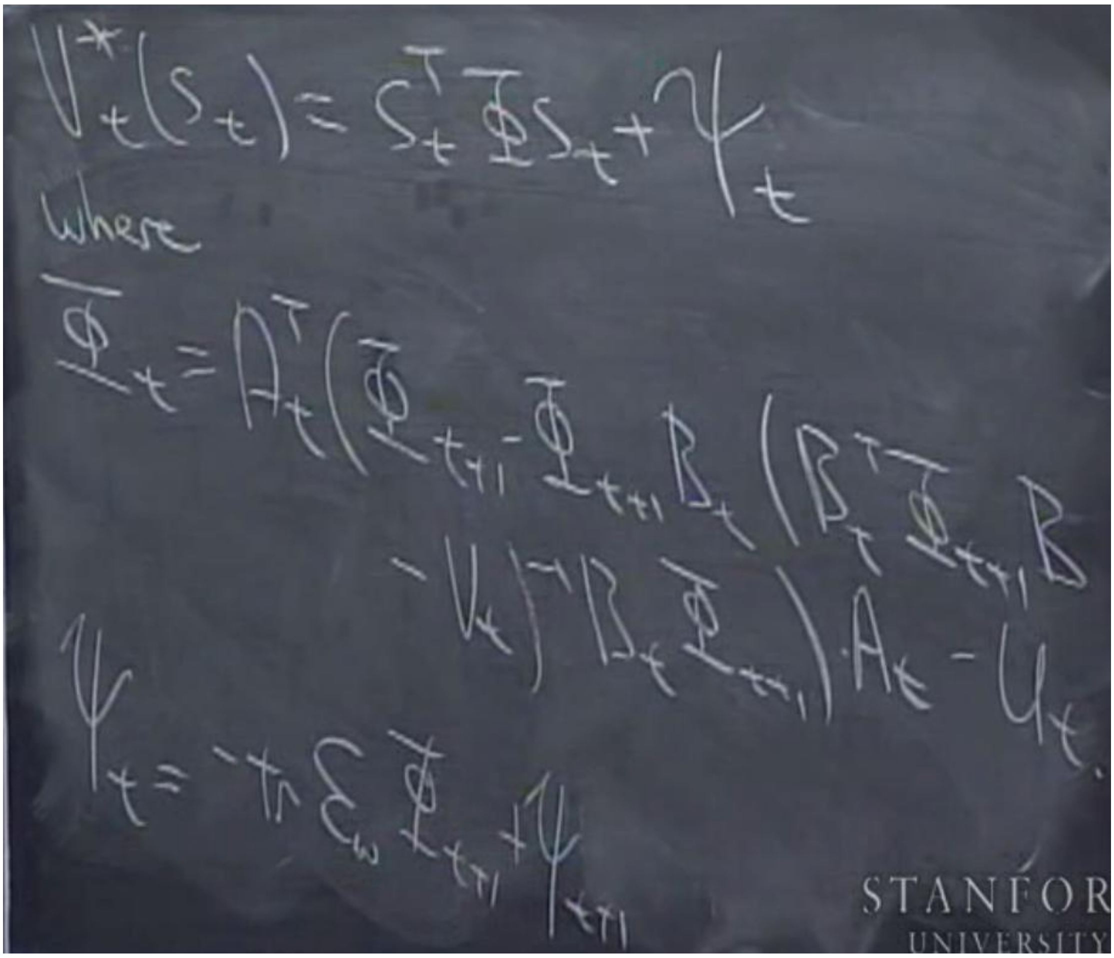
只需对 a_t，求导数令 0，解出 a_t



optmal action is linear function of current state s

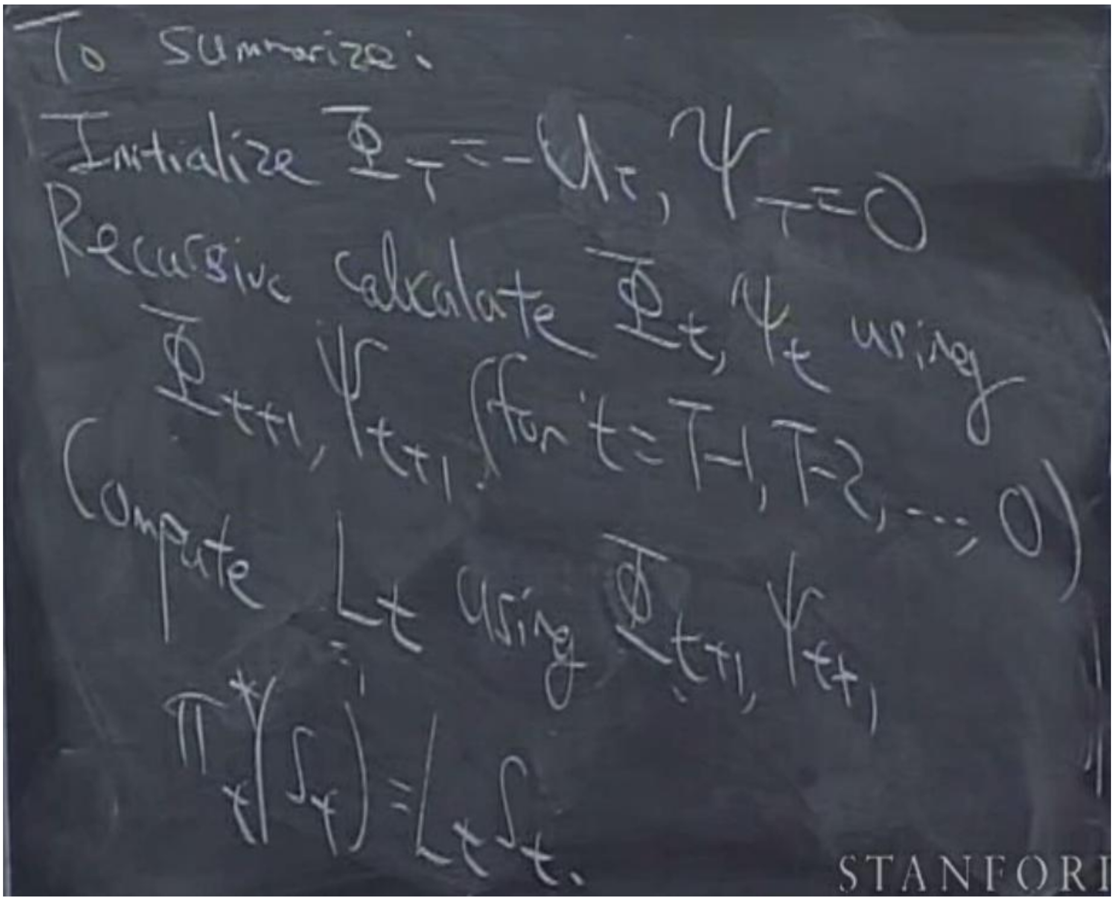
optimal action is straight line

解出 a 将 a 带入上面，得到Φ_t Ψ_t，



Φ_t：discrete time Ricarti equation

summary：


To summarize:
Initialize $\Phi_T = -U_T$, $\Psi_T = 0$
Recursive calculate Φ_t, Ψ_t using
Φ_{t+1}, Ψ_{t+1} (for $t = T-1, T-2, \dots, 0$)
Compute L_t using Φ_{t+1}, Ψ_{t+1}
$\pi_t^*(S_t) = L_t S_t$.
STANFORD

19

20