(engelska: equalities & inequalities)

EKVATIONER & OLIKHETER (Kap 3.1 & 3.4)

Innan vi sätter igång med analys på riktigt, ger denna föreläsning en överblick / repetition om lösning av ekvationer och olikheter.

Ekvationer (Kap 3.1)

En ekvation har två led som är lika

$x + \frac{1}{x} = e^x$ ← led

$\frac{-m_1 \cdot m_2}{r} \gamma = y \cdot r^2$

→ en ekvation är ett påstående som är

$2^2 = 4$ sant eller $-8 = \frac{3}{2}$ falskt

→ en ekvation kan innehålla flera obekanta

→ att lösa en ekvation betyder att bestämma lösningsmängden: mängden av alla värden på de obekanta så att ekvationen är sann

$x^2 - 4 = 0$ ... lösningar $x = -2, +2$

→ för att hitta lösningar formar vi om ekvationen

→ om gammal och ny ekvation har samma lösningar är de ekvivalenta

Ex $x - 4 = 2x$ och $x = 2x + 4$ har som enda lösning $x = -4$

De är ekvivalenta och vi skriver

$$x - 4 = 2x \iff x = 2x + 4$$

"båda sidor av pilen har samma lösningar"

→ ibland har nya ekvationen fler lösningar utöver de gamla

en lösning $\left(\begin{array}{l} x - 2\pi = 0 \\ x = 2\pi \end{array} \right.$ $\qquad$ $\begin{array}{l} \cos(x - 2\pi) = 1 \\ x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots \end{array}$ många lösningar!

vi skriver $x - 2\pi = 0 \Rightarrow \cos(x - 2\pi) = 1$

"alla lösningar vänster löses också höger"

(bara längs pilen, inte emot)

LIKHETSTECKEN & EKVATIONER

i matematik och programmering

Likhetstecken används i de flesta programmeringsspråken annorlunda än i matematiken.

$x = 5$

i matematik ett påstående

sant eller falskt beroende på värdet av x

i programmering en definition

härefter har variabeln x värdet 5

→ för en definition i matematiken skriver vi $x := 5$

→ en ekvation i programmering varierar mellan olika språk

t.ex. Mathematica x == 5

Sympy Eq(x-5) ← $x = 5 \Leftrightarrow x - 5 = 0$

Vilka operationer ger ekvivalenta ekvationer?

- addition och subtraktion ger ekvivalenta ekvationer

$$x = y \iff x + a = y + a$$

- multiplikation och division bara med tal skilt noll!

  - $2x + 5 = 0 \iff x + \frac{5}{2} = 0$

  - i följande får vi multiplicera, för att $(1+x^2) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{5}{1+x^2} = 1 \iff 5 = 1 + x^2 \iff 4 = x^2$$

  - men

$$2(x^2-1) = 8(x^2-1) \;\cancel{\iff}\; 2 = 8$$

$: (x^2-1)$

lösning $x = -1, 1$ ingen lösning

problemet var att vi kan ha $(x^2-1) = 0$ och då får vi inte dela med det!

Istället skilda fall

1) om $(x^2-1) \neq 0$

$$2(x^2-1) = 8(x^2-1) \iff 2 = 8 \quad \text{ingen lösning}$$

2) om $(x^2-1) = 0$

$$2(x^2-1) = 8(x^2-1) \iff 0 = 0$$

alla x som upfyller $x^2 - 1 = 0$ är lösningar, vilket är $x = -1, 1$.

→ kolla alltid att du inte delar eller multiplicerar med noll !

Vilka operationer ger icke ekvivalenta ekvationer?

- kvadrera: problemet $(-3)^2 = 3^2$ men $-3 \neq 3$

  → därför ger ledvis kvadrat bara "$\Rightarrow$"

$$-(x+1) = 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 = 4x$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 4x$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1$$

men $x=1$ löser inte $\underbrace{-(x+1)}_{-2} = \underbrace{2\sqrt{x}}_{2}$, $\quad -2 \neq 2$

  → efter kvadrering måste vi testa vilka nya lösningar också löser den gamla ekvationen

- kvadratroten: problemet $\sqrt{4} = 2$, men också $(-2)^2 = 4$!

  → kvadratroten kan tappa en lösning, vi behöver betrakta båda möjliga förtecken

Ex $\quad x^2 = (2x+1)^2 \quad \xLeftarrow{\sqrt{}} \quad x = \pm(2x+1)$

korrigering

Fall +: $\quad x = 2x+1 \Leftrightarrow x = -1$

Fall −: $\quad x = -2x-1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$

både $x = \frac{-1}{3}, -1$ löser $x^2 = (2x+1)^2$

iblamd finns
inga lösningar alls

→ det är inte alltid det finns två lösningar

Ex $x^2 = (x+1)^2 \Leftarrow x = \pm(x+1)$

korrigering

Fall $+$: $x = x+1 \Leftrightarrow 0 = 1$

ingen lösning

Fall $-$: $x = -x-1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$

bara $x = \frac{-1}{2}$ är lösning av $x^2 = (x+1)^2$

Rationella ekvationer

Ett recept som ofta funkar bra

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{3}{x+2} + \frac{7}{x}$$

0.) steg : vas smart, kolla efter faktorer

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{3}{x+2} + \frac{7}{x}$$

1) sätt ena leden till noll

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{3}{x+2} + \frac{7}{x} + \frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

bråk inte definierad

2) vi kan utesluta alla fall där någon nämnare är noll
→ det är lätt att hitta gemensam nämnare

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{3(x-2)x + 7(x+2)(x-2) + x}{(x+2)(x-2)x}, \quad x \neq 2, -2, 0$$

3) uttrycket är bara noll när täljaren är noll

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 3(x-2)x + 7(x-2)(x+2) + x, \quad x \neq 2, -2, 0$$

4) nu är det bara att lösa polynomen...!

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 3x^2 - 6x + 7x^2 - 28 + x$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 10x^2 - 5x - 28$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{14}{5}$$

med pq-formel

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{229}{5}}$$

Dessa är båda lösningar till första ekvationen.
(Vi hade "$\Leftrightarrow$" hela vägen!)

$\boxed{\text{OLIKHETER}}$ (Kap 3.4)

→ olikheter får bara multipliceras och divideras med positiva tal, negativa tal byter olikhetens riktning

$$1 < 5 \xrightarrow{\cdot(-1)} -1 > -5$$

$$-2 < 3 \xrightarrow[:(-2)]{} 1 < \frac{-3}{2}$$

Därför måste man vara lite försiktig.

→ Men ledvis addition och subtraktion är alltid säkert.
⇒ vi kan forma om så att en led blir noll

Exempel 1) $x^2+4 < 4x \iff x^2-4x+4<0 \iff (x-2)^2<0$

$\to$ ingen lösning ($(x-2)^2 \geq 0$ för alla $x\in\mathbb{R}$)

2) $$x+4 > \frac{x}{2+x} \iff x+4-\frac{x}{2+x}>0$$

$$\iff \frac{(x+4)(2+x)-x}{2+x}>0 \iff \frac{x^2+5x+8}{2+x}>0$$

$$\iff \frac{(x+\frac{5}{2})^2+\frac{7}{4}}{2+x}>0$$

- täljaren alltid positiv
- nämnaren positiv om $x>-2$

$\Rightarrow$ lösning av olikheten är $x>-2$

speciellt i övningar...

Denna strategi hjälper ofta men inte alltid.

För rationella uttryck där nämnare och täljare kan faktoriseras kan man använda en <u>teckentabell</u>.

Ex $$\frac{x(x-2)}{(x+7)} \geq 0.$$ Nämnare och täljare har nollställen $x=-7, 0, 2$

Vi skriver in förtecknet av alla tre faktorer mellan nollställena i en tabell

	$x<-7$	-7	$-7<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x-2)}{x+7}$	$-$	$\lightning$	$+$	0	$-$	0	$+$

förtecken av $(x-2)$ för $0<x<2$

bråkens förtecken enkel att bestämma till sist

$x+7=0 \Rightarrow$ bråken inte definierad!

Då kan man lätt läsa av om $\frac{x(x-2)}{x+7}$ är positiv, negativ eller noll.

Lösning $$\frac{x(x-2)}{x+7} \geq 0 \iff -7<x\leq 0 \text{ eller } x\geq 2$$

utesluter $x=-7$

inkludera $x=0$ och $x=2$