Komplexa Tal (Kap. 6)

Innehåll: Intuitiv och praktisk introduktion till $\mathbb{C}$
- komplexa talplanet
- räknesätt & ekvationer

Varför komplexa tal?

Matematik: Alla algebraiska ekvationer har en lösning!

$$x^2 + 1 = 0$$

Fysik: Kvantteori formuleras med komplexa tal och vektorrum!

Teknik: Superpraktisk för differentialekvationer, svängningar och elektriska kretsar!

Reella polynom utan nollställen

Fun fact: Om ett reellt polynom inte har nollställen, kan den skrivas som produkt av andragradspolynomer.

Betrakta nollställen av ett andragradspolynom ← pq-formeln

$$0 = x^2 + ax + b \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Reella lösningar existerar endast om $\frac{a^2}{4} - b \geq 0$!

$\Rightarrow$ $0 = x^2 + x + 1$ har ingen reell lösning

för att dessa skulle vara $x_0 = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$

X men vi kan inte ta kvadratroten av ett negativt tal ... !

imaginare (latin), imagine...

Eller kan vi...? Föreställ er att det fanns ett tal i med egenskapen

$$i^2 = -1$$

Vad skulle vi kunna göra då ...?

$$\Rightarrow \quad x^2 + x + 1 = 0 \iff x_1 = \frac{-1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}, \; x_2 = \frac{-1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}$$

får två lösningar!

<u>Check</u> $\left(\frac{-1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) + 1$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{2}\right) i\sqrt{\frac{3}{4}} + \left(i\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 - \frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}} + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \cancel{i\sqrt{\frac{3}{4}}} + \underbrace{i^2}_{=-1}\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \cancel{i\sqrt{\frac{3}{4}}} + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

Testa själv för $x_2 = \frac{-1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}$!

Tänk att $(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = \ldots$

Vad är i och hur kan vi bygga ett talsystem med det?

<u>Def</u> Vi kallar i den <u>imaginära enheten</u> och definierar att

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Komplexa tal – lägg till i till $\mathbb{R}$

Reella talen $\mathbb{R}$ kan vi

- addera (och subtrahera)

subtraktion av y
$$x - y = x + (-y)$$
är addition av $(-y)$ ...!

ordning spelar ingen roll

$$x + y = y + x$$

- multiplicera (och dividera)

division med y
$$x : y = x \cdot \frac{1}{y}$$
är multiplikation med $\frac{1}{y}$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

- och vi har regler som

$$\left.\begin{aligned} x + (y+z) &= (x+y)+z \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}\right\} \text{associativlagen}$$

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \;\} \text{ distributivlag}$$

Nu vill vi konstruera komplexa talen $\mathbb{C}$. Vi vill kunna

- addera (och subtrahera)
- multiplicera (och dividera)
- ha exakt samma räknelagar
- $\mathbb{C}$ ska innehålla alla reella tal $\mathbb{R}$
- och $\mathbb{C}$ ska innehålla i

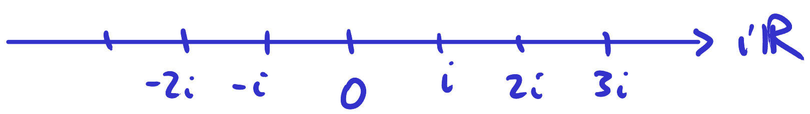
Vad följer från detta? Hur kommer $\mathbb{C}$ att se ut?

→ Vi kan multiplicera i med reella tal

<u>Exempel</u> $2i$, $-1 \cdot i = -i$, $\frac{1}{2} i$, $i 10378$, ...

→ Vi får en hel axel med <u>imaginära tal</u> $i\mathbb{R}$

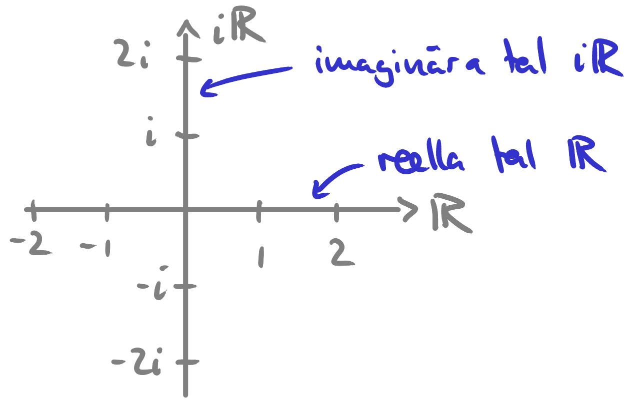
$$i\mathbb{R} = \{ i \cdot x \mid x \in \mathbb{R} \}$$



Vi vill att $x \cdot 0 = 0$ för alla tal
$\Rightarrow i \cdot 0 = 0$

→ Reella talen och imaginära talen har bara 0 gemensam

Detta kan ritas som ett koordinatsystem med två axlar:



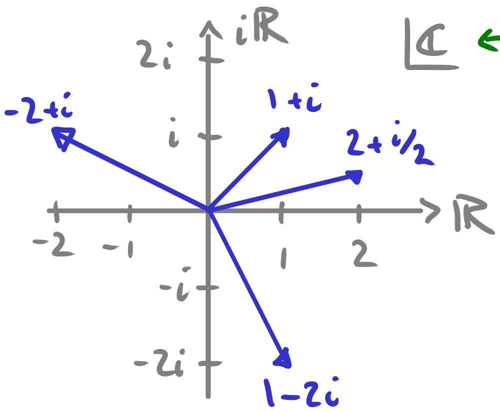
→ Vi ska också kunna addera reella och imaginära tal!

Välj två reella tal $x, y \in \mathbb{R}$. Då är $iy \in i\mathbb{R}$ imaginär.

$\Rightarrow$ $x + iy$ måste vara ett <u>komplext tal</u>

<u>Exempel</u> $1+i$, $\frac{1}{2} - 3i$, $\frac{-1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}$, ...

Dessa motsvarar vektorer i det <u>komplexa talplanet</u>



$\mathbb{C}$ ← vanlig beteckning när man ritar talplanet

Mera komplext än så blir det inte ... !

Varje komplext tal $z \in \mathbb{C}$ kan skrivas på formen

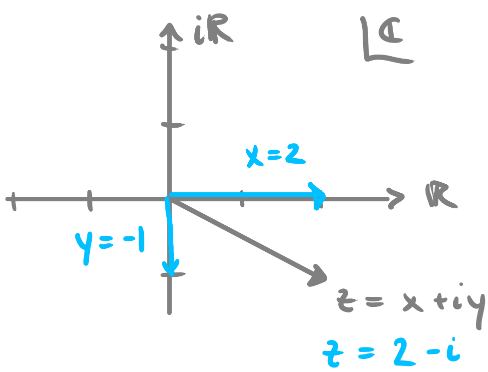
$$z = x + iy$$

där $x, y \in \mathbb{R}$ är reella tal.

Vi kallar

$x = \mathrm{Re}(z)$ <u>realdel</u>

$y = \mathrm{Im}(z)$ <u>imaginärdel</u>



Hur vet vi att inga andra former av komplexa tal kan genereras?

→ addition, subtraktion, multiplikation och division av $x+iy$ och $a+ib$ ger igen samma form.

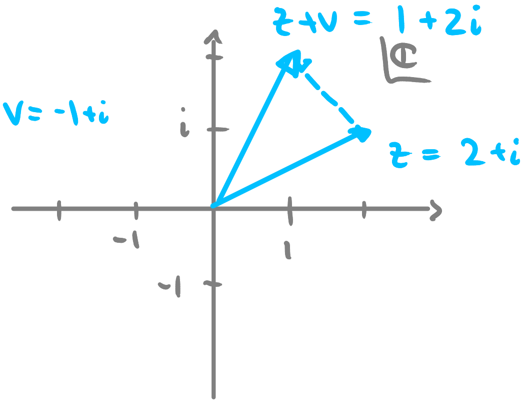
Addition av komplexa tal

Låt $z = x+iy$ och $v = a+ib$ vara komplexa tal $(x,y,a,b \in \mathbb{R})$

Då är

$$z+v = (x+iy) + (a+ib) \overset{\text{associativlag}}{=} x+iy+a+ib \overset{\text{distributivlag}}{=} (x+a) + i(y+b)$$

Grafisk motsvarar det vektoraddition



$$z+v = (2+i) + (-1+i) = (2-1) + i(1+1)$$
$$= 1+2i$$

Multiplikation

Vad händer när vi multiplicerar $z = x+iy$ och $v = a+ib$?

$$z \cdot v = (x+iy)\cdot(a+ib) \overset{\text{distributiv}}{=} x\cdot(a+ib) + iy(a+ib)$$

$$\overset{\text{distributiv}}{=} x\cdot a + i\cdot x\cdot b + iy\cdot a + \underbrace{i^2}_{i^2=-1} y b = x\cdot a + i xb + i ya - yb$$

$$= (xa - yb) + i(xb + ya)$$

eller $z\cdot v = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(v) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(v) + i\left(\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(v)\right)$

Exempel $x=3 \quad y=1 \qquad a=\frac{-1}{2} \quad b=-5$

$$(3+i)\left(-\tfrac{1}{2}-5i\right) = \left(3\cdot\tfrac{-1}{2} - 1\cdot(-5)\right) + i\left(3\cdot(-5) + 1\cdot\left(\tfrac{-1}{2}\right)\right)$$
$$= \left(\tfrac{-3}{2}+5\right) + i\left(-15-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{7}{2} - i\,\tfrac{31}{2}$$

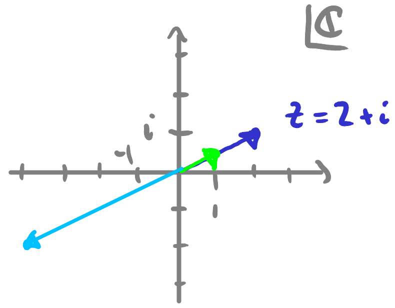
En fullständig grafisk interpretation får vi nästa föreläsning
($\rightarrow$ polärform)

Men multiplikation av ett reellt och ett komplext tal kan vi redan visualisera.

Exempel $z = 2+i$

$$\tfrac{1}{2}\cdot z = \tfrac{1}{2}\cdot(2+i) = 1 + i\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$-2\cdot z = (-2)\cdot(2+i) = -4 - i2$$



Multiplicerar man $z\in\mathbb{C}$ med ett reellt tal $r\in\mathbb{R}$ så skalas vektorn för z i talplanet

$\rightarrow$ $1<r$: vektorn sträcks

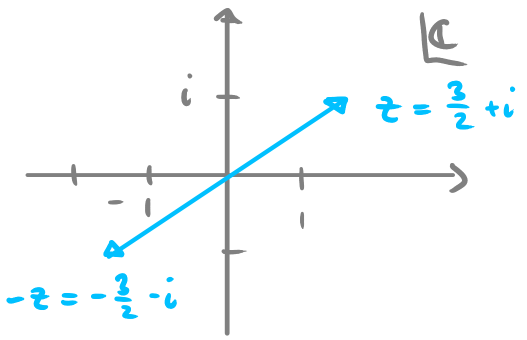
$\rightarrow$ $0<r<1$: vektorn krymps

$\rightarrow$ $-1<r<0$: vektorn vänds om och krymps — spegling i origo

$\rightarrow$ $r<-1$: vektorn vänds om och sträcks

Fallet $(-1)\cdot z = -z$ är viktigt för subtraktion ...

$$(-z) = (-1)\cdot z$$
$$= (-1)\cdot(x+iy)$$
$$= -x - iy$$



$\rightarrow$ speglar vektorn genom origo i talplanet!

Subtraktion

Vi kan alltid tänka på subraktion av x som addition av $(-x)$

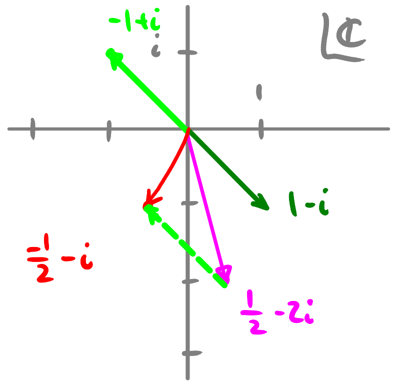
$$3-2 = 3+(-1)\cdot 2 = 3+(-2) \quad \text{osv.}$$

→ likaså för komplexa tal!

$$z-v = (x+iy)-(a+ib)$$
$$= (x+iy)+(-a-ib)$$
$$= (x-a)+i(y-b)$$

Exempel

$$\left(\tfrac{1}{2}-2i\right)-(1-i)$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}-2i\right)+(-1+i)$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}-1\right)+i(-2+1)$$
$$= \frac{-1}{2}+i(-1) = \frac{-1}{2}-i$$



Division

Tänk på reella tal: Att dividera med $b \in \mathbb{R}$ är samma sak som att multiplicera med $\frac{1}{b}$

$$\frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b}$$

→ Vad kan $\frac{1}{z}$ vara för $z = x+iy$?

Om alla räknelagar hålles, då borde vi ha...

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2}}_{\text{reellt tal}}\cdot\underbrace{(x-iy)}_{\text{komplext tal}}$$

Stämmer det? Som test kan vi räkna $z \cdot \frac{1}{z} \overset{?}{=} 1$

$$z \cdot \frac{1}{z} = z \cdot \frac{x-iy}{x^2+y^2} = (x+iy)\,\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overbrace{(x+iy)(x-iy)}^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \quad \text{stämmer!}$$

Det betyder att kvoten av två komplexa tal är

$$\frac{a+ib}{x+iy} = (a+ib)\,\frac{1}{x+iy} = \frac{(a+ib)(x-iy)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{(ax-by)+i(ay+bx)}{x^2+y^2}$$

Exempel (Kanske mera praktiskt att förlänga bråket än att komma ihåg formeln.)

$$\frac{4-8i}{1+2i} = \frac{(4-8i)(1-2i)}{1+2^2} = \frac{(4-(-8)\cdot(-2))+i\,(4\cdot(-2)+(-8)\cdot 1)}{5}$$

$$= \frac{-12+i\,(-8-8)}{5} = \frac{-12-16i}{5} = -\frac{12+16i}{5}$$

OBS Två viktiga koncept är gömda i

$\bar{z} = x-iy$ konjugat

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ absolutbelopp

som vi introducerar härnäst.