

DERIVATA (Kap 10)

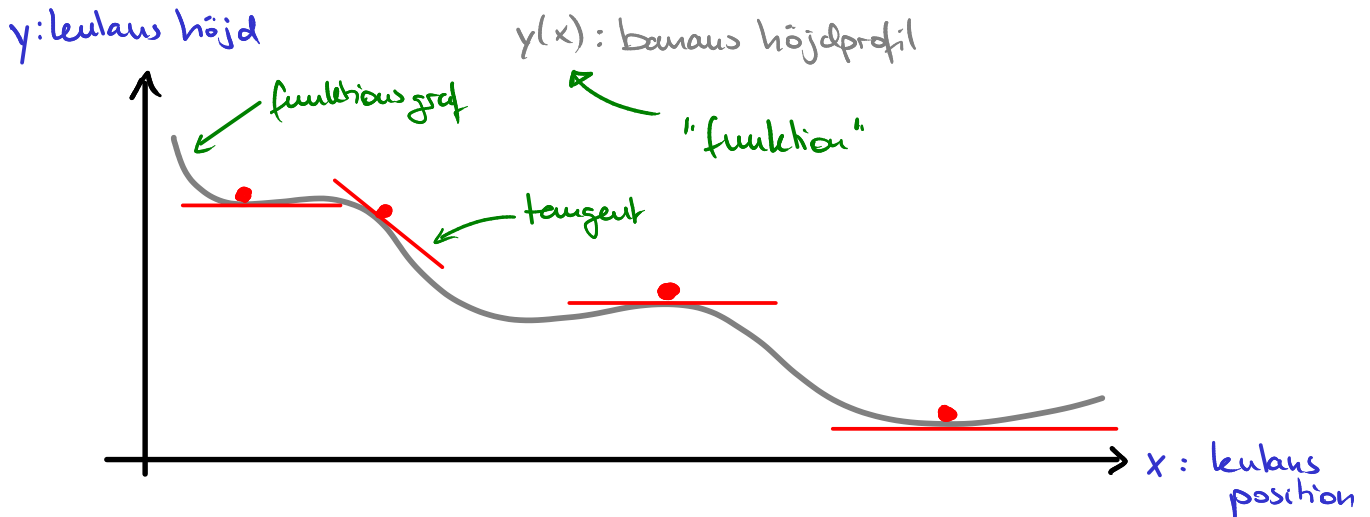
- Idag:
- Definition & Intuition (Kap 10.1)
 - första standardderivator

Vi börjar med två exempel om derivatans betydelse och funktion.

Exempel: En kulbana

Tänk på en kulbana med följande höjdprofil:

- * På vilka ställen kan kulan placeras så att den ligger stilla?
- * Varför - vad exakt beror det på?



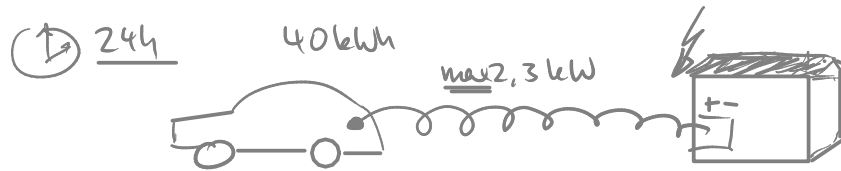
Lutningen av en funktionsgraf motsvarar funktionens derivata!

- positiv derivata: "uppförslutning" så att kulan rullar tillbaka
↳ "större x ger större $y(x)$ "
- negativ derivata: "nedförslutning", kulan rullar framåt
↳ "större x ger mindre $y(x)$ "
- derivata noll: ingen lutning, kulan kan ligga still

Observera: Vid funktionens maxima och minima,
är derivatan (grafens lutning) noll!

↳ super viktigt i all optimering, fysik, ingenjörskonst!!!

Exempel Elbilsladdning



Vi vill ladda en elbilsbatteri:

→ behöves ladda med 40 kWh

→ har tid i ett dygn 24h

→ men kabeln tål maximalt 2,3 kW

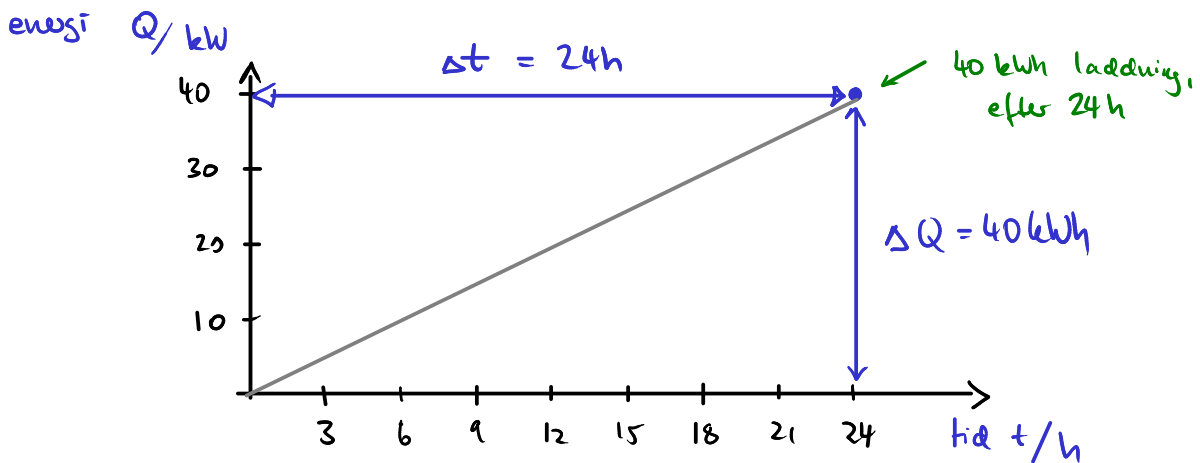
kilowattimmar (energi)

Watt (effekt = $\frac{\text{energi}}{\text{tid}}$)

* Hur kan vi fördela laddningen över dygnet, utan att överlasta kabeln ...?

spara pengar på
timpris av elen...

Enkelaste alternativ: Laddning med konstant effekt



Hur stor är effekten?

Effekt är energi per tid. Här har vi

"effekt = $\frac{\text{energi}}{\text{tid}}$ "

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{40 \text{ kWh}}{24 \text{ h}} = 1,4 \text{ kW} < 2,3 \text{ kW}$$

Kabeln håller.

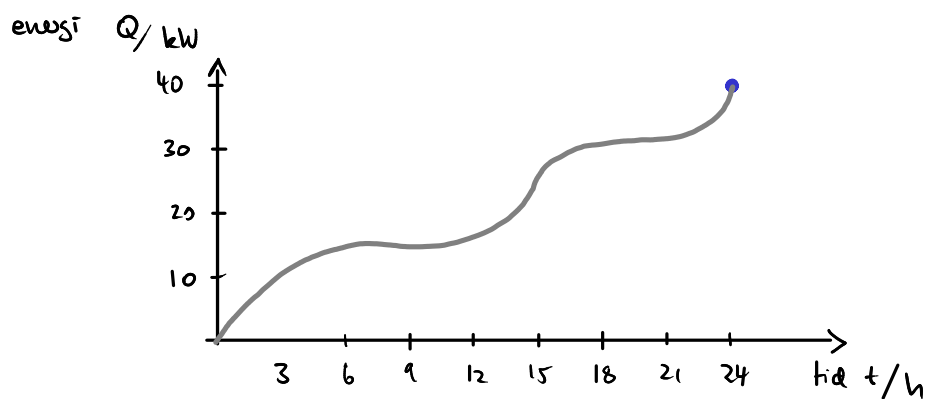
Observera

→ Laddningskurvan $Q(t)$ med konstant effekt har en rät linje som funktionens graf

→ Laddningskurvas lutning är lika med
* effekten, som är lika med
* derivatan av funktionen $Q(t)$

En rät linje har konstant lutning (derivata) \Rightarrow motorns konstant effekt.

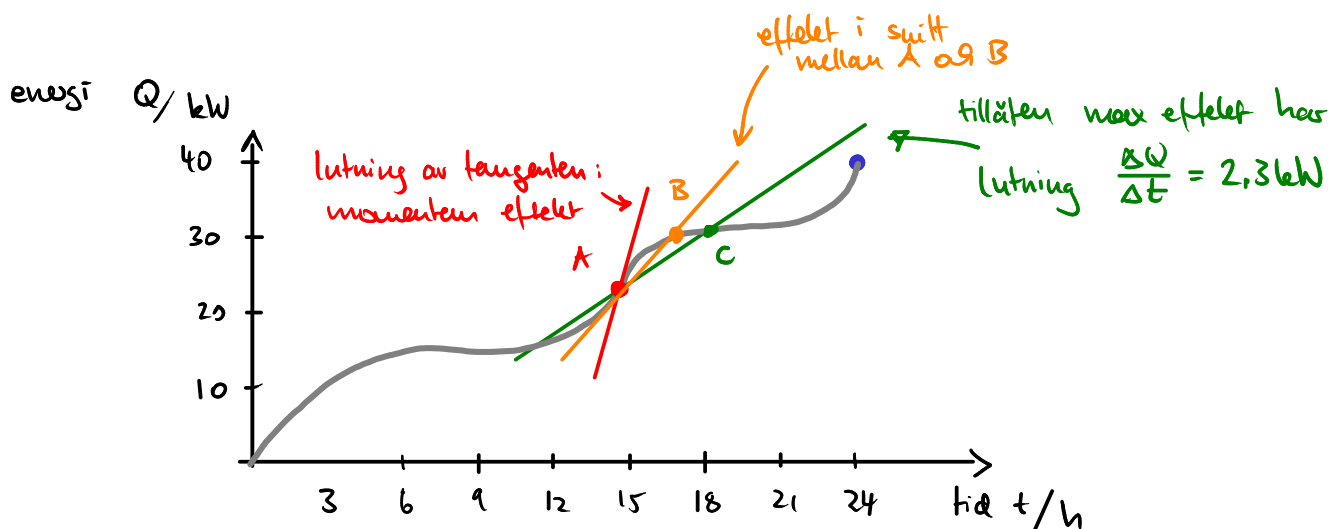
Men för att spara pengar föreslår oppen följande laddningsschema



Kan kabeln klara detta ... ?

För att kontrollera om effekten överstiger de tillåtna 2,3 kW

kan vi kontrollera om grafen har en lutning som är större än så.



Den gröna linjen motsvarar en effekt på 2,3 kW, men grafen har en större lutning i flera punkter...

⚡ Effekten överstiger 2,3 kW. Kabeln går sönder!

Observera För att konstruera tangenten i en punkt kan vi

- rita en linje genom två punkter på grafen
- ju närmare vi väljer punkten ju närmare blir linjen till tangenten

Vi får tangenten exakt när avståndet blir oändligt litet.

Derivata

Def Antag att f är definierad i en omgivning av $a \in \mathbb{R}$.

Vi säger att f är deriverbar i a om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar och är ändligt. Gränsvärdet kallas då för derivatan av f i punkten a och vi skriver

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eller

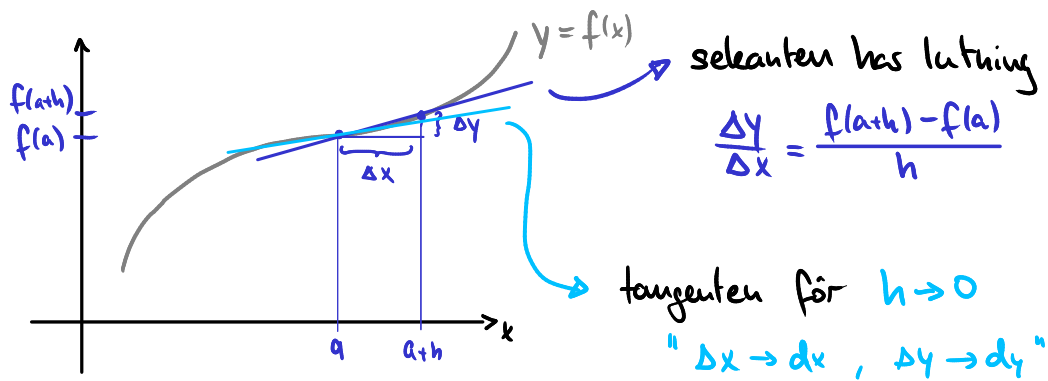
$$(Df)(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Summa sak,
ibland är den
en betydningen
sufficient

Exempel \rightarrow Derivata av $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2. \\ \Rightarrow f'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

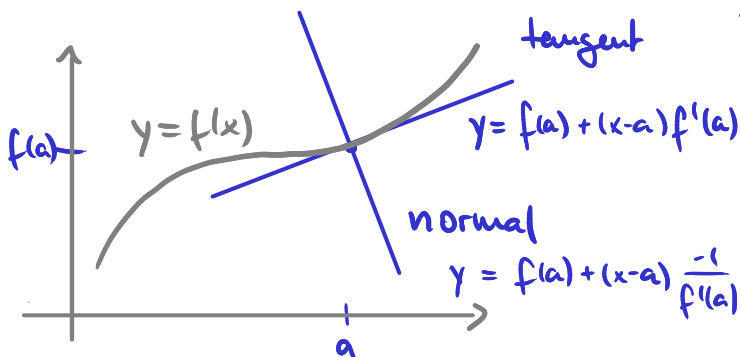
Grafisk interpretation: Lutning av tangenten



Man kan tänka på dx, dy som oändligt små versioner av $\Delta x, \Delta y$
→ detta motiverar beteckningen

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

Tangent och normal



Tangenten

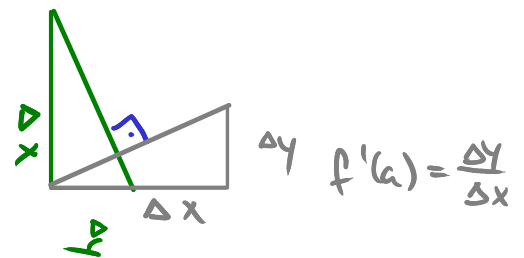
- rätt linje
- genom punkt $(a, f(a))$
- med lutning $f'(a)$
- har equation

$$y = f(a) + (x-a) f'(a)$$

Normalen

- rät linje genom punkt $(a, f(a))$
- vinkelrät mot tangenten
- lutning $\frac{-\Delta x}{\Delta y} = \frac{-1}{f'(a)}$

→ equation $y = f(a) + \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x-a)$



Exempel & Övning: Testa egna idéer och plotta med Desmos...!

Vanliga beteckningar för derivatan

Förutom $f'(x)$ kan vi alltså

$$Df, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f, \quad \underbrace{y', \quad \frac{dy}{dx}}_{\text{för funktionskurva } y(x)}$$

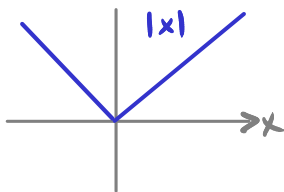
Deriverbar vs. kontinuerlig

Vilken funktioner kan vi derivera? Dessa som är deriverbara...

→ det finns ingen allmän regel

Två exempel som inte är deriverbara

Absolutbeloppet $f(x) = |x|$ i punkten 0



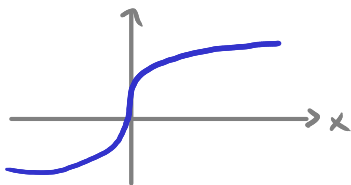
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases}$$

existerar inte!

→ kanske senare
och $x \sin(\frac{1}{x})$

Tredje roten $g(x) = x^{1/3}$ i punkten 0



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h+0) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

g inte deriverbar för att gränsvärdet är oändligt.

Men tvärtom gäller: "deriverbar \Rightarrow kontinuerlig"

Sats Om en funktion är deriverbar i en punkt är den också kontinuerlig i punkten.

Bevis Låt f vara deriverbar i punkten $a \in \mathbb{R}$. Då ska vi visa att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{så att } f \text{ är kontinuerlig.}$$

Detta är ekvivalent med

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$$

vilket följer eftersom

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) && \text{variabelbyte } x = a+h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h && \text{def. av } (Df)(a) \\ &= (Df)(a) \cdot 0 = 0. && \text{produkt av gränsvärden} \quad \square \end{aligned}$$

Tre första standardderivator

- 1) $D(e^x) = e^x$
- 2) $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$ (konstant)
- 3) $D(\sin x) = \cos x$
- 4) $D(\cos x) = -\sin x$

Bevis 1) $D(e^x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1 \text{ standardgränsvärde}} = e^x$

2) Bevis för fallet $\alpha \in \mathbb{N}$ (positiv heltal)

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k h^{\alpha-k} - x^\alpha \right) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(h^\alpha + \binom{\alpha}{1} h^{\alpha-1} x + \dots + \binom{\alpha}{\alpha-2} x^{\alpha-2} h^2 + \binom{\alpha}{\alpha-1} x^{\alpha-1} h \right) \\&\stackrel{h^k \rightarrow 0}{h \rightarrow 0} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{1} h^{\alpha-2} x + \dots + \binom{\alpha}{\alpha-2} x^{\alpha-2} h + \underbrace{\binom{\alpha}{\alpha-1}}_{\alpha} x^{\alpha-1} \\&= 0 + \dots + \alpha x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) D(\sin(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x) \right) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

sidoräkning

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{-\sin^2(h)}{h(1 + \cos(h))} = \frac{-\sin(h)}{h} \cdot \frac{\sin(h)}{1 + \cos(h)}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \left(\frac{-\sin(h)}{1 + \cos(h)} + \cos(x) \right) \\&= 1 \cdot (0 + \cos(x)) = \cos(x)\end{aligned}$$

gör det som
öving!

För beviset av 4) kan man använda samma strategi som för 3).

Men som en sneak preview, låt oss ta serien

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

och se vad som händer om man deriverar term för term...

Tänk om

$$D(\cos(x)) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \dots$$

eftersom

$$D(x^{2k}) = 2k x^{2k-1} \quad \text{se 2) ovanför}$$

då är

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} D(x^{2k}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2k x^{2k-1} \\ &= 0 + \frac{-1}{\cancel{2!}} \cancel{2} x^1 + \frac{1}{\frac{4!}{\cancel{3!}}} 4 x^3 + \frac{-1}{\frac{6!}{\cancel{5!}}} 6 x^5 + \dots \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} = -\sin(x) \quad ! \end{aligned}$$

Är derivatan av en summa verkligen summan av derivatorna?

→ ja för ändliga summor (se nästa föreläsning)

→ för vissa series också (som för \exp, \sin, \cos)