DERIVATA - Räkneregler och elementära funktioner

Låt oss börja med lite perspektiv och större sammanhang...
Har du tänkt på att beteckningen $D(f)$ ser ut som en funktion?

Derivering är en funktion!

definitionsmängd: deriverbara funktioner

målmängd: reella funktioner

$$D : \mathcal{D}_D \longrightarrow \mathcal{C}_D$$
$$f \longmapsto D(f)$$

till exempel $D(\sin) = \cos$, $D(\exp) = \exp$.

→ Funktioner av funktioner kallas ofta avbildning (engl. "map") eller operator.

→ D har speciella egenskaper (som vi ska bevisa)

1) $D(f+g) = D(f) + D(g)$
2) $D(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot D(f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Såna avbildningar kallas <u>linjär</u>

↪ kursen linjär algebra handlar om dessa

↪ vi kommer kunna skriva D som en matris!

→ Vad tror vi är inversfunktionen D^{-1}... ?

Integrals anyone...?

Räkneregler derivator

Med hjälp av följande regler kan vi reducera komplicerade funktioner till elementära fall.

<u>Sats</u> (Kedjeregel)

Antag att g är deriverbar i a, och att f är deriverbar i punkten $b = g(a)$. Då är derivatan av den sammansatta funktionen

$$D(f \circ g)(a) = D(f)(g(a)) \cdot D(g)(a)$$

alternativ $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

→ "yttre derivata gånger inre derivata"

→ <u>Kom ihåg</u> $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

<u>Bevis</u>

$$D(f \circ g)(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}}_{= D(g)(a)}$$

variabelbyte $z = g(a+h) - g(a)$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{f(g(a)+z) - f(g(a))}{z} \cdot Dg(a)$$

$$= Df(g(a)) \cdot Dg(a) \qquad \square$$

En bra minnesregel är att när $z = f(y)$ och $y = g(a)$ då är

$$D(f \circ g)(a) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = (Df)(g(a)) \cdot (Dg)(a)$$

<u>Exempel</u> 1) $\sin(\omega x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

med $f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x)$

$g(x) = \omega x \qquad g'(x) = \omega$

$$\Rightarrow (\sin(\omega x))' = f'(g(x))\, g'(x)$$
$$= \cos(\omega x) \cdot \omega$$

2) $h(x) = e^{x^2} = f(g(x))$ med $f(x) = e^x \to Df(x) = e^x$

$g(x) = x^2 \to Dg(x) = 2x$

$$\Rightarrow D(h)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$
$$= e^{x^2} \cdot 2x$$

Summor, produkt och kvot

<u>Sats</u> Antag att f, g är reella funktioner som är deriverbara i punkten a. Då är även

1) $D(f+g)(a) = D(f)(a) + D(g)(a)$

$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2) $D(f \cdot g)(a) = D(f)(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot D(g)(a)$

$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

3) $D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{Df(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot Dg(a)}{(g(a))^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$

Bevis

1) $$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{1}{h}\left(f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)\right)$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$\Rightarrow D(f+g)(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left((f+g)(a+h)-(f+g)(a)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$= D(f)(a) + D(g)(a).$$

2) $$(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a) = f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)g(a)$$

$$= f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)$$

$$= \left(f(a+h)-f(a)\right)g(a+h) + f(a)\left(g(a+h)-g(a)\right)$$

$$D(f\cdot g)(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot g(a+h) + \lim_{h\to 0} f(a)\,\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$= Df(a)\cdot g(a) + f(a)\,Dg(a)$$

3) Boken kör algebra, men vi kan elegant använda 2) och kedjeregeln.

Betrakta $\frac{1}{g(x)} = (h\circ g)(x)$ med $h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

Vi vet redan att $Dh(x) = D(x^{-1}) = (-1)\,x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$$\Rightarrow D\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{-1}{g(x)^2}\cdot Dg(x)$$

Med detta blir

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = D\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)(a) = Df(a)\cdot\frac{1}{g(a)} + f(a)\cdot D\left(\frac{1}{g}\right)(a)$$

$$= \frac{Df(a)\cdot g(a)}{g(a)^2} + f(a)\cdot\frac{(-1)\cdot Dg(a)}{g(a)^2}$$

$$= \frac{Df(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot Dg(a)}{g(a)^2} \qquad \square$$

(förbättring)

Eftersom en konstant funktion har noll derivata

$$g(x) = c \quad\Rightarrow\quad D(g)(x) = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

gäller med 2) att

$$D(f\cdot g)(a) = D(f)(a)\cdot\underbrace{g(a)}_{=c} + f(a)\cdot\underbrace{D(g)(a)}_{=0} = c\cdot f(a)$$

och därför följande

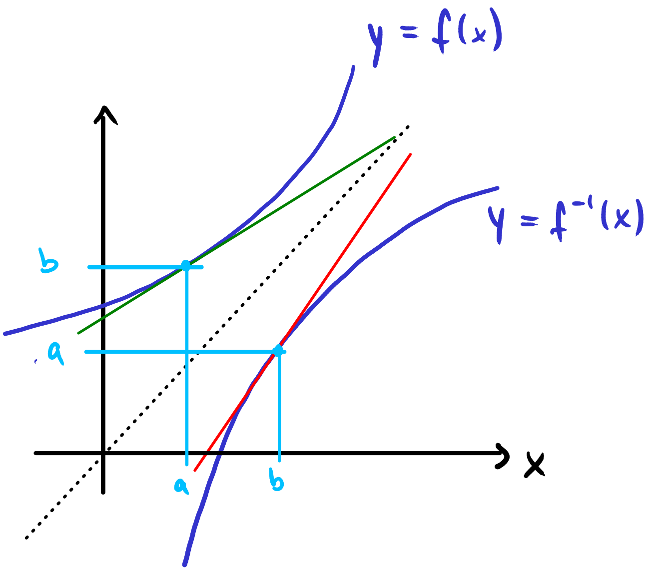
Följdsats Låt $c\in\mathbb{R}$ vara en konstant, då är

$$D(c\cdot f)(a) = c\cdot Df(a) \qquad (c\cdot f)' = c\cdot f'$$

Derivata av inversfunktioner

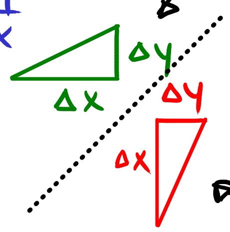
Betrakta funktionsgrafen av $y=f(x)$ och dess inversfunktion $y=f^{-1}(x)$

→ Dessa är relaterade genom spegling i linjen $y=x$.



funktionens lutning

$$f'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



inversfunktionens lutning

$$(f^{-1})'(b) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(a)}$$

Sats (Derivata av invers)

Antag att funktionen f har invers f^{-1}. Om f är deriverbar i punkten a med

$$Df(a) \neq 0$$

så är f^{-1} deriverbar i punkten $f(a)$ med

$$D(f^{-1})(f(a)) = \frac{1}{Df(a)}$$

alternativ beteckning

$$f'(a) \neq 0$$

$$b = f(a)$$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Bevis

$$D(f^{-1})(f(a)) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - \overbrace{f^{-1}(f(a))}^{a}}{h}$$

gör ett variabelbyte till $k = f^{-1}(f(a)+h) - a$

$$h \to 0 \Rightarrow k \to 0$$

$$k = f^{-1}(f(a)+h) - a \iff a+k = f^{-1}(f(a)+h)$$

$$\iff f(a+k) = f(a)+h$$

för att f är inverterbar alltså injektiv

då blir

$$D(f^{-1})(f(a)) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+h) - f^{-1}(f(a))}{h}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{f(a+k)-f(a)}{k}} = \frac{1}{Df(a)} \qquad \square$$

Med dessa regler kan vi nu derivera våra elementära funktioner.

Derivata av elementära funktioner

1) $D(e^x) = e^x$ $\Rightarrow D(\ln x) = \frac{1}{x}$ för $x>0$

2) $D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$

3) $D(a^x) = a^x \ln a$ för $a>0$ konstant

4) $D\,{}^a\!\log(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ för $a>0$, $a \neq 1$ konstant

5) $D(\sin(x)) = \cos(x)$

6) $D(\cos(x)) = -\sin(x)$

7) $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

8) $D(\cot(x)) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$

9) $D(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10) $D(\arccos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $D(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$

12) $D(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{-1}{1+x^2}$

13) $D(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, för $\alpha \neq 0$ konstant

Lär dig dessa utantill!

Hur?
→ gå genom bevisen
→ rita grafen (speciellt för arccus funktioner)

Bevis

1), 5), 6) har vi redan gjort förra gången → tänk på grafen av sin & cos för att komma ihåg

2) om $x>0$ är $f^{-1}(x) = \ln x$ inversfunktionen av $f(x) = e^x$

$$\Rightarrow D(\ln x) = D(f^{-1})(x) = \frac{1}{Df(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

om $x<0$ kombinerar vi med kedjeregeln

$\ln|x| = \ln(-x) = f(g(x))$ med $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = -x$

$Df = \frac{1}{x}$ $\quad Dg = -1$

$$\Rightarrow D(\ln|x|) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

därför för alla $x \neq 0 \Rightarrow D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$

3) $D(a^x) = D(e^{\ln a \cdot x}) = e^{\ln a \cdot x} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

kedjeregel

4) Inversfunktion $f^{-1}(x) = {}^a\log(x)$ av $f(x) = a^x$

$$\Rightarrow D(f^{-1})(x) = \frac{1}{Df(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot a^{{}^a\log x}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

7) $$D(\tan(x)) = D\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-1) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

8) $$D(\cot(x)) = D\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \frac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin(x)^2} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

9) $\arcsin(x) = f^{-1}(x)$ för $f(x) = \sin(x)$

$$\Rightarrow D(\arcsin(x)) = \frac{1}{Df(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$\arcsin(x)$ har värdemängd $[-\pi/2, \pi/2]$, på detta intervall är $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \Rightarrow \cos(x) \geq 0$.

Dessutom på grund av $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\Rightarrow \quad 1 = \cos^2(\arcsin(x)) + \underbrace{\sin^2(\arcsin(x))}_{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad D(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10) $\arccos(x) = f^{-1}(x)$ för $f(x) = \cos(x)$

$$\Rightarrow \quad D(\arccos(x)) = \frac{1}{Df(f^{-1}(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))}$$

värdemängden är $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$

$$\Rightarrow \quad \sin(\arccos(x)) \geq 0$$

igen med trigettan $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$

$$\Rightarrow \quad D(\arccos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11) $D(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \dfrac{\cos^2(\arctan(x))}{1}$ som inversfunktion

$$= \frac{\cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

12) $D(\operatorname{arccot}(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{-1}{\sin^2(\operatorname{arccot}(x))}} = \dfrac{-\sin^2(\operatorname{arccot}(x))}{\sin^2(\operatorname{arccot}(x)) + \cos^2(\operatorname{arccot}(x))}$

$$= \frac{-1}{1 + \left(\dfrac{\cos(\operatorname{arccot}(x))}{\sin(\operatorname{arccot}(x))}\right)^2} = \frac{-1}{1 + \cot^2(\operatorname{arccot}(x))} = \frac{-1}{1 + x^2} \quad \square$$

13) (kom ihåg beviset för $\alpha \in \mathbb{N}$ i förra föreläsning)

om $x>0$: $x^\alpha = e^{\ln(x)\alpha} = f(g(x))$

med $f(x) = e^x \Rightarrow Df(x) = e^x$ följdsats och 2)

$g(x) = \alpha \cdot \ln(x) \quad Dg(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x}$

$$D(x^\alpha) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$
$$= e^{\ln(x)\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

om $x<0$: om x^α är definierad (t.ex. för $\alpha = \frac{1}{3}$ men inte för $\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{1/2} = \sqrt{x}$) så gäller

$$x^\alpha = (-1)^\alpha \cdot (-x)^\alpha \quad \text{och} \quad -x>0$$

$$\Rightarrow D(x^\alpha) = D((-1)^\alpha (-x)^\alpha)$$
$$= (-1)^\alpha D((-x)^\alpha) \qquad (-x)^\alpha = f(g(x))$$
$$= (-1)^\alpha Df(g(x)) Dg(x) \qquad g(x) = -x$$
$$\qquad f(x) = x^\alpha \text{ för } x>0.$$
$$= (-1)^\alpha \alpha(-x)^{\alpha-1} \cdot (-1)$$
$$= (-1)^{\alpha+1} \alpha (-x)^{\alpha-1}$$
$$= (-1)^2 \alpha (-x)^{\alpha-1} = \alpha(-x)^{\alpha-1}$$

i punkten $x=0$: → vi antar igen att x^α är definierad för $x<0$ så att gränsvärdet kan existera (behöver omgivning av 0)

→ dessutom antag att $\alpha>1$ så att $x^{\alpha-1}$ är definierad för $x=0$

då är

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^\alpha - 0^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\alpha-1}$$
$$= 0 = \alpha\, 0^{\alpha-1} \qquad \square$$