

Gränsvärden av summor, produkt och kvot

För att bestämma exempel som

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + e^{-x}x^3}{1+4x-x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + e^{-x}x}{\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1} = \frac{3 + 0}{0+0-1} = -3\end{aligned}$$

analyserar man varje enstaka term och sätter ihop gränsvärdena.

Detta är möjligt på grund av följande sats (sats 9.1 i boken)

Sats Antag att f och g är funktioner sådana att

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) \in \mathbb{R} \text{ och } \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) \in \mathbb{R}$$

gäller för
 $x \rightarrow 2^\pm$ ensidig
 $x \rightarrow 2$
 $x \rightarrow \pm\infty$

existerar som (ändliga) tal och där $a \in \mathbb{R}$ eller $a = \infty$.

Då gäller

$$1) \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x)}, \text{ om } \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) \neq 0$$

Observera att satserna håller för gränsvärden i ändigheter och oändligheter.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ osv.}$$

men inte för oegentliga gränsvärden $f \rightarrow \pm\infty$ (se nedanför)

Bewis för 2) och i fallet att $\lim_{x \rightarrow a}$ med $a \in \mathbb{R}$:

se bevis av 1) ibdeem

Låt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ och $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. → detta gör

För varje $\varepsilon > 0$, kan vi då välja ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att

om $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$ då gäller allt detta möjligt

$$|g(x) - B| \cdot |A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(x) - A| \cdot |B| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{viktigt om } A \neq 0, B \neq 0$$

$$|f(x) - A| < 1, \quad |g(x) - B| < 1 \quad \text{viktigt i fall } \varepsilon > 1$$

$$\text{och } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{alltid viktigt.}$$

Då är

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - A \cdot B| &= |(f(x)-A+A)(g(x)-B+B) - A \cdot B| \\ &= |(f(x)-A)(g(x)-B) + (f(x)-A)B + (g(x)-B)A| \\ &\leq |f(x)-A| \cdot \overbrace{|g(x)-B|}^{0 \leq \dots < 1} + |f(x)-A| \cdot |B| + |g(x)-B| \cdot |A| \\ &< |f(x)-A| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Villeket bevisar att $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \cdot B$.

Exempel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{e^{-x} + 1} = \frac{\pi/2}{0+1} = \frac{\pi}{2}$$

$\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \pi/2$
 $e^{-x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x) x^2 + 2}{2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x) + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{\pi/2 + 0}{2 + 0} \text{ nu går det bra!}$$

$\arctan(x) x^2 + 2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \cdot \infty + 2$
 använd inte satsen direkt

Satsen anter att $A, B \in \mathbb{R}$ är (äntliga) tel. Men den fungerar också i fallen

$$"\infty + B" = \infty$$

$$"- \infty + B" = -\infty$$

$$"\infty + \infty" = \infty$$

$$"- \infty - \infty" = -\infty$$

$$"\infty \cdot \infty" = "-\infty \cdot -\infty" = \infty$$

$$"\infty \cdot B" = \begin{cases} +\infty, B > 0 \\ -\infty, B < 0 \end{cases}$$

$$"- \infty \cdot B" = \begin{cases} -\infty, B > 0 \\ +\infty, B < 0 \end{cases}$$

Exempel

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = \infty + 0 = \infty$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 8x^4) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 8\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} - 8\right) \\ &= \infty \cdot (0 - 8) = \infty \cdot (-8) = -\infty \end{aligned}$$

" $\infty + B$ "

OBSERVERA Om ett gränsvärde ser ut som

$$"\infty - \infty" \quad "\infty \cdot 0" \quad " \frac{\infty}{\infty}"$$

kan man inte använda satsen. Strategi är att först bryta ut den dominanta (starkaste) termen som ovanför.

Exempel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \log x}{x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x} + \frac{\log x}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^3}} = 1 \cdot \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

Med sammansättning och variabelbytte hittar vi de följande stora gränsvärden:

$$0) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \alpha > 0.$$

Beweis

$$\begin{aligned} 0) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x &= \lim_{y \rightarrow \infty} \underbrace{(1 - \frac{1}{y})^{-y}}_{x=-y} = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{y}}\right)^y = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 \cdot e = e \end{aligned}$$

1) kolla på ensidiga gränsvärden

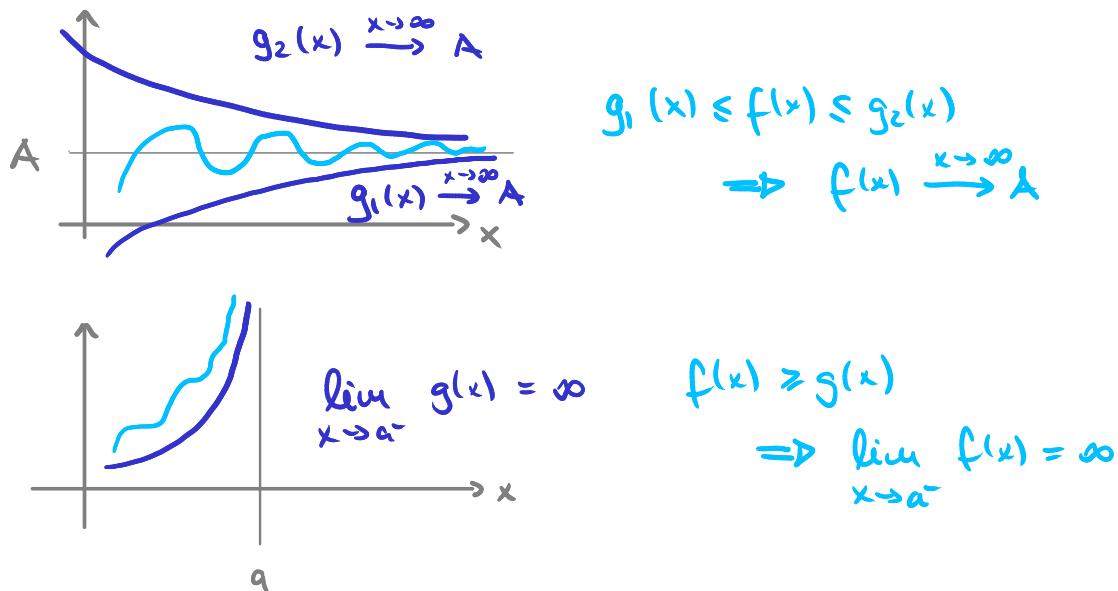
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\frac{1}{x} \ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \ln((1+x)^{1/x}) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \ln((1+\frac{1}{t})^t) \\ &\quad t = \frac{1}{x} \\ &= \ln(\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (1+\frac{1}{t})^t) = \ln(e) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1 \\ e^x - 1 &= t \Rightarrow x = \ln(1+t) \\ x \rightarrow 0 &\Rightarrow t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^\alpha} \ln(\frac{1}{t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(-1) \cdot \ln(t)}{t^\alpha} = 0.$$

Instängning av funktioner

En sista teknik för gränsvärden är att stänga in en funktion mellan funktioner med bekanta gränsvärden.



Sats I) Antag att två funktioner

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g_2(x) = A$$

för ett tal $A \in \mathbb{R}$ och $a \in \mathbb{R}$ eller $a = +\infty$. Och att

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

för alla x i något interval $a - \delta < x < a$ med $\delta > 0$. Då gäller

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A.$$

II) Alternativt, om $\lim_{x \rightarrow a^-} g_1(x) = \infty$ och $g_1(x) \leq f(x)$

för något interval $a - \delta < x < a$ då gäller också

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty.$$

OBSERVERA

→ Vi formulerade satsen för $x \rightarrow a^-$ men den gäller också för $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow -\infty$ och $x \rightarrow a$.

→ Den hjälper ofta när $\sin()$ och $\cos()$ förekommer för att $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Exempel

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x}$

Vi har $\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ för alla $x > 0$.

Eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + \cos(x))^x =$

Vi har att $3 + \cos(x) \geq 2$ för alla $x > 0$ och därför också $(3 + \cos(x))^x \geq 2^x$.

Eftersom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (3 + \cos(x))^x = \infty$$

korrigering

Sinc - Funktionen

Som sista standardgränsvärde återstår

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Boken ger en bevis som bygger på (Sats 8.5, Exempel 9.17)

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(x) < x < \tan(x).$$

Som komplement ges ett bevis med serier.

Bevis (en steiss, då vi inte har diskuterat gränsvärden av serier noggrant)

Eftersom

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

så är för alla $x \neq 0$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Vi vet att

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

och att $\lim e^x - 1 = 0$. Men vi har att för $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| &= \left| \frac{-x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right| \\ &\leq \left| \frac{x^2}{3!} \right| + \left| \frac{x^4}{5!} \right| + \left| \frac{x^6}{7!} \right| + \dots \\ &< \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^4}{4!} + \frac{|x|^6}{6!} + \dots < |x| + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \frac{|x|^4}{4!} + \dots \\ &= e^{|x|} - 1 \end{aligned}$$

här hoppar vi över detaljer om serier

Så om vi väljer $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att

$$|x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |e^{|x|} - 1| < \varepsilon \Rightarrow e^{|x|} - 1 < \varepsilon$$

då gäller också

$$|x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| < e^{|x|} - 1 < \varepsilon.$$

Därför gäller

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \square$$