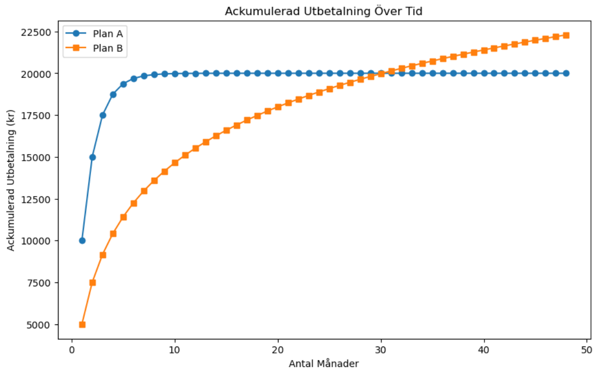
Absolutbelopp och (en introduktion till) gränsvärden & serier

- den totala vinsten i "Plan A" verkade förbli under 20.000 kr



- en talföljd som $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ "närmar" sig $a_n \to 0$ för stora n

Dessa är exempel på talföljder som har ett gränsvärde.

→ För att definiera vad vi menar med att "talen närmar sig" behöver vi kunna mäta avstånd mellan reella tal ...

Absolutbelopp (av reella tal) (Kap 5.3)

Def Absolutbeloppet av en reell tal $x \in \mathbb{R}$ är

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } -x < 0 \end{cases}.$$

Exempel

$|2| = 2$

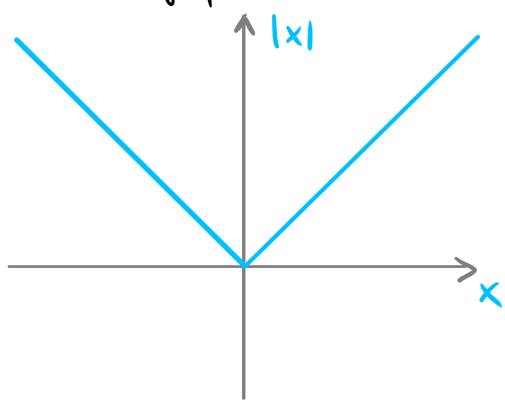
$|-\sqrt{2}| = -\sqrt{2}$

$|3.5| = 3.5$

$|0| = 0$

$|-100| = 100$

Funktionsgraf $y = |x|$



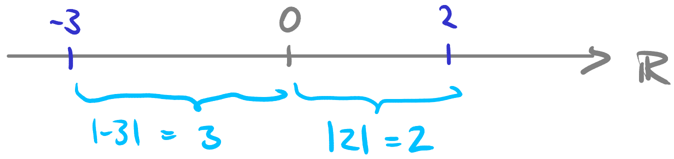
positivt eller noll

Observera att absolutbeloppet alltid är icke-negativt

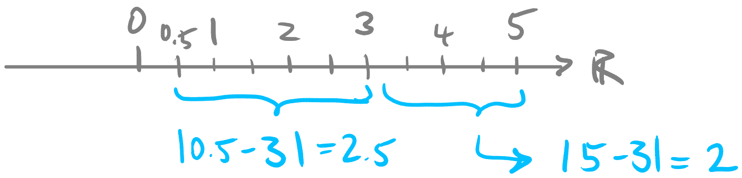
$$|x| \geq 0 .$$

"Noll"

Absolutbeloppet av ett tal $|x|$ mäter avståndet mellan x och origo.

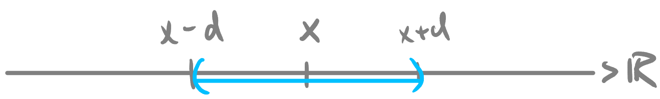


Absolutbeloppet $|x-a|$ mäter avståndet mellan x och a.



Definition En omgivning av ett reellt tal $x \in \mathbb{R}$ är en mängd av alla punkter $y \in \mathbb{R}$ så att

$$|y - x| < d \quad \text{för något } d > 0.$$



$$(x-d, x+d) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < d \}$$

Omgivningen innehåller alltså alla punkter vars avstånd till x är mindre än d.

Absolutbeloppet har följande egenskaper

a) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

b) $|x| = |-x|$

c) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

d) $|x^2| = |x|^2$, gäller allmänt $|x^n| = |x|^n$ för $n \in \mathbb{N}$!

Som är enkla att bevisa. $\longrightarrow$ börja med a). från a) följer b) - d).

En viktig olikhet när vi arbetar med avstånd är:

Sats (Triangelolikheten) Låt $x, y \in \mathbb{R}$ vara reella tal, då är

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Bevis För alla reella tal gäller att

$$x \leq |x| \quad \text{och att} \quad -x \leq |x| \qquad (\star)$$

Antingen är $x+y \geq 0$ eller $x+y < 0$.

1) Om $x+y \geq 0$ är icke-negativ då är

$$|x+y| = \underbrace{x}_{\leq |x|} + \underbrace{y}_{\leq |y|} \overset{(\star)}{\leq} |x| + |y|$$

2) Om $x+y \leq 0$, då är

$$|x+y| = -(x+y) = \underbrace{(-x)}_{-x \leq |x|} + \underbrace{(-y)}_{-y \leq |y|} \overset{\star}{\leq} |x| + |y|$$

Påståendet gäller i båda fall. $\square$

$\boxed{\text{Ekvationer med absolutbelopp}}$ kan vara lite kluriga. Men det är inte svårt om man skiljer de två möjliga fallen för varje $|\ldots|$

<u>Exempel</u> Vilka lösningar har

$$|x-2| = 2x+3 \quad ?$$

↳ det finns två möjliga fall

a) $\underline{x-2 \geq 0}$ i så fall är $|x-2| = x-2$, därför

$$|x-2| = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2 = 2x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -5$$

↯ men $x=-5$ uppfyller inte antagandet $x-2 \geq 0$

$\Rightarrow$ ingen lösning i fallet $x-2 \geq 0$

b) $\underline{|x-2| < 0}$, i detta fall $|x-2| = -(x-2)$

* korrektur

$$|x-2| = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow \quad -x+2 = 2x+3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1/3$$

Vi ser att $\frac{-1}{3} - 2 = \frac{-7}{3} < 0$ vilket uppfyller antagandet

Ekvationen har lösningen $x = -1/3$.

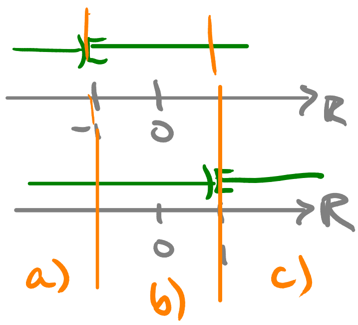
Exemplet hade bara en lösning, men det kan finnas två (och fler).

(→ kolla exempel 5.14 i boken $|2x-1| + |2x+1| + x = 4$, och övning 5.21)

<u>Exempel</u> $|x+1| + |x-1| = -2x$

För $|x+1|$ har vi fallen $x \geq -1$, $x < -1$

för $|x-1|$ har vi fallen $x \geq 1$, $x < 1$



$\Rightarrow$ vi kan kombinera till tre fall

a) $x < -1$ b) $-1 \leq x < 1$ c) $1 \leq x$

a) ekvationen blir

$$-(x+1) - (x-1) = -2x$$

$\Leftrightarrow$ $-2x = -2x$ $\Leftrightarrow$ $-2 = -2$ håller för alla $x < -1$!

b) ekvationen blir

$$x+1 - (x-1) = -2x \Leftrightarrow 2 = -2x \Leftrightarrow x = -1$$

enda lösningen för $-1 \leq x < 1$ är just $x = -1$

c) ekvationen blir

$$x+1+x-1 = -2x \Leftrightarrow 2x = -2x \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$$

↯ antagandet var att $x > 1$ $\Rightarrow$ ingen lösning här

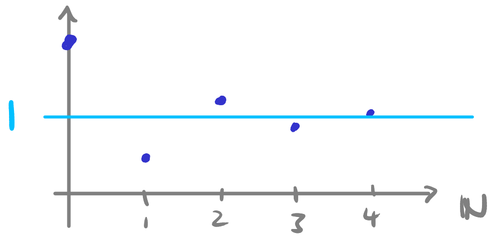
<u>Svar</u> Alla $x \leq -1$ löser ekvationen.

tänkt som inspirerande slut på första veckan :)
abstrakt och vackert – vi återkommer till koncepten senare

Introduktion till gränsvärden och serier (Kapitel 9.5)

Talföljden

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} + 1 \Rightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} = 2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{17}{16}$$



hoppar upp och ner, men den närmar sig 1 för större och större n, det vill säga att avståndet $|a_n - 1|$ blir så litet som vi vill om n väljs stort.

Def En talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ har gränsvärde $x \in \mathbb{R}$ och vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \quad \text{eller} \quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} x$$

om det för varje $\delta > 0$ finns ett $N \in \mathbb{N}$ så att

$$|a_n - x| < \delta \quad \text{för alla } n \geq N.$$

avståndet blir   jätte liten   om vi går tillräckligt långt i följden

Exempel Talföljden $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ har gränsvärdet

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

* korrelektur

Bevis För godtyckligt $\delta > 0$, välj $N > \frac{1}{\delta} - 1$ då gäller

$$n \geq N: \quad |a_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{1}{|n+1|}$$

$$\leq \frac{1}{|N+1|} < \frac{1}{\left|\frac{1}{\delta} - 1 + 1\right|} = \frac{1}{|1/\delta|} = |\delta| = \delta \qquad \square$$

Speciellt intressant är gränsvärden av serier...

Def Serien $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ av en talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ är följden bestående av talföljdens delsummor $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Den geometriska talföljden $a_k = q^k$ för $0<q<1$ ger den geometriska serien

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Denna har gränsvärdet

$$\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \longrightarrow \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$$

Vi skriver

"oändlighet" ∞

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$$

för $0<q<1$!

→ Därför ger Plan A, med månadsvis utbetalning $a_n = 10.000 \frac{1}{2^n}$ totalt aldrig mera än

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} 10000 \frac{1}{2^k} = 10000 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 10000 \overbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}^{=2} = 20\,000$$

→ Plan B hade utbetalningar $b_k = 5.000 \cdot \frac{1}{k+1}$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} 5000 \cdot \frac{1}{k+1} = 5000 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}}_{H_{n+1}}$$

Här förekommer den harmoniska serien

$$H_n = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \longleftarrow H_n: \text{"harmoniskt tal"}$$

Denna serier divergerar – den växer utan begränsning!

Om vi ser på H_8, kan vi visa att den är större än $1+\frac{3}{2}$

$$H_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$
$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

Fortsätter man argumentet ser man att

kan bli oändligt stort $\longrightarrow$ $1 + \frac{m}{2} \leq H_{2^m}$

$$\Rightarrow \quad H_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Därför växer också de totala utbetalningarna i Plan B utan gräns (men mycket långsamt).

Serier som funktioner

Serier kan användas för att definiera funktioner!

- exponentialfunktionen

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

- trigonometriska funktioner

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2k}}{(2k)!}$$

med detta...
TREVLIG HELG!