

Gränsvärden av summor, produkt och kvot

För att bestämma exempel som

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + e^{-x}x^3}{1 + 4x - x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + e^{-x}x}{\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 1} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1} = \frac{3 + 0}{0 + 0 - 1} = -3\end{aligned}$$

analyserar man varje enskild term och räknar ihop gränsvärdena.

Detta är möjligt på grund av följande sats (sats 9.1 i boken)

Sats Antag att f och g är funktioner sådana att

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) \in \mathbb{R}$$

gäller för
 $x \rightarrow 2^\pm$ ensidigt
 $x \rightarrow 2$
 $x \rightarrow \pm\infty$

existerar som (ändliga) tal och där $a \in \mathbb{R}$ eller $a = \infty$.

Då gäller

$$1) \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x)}, \quad \text{om} \quad \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) \neq 0$$

Observera att satsen gäller för gränsvärden i ändlighet och oändlighet,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{osv.}$$

men inte för egentliga gränsvärden $f \rightarrow \pm\infty$ (se nedanför)

Beweis för 2) och i fallet att $\lim_{x \rightarrow a}$ med $a \in \mathbb{R}$: ↖ se bevis av 1) ibooken

Låt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ och $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. → detta gör

För varje $\varepsilon > 0$, kan vi då välja ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att

om

$0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$ då gäller

allt detta möjligt

$$|g(x) - B| \cdot |A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(x) - A| \cdot |B| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{viktigt om } A \neq 0, B \neq 0$$

$$|f(x) - A| < 1, \quad |g(x) - B| < 1 \quad \text{viktigt i fall } \varepsilon > 1$$

$$\text{och } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{alltid viktigt.}$$

Då är

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - A \cdot B| &= |(f(x) - A + A)(g(x) - B + B) - A \cdot B| \\ &= |(f(x) - A)(g(x) - B) + (f(x) - A)B + (g(x) - B)A| \\ &\leq |f(x) - A| \cdot \underbrace{|g(x) - B|}_{0 \leq \dots < 1} + |f(x) - A| \cdot |B| + |g(x) - B| \cdot |A| \\ &< |f(x) - A| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Vilket bevisar att $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \cdot B$.

Exempel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{e^{-x} + 1} = \frac{\pi/2}{0 + 1} = \frac{\pi}{2}$$

↖ $\pi/2$
↘ $\rightarrow 0$ ↘ $\rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x) x^2 + 2}{2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x) + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{\pi}{4}$$

↪ ses ut som $\frac{\infty \cdot \infty + 2}{\infty + \infty}$
använd inte satsen direkt ↪ $\frac{\pi/2 + 0}{2 + 0}$ nu går det bra!

Satsen antar att $A, B \in \mathbb{R}$ är (ärliga) tal. Men den fungerar också i fallen

$$" \infty + B " = \infty$$

$$" -\infty + B " = -\infty$$

$$" \infty + \infty " = \infty$$

$$" -\infty - \infty " = -\infty$$

$$" \infty \cdot \infty " = " -\infty \cdot -\infty " = \infty$$

$$" \infty \cdot B " = \begin{cases} +\infty, & B > 0 \\ -\infty, & B < 0 \end{cases}$$

$$" -\infty \cdot B " = \begin{cases} -\infty, & B > 0 \\ +\infty, & B < 0 \end{cases}$$

Exempel

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = \infty + 0 = \infty$$

$" \infty + B "$

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 8x^4) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 8 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} - 8 \right) \\ &= \infty \cdot (0 - 8) = \infty \cdot (-8) = -\infty \end{aligned}$$

$" \infty \cdot B "$

OBSERVERA Om ett gränsvärde ser ut som

$$" \infty - \infty " \quad " \infty \cdot 0 " \quad " \frac{\infty}{\infty} "$$

kan man inte använda satsen. Strategi är att först bryta ut den dominerande (starkaste) termen som överför.

Exempel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \log x}{x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x} + \frac{\log x}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^3}} = 1 \cdot \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

Med sammansättning och variabelbyte hittar vi de följande standardgränsvärden:

$$0) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \alpha > 0.$$

Bevis 0) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y}}_{x=-y}$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y \stackrel{y=z+1}{=} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 \cdot e = e$$

1) kolla på ensidiga gränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\frac{1}{x} \ln(1+x) = \ln\left((1+x)^{1/x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right) = \ln(e) = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} \stackrel{1)}{=} \frac{1}{1} = 1$$

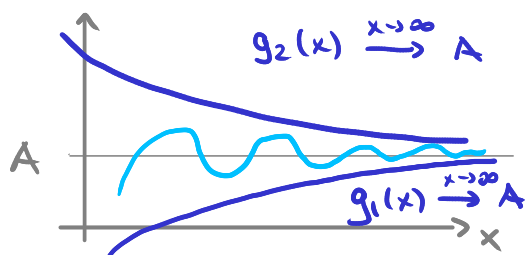
$e^x - 1 = t \Rightarrow x = \ln(1+t)$
 $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(-1) \cdot \ln(t)}{t^\alpha} = 0.$$

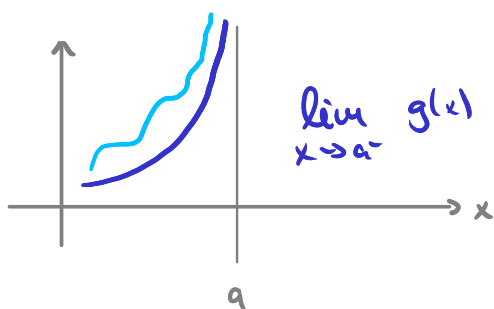
$x = \frac{1}{t}$

Instängning av funktioner

En sista teknik för gränsvärden är att stänga in en funktion mellan funktioner med bekanta gränsvärden.



$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x) \\ \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \infty$$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

Sats I) Antag att två funktioner

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g_2(x) = A$$

för ett tal $A \in \mathbb{R}$ och $a \in \mathbb{R}$ eller $a = +\infty$. Och att

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

för alla x i något intervall $a - \delta < x < a$ med $\delta > 0$. Då gäller

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A.$$

II) Alternativt, om $\lim_{x \rightarrow a^-} g_1(x) = \infty$ och $g_1(x) \leq f(x)$

för något intervall $a - \delta < x < a$ då gäller också

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty.$$

OBSERVERA

→ Vi formulerade satsen för $x \rightarrow a^-$ men den gäller också för $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow -\infty$ och $x \rightarrow \infty$.

→ Den hjälper ofta när $\sin()$ och $\cos()$ förekommer för att $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Exempel

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x}$

Vi har $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ för alla $x > 0$.

Eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + \cos(x))^x =$

Vi har att $3 + \cos(x) \geq 2$ för alla $x > 0$ och därför också $(3 + \cos(x))^x \geq 2^x$.

Eftersom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{(3 + \cos(x))^x}_{\text{korrigering}} = \infty$$

Sinc - Funktionen

Som sista standardgränsvärde åtestår

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Boken skisserar en bevis som bygger på (Sats 8.5, Exempel 9.17)

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(x) < x < \tan(x).$$

Som komplement skisserar vi beviset med serier.

Bevis (en skiss, då vi inte har diskutant gränsvärden av serier noggrant)

Eftersom

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

så är för alla $x \neq 0$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Vi vet att

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

och att $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$. Men vi har att för $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| &= \left| -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right| \\ &\leq \left| \frac{x^2}{3!} \right| + \left| \frac{x^4}{5!} \right| + \left| \frac{x^6}{7!} \right| + \dots \\ &< \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^4}{4!} + \frac{|x|^6}{6!} + \dots < |x| + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \frac{|x|^4}{4!} + \dots \\ &= e^{|x|} - 1 \end{aligned}$$

här hoppar vi över detaljer om serier

Så om vi väljer $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att

$$|x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |e^x - 1| < \varepsilon \Rightarrow e^{|x|} - 1 < \varepsilon$$

då gäller också

$$|x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| < e^{|x|} - 1 < \varepsilon.$$

Därför gäller

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \square$$