Binomialsatsen, lite kombinatorik & Pascals triangel (Kap 4.2)

Mål → Binomialsatsen $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

→ repetition av kombinatorik

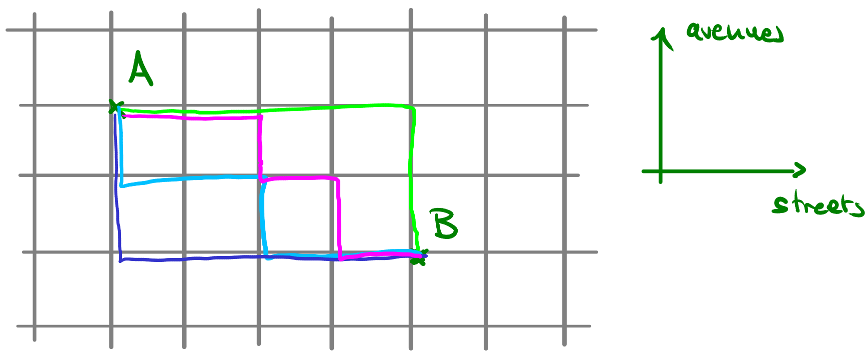
Industriella optimeringsproblem som ruttplanering och schemaläggning är ofta kombinatoriska. Dessa är svåra (och därav dyra!) för att antalet möjliga lösningar (kombinationer) växer otroligt snabbt.

"Taxi Pascal"

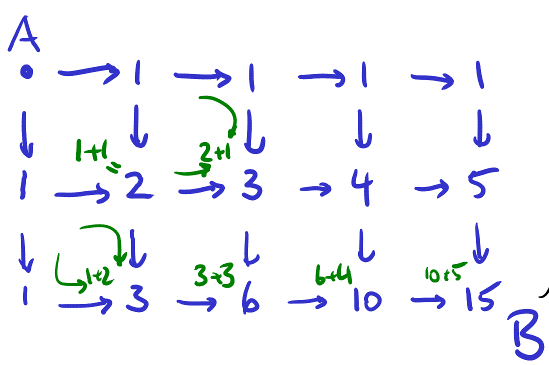
vi tänker oss ett rutnät

Pascal är taxiförare på Manhattan. Han ska plocka upp Alice och köra henne till Bob. Hur många möjliga (kortast) rutter finns det?

→ Bob bor fyra avenyer väst och två gator söder om Alice...



Vi kan räkna rutter systematiskt genom att summera upp rutter korsning för korsning



Pascal kan välja 15 olika rutter!

I lösningen använde vi Pascals triangel som vanligtvis presenteras som

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & & & & \dots & & & & & & & \\
\end{array}
$$

Varje tal är summan av de två talen ovanför.

Här har vi beräknat triangeln rekursivt – det är långsamt ...

går det explicit ...?

För detta tar vi en liten introduktion till

KOMBINATORIK

Fråga 1

Hur många möjligheter finns det att ställa up fem studenter i en rad?

ABCDE, ABCED, ABECD, ... ?

→ För första student har vi 5 olika val: A, B, C, D, E

→ för 2:a student: 4 val

→ för 3:e student: 3 val

→ för 4:e student: 2 val

→ för 5:e student: 1 val

$\Rightarrow$ $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ olika ordningar!

För k olika element finns det

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k \quad \leftarrow k! \text{ "k fakultet"}$$

olika permutationer (olika uppradningar).

Def Låt $k \in \mathbb{N}$, vi definierar fakultetet av k som

$$k! = \begin{cases} 1, & \text{om } k = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k, & \text{om } k \geq 1 \end{cases}$$

Fråga 2

Hur många möjligheter finns det att forma ett lag bestående av <u>fem studenter</u> ur en hörsal <u>av 150 studenter</u>?

→ när jag väljer ut studenter har jag först 150, sedan 149, sedan 148, sedan 147, sist 146 val ...

$$150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 146 = 70\,992\,003\,600$$

→ <u>men</u> turordningen spelar ingen roll! Vi behöver dela med antalet permutationer $5! = 120$

⇒ <u>Svar</u>: $\dfrac{150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 146}{5!} = \dfrac{70\,992\,003\,600}{120} = 591\,600\,030$

Observera att vi kan skriva svaret som

$$\frac{150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 146}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 146 \cdot 145 \cdot 144 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)\,(145 \cdot 144 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1)}$$

$$= \frac{150!}{5! \cdot 145!} = \binom{150}{5}$$

där vi använder

<u>binomialkoefficienten</u> $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

deras ordning spelar <u>ingen</u> roll!

För att välja ut en delmängd av k element ur en mängd av n element finns det

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

olika möjligheter.

Hur hjälper detta Pascal och hans taxirutt?

→ vägen från A till B är sex sträckor

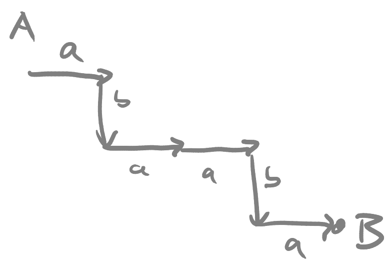
→ två ner en aveny. (↓), resten längs gator (→)

⇒ samma problem som att "välja två ur sex"

↖ två avenyer ur sex sträckor

Exempel

sträcka	1	2	3	4	5	6
nedåt aveny (↓)		b			b	
längs gata →	a		a	a		a



Pascal har därfor

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

möjliga rutter från Alice till Bob.

Pascals triangel kan därför beräknas med binomialkoefficienter

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

Fun fact: Vi ser att

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} & \cdots \\ & & \oplus & & \\ \cdots & & \binom{n}{k} & & \cdots \end{array}$$

Binomialsatsen

Binomialsatsen fungerar i princip som att köra taxi på Manhattan...!

Ex $(a+b)^6 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$

$$= 1\cdot a^6 + 6\cdot a^5 b + 15\cdot a^4 b^2 + 20\, a^3 b^3 + 15\cdot a^2 b^4 + 6\, a b^5 + 1\cdot b^6$$

antal möjligheter att välja 2 gånger b av totalt 6 faktorer $(a+b)$...

$$= \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a^1 b^5 + \binom{6}{0} b^6$$

$$= \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^{6-k} b^k$$

Sats (Binomialsatsen)

Låt $x, y \in \mathbb{R}$ vara reella tal och $n \in \mathbb{N}$ ett naturligt tal, då

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$