Primitivfunktioner

(Kap 12.1, 12.2)

Innehåll
- "Invers av derivering"
- motivering och användningar
- standardfall och räkneregler

Exempel "Design av kulbana"

Vill bygga en kulbana med höjdprofil sådan att

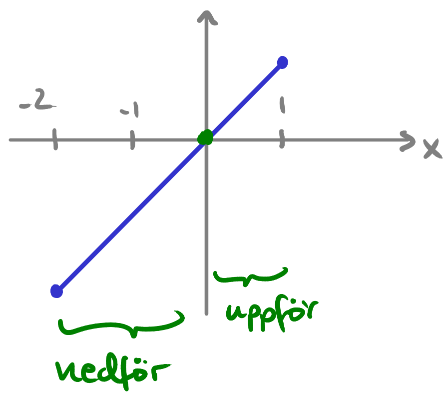
$$\frac{dy}{dx} = x \quad \text{för} \quad -2 \le x \le 1$$

där y: höjd i meter, x: horizontal sträcka i meter

→ Vilken höjdskillnad kommer banan ha mellan start, lägsta punkt och slut?

→ Hur ser möjliga profiler $y(x)$ ut?

Låt oss skissa $y'(x) = \frac{dy}{dx}$:



→ nedförsbacke $-2 \le x < 0$

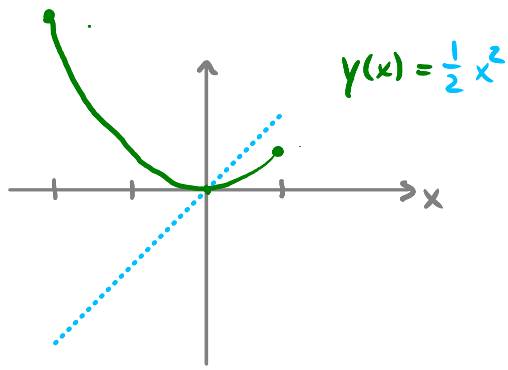
→ uppför $x > 0$

→ $y'(0) = 0 \Rightarrow$ lokal minimum i profilen $y(x)$

Vilken funktion passar till detta?

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = x$$

eller $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ med konstant $C \in \mathbb{R}$



Höjdskillnad start - minimi:

$$y(0) - y(-2) = 0 - \frac{4}{2} = -2$$

start till slut

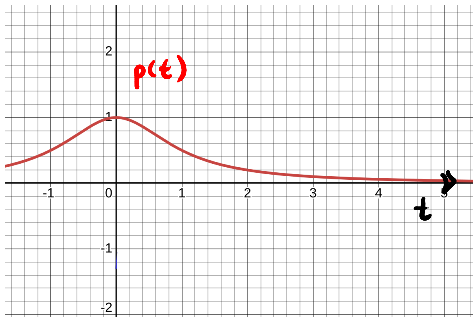
$$y(1) - y(-2) = \frac{1-4}{2} = \frac{-3}{2}$$

negativ höjdskillnad ⇒ kulan går nedför

Exempel Räkning elbilsladdning

Vi laddar en elbil med en effekt som är

$$p(t) = \frac{1}{1+t^2}$$



där p: effekt i kW

t: tid i timmar

Hur mycket kWh har vi laddat efter 2 timmar?

→ $p(t)$ effekten är derivatan av

$$Q'(t) = \frac{dQ}{dt} = p(t)$$

där $Q(t)$: laddad energi mätt i kWh

→ kom ihåg att $D(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \quad Q(t) = \arctan(t) + Q_0$$ laddning vid $t=0$

→ efter två timmar $Q(2) - Q(0) = \arctan(2) - \arctan(0)$

$= \arctan(2) \approx 1.1$

har vi laddat 1.1 kWh.

→ Båda exemplen är upp och ner vänt från exemplen som introducerade derivatan.

→ Hastigheter, lutning, flöden är typiska storheter som motsvaras derivator (av position, höjd, laddning eller liknande)

→ Derivatan bestämmer funktionen upp till en additiv konstant

⇒ kan vi hitta en primitiv funktion $f(x)$ till $f'(x)$

så kan vi beräkna förändring av position, höjd, laddning.

Primitiva Funktioner

Def En funktion F kallas <u>primitiv funktion</u> till funktionen f på intervallet I, om för alla $x \in I$

$$F'(x) = f(x).$$

Exempel

a) $f(x) = x+3$

möjlig primitiv $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$ eller $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3 \cdot x - 42$

→ **Test**: $D(\frac{1}{2}x^2 + 3x) = \frac{1}{2} \cdot 2x + 3 = 2x + 3 = f(x)$

$$D(\frac{1}{2}x^2 + 3x - 42) = \underbrace{D(\frac{1}{2}x^2 + 3x)}_{f(x)} - \underbrace{D(42)}_{=0} = f(x)$$

b) $f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$F_1(t) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$ eller $F_2(t) = \frac{A}{\omega}(\sin(\omega t + \varphi) + 1)$

Test: $D(F_2(t)) = D(\frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + \frac{A}{\omega})$

$$= D(\underbrace{\tfrac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)}_{F_1(t)}) = \frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Hur många primitivfunktioner finns det för f ...?

Sats Om F är en primitiv funktion till f på ett intervall, då kan varje primitiv funktion G till f på intervallet skrivas på formen

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{för en konstant } C.$$

(Detta bevisade vi redan i F14: $f' = g' \Leftrightarrow f = g + C$!)

→ Har vi en primitivfunktion kan vi alla!

→ Bara en konstant skiljes olika primitivfunktioner <u>på ett intervall</u>.

viktigt när D_f har mer än ett intervall!

⚠ **Observera** Viktigt att komma ihåg konstanten!
(Annars glömmer vi gärna bort möjliga lösningar...)

Observera Det kan vara svårt att beräkna primitiv.
→ Testa därför gärna ditt resultat för $F(x)$ genom att beräkna derivatan $F'(x)$ (vilket är enkel)!

Beteckning för primitiva funktioner

tänk $\int dx$ som operator på $f(x)$

$$\int f(x)\,dx \qquad \left(\text{eller också } \int dx\, f(x)\right)$$

- representerar mängden av alla primitiva funktioner till $f(x)$
- exempel
  $$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
  många formelsamlingar skriver inte ut C!
- kallas <u>obestämd integral</u>

OBS: en <u>bestämd integral</u> definieras som

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

där F är en primitiv till f på det öppna intervallet $]a,b[$

→ svaret är ett tal

→ svaret oberoende av konstanten ("C") i $F(x)$

→ integralet över f mäter förändringen av $F(x)$ på $[a,b]$

Strategi: Eftersom primitiv är invers till derivering

→ varje standardderivata ger en standardprimitiv

→ varje regel för derivata ger en regel för primitiv

Elementära primitiva funktioner

Sats För $C \in \mathbb{R}$ konstant är

1) $\int e^x\,dx = e^x + C$
2) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ ← var försiktigt när $x<0$ att ha med $|x|$!
3) $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$, för $\alpha \neq -1$
4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a>0$
5) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
6) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
7) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$
8) $\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x) + C$
9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$
10) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$
11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\beta}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+\beta}| + C$, $\beta \in \mathbb{R}$ konstant

Lär dig dessa utantill!

Bevis Alla förutom den sista följer direkt från de standardderivator du redan kan.

För den sista testar vi att

kedjeregel $\ln|x|$

$$D(\ln|x+\sqrt{x^2+\beta}|) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\beta}}\,D(x+\sqrt{x^2+\beta})$$

kedjeregel $\sqrt{x} = x^{1/2}$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\beta}}\left(1 + \frac{1}{2}(x^2+\beta)^{-1/2}\cdot 2x\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\beta}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\beta}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\beta}}\left(\frac{\sqrt{x^2+\beta}+x}{\sqrt{x^2+\beta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\beta}}$$

därför är $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\beta}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\beta}\right|$ $\square$

Räkneregler för primitiv funktion

Eftersom derivering är linjär

$$D(f(x)+c\cdot g(x)) = D(f(x)) + D(c\cdot g(x)) = D(f(x)) + c\cdot D(g(x))$$

gäller detta alltså för integraler.

<u>Sats</u> Om f, g har primitivfunktioner, då gäller för $c \in \mathbb{R}$

a) $\displaystyle\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

<u>Bevis</u> Direkt konsekvens av reglerna för derivering. Skriv

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \quad G(x) = \int g(x)\,dx$$

då är

$$D(F(x)+G(x)) = D(F(x)) + D(G(x)) = f(x)+g(x)$$

$$\Rightarrow \int f(x)+g(x)\,dx = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{F} + \underbrace{\int g(x)\,dx}_{G}$$

och $D(c\cdot F(x)) = c\, D(F(x)) = c\cdot f(x)$

$$\Rightarrow \int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$$ $\square$

Exempel

a) $\displaystyle \int \frac{42x^4 - 2}{x^2}\,dx = \int 42x^2 - \frac{2}{x^2}\,dx \overset{a)}{=} \int 42x^2\,dx + \int (-2)\frac{1}{x^2}\,dx$

$\displaystyle \overset{b)}{=} 42\int x^2\,dx - 2\int x^{-2}\,dx \underset{\text{standard 3)}}{=} 42\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{-1}\cdot x^{-1} + C$

$\displaystyle = 14\cdot x^3 + 2\,\frac{1}{x} + C$

b) $\displaystyle \int 2\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int\sqrt{x}\,dx + 4\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\overbrace{\int x^{1/2}\,dx}^{\frac{2}{3}x^{3/2}+C} + 4\overbrace{\int x^{-1/2}\,dx}^{2x^{1/2}+C}$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + 4\cdot 2x^{1/2} + C = \frac{4}{3}x^{3/2} + 6\sqrt{x} + C$

c) $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(x) + C$

d) $\displaystyle \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int 1\,dx - \int\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x^2 - \arctan(x) + C$