Grafritning och Optimering (Kap 10.9)

Innehål: Hur använder vi allt vi kan om lim och D för att

- skissa up en graf?
- hitta optimala lösningar när kostnader och vinster tävlar?

Grafritning

För att skissa upp en funktionsgraf $y = f(x)$ kan vi gå genom följande steg:

1) **Definitionsmängd**:
Var är funktionen definierad? $\mathbb{R}$?, $[a,b]$?, $[a,\infty)$, ...
Finns det punkter där den är odefinierad? $\frac{1}{x-a} \Rightarrow x \neq a$

2) **Nollställen** Var har funktionen nollställen?

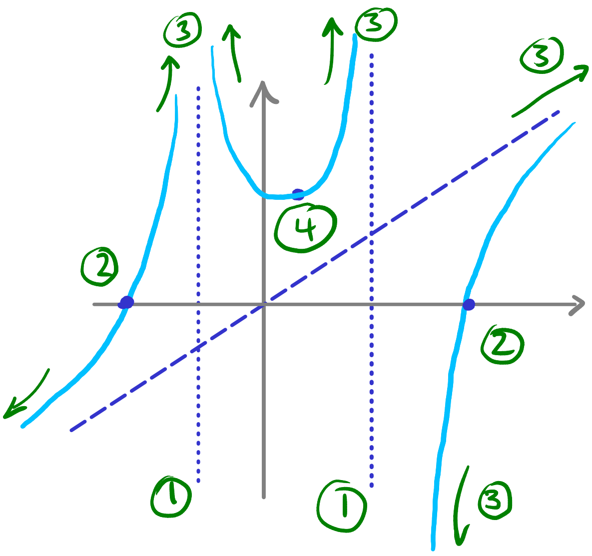
3) **Gränsvärden** Vad gör funktionen i gränserna av definitionsmängden?
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$, $\lim_{f \to a} f(x)$ ← intervallgräns eller odefinierad punkt!

Asymptot - Om $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$ testa för sned asymptot
→ se definition nedanför

- om $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ beskriv vertikal asymptot

4) **Stationära punkter** Är $f'(x) = 0$ någonstans?
→ extrempunkter?

5) Teckentabell för $f(x)$, $f'(x)$ & skiss!



Låt oss stega genom följande exempel

$$f(x) = \frac{x^4}{8 - x^3}$$

1) Definitionsmängd   Nämnaren $8 - x^3$ är endast noll i $x = 2$

$$\begin{array}{l|l}
-x^2 - x - 2 & \\
\hline
-x^3 + 0x^2 + 0x + 8 & (x-2) \\
-(-x^3 + 2x^2) & \\
\hline
\quad -x^2 + 0x + 8 & \\
\quad -(-x^2 + 2x) & \\
\hline
\qquad -2x + 8 & \\
\qquad -(-2x + 4) & \\
\hline
\qquad\quad 4 &
\end{array}$$

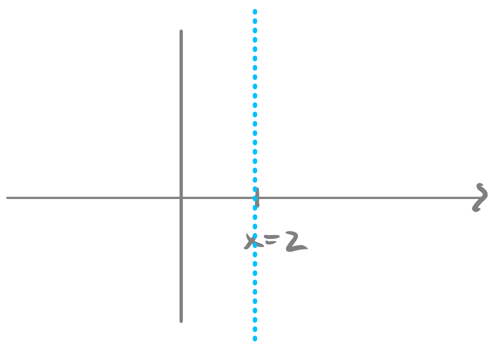
$$\Rightarrow \; 8 - x^3 = (2-x)(x^2 + x + 2)$$

$$= (2-x)\left(\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} \right)$$

Vi har

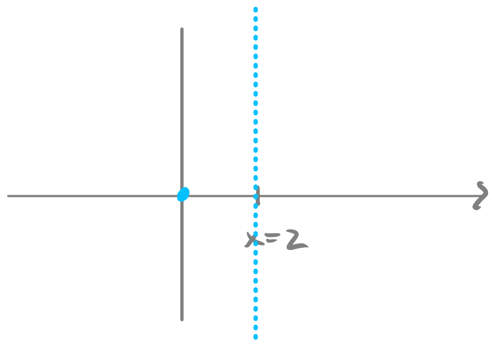
$$f(x) = \frac{x^4}{8 - x^3} = \frac{x^4}{(2-x)(x^2+x+2)}$$

$$= \frac{x^4}{(2-x)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right)}$$



2) **Nollställen?** $f(x) = 0 \iff x^4 = 0 \iff x = 0$

täljaren: x^4



3) **Gränsvärden**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{8-x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{8/x^3 - 1} = \frac{\infty}{0-1} = -\infty$$

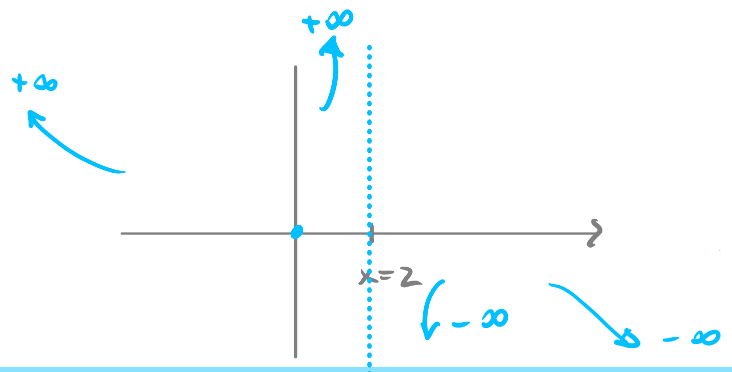
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{8-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{8/x^3 - 1} = \frac{-\infty}{0-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^4}{(2-x)(x^2+x+2)} = \frac{16}{0^- \cdot (4+2+2)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

går mot 0 från negativt

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^4}{(2-x)(x^2+x+2)} = \frac{16}{0^+ \cdot 8} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

går mot 0 från positivt tal



Sneda asymptoter

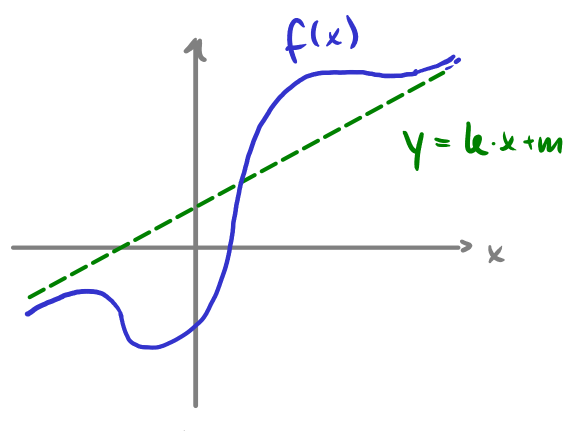
Om en funktion är sådan att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (k\cdot x + m) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (k\cdot x + m) = 0$$

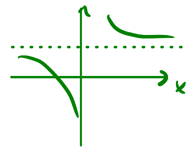
Då kan är räta linjen

$y = k\cdot x + m$ dess sneda asymptot.



Hur testar man för sned asymptot?

OBS $k=0$ ger horizontal asymptot!



Först, beräkna

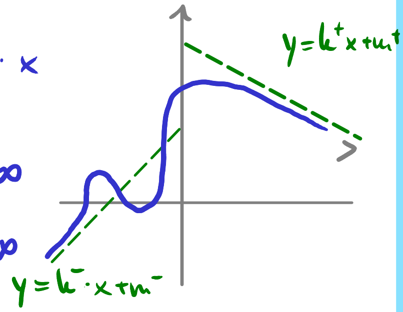
$$k^+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{och} \quad k^- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

om dessa existerar beräkna

$$m^+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - k^+ \cdot x \quad \text{och} \quad m^- = \lim_{x\to-\infty} f(x) - k^- \cdot x$$

då är vänsterasymptot $y = k^- \cdot x + m^-$ för $x \to -\infty$

eller högerasymptot $y = k^+ \cdot x + m^+$ för $x \to +\infty$



Varför fungerar det? Om $\lim f(x) - kx - m = 0$ då

$$\to \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(f(x) - k\cdot x - m + kx\cdot m \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - k\cdot x - m}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{k\cdot x}{x} + \frac{m}{x}$$

$$= \frac{0}{\infty} + k + 0 = k$$

$$\to \lim_{x\to\infty} f(x) - k\cdot x = m$$

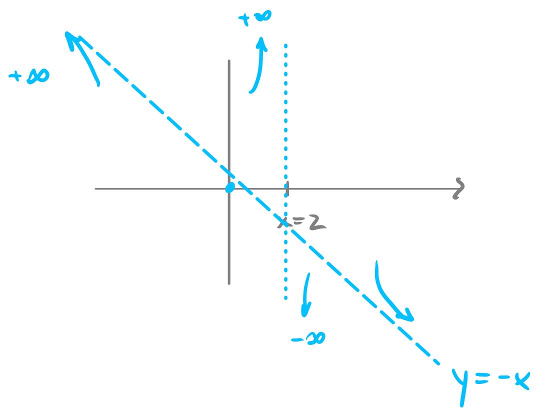
Använd i exempel

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{8-x^3} = \frac{1}{8/x^3 - 1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{1}{0-1} = -1$$

$$\Rightarrow m = -1$$

$$f(x) - m\cdot x = \frac{x^4}{8-x^3} + x = \frac{x^4 + 8x - x^4}{8-x^3} = \frac{8x}{8-x^3} \xrightarrow{\pm\infty} 0$$

$$\Rightarrow k = 0$$



$\Rightarrow$ $f(x)$ har sned asymptot $y = -x$

4) Stationära punkter

$$f'(x) = D\left(\frac{x^4}{8-x^3}\right) = \frac{4x^3\cdot(8-x^3) - x^4(-3x^2)}{(8-x^3)^2}$$

$$= \frac{32x^3 - 4x^6 + 3x^6}{(8-x^3)^2} = \frac{x^3(32-x^3)}{(8-x^3)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

eller $32 - x^3 = 0 \iff x^3 = 32$ $\quad 2^5 = 32$

$\iff x = 2^{5/3}$

Vi gör en teckentabell för $f'(x)$

x		0		2		$2^{5/3}$	
x^3	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(32-x^3)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(8-x^3)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$

$\Rightarrow$ $x = 0$ minimipunkt

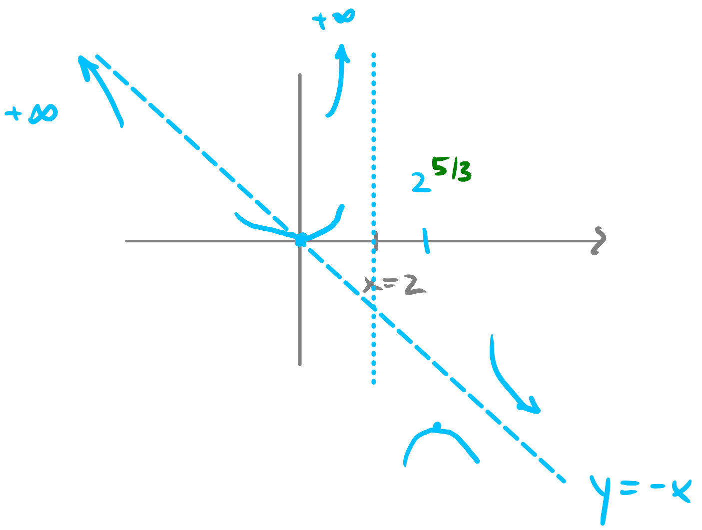
$f(0) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 2^{4/3}$ maximipunkt

$$f(2^{5/3}) = \frac{2^{20/3}}{8-2^5} = \frac{2^{20/3}}{-24} = \frac{-1}{3}\cdot\frac{2^{20/3}}{2^3} = \frac{-1}{3}\cdot \overbrace{2^{11/3}}^{2^2\cdot 2^{5/3}} = \frac{-4}{3}\cdot 2^{5/3}$$

$24 = 3\cdot 8$

ligger lite under $y = -x$



5) Tecken-/värdetabell

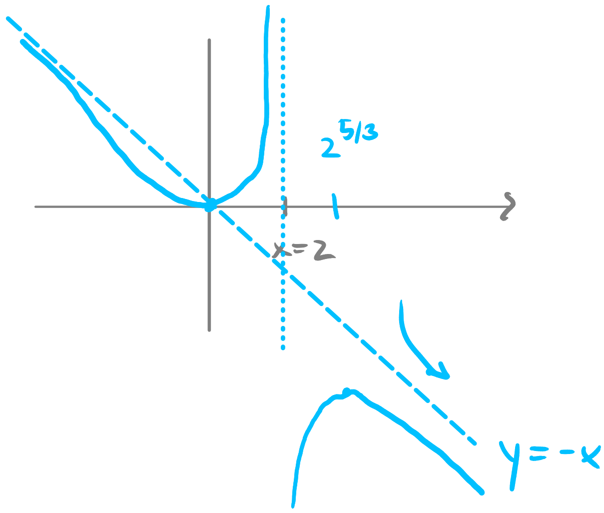
x		0		2		$2^{5/3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	⌇	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$+$	⌇	$-$	$-$	$-$

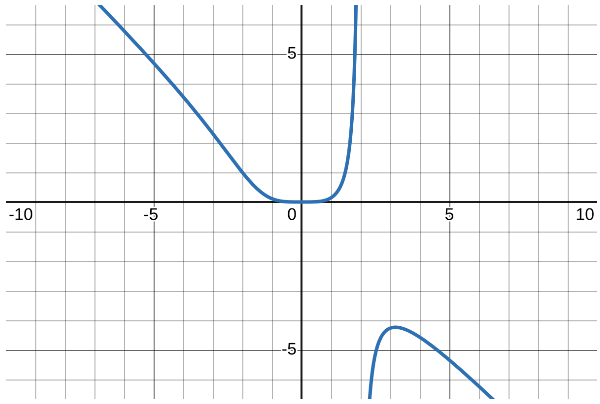
f positiv & fallande — positiv & växande — negativ & fallande

$$f(x) = \frac{x^4}{(2-x)\underbrace{\left((x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\right)}_{>0}}$$

$x^4 \geq 0$

bestämmer tecken

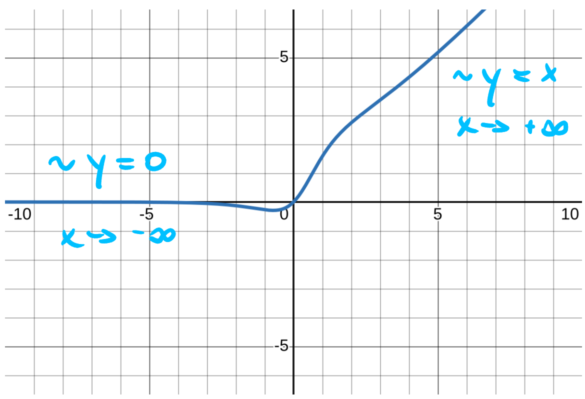




OBS Det finns funktioner med olika asymptoter för $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Exempel

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x - x}$$



$\Rightarrow$ se tillägg till föreläsningen

Optimering

Mål Hitta ett optimalt värde:

→ största värdet av en vinst, eller

→ minsta värdet av en kostnad.

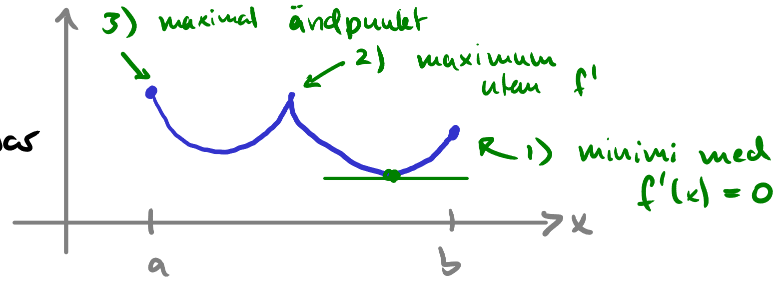
Motsvarar (ofta) att hitta extrempunkter av en funktion inom ett intervall ...

Om funktionen är kontinuerlig och intervallet kompakt

$\Rightarrow$ vet att största och minsta värdet antas!

Vi behöver då undersöka

1) stationära punkter
2) punkter där f inte är deriverbar
3) ändpunkter av intervallet

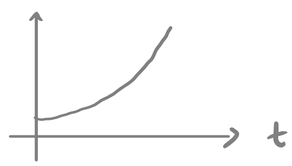


Exempel **Kafferosteriet**

har testat att kunderna tycker om kaffet beroende på rostningsgrad

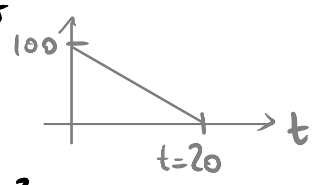
→ För kaffe som rostas t minuter betalar de

$p(t) = \left(1 + \left(\frac{t}{10}\right)^2\right) \cdot 90$ kronor per kilo.



→ Men kaffe tappar vikt när den rostas... av 100 kg är det

$v(t) = 100 - 5 \cdot t$ kg kvar efter t minuter



Vilken rostningstid maximerar intäkten per kg råvara?

Rostningstiden kan vara $0 \le t \le 20$.

Intäkt per 100 kg efter tid t är

$$I(t) = p(t)\cdot v(t) = 90\cdot\left(1+\left(\frac{t}{10}\right)^2\right)\cdot(100-5\cdot t)$$

$$= 90\left(1+\frac{1}{100}t^2\right)(100-5t) = 90\left(\frac{-1}{20}t^3+t^2-5t+100\right)$$

Stationära punkter?

$$I'(t) = 90\cdot\left(\frac{-3}{20}t^2+2t-5\right)$$

$$0 = I'(t) \iff 0 = \frac{-3}{20}t^2+2t-5 \iff 0 = -3t^2+40t-100$$

$$\iff t^2-\frac{40}{3}t+\frac{100}{3} = 0$$

$$\iff t = \frac{20}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2-\frac{100}{3}}$$

$$= \frac{20}{3}\pm\sqrt{\frac{400-300}{9}} = \frac{20\pm10}{3} = \frac{10}{3},\ 10$$

beräkna andra derivatan

$$I''(t) = 90\cdot\left(\frac{-6}{20}t+2\right)$$

$$I''\left(\frac{10}{3}\right) = 90\cdot\left(\frac{-6}{20}\cdot\frac{10}{3}+2\right) = 90\cdot(-1+2) = 90 > 0$$

$$I''(10) = 90\left(\frac{-6}{2}+2\right) = -90 < 0$$

$\Rightarrow$ $t = 10$ är ett lokalt maximum ($x = \frac{10}{3}$ lokalt min)

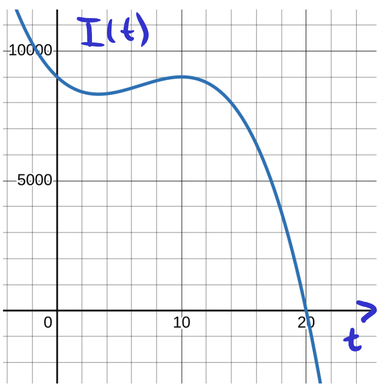
Med rostningstid 10 min nås ett lokalt maximum

$$I(10) = 90\left(\frac{-1}{20}1000+100-50+100\right) = 90(-50+100-50+100)$$

$$= 9000$$

Men ändpunkter?

$$I(0) = 90\cdot(100) = 9000$$



I modellen ges ingen rostning samma intäkt som 10 minuter.

Exempel **Optimal hastighet tunnelbana**

En tunnelbana ska köra en sträcka L mellan två stationer.

Driftskostnaden (personal, slitage, ...) beräknas att vara

$$d(t) = \alpha \cdot t$$

där t är tiden tunnelbanan tar och α är en (positiv) konstant.

Men energikostnaden beräknas vara

$$E(v) = \beta \cdot L \cdot v^2$$

där $\beta > 0$ är konstant och v är medelhastigheten.

Vad är den billigaste medelhastigheten för tunnelbanan?

→ t och v hänger ihop: $t = L/v$

$$\Rightarrow d(v) = \alpha \cdot L/v$$

→ totala kostnaden

$$K(v) = E(v) + d(v) = L \cdot \beta \cdot v^2 + \alpha \cdot L \cdot \frac{1}{v} = L\left(\beta \cdot v^2 + \alpha \frac{1}{v}\right)$$

$$K'(v) = L \cdot \left(\beta \cdot 2v + \alpha \frac{-1}{v^2}\right) = L \cdot \left(2\beta v - \frac{\alpha}{v^2}\right)$$

stationära punkter $\quad 0 = K'(v) \iff 0 = 2\beta v - \frac{\alpha}{v^2}$

$$\iff 2\beta v = \frac{\alpha}{v^2} \qquad (v > 0)$$

$$\iff v^3 = \frac{\alpha}{2\beta} \iff v = \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^{1/3}$$

⇒ Den optimala hastigheten är

$$v = \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^{1/3}$$

då vi inte ha relevanta ändpunkter

(Ändpunkter för v är $v = 0$ men då rör sig inte tunnelbanan eller ljusets hastighet ... orealistiskt kanske)

<u>Exempel</u> Hitta extremvärden av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$$

på $-1 \leq x \leq 1$!

→ Funktionen är kontinuerlig på $[-1, 1]$ ⇒ extremvärden antas

→ inte deriverbar i $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

⇒ inga stationära punkter för $x \neq 0$

⇒ avtagande för $x < 0$, växande för $x > 0$

→ ändpunkter $f(-1) = 1$, $f(1) = 1$

→ inte deriverbar $f(0) = 0$

⇒ maximipunkter i $x = -1, 1$

minimipunkt i $x = 0$