Primitiva funktioner – Metoder (Kap 12.3)

Innehåll: Viktiga tekniker för integraler

→ Variabelbyte / substitution

→ Partialintegration

Variabelbyte

Vi vet att $D(e^{3x}) = e^{3x} \cdot 3 \Rightarrow \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$

eller $D(\sin(x^2)) = \cos(x^2) \cdot 2x \Rightarrow \int \cos(x^2)\, 2x\, dx = \sin(2x) + C$

som konsekvens av kedjeregeln.

Variabelsubstitution Låt $\int f(x)\,dx = F(x)$ och $g(x)$ deriverbar, då gäller

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x))$$

Exempel $\int \sqrt{\cos(x)} \cdot \sin(x)\,dx = -\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \cos(x)$ $g' = \sin(x)$ $= -F(g(x)) = -\frac{2}{3}(\cos(x))^{3/2} + C$

$F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$

I praktiken är det enklast att notera substitutionen som

$$\int \sqrt{\cos(x)}\ \sin(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos(x) \\ \frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow du = -\sin(x)\,dt \end{array}\right]$$

$$= \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\cos(x))^{3/2} + C$$

eller allmänt

$$\int f(g(x))\, g'(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = g(x) \\ \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx \end{array}\right]$$

$$= F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Vad ska vi hålla utkik efter...?

Vanliga substitutioner med exempel:

1) Linjär förskjutning

$$\int f(k\cdot x+m)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = k\cdot x+m \\ \frac{du}{dx} = k \Rightarrow du = k\cdot dx \end{array}\right] = \int f(u)\,\frac{1}{k}\,du$$

$$= \frac{1}{k}F(u)+C = \frac{1}{k}F(k\cdot x+m)+C$$

där $F'(x) = f(x)$.

Exempel a) $\int (x+7)^2\,dx = \int (x^2+14x+49)\,dx = \dots$ gör inte så!

$$= \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(x+7)^3 + C$$

$u = x+7$
$du = dx$

$u = \omega t+\varphi$
$du = \omega\,dt$

b) $\int \sin(\omega\cdot t+\varphi)\,dt = \frac{1}{\omega}\int \sin(u)\,du = \frac{-1}{\omega}\cos(u) + C$

$$= \frac{-1}{\omega}\cos(\omega\cdot t+\varphi)+C$$

2) Kvadratisk term

Signal: x^2 i $f(\,)$ & $x\cdot dx$

$$\int f(k\,x^2 + d)\,x\,dx = \left[\begin{array}{l} v = k\cdot x^2+d \\ \frac{dv}{dx} = 2kx \Rightarrow dv = 2kx\cdot dx \end{array}\right]$$

$$= \int f(v)\,\frac{1}{2k}\,dv = \frac{1}{2k}F(v) + C = \frac{1}{2k}F(k\cdot x^2+d)+C$$

Exempel a) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} v = 1+x^2 \\ dv = 2x \end{array}\right] = \int \frac{1}{v}\,\frac{1}{2}\,dv = \frac{1}{2}\ln|v|+C$

$x\cdot dx$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$$= \frac{1}{2}\ln|v| + C = \frac{1}{2}\ln v + C = \ln\sqrt{v} + C$$

OBS $v = 1+x^2 > 0$

$$= \ln\sqrt{1+x^2} + C$$

Blev detta rätt...?

Test $D(\ln\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} D(\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}$

Exempel b) $\int e^{-2x^2} \cdot 4x \, dx = \int e^v \cdot (-1) \, dv = -e^v + C$

$v = -2x^2$

$dv = -4x \, dx$

$= -e^{-2x^2} + C$

Kvot av $g'(x)/g(x)$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{1}{g(x)} g'(x) \, dx = \left[\begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x) \, dx \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C$$

Exempel a) $\int \cot(\omega \cdot x) \, dx = \int \frac{\cos(\omega \cdot x)}{\sin(\omega \cdot x)} dx = \frac{1}{\omega} \int \frac{\omega \cdot \cos(\omega x)}{\sin(\omega x)} dx$

$g(x) = \sin(\omega \cdot x)$

$g'(x) = \omega \cos(\omega \cdot x)$

$= \frac{1}{\omega} \ln|\sin(\omega \cdot x)| + C$

b) $\int \tan(\omega \cdot x) \, dx = \frac{-1}{\omega} \ln|\cos(\omega x)| + C$ försök själv/kolla boken

sin/cos - substitution

$$\int f(\sin(x)) \cos(x) \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin(x) \\ du = \cos(x) \, dx \end{array} \right] = \int f(u) \, du = F(\sin(x)) + C$$

$$\int f(\cos(x)) \sin(x) \, dx = \left[\begin{array}{l} v = \cos(x) \\ dv = -\sin(x) \, dx \end{array} \right] = -\int f(v) \, dv = -F(\cos(v)) + C$$

Exempel

$$\int \cos^3(4x) \, dx = \int \cos^2(4x) \cos(4x) \, dx = \int (1 - \sin^2(4x)) \cos(4x) \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \sin(4x) \\ du = \cos(4x) 4 \, dx \end{array} \right] = \int (1-u^2) \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \int 1 \, du - \frac{1}{4} \int u^2 du$$

$$= \frac{1}{4} u - \frac{1}{12} u^3 + C = \frac{1}{4} u (1 - \frac{1}{3} u^2) + C$$

$$= \frac{1}{4} \sin(4x) (1 - \frac{1}{3} \sin^2(4x)) + C$$

Test $D\left(\frac{1}{4}\sin(4x)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\sin^2(4x)\right)\right)$

$$= D\left(\tfrac{1}{4}\sin(4x)\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\sin^2(4x)\right) + \tfrac{1}{4}\sin(4x)\, D\left(1-\tfrac{1}{3}\sin^2(4x)\right)$$

$$= \cos(4x)\left(1-\tfrac{1}{3}\sin^2(4x)\right) + \tfrac{1}{4}\sin(4x)\,\tfrac{-2}{3}\sin(4x)\cos(4x)\,4$$

$$= \cos(4x)\Big(1\underbrace{-\tfrac{1}{3}\sin^2(4x)-\tfrac{2}{3}\sin^2(4x)}_{-\sin^2(4x)}\Big) = \cos(4x)\cdot\cos^2(4x) = \cos^3(4x)$$

Partialintegration

konstigt val, men praktiskt strax

Kom ihåg produktregeln, med $F'=f$ och g har vi

integrera båda led "$\int = D^{-1}$"

$$D(F(x)\cdot g(x)) = f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow F(x)\cdot g(x) + C = \int f(x)\cdot g(x)\,dx + \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

ställer vi om får vi formeln för partialintegration

$$\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

mängden av alla primitiva

OBS $+C$ behövs inte här då vi har obestämda integraler i både led.

→ När vi väljes en konkret primitivfunktion för varje då måste vi välja rätt konstant så att likheten hålles,

→ och när vi flyttas båda obestämda integraler till samma led.

Strategi: Använd partialintegration för produkter där f har känd F och g' är enklare än g...

Exempel a) $\displaystyle\int x\cdot e^x\,dx = \overset{g\,\cdot\,F}{e^x\cdot x} - \int \overset{g'\cdot F}{1\cdot e^x}\,dx = e^x\cdot x - e^x + C$

$g(x)=x \quad g'(x)=1$

$f(x)=e^x \quad F(x)=e^x$

$$= (x-1)e^x + C$$

Ibland behövs det två steg ...

b) $$\int \underbrace{(x^2-4x)}\sin(x)\,dx = -\cos(x)(x^2-4x) - \int(-\cos(x))(2x-4)\,dx$$

$g(x) = x^2-4x \quad g'(x) = 2x-4$

$f(x) = \sin(x) \quad F(x) = -\cos(x)$

$$= (-x^2+4x)\cos(x) + \int \underbrace{\cos(x)}_{f(x)}\,\underbrace{(2x-4)}_{g(x)=2x-4}\,dx = (-x^2+4x)\cos(x) + (2x-4)\sin(x) - \underbrace{\int 2\sin(x)\,dx}_{=-2\cos(x)\,dx}$$

$F(x) = \sin(x) \quad g'(x) = 2$

$$= (-x^2+4x+2)\cos(x) + (2x-4)\sin(x) + C$$

Partialintegration kan kombineras med andra metoder

c) $$\int x^3\sin(x^2)\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \overset{g}{u}\cdot\overset{f}{\sin(u)}\,du$$

lucky example

$\int x^2\sin(x^2)\,dx$ är inte elementär...!

$$= \overset{F}{-\cos(u)}\cdot\overset{g}{u} - \int \overset{F\cdot g'}{(-\cos(u))}\,du = -\cos(u)\cdot u + \sin(u) + C$$

$$= -x^2\cdot\cos(x^2) + \sin(x^2) + C$$

Ibland funkar det att "hitta på" en etta som faktor $f = 1$

d) $$\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - \int \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{=1}\,dx$$

$f(x) = 1 \quad F(x) = x$

$g(x) = \ln(x) \quad g'(x) = \frac{1}{x}$

$$= x\cdot\ln(x) - \int 1\,dx = x\cdot\ln(x) - x + C = x(\ln(x)-1) + C$$

e) $$\int \operatorname{arccot}(x)\,dx = \int 1\cdot\operatorname{arccot}(x)\,dx = x\cdot\operatorname{arccot}(x) - \underbrace{\int x\cdot\frac{-1}{1+x^2}\,dx}_{-\ln\sqrt{1+x^2}}$$

se första sidan

$f(x) = 1 \quad f'(x) = x$

$g(x) = \operatorname{arccot} \quad g'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

$$= x\cdot\operatorname{arccot}(x) + \ln\sqrt{1+x^2} + C$$

Till exempel kombinationer/produkt av exponential och trigonometriska funktioner kan integreras i två steg:

f) $$\int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)}_{g} dx = \overset{F}{e^x} \cdot \overset{g}{\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)} - \int \underbrace{\overset{F}{e^x}}_{f_2(x)} \underbrace{\overbrace{\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\cdot \tfrac{1}{2}}^{g'(x)}}_{g_2(x)} dx$$

$$= e^x \cdot \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) - \left(\overset{F_2}{e^x} \cdot \overset{g_2}{\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)} - \int \overset{F_2}{e^x} \overbrace{(-1)\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cdot \tfrac{1}{4}}^{g_2'(x)} dx \right)$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) dx = e^x\left(\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \tfrac{1}{4}\int e^x \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) dx$$

De två obestämda integralen är lika – vi flytter den till andra sidan och kommer ihåg att lägga till $+C$ (för att konstanten kan vara olika i båda integralen)

$$\Rightarrow \tfrac{5}{4}\int e^x \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) dx = e^x\left(\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \tilde{C}$$

$(C = \tfrac{4}{5}\tilde{C})$

$$\Leftrightarrow \int e^x \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) dx = \tfrac{4}{5} e^x\left(\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + C$$

Till sist ett exempel där man sparar tid genom att välja "+C" smart

g) $$\int \arctan(\sqrt{x})\, dx = \left[\begin{array}{l} v = \sqrt{x} \quad (x \geq 0 \Rightarrow v \geq 0) \\ \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\, dv = 2v\, dv \end{array}\right] =$$

$$= \int \underbrace{\arctan(v)}_{g(v)} \underbrace{2v}_{f(v)} dv = \arctan(v)(1+v^2) - \int (1+v^2)\cdot \frac{1}{1+v^2}\, dv$$

$$g'(v) = \frac{1}{1+v^2} \Rightarrow \text{välj } F(v) = 1+v^2$$

$$= \arctan(v)(1+v^2) - \underbrace{\int 1\, dv}_{= v + C} = \arctan(\sqrt{x})(1+x) - \sqrt{x} + C$$

<u>Test</u> $$D(\arctan(\sqrt{x})(1+x) - \sqrt{x}) = D(\arctan\sqrt{x})\cdot(1+x) + \arctan(\sqrt{x})\, D(1+x) - D(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\cancel{1+x}} \cancel{D(\sqrt{x})} \cdot \cancel{(1+x)} + \arctan(x) - \cancel{D(\sqrt{x})} = \arctan(x)$$