

Logaritmlagarna s. 174 och 176 Bevis finns på s. 174

$${}^a \log(xy) = {}^a \log x + {}^a \log y$$

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$${}^a \log\left(\frac{x}{y}\right) = {}^a \log x - {}^a \log y$$

$$\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$${}^a \log x^p = p \cdot {}^a \log x$$

$$\lg x^p = p \cdot \lg x$$

$$\ln x^p = p \cdot \ln x$$

$$x, y > 0 \quad p \in \mathbb{R}$$

Bevis Behöver ni INTE kunna

Lag 1) Vi visar att $V.L = H.L$

$$\lg x + \lg y = \lg(x \cdot y)$$

sätt båda sidor på basen 10

$$10^{(\lg x + \lg y)} = 10^{\lg(x \cdot y)}$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$\underbrace{10^{\lg x}}_x \cdot \underbrace{10^{\lg y}}_y = \underbrace{10^{\lg(x \cdot y)}}_{x \cdot y}$$

$$10^{\lg x} = x$$

$$x \cdot y = x \cdot y$$

V.L = H.L V.S.B

Lag 2) Vi visar att $V.L = H.L$

$$\lg x - \lg y = \lg\left(\frac{x}{y}\right)$$

sätt båda sidor på basen 10

$$10^{(\lg x - \lg y)} = 10^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$$a^{x-y} = a^x \cdot a^{-y}$$

$$10^{\lg x} \cdot 10^{-\lg y} = 10^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\frac{10^{\lg x}}{10^{\lg y}} = 10^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$$10^{\lg x} = x$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$$

V.L = H.L V.S.B

lag 3) Vi visar att $V.L = H.L$

sätt båda sidor på basen 10

$$\lg x^p = p \cdot \lg x$$

$$10^{\lg x^p} = 10^{p \cdot \lg x}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\underbrace{10^{\lg x^p}}_{x^p} = (\underbrace{10^{\lg x}}_x)^p$$

$$10^{\lg x} = x$$

$$x^p = x^p$$

$$V.L = H.L \quad V.S.B$$

Ex1) Förenkla $\lg 16 - \lg 32 + \lg 2$

alt 1) $\lg 16 - \lg 32 + \lg 2 = \lg \left(\frac{16}{32} \cdot 2\right) = \lg 1 = \lg 10^0 = 0$

alt 2) $\lg 16 - \lg 32 + \lg 2 = \lg 16 - (\lg 32 - \lg 2) = \lg 16 - \lg \frac{32}{2} = \lg 16 - \lg 16 = 0$

(alt 3) $\lg 16 - \lg 32 + \lg 2 = \lg \left(\frac{16}{32}\right) + \lg 2 = \lg \frac{1}{2} + \lg 2 = \lg 1 - \lg 2 + \lg 2 = \lg 1 = 0$

(alt 4) $\lg 16 - \lg 32 + \lg 2 = \lg 2^4 - \lg 2^5 + \lg 2 = 4 \cdot \lg 2 - 5 \cdot \lg 2 + 1 \cdot \lg 2 = 0$

FEL: $\lg 16 - \lg 32 + \lg 2 \neq \lg 16 - \lg(32 \cdot 2) = \lg 16 - \lg 64 \neq 0$

Ex2) Förenkla $\lg \frac{1}{2}$

$$\lg \frac{1}{2} = \lg 1 - \lg 2 = 0 - \lg 2 = -\lg 2$$

alt $\lg \frac{1}{2} = \lg 2^{-1} = -1 \cdot \lg 2 = -\lg 2$

Ex3) Förenkla $\frac{1}{2} \ln 100 - 2 \ln 2$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 100 - 2 \ln 2 = \ln 100^{\frac{1}{2}} - \ln 2^2 = \ln \sqrt{100} - \ln 4 = \ln 10 - \ln 4 = \ln \frac{10}{4} = \ln \frac{5}{2}$$

alt. $\frac{1}{2} \cdot \ln 100 - 2 \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 10^2 - \ln 2^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln 10 - \ln 4 = \ln 10 - \ln 4 = \ln \frac{10}{4} = \ln \frac{5}{2}$

Ex4) Beräkna $\lg 100^2$

$$\lg 100^2 = \lg(10^2)^2 = \lg 10^4 = 4$$

Ex5) Förenkla $\ln 50 - \ln \frac{1}{2}$

$$\ln 50 - \ln \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{50}{\frac{1}{2}}\right) = \ln 100$$

$$\lg 100 = \lg 10^2 = 2$$

alt. $\ln 50 - (\underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 2) = \ln 50 + \ln 2 = \ln(50 \cdot 2) = \ln 100$

Extra viktiga uppg. som ofta blir fel.

Ex6) Beräkna $\frac{\lg 16}{4}$

$$\frac{\lg 16}{4} = \frac{\lg 2^4}{4} = \frac{4 \cdot \lg 2}{4} = \lg 2$$

Nej! $\frac{\lg 16}{4} \neq \lg \frac{16}{4} = \lg 4$

Ex7) Beräkna $\frac{\lg 32}{\lg 4}$

$$\frac{\lg 32}{\lg 4} = \frac{\lg 2^5}{\lg 2^2} = \frac{5 \cdot \cancel{\lg 2}}{2 \cdot \cancel{\lg 2}} = \frac{5}{2}$$

Nej^{oo} $\frac{\lg 32}{\lg 4} \neq 8$

Ex8) Beräkna $\lg\left(\frac{50}{5}\right)$

$$\lg\left(\frac{50}{5}\right) = \lg 10 = \lg 10^1 = 1$$

Här får man förkorta

Ex9) Beräkna $2 \ln \sqrt{e}$

$$2 \ln \sqrt{e} = \ln \sqrt{e}^2 = \ln e = \ln e^1 = 1$$

alt. $2 \ln \sqrt{e} = 2 \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln e = \ln e = 1$

Ex 10) Beräkna $\lg 7 + \ln 8$

olika baser - logaritmlagarna fungerar INTE

Ex 11) Beräkna $\lg \frac{1}{100} + \ln \frac{1}{e}$

$$\lg \frac{1}{100} + \ln \frac{1}{e} = \underbrace{\lg 1}_{0} - \underbrace{\lg 100}_{2} + \underbrace{\ln 1}_{0} - \underbrace{\ln e}_{1} = 0 - 2 + 0 - 1 = \underline{-3}$$

Exponentialekvationer s. 176-178

Lös ekvationerna 12-14

Ex 12) $10^x = 1000$

$$10^x = 1000$$

alt.

$$10^x = 1000$$

$$10^x = 10^3 \text{ samma bas}$$

$$\underline{x = 3}$$

$$\lg 10^x = \lg 1000$$

$$x = \lg 10^3$$

$$\underline{x = 3}$$

$$\lg 10^x = x$$

Ex 13) $10^x = 500$

$$10^x = 500$$

$$\lg 10^x = \lg 500$$

$$\underline{x = \lg 500} \approx \underline{2,7}$$

exakt svar närmevärde

$$\left(\lg 500 = \lg (100 \cdot 5) = \lg 100 + \lg 5 = 2 + \lg 5 \right)$$

Inte bättre svar

Ex 14) $e^{2x} = 100$

$$e^{2x} = 100$$

$$\ln e^{2x} = \ln 100$$

$$2x = \ln 100$$

$$\ln e^x = x$$

$$x = \frac{\ln 100}{2} = \frac{1}{2} \ln 100 = \ln 100^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{100} = \ln 10$$

$$\underline{x = \ln 10}$$

6065 b) $3 \cdot 2^x = 3^x$ anv. naturliga logaritmen

$$3 \cdot 2^x = 3^x$$

$$3 = \frac{3^x}{2^x}$$

$$3 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\ln 3 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\ln 3 = x \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\underline{x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2}} \quad (\text{x } 2,71)$$

$$\boxed{\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x}$$

Det hade gått lika bra med 10-logaritmen

$$\lg 3 = \lg\left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\lg 3 = x \cdot \lg\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x = \frac{\lg 3}{\lg\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$x = \frac{\lg 3}{\lg 3 - \lg 2} \quad (\text{x } 2,71)$$

6071 b) $e^{3x} - 3e^{2x} = 0$

$$e^{3x} - 3e^{2x} = 0$$

$$e^{2x+x} - 3e^{2x} = 0$$

$$e^{2x} \cdot e^x - 3e^{2x} = 0$$

$$e^{2x}(e^x - 3) = 0$$

$$e^{2x} = 0 \quad \text{eller} \quad e^x - 3 = 0$$

saknar lsg

$$\left(\begin{array}{l} \ln e^{2x} = \ln 0 \\ \text{ej det} \end{array} \right)$$

$$e^x = 3$$

$$\ln e^x = \ln 3$$

$$x = \ln 3$$

Svar: $x = \ln 3$

$$6077c) e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$$

$$e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$$

$$(e^x)^2 + 2e^x - 8 = 0$$

sätt $e^x = t \quad t > 0$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$t = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3 \quad t_1 = -4 \text{ duger ej}, \quad t_2 = 2 \text{ OK}$$

$$e^x = t \text{ ger}$$

$$e^x = 2$$

$$\ln e^x = \ln 2$$

$$\underline{x = \ln 2}$$

6076

- I en bakterieodling är antalet bakterier t timmar efter odlingens början $500 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.
- (a) Hur många bakterier finns det i odlingen efter 4 timmar?
 - (b) När är antalet bakterier 4000?
 - (c) Vilken är fördubblingstiden?

a) Antal bakterier (N) efter t timmar $N = 500 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$

$$t = 4$$

$$N(4) = 500 \cdot 2^{\frac{4}{2}} = 500 \cdot 2^2 = 500 \cdot 4 = 2000 \quad \text{Svar: } \underline{2000 \text{ bakterier}}$$

b) $N = 4000$ $t = ?$
 $N = 500 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$

$$4000 = 500 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$$

$$\frac{4000}{500} = 2^{\frac{t}{2}}$$

$$8 = 2^{\frac{t}{2}}$$

$$2^3 = 2^{\frac{t}{2}} \quad \text{samma bas}$$

$$3 = \frac{t}{2}$$

$$t = 6$$

Svar: Efter 6h

alt.

$$8 = 2^{\frac{t}{2}}$$

$$\ln 8 = \ln 2^{\frac{t}{2}}$$

$$\ln 8 = \frac{t}{2} \cdot \ln 2$$

$$\ln 2^3 = \frac{t}{2} \cdot \ln 2$$

$$3 \cdot \ln 2 = \frac{t}{2} \cdot \ln 2$$

$$t = 6$$

$$\text{alt)} \quad 8 = 2^{\frac{t}{2}}$$

$${}^2\log 8 = {}^2\log 2^{\frac{t}{2}}$$

$${}^2\log 2^3 = \frac{t}{2}$$

$$3 = \frac{t}{2}$$

$$t = 6$$

c) Fördubblingstid?

$$N = 500 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$$

$$N_0 = 500$$

$$N = 2 \cdot N_0 = 2 \cdot 500$$

$$t = ?$$

$$N = N_0 \cdot a^t$$

N_0 = mängd från början

N = mängd efter tiden t

a = förändringsfaktor

$a > 1$ växande

$0 < a < 1$ avtagande

t = tiden

$$2 \cdot 500 = 500 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$$

$$2 = 2^{\frac{t}{2}}$$

$$1 = 2^{\frac{t}{2}}$$

$$1 = \frac{t}{2}$$

$$t = 2$$

samma bas

alt.

$$2 = 2^{\frac{t}{2}}$$

$${}^2\log 2 = {}^2\log 2^{\frac{t}{2}}$$

$$1 = \frac{t}{2}$$

$$t = 2$$

$$2 = 2^{\frac{t}{2}}$$

$$\ln 2 = \ln 2^{\frac{t}{2}}$$

$$\ln 2 = \frac{t}{2} \cdot \ln 2$$

$$1 = \frac{t}{2}$$

$$t = 2$$

Svar: Fördubblingstiden är 2h