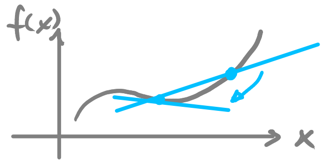
GRÄNSVÄRDEN & KONTINUITET

Innehål & Mål

→ Gränsvärden (och kontinuitet) är grundläggande till exempel för derivata



→ diskuteras intuition och teknisk definition

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

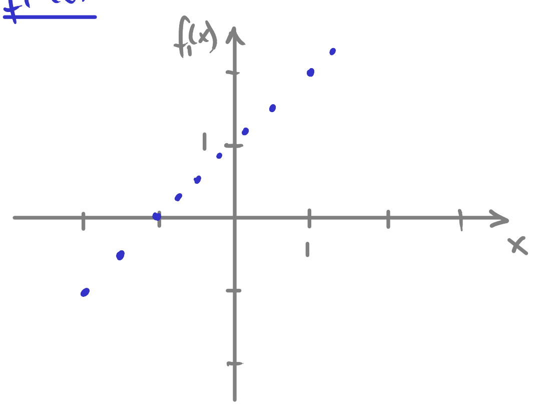
→ därefter (och nästa föreläsning) metoder och standardresultat

Spel: Kan du gissa $f(x=0)$? (länk på Canvas)

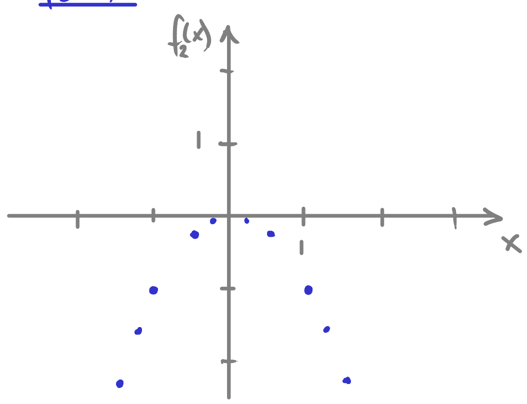
- Jag har valt tre hemliga funktioner $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$.
- Du får fråga efter funktionsvärdet i tio punkter $x_i \neq 0$.

→ Kan du därefter gissa funktionsvärdet $f(0)$?

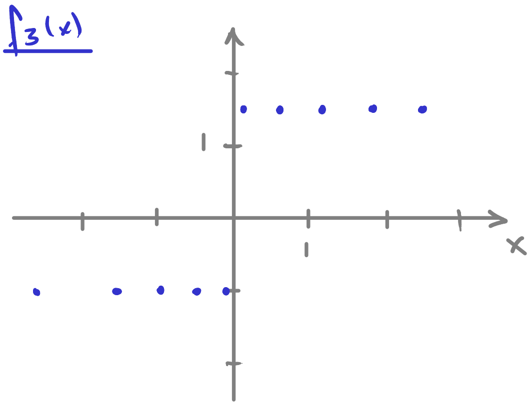
$f_1(x)$



$f_2(x)$



$f_3(x)$

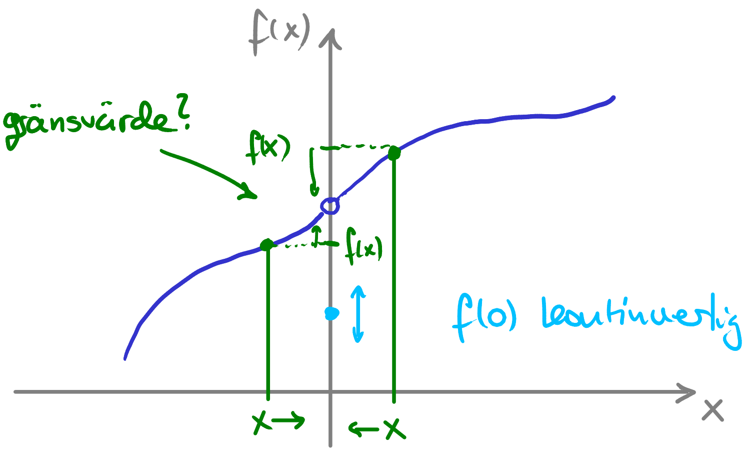


→ Varför verkar $f_1(x), f_2(x)$ lätt?

→ Vad är problemet med $f_3(x)$?

Intuitivt byggde din strategi på föreläsningens centrala begrepp

→ <u>Gränsvärde</u>: Om vi väljer punkter närmre och närmre till $x=0$, närmar sig funktionen då ett entydigt värde?



→ <u>Kontinuitet</u>: Är gränsvärdet när $x \to 0$ detsamma som funktionsvärdet $f(x=0)$?

"Besätter gränsvärdet något om funktionsvärdet?"

"Kan jag rita grafen utan att lyfta pennan?"

Gränsvärde $x \to a$

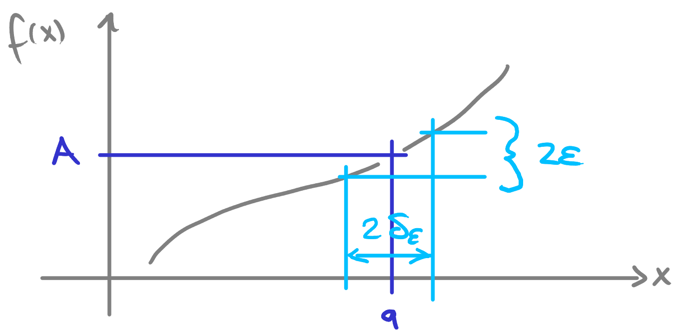
<u>Definition</u> Låt $a, A \in \mathbb{R}$ vara tal.

Funktionen f har <u>gränsvärdet</u> A i punkten a och vi skriver

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{eller} \quad f(x) \xrightarrow{x \to a} A$$

om det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\varepsilon > 0$, sådant att

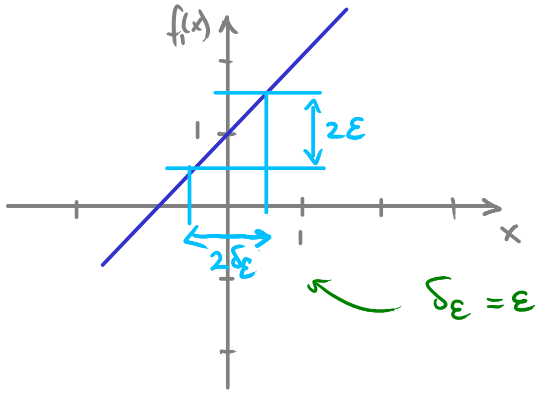
$$|A - f(x)| < \varepsilon \quad \text{för alla} \quad 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon .$$



Exempel Funktionerna ur spelet

1) $f_1(x) = 1 + x$ har gränsvärde $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 1$!

$a = 0$ $\quad$ $A = 1$



$\delta_\varepsilon = \varepsilon$

Bevis För $\varepsilon > 0$, väljer vi $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ och finner att om

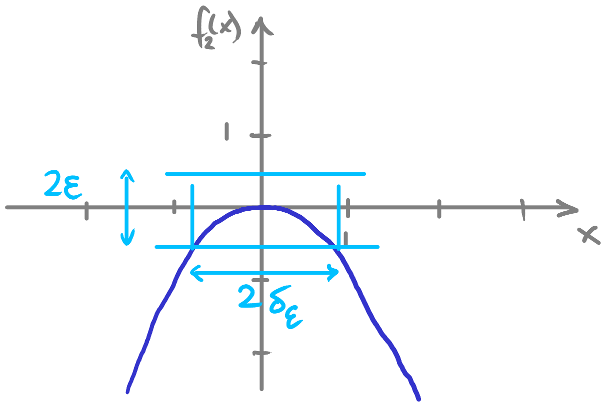
$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$$

$$0 < |x - 0| = |x| < \varepsilon$$

$$|f_1(x) - A| < \varepsilon$$

då är $|f_1(x) - A| = |(1 + x) - 1| = |x| < \varepsilon$.

2) $f_2(x) = -x^2$ har gränsvärdet $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = 0$.



$a = 0$ $\quad$ $A = 0$

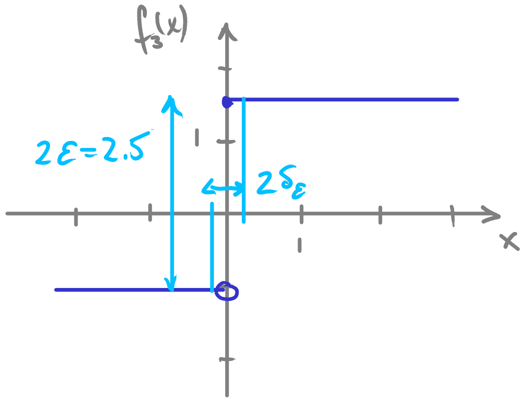
$\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$

Bevis Om $0 < |x - a| = |x| < \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, då är

$$|f_2(x) - A| = |-x^2 - 0| = |x^2| < \delta_\varepsilon^2 = \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon.$$

$$|f_2(x) - A| < \varepsilon$$

3) $f_3(x) = \begin{cases} 1.5 \; , & x \geq 0 \\ -1 \; , & x < 0 \end{cases}$ har inget gränsvärde i $x=0$



alla $\delta_\varepsilon > 0$
leder till
$2\varepsilon = 2.5$ ↯

__Bevis__ Det är inte möjligt att uppfylla definitionen när $\varepsilon < 1.25$.

→ Till exempel välj $\varepsilon = 1$:

För alla $\delta_\varepsilon > 0$ gäller $f_3(-\delta_\varepsilon) = -1$ och $f_3(\delta_\varepsilon) = 1.5$

Om något gränsvärde $A \in \mathbb{R}$ existerar, då ska

$$\varepsilon = 1 > |f(-\delta_\varepsilon) - A| = |-A-1| \iff -2 < A < 0$$

och

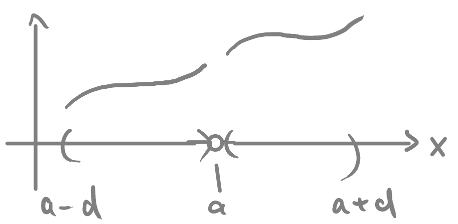
$$\varepsilon = 1 > |f(\delta_\varepsilon) - A| = |1.5 - A| \iff 0.5 < A < 3.5$$

korrigering

Men det finns inget värde för A sådan att båda är sanna.

__OBSERVERA__

→ Funktionen f behöver inte vara definierad i punkten a, för att ha ett gränsvärde där.



"$f(a)$ behövs inte"

Det räcker att f är definierad i en __punkterad omgivning__ av a

$$\{x \in (a-d, a+d) \mid x \neq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a-d < x < a+d,\ x \neq a\}$$

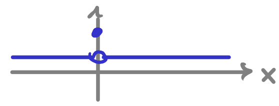
omgivning, men utan a själv

OBSERVERA

→ Funktionsvärdet $f(a)$ och gränsvärdet $\lim_{x \to a} f(x)$ kan vara olika!

Exempel

$$f(x) = \begin{cases} 42, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$



Funktionen är då inte kontinuerlig...

Kontinuitet

Definition

En funktion f är kontinuerlig i punkten $a \in \mathbb{R}$ om

1) $f(a)$ är definierad och

2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar och "funktionen har ett gränsvärde för $x \to a$"

3) båda är lika $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

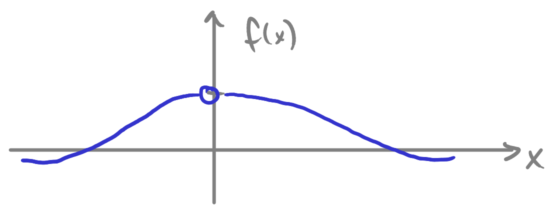
Det är kontinuiteten som vi använder i gissningsleken.

Ibland använder man kontinuitet för att fortsätta en funktion.

Exempel $f_4(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ är inte definierad i $x = 0$!

Ändå ser vi i gissningsleken (och ska bevisa snart) att

$$\lim_{x \to 0} f_4(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



Med detta kan vi definiera en kontinuerlig funktion:

nu definierad överallt!

$$\text{sinc}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

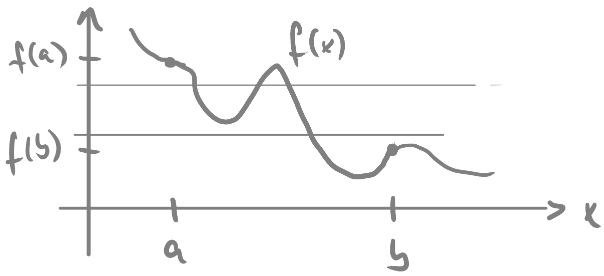
$$x \longmapsto \text{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{om } x \neq 0 \\ 1, & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

Den intuitiva egenskapen ("kan ritas utan att lyfta pennan") återspeglas i följande

Sats (om mellanliggande värden)

kontinuerlig för alla $a \leq x \leq b$

Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$ och $f(a) \neq f(b)$, då antar f varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$ minst en gång inom intervallet (a,b).



Exempel

$f(x) = x^5 - x^2 + 7$ har minst ett nollställe i $[-2,0]$.

Bevis $f(x)$ är kontinuerlig.

$f(-2) = -32 - 4 + 7 = -29$

$f(0) = 7$

$\Rightarrow$ värdet $f(x) = 0$ antas i $-2 \leq x \leq 0$

Hur vet vi att $f(x)$ är kontinuerlig?

Sats Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga i punkten a, då är också

1) $f(x) + g(x)$ 2) $f(x) \cdot g(x)$ 3) $f(g(x))$

4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ om $g(x) \neq 0$ i en omgivning av a

kontinuerliga i punkten a.

Sats Om f är kontinuerlig och har en inversfunktion f^{-1}, då är också f^{-1} kontinuerlig.

Beviset följer från egenskaper av gränsvärden. För oss betyder satserna de följande ...

Observera

i alla punkter i definitionsmängden

Alla våra elementära funktioner är kontinuerliga

- → potensfunktioner x^k
- → polynom $x^4 - 7x$ — summa: (1) i satsen
- → rationella funktioner $\frac{p(x)}{q(x)}$ — division (4)
- → exponentialfunktioner a^x (tänk $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$)
- → logaritmfunktioner
- → trigonometriska funktioner