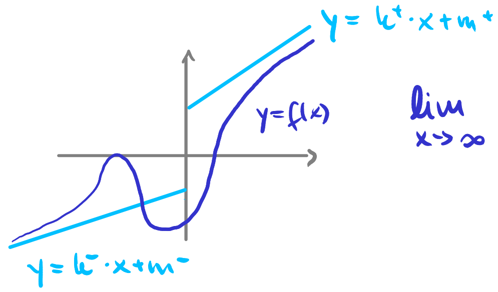
Tillägg om asymptoter

a) olika asymptoter för $x \to +\infty$ / $x \to -\infty$

b) en formel för rationella funktioner

Kom ihåg: Med en sned asymptot $y = k \cdot x + m$ menar vi att funktionen närmar sig

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - k^- \cdot x - m^- = 0$ som vänsterasymptot



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - k^+ \cdot x - m^+ = 0$ som högerasymptot

Hur hittar vi asymptoter?

Först kollar vi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ och $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$\to$ om $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = m^\pm$ är ett tal $m^\pm \in \mathbb{R}$, har vi $y = m^\pm$ som horisontal asymptot

motsvarar $k^\pm = 0$

$\to$ om $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ är $+\infty$ eller $-\infty$,

då testar vi $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k^\pm$

kan vara $\pm\infty$ $\to$ då ingen asymptot

och om detta existerar $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - k^\pm \cdot x = m^\pm$

$\Rightarrow$ sned asymptot $y^\pm = k^\pm \cdot x + m^\pm$

Exempel

$$f(x) = \frac{x\, e^x}{e^x - x} - 2 \arctan(x)$$

1) gränsvärden i oändlighet

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\, e^x}{e^x - x} - 2\arctan(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 - e^{-x} \cdot x} - 2 \lim_{x \to \infty} \arctan(x)$$

$$= \frac{\infty}{1 - 0} - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \infty$$

$\to$ här behöver vi kolla efter sned asymptot

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\,e^x}{e^x - x} - 2\arctan(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} - 2\lim_{x\to-\infty} \arctan(x)$$

$$= \frac{0}{0-1} - 2\,\frac{-\pi}{2} = \pi .$$

$\Rightarrow$ vänsterasymptot horisontal $y^- = \pi$.

2) testa högerasymptot

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x - x} - \frac{2}{x}\arctan(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}\cdot x} - 2\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{1-0} - 2\,\underbrace{\frac{\pi/2}{\infty}}_{=0} = 1 \quad \Rightarrow k^+ = 1$$

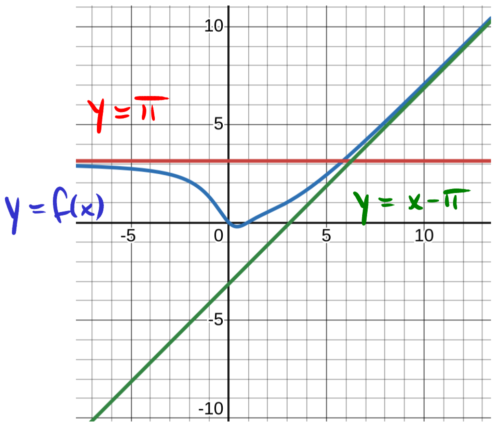
$$m^+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - k^+\cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x\,e^x}{e^x - x} - 2\arctan(x) - x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\,e^x - x(e^x - x)}{e^x - x} - 2\arctan(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x - x} - 2\arctan(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x^2 e^{-x}}^{\to 0}}{\underbrace{1 - x e^{-x}}_{\to 1}} - 2\underbrace{\arctan(x)}_{\to \pi/2}$$

$$= \frac{0}{1} - \pi = -\pi . \quad \Rightarrow m^+ = -\pi$$

Högerasymptot $y^+ = x - \pi$



Rationella funktioner

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$ där $p(x), q(x)$ är polynom

a) $\deg q > \deg p$: horisontal asymptot $y = 0$

b) $\deg q = \deg p$: någon horisontal asymptot $y \neq 0$

c) $\deg p - \deg q = 1$: sned asymptot

annars, när $\deg p > \deg q + 1$ ingen asymptot.

Varför?

Skriv $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots}$ med $a_n \neq 0 \neq b_m$

a) om $m > n$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n \overbrace{x^{n-m}}^{\to 0} + \dots}{b_m + \underbrace{b_{m-1} x^{-1} + \dots}_{\to 0}} = 0.$$

b) om $m = n$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n + a_{n-1} x^{-1} + \dots}{b_n + b_{n-1} x^{-1} + \dots} = \frac{a_n}{b_n}$$

c) om $n = m+1$: gör polynomdivision

$$\frac{a_n}{b_m} x + \frac{1}{b_m}\left(a_{n-1} - \frac{a_n b_{m-1}}{b_m}\right) + \dots$$

$$(a_n x^{m+1} + a_{n-1} x^m + \dots) \;\big|\; (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots)$$

$$-\left(a_n x^{m+1} + \frac{a_n b_{m-1}}{b_m} x^m + \dots\right)$$

$$\left(a_{n-1} - \frac{a_n b_{m-1}}{b_m}\right) x^m + \dots$$

efter två steg so vi att

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_n}{b_m} x}_{k \cdot x} + \overbrace{\frac{1}{b_m}\left(a_{n-1} - \frac{a_n b_{m-1}}{b_m}\right)}^{\text{konstant : } m} + \frac{r(x)}{q(x)}$$

rest polynom $\deg r < \deg q$ $\Rightarrow$ går mot 0

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{a_n}{b_m} = k, \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - k \cdot x = m$$

samma höger- och vänsterasymptot $y = \frac{a_n}{b_n} \cdot x + \frac{1}{b_n}\left(a_{n-1} - \frac{a_n b_{m-1}}{b_m}\right)$