Övningar i

Linjär algebra

Jonas Månsson & Patrik Nordbeck

Studentlitteratur

Förord

Detta övningshäfte är speciellt anpassat till författarnas bok *Linjär algebra*, i häftet refererad till som läroboken.

Uppgifterna är ordnade på följande sätt: I varje kapitel, som precis motsvarar ett kapitel i läroboken, har vi först en uppsättning uppgifter sorterade efter lärobokens underkapitel. Dessa är tänkta att utgöra ett grundblock, och har i stor utsträckning motsvarigheter i lärobokens exempel. Tanken är att du arbetar med detta grundblock parallellt med läroboken. I slutet av varje kapitel har vi samlat ett antal blandade uppgifter, vilka generellt är lite svårare, och inte lika ofta har en direkt motsvarighet i läroboken. I några av dessa uppgifter kombineras flera olika metoder av det du just gått igenom, och vissa är av mer teoretisk karaktär. Slutligen har vi i ett avslutande kapitel, Kapitel B, samlat ett antal blandade uppgifter för repetition av hela lärobokens innehåll, där du i många fall behöver kombinera metoder från olika delar och kapitel.

Vissa uppgifter är märkta med ett T eller ett L. Detta betyder att det till uppgiften finns ett tips respektive en lösning. Varje kapitel är indelat så att själva uppgifterna kommer först, sedan tipsen och svaren, och sist lösningarna. Du kommer att upptäcka att det finns många tips i grundblocket i varje kapitel, men att dessa tips blir glesare i blandat-delen, för att till sist helt upphöra i Kapitel B. Tanken är att du på detta sätt skall uppmuntras att arbeta mer och mer självständigt med uppgifterna. Alla uppgifter har ett svar, förutom de som är av karaktären att du ombeds visa något samband.

Vi har medvetet valt att inte inkludera så många fullständiga lösningar. I stället har många av de grundläggande uppgifterna ett tips, som vanligtvis är en hänvisning till ett direkt motsvarande exempel i läroboken. Vi tror nämligen att det är betydligt mer lärorikt att återskapa en lösning, med de i uppgiften aktuella siffrorna, än att bara skriva av en komplett lösning till problemet. För en del uppgifter är tipset i stället en direkt hänvisning till vilken sats eller vilket resultat som skall användas. Genom att i tipsen referera till läroboken vill vi uppmuntra dig som läsare att arbeta parallellt med denna, vilket vi tror är nyttigt. I de fall vi har inkluderat en fullständig lösning handlar det oftast om en uppgift där det krävs en metod utan direkt motsvarighet i läroboken.

Författarna, dagen innan midsommarafton 2019.

Kapitel 1

Vektorer

Vektorbegreppet

1.1 Låt $\mathbf{u} = (4,0,-1,3)$ och $\mathbf{v} = (2,1,4,-2)$. Beräkna vektorn $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

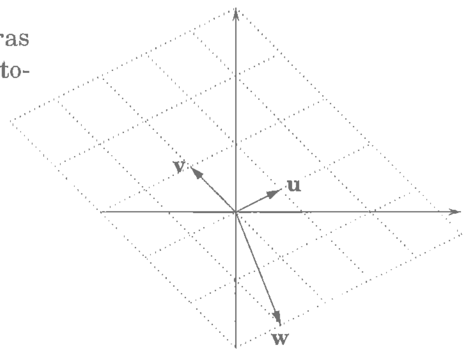
1.2 Rita ut vektorerna $\mathbf{u} = (3,1)$ och $\mathbf{v} = (-2,2)$ i samma koordinatsystem. Illustrera additionerna/subtraktionerna $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ och $-\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{v}$ geometriskt. Vad blir koordinaterna för dessa vektorer?

1.3 Vektorerna $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^2$ illustreras i figuren till höger. Rita ut vektorerna

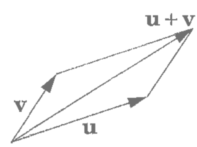
a) $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$

b) $\mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}$

c) $\mathbf{u}+2\mathbf{v}+\mathbf{w}$.



1.4 Parallellogrammet i figuren har diagonalen $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Uttryck den andra diagonalen i vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.



Egenskaper hos vektorer

T 1.5 Avgör vilka par av nedanstående vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är parallella:

$$\mathbf{u} = (-2,4,2), \qquad \mathbf{v} = (2,0,-2), \qquad \mathbf{w} = (1,-2,-1).$$

1.6 För vilka tal a gäller det att vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella, om

a) $\mathbf{u} = (-2,a+1,-4)$, $\mathbf{v} = (a,-1,2)$

b) $\mathbf{u} = (1,0,a)$, $\mathbf{v} = (2,a+1,4)$

c) $\mathbf{u} = (a,1,2)$, $\mathbf{v} = (0,0,0)$.

T 1.7 Avgör om vektorn $\mathbf{w} = (-7,7)$ är en linjärkombination av $\mathbf{u} = (1,2)$, $\mathbf{v} = (3,-1)$.

1.8 Avgör om vektorn $\mathbf{w} = (3,-5)$ är en linjärkombination av $\mathbf{u} = (1,-3)$, $\mathbf{v} = (-2,6)$. Vilka vektorer $\mathbf{w}$ går att skriva som en linjärkombination av $\mathbf{u},\mathbf{v}$?

1.9 Studera figuren i Uppgift 1.3. Är $\mathbf{w}$ en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$?

T 1.10 Vid förbränning av propan (C_3H_8), som exempelvis sker i gasolgrillar, får vi följande kemiska reaktion:

$$\lambda_1 C_3H_8 + \lambda_2 O_2 \longrightarrow \mu_1 H_2O + \mu_2 CO_2.$$

Ställ upp ett linjärt ekvationssystem för att balansera reaktionen.

T 1.11 Bestäm längderna av vektorerna $\mathbf{u} = (3,-1)$ och $\mathbf{v} = (2,2,-1)$.

T 1.12 Normera vektorn $\mathbf{u} = (1,3,-2)$, dvs. bestäm den vektor $\mathbf{e}$ av längd 1 som är lika riktad med $\mathbf{u}$.

1.13 Normera vektorerna i Uppgift 1.11.

Skalärprodukt

T 1.14 Låt $\mathbf{u} = (1,2,-2)$ och $\mathbf{v} = (1,0,3)$. Beräkna skalärprodukterna

a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ c) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$.

Beräkna även $\|\mathbf{u}\|$ och $\|\mathbf{v}\|$. Jämför dessa längder med resultaten i b) och c).

TL 1.15 För vektorerna $\mathbf{u},\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ gäller det att $\|\mathbf{u}\| = 3$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, och att vinkeln θ mellan vektorerna är $\pi/3$. Beräkna skalärprodukten $(2\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-2\mathbf{v})$.

T 1.16 För vektorerna $\mathbf{u},\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ gäller det att $\|\mathbf{u}\| = 3$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, och att vinkeln θ mellan vektorerna är $\pi/3$. Bestäm längden av vektorn $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

1.17 Verifiera att den så kallade triangelolikheten (se läroboken sidan 15) gäller för vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i Uppgift 1.16.

T 1.18 Låt $\mathbf{u} = (1,2,-1)$ och $\mathbf{v} = (1,-1,2)$.

a) Beräkna skalärprodukten $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

b) Beräkna längderna $\|\mathbf{u}\|$ och $\|\mathbf{v}\|$.

c) Beräkna vinkeln θ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

1.19 Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(2,1,2)$ och $(1,-1,4)$.

T 1.20 Bestäm talet a så att vektorerna $\mathbf{u} = (1, a, 2)$, $\mathbf{v} = (4a, -1, 3)$ blir ortogonala.

1.21 Låt $\mathbf{u} = (1, -2)$.

a) Bestäm alla vektorer som är ortogonala mot $\mathbf{u}$.

b) Bestäm alla enhetsvektorer, dvs. vektorer av längd 1, som är ortogonala mot $\mathbf{u}$.

T 1.22 Låt $\mathbf{u} = (2, 3)$ och $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

a) Kontrollera att $\mathbf{e}$ är en enhetsvektor.

b) Beräkna den ortogonala projektionen $\mathbf{u}'$ av vektorn $\mathbf{u}$ på vektorn $\mathbf{e}$. Illustrera ditt resultat i ett koordinatsystem för planet.

c) Bestäm den vektor $\mathbf{u}''$ som är ortogonal mot $\mathbf{u}'$ och uppfyller att $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$. Illustrera additionen i din figur.

1.23 Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$.

a) Beräkna den ortogonala projektionen $\mathbf{u}'$ av vektorn $\mathbf{u}$ på vektorn $\mathbf{v}$.

b) Komposantuppdela vektorn $\mathbf{u}$ som en summa av två ortogonala vektorer där den ena är parallell med vektorn $\mathbf{v}$.

Vektorprodukt

T 1.24 Beräkna vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ av $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ och $\mathbf{v} = (4, 2, -1)$. Verifiera med skalärprodukt att $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

1.25 Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$.

a) Bestäm alla vektorer som är ortogonala mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

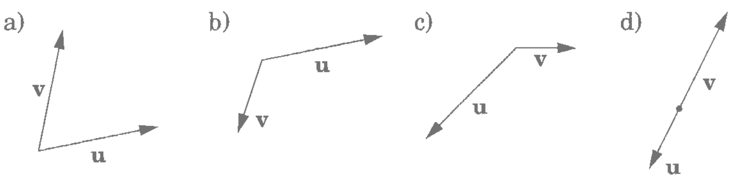
b) Bestäm alla enhetsvektorer som är ortogonala mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

T 1.26 Visa att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ om och endast om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella.

L 1.27 Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Förenkla följande uttryck så långt det går:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \big((\mathbf{u} + \mathbf{w}) \times \mathbf{v}\big).$$

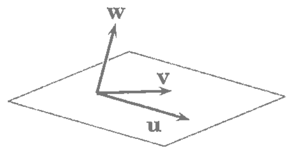
1.28 Utifrån figurerna, avgör om $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ är positivt eller negativt orienterade:



1.29 Utgående från figuren, avgör om vektorerna

a) $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ b) $\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u}$ c) $\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}$

är positivt eller negativt orienterade.



T 1.30 Antag att vektorerna $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$ är positivt orienterade. Avgör om

a) $\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}$ b) $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}$ c) $\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ d) $\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{v}$

är positivt eller negativt orienterade.

Blandade uppgifter

1.31 För vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$ gäller det att $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(1,2,-4)$ och $\mathbf{u}-\mathbf{v}=(3,4,0)$. Bestäm $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

1.32 Bestäm, om möjligt, talet a så att vektorerna $\mathbf{u}=(a,a+2)$ och $\mathbf{v}=(3,2)$ i $\mathbb{R}^2$ blir parallella.

1.33 Låt $\mathbf{u}=(2,1,-1)$ och $\mathbf{v}=(1,2,0)$. Avgör för var och en av vektorerna $\mathbf{w}$ nedan huruvida $\mathbf{w}$ är en linjärkombination av $\mathbf{u},\mathbf{v}$:

a) $\mathbf{w}=(-1,4,2)$ b) $\mathbf{w}=(1,3,-1)$ c) $\mathbf{w}=(-4,-2,2)$.

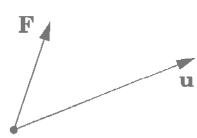
1.34 Låt $\mathbf{u}=(1,1)$ och $\mathbf{v}=(0,1)$.

a) Rita ut de nio linjärkombinationer $\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{v}$ man får genom att kombinera $\lambda_1,\lambda_2=0,1/2,1$.

b) Hur kan man geometriskt beskriva mängden av alla linjärkombinationer

$$\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{v},\quad 0\le\lambda_1,\lambda_2\le 1\quad ?$$

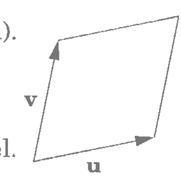
1.35 Kraften $\mathbf{F}=(1,3)$ (enhet Newton) verkar på ett föremål som förflyttas en sträcka svarande mot vektorn $\mathbf{u}=(5,2)$ (enhet meter). Beräkna det arbete som utförs.



L 1.36 Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ spänner upp en romb i planet (se figuren).

a) Uttryck de båda diagonalerna i romben som linjärkombinationer av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

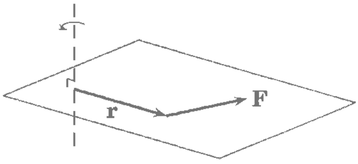
b) Visa att diagonalerna skär varandra under rät vinkel.



1.37 Komposantuppdela vektorn $\mathbf{u} = (1,2,3,-1)$ som en summa av två ortogonala vektorer där den ena är parallell med vektorn $\mathbf{v} = (1,-3,5,1)$.

1.38 Ge exempel på två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$ som både är ortogonala mot vektorn $\mathbf{w} = (1,2,-2)$ och mot varandra.

1.39 Kraften $\mathbf{F} = (1,-1,2)$ appliceras på en hävarm given av $\mathbf{r} = (1,0,-3)$. Bestäm storleken av det vridningsmoment $\mathbf{T}$ som då uppstår. Vilken blir riktningen för rotationsaxeln?



L 1.40 Är det sant att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$, dvs. är vektorprodukten associativ? Ge ett bevis eller ett motexempel.

Tips Kapitel 1

1.5 Se Exempel 1.1 på sidan 9 i läroboken.

1.7 Jämför med uppställningen i Exempel 1.2 på sidan 11 i läroboken. Lös sedan det ekvationssystem du får genom att, från en av ekvationerna, uttrycka en av de obekanta i den andra. Sätt sedan in detta uttryck i den återstående ekvationen. (Alternativt kan du använda Gausselimination om du redan känner till denna metod.)

1.10 Se Exempel 1.3 på sidan 12 i läroboken.

1.11 Se Exempel 1.4 på sidan 14 i läroboken.

1.12 Se Exempel 1.5 på sidan 14 i läroboken.

1.14 Se Definition 1.3 på sidan 17 i läroboken.

1.15 Utnyttja räknelagarna för skalärprodukt (1.14)–(1.17) på sidan 17, samt den geometriska tolkningen (1.19) på sidan 19 i läroboken.

1.16 Utnyttja sambandet $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, och beräkna skalärprodukten på motsvarande sätt som i Uppgift 1.15.

1.18 c) Se Exempel 1.7 på sidan 19 i läroboken.

1.20 För definitionen av att två vektorer är ortogonala, se Definition 1.4 på sidan 20 i läroboken.

1.22 För a) och b), jämför med Exempel 1.8 på sidan 21 i läroboken. För c), jämför med Anmärkning 1.3 på sidan 22.

1.24 Se Exempel 1.11 på sidan 25 i läroboken.

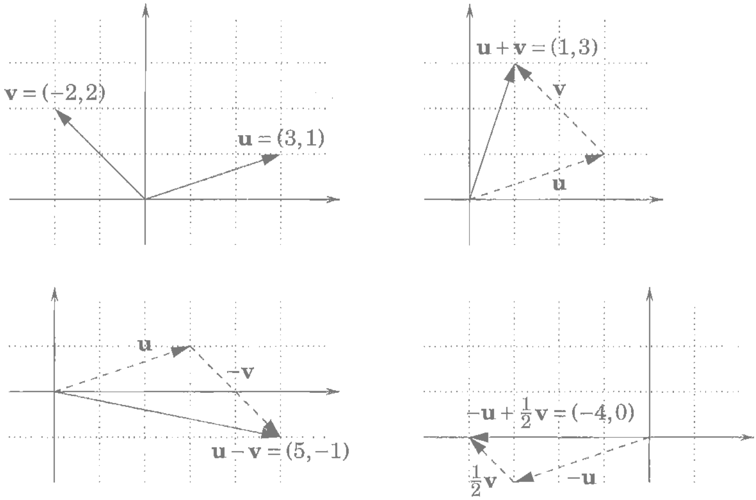
1.26 Utnyttja Sats 1.2 på sidan 27 i läroboken.

1.30 Utnyttja att ett platsbyte av två vektorer i uppräkningen gör att vi byter orientering.

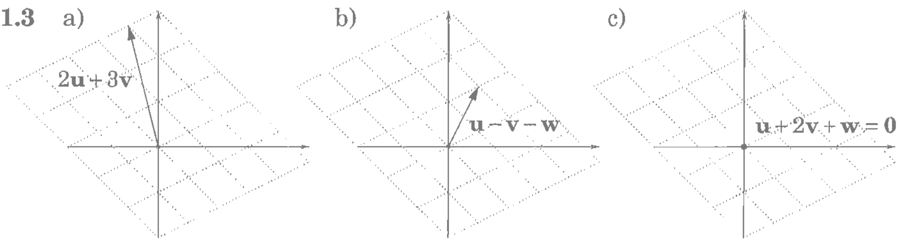
Svar Kapitel 1

1.1 $(2,-3,-14,12)$

1.2 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(1,3)$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}=(5,-1)$ och $-\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{v}=(-4,0)$



1.3 a) b) c)



1.4 $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ (eller $\mathbf{v}-\mathbf{u}$)

1.5 Vektorerna $\mathbf{u},\mathbf{w}$ är parallella; det gäller att $\mathbf{u}=-2\mathbf{w}$ (alternativt $\mathbf{w}=-\frac{1}{2}\mathbf{u}$).

1.6 a) $a=1$ b) inga a c) alla a

1.7 Vektorn $\mathbf{w}$ är en linjärkombination av $\mathbf{u},\mathbf{v}$ eftersom $\mathbf{w}=2\mathbf{u}-3\mathbf{v}$.

1.8 Vektorn $\mathbf{w}$ är ej en linjärkombination av $\mathbf{u},\mathbf{v}$. Notera att vektorerna $\mathbf{u},\mathbf{v}$ i denna uppgift är parallella (det gäller att $\mathbf{v}=-2\mathbf{u}$). Det är då enbart vektorer $\mathbf{w}$ parallella med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, dvs. vektorer på formen $\mathbf{w}=t(1,-3)$, $t\in\mathbb{R}$, som kan fås som en linjärkombination.

1.9 Ja, eftersom det gäller att $\mathbf{w} = -\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

1.10
$$\begin{cases} 3\lambda_1 & = & \mu_2 \\ 8\lambda_1 & = 2\mu_1 & \\ & 2\lambda_2 = & \mu_1 + 2\mu_2 \end{cases}$$

1.11 $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{10}$, $\|\mathbf{v}\| = 3$

1.12 $\mathbf{e} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2)$

1.13 $\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)$ respektive $\frac{1}{3}(2,2,-1)$

1.14 a) -5 b) 9 c) 10

Längderna ges av 3 respektive $\sqrt{10}$. Notera sambandet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$.

1.15 1

1.16 $\sqrt{19}$

1.17 Det gäller att $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{19}$, $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = 3+2 = 5$, och vi noterar att $\sqrt{19} \le 5$.

1.18 a) -3 b) $\sqrt{6}$ för båda vektorerna c) $2\pi/3$

1.19 $\pi/4$

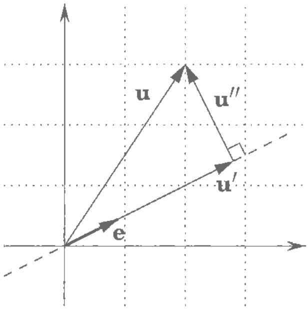
1.20 $a = -2$

1.21 a) $t(2,1), \quad t \in \mathbb{R}$ b) $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$

1.22 a) $\|\mathbf{e}\| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{2^2 + 1^2} = 1$

b) $\mathbf{u}' = \frac{7}{5}(2,1)$

c) $\mathbf{u}'' = \mathbf{u} - \mathbf{u}' = \frac{4}{5}(-1,2)$



1.23 a) $\mathbf{u}' = -\frac{1}{9}(1,2,-2)$

b) $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$, där $\mathbf{u}' = -\frac{1}{9}(1,2,-2)$ och $\mathbf{u}'' = \frac{5}{9}(2,4,5)$

1.24 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-4, 13, 10)$

1.25 a) $t(1,1,-1),\quad t \in \mathbb{R}$ b) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

1.27 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$

1.28 a) positivt b) negativt c) positivt d) ej definierat

1.29 a) positivt b) negativt c) positivt

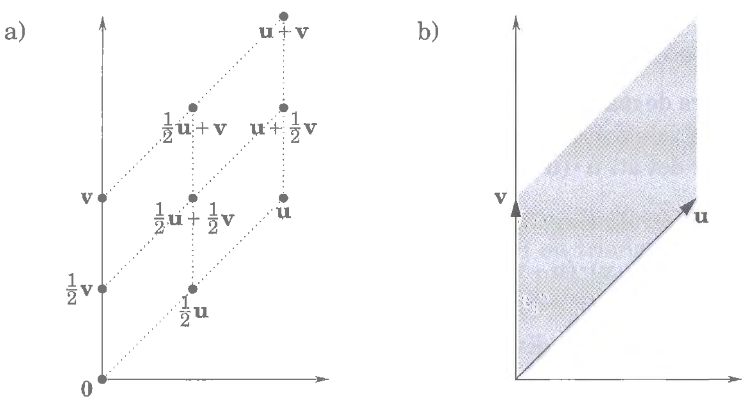
1.30 a) negativt b) positivt c) negativt d) positivt

1.31 $\mathbf{u} = (2,3,-2)$ och $\mathbf{v} = (-1,-1,-2)$

1.32 $a = -6$

1.33 a) ja, $\mathbf{w} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ b) nej c) ja, $\mathbf{w} = -2\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$

1.34 Linjärkombinationerna är nedan representerade med punkter i planet. I b)-uppgiften får vi hela parallellogrammet som spänns upp av **u** och **v**.



1.35 Arbetet ges av skalärprodukten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$; svaret blir 11 Nm.

1.36 a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

1.37 $(1,2,3,-1) = \frac{1}{4}(1,-3,5,1) + \frac{1}{4}(3,11,7,-5)$

1.38 exempelvis $\mathbf{u} = (2,1,2)$ och $\mathbf{v} = (2,-2,-1)$

1.39 Vi får vridningsmomentet $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (-3,-5,-1)$, så momentents storlek ges av $\|\mathbf{r} \times \mathbf{F}\| = \sqrt{35}$ och rotationsaxeln har riktningen $(-3,-5,-1)$.

1.40 Nej, det är inte sant.

Lösningar Kapitel 1

1.15 Vi utnyttjar räknelagarna för skalärprodukt, samt den geometriska tolkningen (1.19) på sidan 19 i läroboken, och får

$$(2\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) - 4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}_{=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) =$$
$$= 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) - 3(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2\,\|\mathbf{u}\|^2 - 3\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta - 2\,\|\mathbf{v}\|^2 =$$
$$= 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3\cdot 2\cdot \underbrace{\cos\tfrac{\pi}{3}}_{=1/2} - 2\cdot 2^2 = 1.$$

Notera hur det för skalärprodukt gäller att parenteser kan ”multipliceras ihop” på samma sätt som för reella tal.

1.27 Vi använder lärobokens räknelagar för vektorprodukt och skalärprodukt. Räknelag (1.25) på sidan 26 följt av (1.17) på sidan 17 ger att

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\big((\mathbf{u}+\mathbf{w})\times\mathbf{v}\big) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{w}\times\mathbf{v}) =$$
$$= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v}) =$$
$$= \underbrace{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})}_{=0} + \underbrace{\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})}_{=0} + \mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v}) + \underbrace{\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v})}_{=0} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v}).$$

Notera de markerade skalärprodukterna som blir noll. Vi vet ju att exempelvis vektorprodukten $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, och således gäller det att $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$.

1.36 b) Från räknelagarna för skalärprodukt får vi

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\underbrace{-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}_{=0}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 0,$$

dvs. det gäller att diagonalerna $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ är ortogonala. Notera den sista likheten ovan; det gäller att $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ eftersom det rör sig om en romb.

1.40 Nej, exempelvis kan vi välja att sätta $\mathbf{u} = \mathbf{v} \neq 0$, och låta $\mathbf{w}$ vara en vektor som ej är parallell med $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Enligt Uppgift 1.26 är en vektorprodukt lika med nollvektorn precis då de ingående vektorerna är parallella, så

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\times\mathbf{u})\times\mathbf{w} = \mathbf{0}\times\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Samtidigt gäller det att

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{w}) \neq \mathbf{0},$$

eftersom $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}\times\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är ej parallella) och $\mathbf{u}_1$ ej är parallell med $\mathbf{u}$ (de är t.o.m. ortogonala). Vi får således att $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} \neq \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$.

Kapitel 2

Vektorer som geometriska objekt

Punkter och vektorer

T 2.1 Låt O, P och Q vara punkter i planet (eller rummet). Uttryck vektorn $\overrightarrow{PQ}$ som en linjärkombination av vektorerna $\overrightarrow{OP}$ och $\overrightarrow{OQ}$.

T 2.2 Bestäm vektorn $\overrightarrow{PQ}$, samt beräkna längden $\|\overrightarrow{PQ}\|$, i fallet då

a) $P:(1,2)$, $Q:(3,-1)$

b) $P:(-1,0,-2)$, $Q:(2,1,-1)$.

T 2.3 a) Låt P och Q vara punkter i planet (eller rummet), och antag att M är mittpunkten av linjestycket PQ. Visa att det, för varje punkt O, då gäller att

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}).$$

Detta samband brukar kallas för *mittpunktsformeln*.

b) Bestäm koordinaterna för mittpunkten av linjestycket mellan punkterna $P:(-1,3,0)$ och $Q:(-1,1,6)$.

2.4 a) Låt punkterna P, Q och R vara hörnen i en triangel i planet (eller rummet), och låt P_1 vara mittpunkten av linjestycket QR. Beteckna vidare med M den punkt på linjestycket PP_1 som ligger dubbelt så långt från P som från P_1. Visa att det, för varje punkt O, då gäller att

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}).$$

Punkten M kallas *tyngdpunkten* för triangeln PQR, och sambandet ovan för *tyngdpunktsformeln*.

b) Bestäm tyngdpunkten för den triangel i rummet som har hörn i punkterna $P:(1,6,2)$, $Q:(-1,1,2)$ och $R:(0,2,2)$.

Linjer och plan

T 2.5 Ange en ekvation på parameterform för den linje i planet som går genom punkterna $P:(2,-1)$ och $Q:(5,4)$. Ligger punkten $R:(1,-8/3)$ på denna linje?

2.6 Ange en ekvation på parameterform för den linje i rummet som

a) går genom punkterna $P:(1,-2,3)$ och $Q:(3,2,-1)$

b) går genom origo och är parallell med linjen

$$\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5 \\ z = 4+t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

c) ges av z-axeln.

2.7 Avgör om de tre punkterna $P:(1,1,2)$, $Q:(3,0,4)$ och $R:(-1,2,1)$ ligger på en och samma linje i rummet.

T 2.8 Ange en ekvation på parameterform för det plan i rummet som går genom punkterna $P:(1,-1,2)$, $Q:(2,-3,2)$ och $R:(4,0,1)$.

2.9 Ange en ekvation på parameterform för det plan i rummet som

a) går genom punkterna $P:(1,2,0)$ och $Q:(2,3,-1)$, och är parallellt med linjen

$$\begin{cases} x = \phantom{1-{}}2t \\ y = 1-t \\ z = 3+2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) går genom origo och är parallellt med planet

$$\begin{cases} x = 2+s-2t \\ y = 5+s+t \\ z = 1-s+3t \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

c) ges av yz-planet.

T 2.10 Ange en ekvation på normalform för den linje i planet som går genom punkten $P:(2,-1)$ och har normalvektorn $\mathbf{n}=(3,-2)$.

T 2.11 Ange en normalvektor till linjen $x-3y+5=0$. Avgör om vektorn $\mathbf{u}=(1,2)$ är parallell med denna linje.

T 2.12 a) Bestäm en ekvation på parameterform för den linje i planet som på normalform ges av $2x+3y-1=0$. Ange även en riktningsvektor för linjen.

b) Ange en ekvation på normalform för den linje i planet som på parameterform ges av $(x,y)=(-1+5t,3+t)$, $t\in\mathbb{R}$. Ange även en normalvektor för linjen.

T 2.13 Låt π vara det plan i rummet som går genom punkten $P:(3,-1,0)$ och har normalvektorn $\mathbf{n}=(4,1,-2)$.

a) Ange en ekvation på normalform för π.

b) Ligger punkten $Q:(1,2,3)$ i planet π? Är vektorn $\mathbf{u}=(1,2,3)$ parallell med π?

c) Ange en ekvation på parameterform för π.

2.14 Ange en ekvation på normalform för det plan i rummet som

a) går genom punkterna $P:(1,-1,2)$, $Q:(1,0,4)$ och $R:(0,-1,3)$

b) ges av yz-planet.

2.15 Låt π vara planet som på parameterform ges av

$$\begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = s + t\ , \qquad s,t \in \mathbb{R}. \\ z = -3 + 2s + 5t \end{cases}$$

Bestäm en ekvation för π på normalform.

Projektion och spegling

T 2.16 Låt l vara linjen $2x-y=0$, samt låt $P:(-1,6)$ och $\mathbf{u}=(3,2)$. Bestäm den sneda projektionen av punkten P på linjen l, i riktningen $\mathbf{u}$.

T 2.17 Låt l vara linjen $2x-y=0$, samt låt $P:(-1,1)$.

a) Bestäm den ortogonala projektionen av punkten P på linjen l.

b) Bestäm speglingen av punkten P i linjen l.

2.18 Lös återigen Uppgift 2.17 a) ovan, men använd denna gång metoden med skalärprodukt (se Exempel 2.18 på sidan 52 i läroboken).

T 2.19 Låt π vara planet $2x-y+z=0$, samt låt $P:(1,0,-1)$.

a) Bestäm den ortogonala projektionen av punkten P på planet π.

b) Bestäm speglingen av punkten P i planet π.

T 2.20 Bestäm avståndet

a) mellan punkten P och linjen l i Uppgift 2.17

b) mellan punkten P och planet π i Uppgift 2.19.

2.21 Bestäm den ortogonala projektionen av punkten $P:(23,43,-11)$ på yz-planet.

T 2.22 Bestäm den ortogonala projektionen av punkten $P:(1,-2,0)$ på linjen $l:(x,y,z)=t(1,2,-2)$. Bestäm även avståndet mellan punkten P och linjen l.

Area och volym

T 2.23 Bestäm arean av det parallellogram i rummet som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}=(1,2,0)$ och $\mathbf{v}=(-1,3,2)$.

2.24 Bestäm arean av

a) triangeln i rummet med hörn i $P:(-1,2,3)$, $Q:(1,1,0)$ och $R:(1,1,2)$

b) triangeln i planet med hörn i origo, $P:(-1,1)$ och $Q:(2,3)$.

T 2.25 Bestäm volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\mathbf{u}=(-1,1,2)$, $\mathbf{v}=(1,1,1)$ och $\mathbf{w}=(2,-3,0)$. Är $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ positivt eller negativt orienterade?

T 2.26 En tetraeder har hörn i punkterna $P:(1,2,1)$, $Q:(0,2,5)$, $R:(-1,-1,0)$ samt origo. Beräkna volymen av tetraedern.

Blandade uppgifter

2.27 Bestäm samtliga sidlängder och vinklar för den triangel i rummet som har hörn i punkterna $P:(3,3,-3)$, $Q:(5,5,-4)$ och $R:(1,4,-5)$.

2.28 Bestäm koordinaterna för den punkt vi får om vi, med start i punkten $P:(1,-2)$, förflyttar oss 3 längdenheter i riktningen $\mathbf{u}=(3,4)$.

2.29 Avgör om punkten $P:(5,1/2,1/2)$ ligger på den linje som går genom punkterna $Q:(-1,2,-1)$, $R:(3,1,0)$. Ligger P på linjestycket mellan Q och R?

2.30 Låt π vara planet som på normalform ges av $2x-3y+z=2$. Ge exempel på tre olika punkter som ligger i π. Ge även exempel på två icke-parallella vektorer som är parallella med π.

2.31 Avgör om de fyra punkterna $P:(1,0,1)$, $Q:(1,1,2)$, $R:(-1,3,2)$, $S:(-2,2,0)$ ligger i ett och samma plan i rummet.

2.32 Låt π vara planet som går genom punkterna $P:(1,0,1)$, $Q:(2,1,0)$ och $R:(0,0,3)$. Bestäm talet a så att linjen $l:(x,y,z)=(1,2,0)+t(2,a,3)$ blir parallell med π.

2.33 Betrakta linjerna

$$l_1 : (x,y,z) = (1,-1,0) + t(2,0,1) \quad \text{och} \quad l_2 : (x,y,z) = (0,0,2) + t(1,-1,-2).$$

Bestäm en ekvation på normalform för det plan π som innehåller linjen l_1 och är parallellt med linjen l_2.

2.34 Avgör om punkterna $P : (2,3,1)$ och $Q : (-2,1,2)$ ligger på samma sida eller på olika sidor om planet $\pi : x - 2y + 3z = 0$.

2.35 Bestäm en ekvation på normalform för planet π som går genom punkterna $P : (4,2,1)$, $Q : (5,0,2)$ och $R : (3,4,1)$. Bestäm också den punkt i π som ligger närmast origo.

T 2.36 Bestäm avståndet mellan linjerna

$$l_1 : (x,y,z) = (1,-1,1) + t(-2,1,2) \quad \text{och} \quad l_2 : (x,y,z) = (0,1,1) + t(1,-1,0).$$

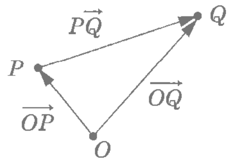
2.37 Antag att punkten P speglas i planet $-x + 2z = 0$ på punkten $S : (1,2,3)$. Bestäm koordinaterna för ursprungspunkten P.

2.38 En laserstråle skjuts iväg från punkten $P : (1,0,1)$ och reflekteras i planet π med ekvation $2x - y + z = 0$. Den reflekterade strålen observeras i punkten $Q : (3,1,-1)$. Bestäm den punkt i planet i vilken laserstrålen reflekteras.

2.39 En triangel i rummet har två av hörnen i punkterna $P : (1,1,0)$ och $Q : (0,3,-1)$ samt det tredje hörnet på y-axeln. Bestäm samtliga möjliga lägen av det tredje hörnet så att arean av triangeln blir lika med 1.

Tips Kapitel 2

2.1 Utgå från sambandet $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ (se figuren).



2.2 Utnyttja principen ”slutpunkt minus startpunkt”; se Exempel 2.2 på sidan 36 i läroboken.

2.3 b) Använd mittpunktsformeln i a). Om punkten O i a)-uppgiften betecknar origo, så är vektorerna $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ *ortsvektorer* för P och Q. Dessa har därför samma koordinater som P och Q, dvs. det gäller att $\overrightarrow{OP} = (-1,3,0)$ och $\overrightarrow{OQ} = (-1,1,6)$.

2.5 Se Exempel 2.4 och 2.5 på sidan 39 i läroboken.

2.8 Se Exempel 2.7 på sidan 42 i läroboken.

2.10 Se Exempel 2.9 på sidan 44 i läroboken.

2.11 Se Exempel 2.10 på sidan 45 i läroboken.

2.12 a) Se Exempel 2.11 på sidan 46 i läroboken.
b) Se Anmärkning 2.4 på sidan 46 i läroboken.

2.13 a) Se Exempel 2.12 på sidan 47 i läroboken.
c) Se Exempel 2.14 på sidan 48 i läroboken.

2.16 Se Exempel 2.16 på sidan 50 i läroboken.

2.17 Se Exempel 2.17 och 2.19 på sidan 51 respektive 53 i läroboken.

2.19 Se Exempel 2.20 på sidan 54 i läroboken.

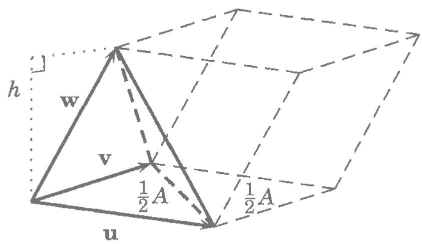
2.20 Jämför med Exempel 2.21 på sidan 55 i läroboken.

2.22 Använd metoden med skalärprodukt. Jämför med Exempel 2.18 på sidan 52 i läroboken.

2.23 Se Sats 2.1 på sidan 56 i läroboken.

2.25 Se Sats 2.3 och Anmärkning 2.7 på sidan 59 i läroboken.

2.26 Notera att volymen av en tetraeder med sidorna **u**, **v** och **w** blir 1/6 av volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna **u**, **v** och **w** (se figuren).



Resonemanget är följande: Låt A beteckna arean av basytan för parallellepipeden i figuren. Motsvarande basyta för tetraedern har då arean $\frac{1}{2}A$, och tetraedern och parallellepipeden har samma höjd h mot dessa basytor. En tetraeders volym ges av en tredjedel av produkten mellan arean av basytan och höjden (formeln för volymen av en pyramid), så volymen för vår tetraeder blir

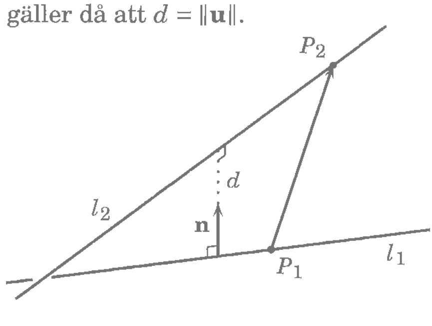
$$V_T = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}A\right)h = \tfrac{1}{6}Ah.$$

För parallellepipeden, vars volym direkt ges av produkten av basytans area och höjden, får vi

$$V_P = Ah,$$

och vi ser slutligen att $V_T = \frac{1}{6}V_P$.

2.36 Vi söker längden d av det linjestycke mellan l_1 och l_2 som är ortogonalt mot båda linjerna (tänk efter varför detta avstånd blir det kortaste). Ett sätt att ta fram denna är genom ortogonal projektion med hjälp av skalärprodukt: Välj två godtyckliga punkter P_1, P_2, på l_1 respektive l_2, och bilda $\overrightarrow{P_1P_2}$. Bestäm sedan en vektor $\mathbf{n}$ ortogonal mot både l_1 och l_2. Idén är nu att bestämma den ortogonala projektionen $\mathbf{u}$ av vektorn $\overrightarrow{P_1P_2}$ på vektorn $\mathbf{n}$; det gäller då att $d = \|\mathbf{u}\|$.



Svar Kapitel 2

2.1 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

2.2 a) $\overrightarrow{PQ} = (2,-3)$, $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{13}$ b) $PQ = (3,1,1)$, $\|PQ\| = \sqrt{11}$

2.3 b) Mittpunkten ges av $M:(-1,2,3)$.

2.4 b) Tyngdpunkten ges av $M:(0,3,2)$.

2.5 En ekvation på parameterform är

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

alternativt $(x,y) = (2+3t, -1+5t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ja, punkten R ligger på linjen (med $t = -1/3$).

2.6 a) En ekvation på parameterform är

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

alternativt $(x,y,z) = (1+t, -2+2t, 3-2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) $(x,y,z) = (-2t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$

c) $(x,y,z) = (0,0,t)$, $t \in \mathbb{R}$

2.7 De ligger ej på en linje eftersom vektorerna $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ ej är parallella.

2.8 En ekvation på parameterform är

$$\begin{cases} x = 1 + s + 3t \\ y = -1 - 2s + t \\ z = 2 \phantom{{}-2s} - t \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R},$$

alternativt $(x,y,z) = (1+s+3t, -1-2s+t, 2-t)$, $s,t \in \mathbb{R}$.

2.9 a) $(x,y,z) = (1+s+2t, 2+s-t, s+2t)$, $s,t \in \mathbb{R}$

b) $(x,y,z) = (s-2t, s+t, -s+3t)$, $s,t \in \mathbb{R}$

c) $(x,y,z) = (0,s,t)$, $s,t \in \mathbb{R}$

2.10 $3(x-2)-2(y+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-2y-8=0$

2.11 En normalvektor ges av $\mathbf{n}=(1,-3)$. Vektorn $\mathbf{u}$ är ej parallell med linjen, eftersom $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}=-5\neq 0$.

2.12 a) $(x,y)=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t,t\right)$, $t\in\mathbb{R}$; en riktningsvektor läses av till $\mathbf{u}=\left(-\frac{3}{2},1\right)$
b) $x-5y+16=0$; en normalvektor läses av till $\mathbf{n}=(1,-5)$

2.13 a) $4x+y-2z-11=0$ b) nej respektive ja
c) $(x,y,z)=(s,11-4s+2t,t), \quad s,t\in\mathbb{R}$

2.14 a) $x-2y+z-5=0$ b) $x=0$

2.15 $x-4y+z+2=0$

2.16 $(5,10)$

2.17 a) $\frac{1}{5}(1,2)$ b) $\frac{1}{5}(7,-1)$

2.18 $\frac{1}{5}(1,2)$

2.19 a) $\frac{1}{6}(4,1,-7)$ b) $\frac{1}{3}(1,1,-4)$

2.20 a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

2.21 $(0,43,-11)$

2.22 Den ortogonala projektionen blir $-\frac{1}{3}(1,2,-2)$, och avståndet är lika med 2.

2.23 $3\sqrt{5}$

2.24 a) $\sqrt{5}$ b) 5/2

2.25 11; negativt orienterade

2.26 1/2

2.27 sidlängderna 3, 3 och $3\sqrt{2}$ samt vinklarna $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{\pi}{2}$

2.28 $\frac{2}{5}(7,1)$

2.29 Punkten P ligger på linjen, men inte på linjestycket.

2.30 Exempelvis ligger punkterna $(1,0,0)$, $(1,1,3)$, $(0,0,2)$ i planet, medan t.ex. $(1,1,1)$ och $(3,2,0)$ är två icke-parallella vektorer parallella med planet.

2.31 De ligger samtliga i planet $x+y-z=0$.

2.32 $a=7$

2.33 $x+5y-2z+4=0$

2.34 olika

2.35 Planet har ekvation $2x+y-10=0$, och punkten närmast origo är $(4,2,0)$.

2.36 2/3

2.37 $(3,2,-1)$

2.38 $\frac{1}{7}(5,7,-3)$

2.39 $\left(0,2\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

Kapitel 3

Linjära ekvationssystem

Gausselimination

T 3.1 Lös följande linjära ekvationssystem, samt ge en geometrisk tolkning av resultatet:

a) $\begin{cases} 2x + \ \ y = -3 \\ -4x + 2y = \ \ 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 6y = -1 \\ -x + 2y = \ \ 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ -x + 2y = \ \ 1 \end{cases}$

T 3.2 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + \ \ y \qquad\ \ = \ \ 2 \\ 2x + 3y + \ \ z = \ \ 3 \\ -x \qquad\ + 2z = -4 \end{cases}.$$

3.3 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = \ \ 2 \\ -4x \qquad\ - 2z = -2 \\ x - \ \ y + \ \ z = \ \ 3 \end{cases}.$$

3.4 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - \ \ z = 0 \\ -2x \qquad\ + 4z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}.$$

3.5 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - \ \ z = \ \ 2 \\ -2x \qquad\ + 4z = -1 \\ 3x + 2y - 5z = \ \ 9 \end{cases}.$$

3.6 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = \ \ 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = \ \ 1 \\ -x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 = \ \ 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = -4 \end{cases}.$$

T 3.7 Antag att ett linjärt 2×2-system har de två lösningarna $(x,y) = (1,2)$ och $(x,y) = (3,-6)$. Går det utifrån denna information att avgöra om även $(x,y) = (2,-2)$ är en lösning till systemet?

T 3.8 Ett homogent linjärt 5×4-system har lösningen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,-1,4,3)$. Hur många lösningar har systemet?

Under- och överbestämda system

3.9 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + 4y + 8z = 3 \\ 3x - 6y - 12z = -2 \end{cases},$$

samt tolka ditt resultat geometriskt.

3.10 Bestäm skärningen mellan planen

$$x - 2y + z = 2 \qquad \text{och} \qquad -3x + 2y + z = 2.$$

3.11 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_4 + 4x_5 = -3 \\ 2x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -5 \end{cases}.$$

3.12 Har linjerna

$$x - 2y = 3, \qquad 3x - y = -1 \qquad \text{och} \qquad 2x + y = 1$$

i planet någon gemensam skärningspunkt?

3.13 Bestäm talet a så att linjerna

$$x - 2y = 3, \qquad 3x - y = -1 \qquad \text{och} \qquad 2x + ay = 1$$

i planet får en gemensam skärningspunkt.

L 3.14 Avgör om de två linjerna i rummet med ekvation

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{respektive} \qquad \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = -2 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

skär varandra. Bestäm i så fall även skärningen.

En närmare till på eliminationsprocessen

3.15 Ange en uppsättning pivåvariabler samt en uppsättning fria variabler till ekvationssystemet i Uppgift 3.11.

T 3.16 Använd resultatet i Uppgift 3.2 för att direkt bestämma antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}+z} = 12 \\ 2x + 3y + z = 13 \\ -x \phantom{{}+3y} + 2z = -14 \end{cases} .$$

T 3.17 Använd resultatet i Uppgift 3.3 för att direkt skriva upp lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0 \\ -4x \phantom{{}-4y} - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} .$$

T 3.18 Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x \phantom{{}+2y} + 4z = 2 \\ 3x + 2y - 5z = -1 \end{cases}$$

har en lösning $(x,y,z) = (7,-1,4)$. Använd resultatet i Uppgift 3.4 för att direkt skriva upp den fullständiga lösningen.

Tillämpningar av linjära ekvationssystem

3.19 Tre studenter handlar inför midsommarfesten. Student A köper 1 kg potatis, 2 burkar sill samt 1 knippe gräslök och betalar 49 kr, student B köper 3 kg potatis, 4 burkar sill samt 2 knippen gräslök och betalar 107 kr, och slutligen köper student C köper 2 kg potatis, 3 burkar sill samt 2 knippen gräslök för 86 kr. Hur mycket kostar ett kg potatis, en burk sill respektive ett knippe gräslök?

T 3.20 Vid förbränning av propan (C_3H_8), som exempelvis sker i gasolgrillar, får vi följande kemiska reaktion:

$$\lambda_1 C_3H_8 + \lambda_2 O_2 \longrightarrow \mu_1 H_2O + \mu_2 CO_2 .$$

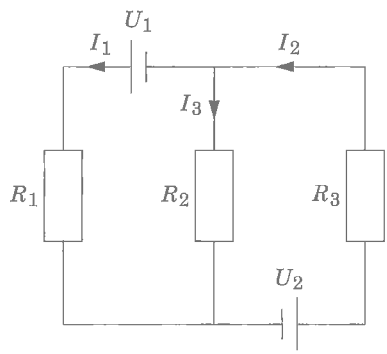
Balansera denna reaktion.

3.21 Antag att det för de tre sektorerna E, V och T i Exempel 3.11 i läroboken istället gäller att

av det E producerar köps	10% av E	60% av V	30% av T,
av det V producerar köps	20% av E	40% av V	40% av T,
av det T producerar köps	30% av E	50% av V	20% av T.

Hur mycket skall E och V ta betalt för sina totala produktioner om det råder jämviktspriser och T tar 4 milj. för sin totala produktion?

T 3.22 Bestäm strömstyrkorna i följande krets:



$R_1 = R_3 = 3\,\Omega$

$R_2 = 2\,\Omega$

$U_1 = 4\,\mathrm{V}$

$U_2 = 11\,\mathrm{V}$

Blandade uppgifter

T 3.23 a) Bestäm, för alla tal a, b och c, antalet lösningar till systemet

$$\begin{cases} ax + by = c \\ 2x - y = 3 \end{cases}.$$

b) Bestäm, för alla tal a, b, c och d, antalet lösningar till systemet

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ 2x - y + 4z = 3 \end{cases}.$$

3.24 Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ 2x + 3y + az = 4 \\ ax + y + 2z = -2a \end{cases}.$$

3.25 Bestäm talet a så att de två linjerna i rummet med ekvation

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{respektive} \qquad \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + at \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

skär varandra. Bestäm även skärningspunkten.

L 3.26 Låt π vara planet som på parameterform ges av

$$\begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = s + t \\ z = -3 + 2s + 5t \end{cases}, \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

a) Använd Gausselimination för att avgöra om punkten $(4,3,5)$ ligger i planet π.

b) Använd Gausselimination för bestämma en ekvation för π på normalform.

3.27 Bestäm alla värden på talet a sådana att $\mathbf{v} = (1,a,2)$ är en linjärkombination av $\mathbf{u}_1 = (1,2,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (3,-1,4)$ och $\mathbf{u}_3 = (-2,1,-3)$.

3.28 Bestäm alla tal a och b sådana att systemet

a) $\begin{cases} x - 2y = a \\ -3x + 6y = b \end{cases}$ har lösning,

b) $\begin{cases} x + ay = c \\ -3x + by = d \end{cases}$ har lösning för alla tal c och d.

Bestäm alla tal a, b, c och d sådana att systemet

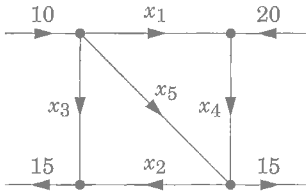
c) $\begin{cases} x + ay = c \\ -3x + by = d \end{cases}$ saknar lösning.

3.29 När surt regn faller på kalksten ($CaCO_3$) neutraliseras syran (H_3O) enligt den kemiska (obalanserade) reaktionen

$$H_3O + CaCO_3 \longrightarrow H_2O + Ca + CO_2.$$

Balansera denna reaktion.

3.30 Nedanstående figur illustrerar trafikflöden i ett vägnät (antal bilar per minut). Ställ upp ett ekvationssystem för flödena $x_1, x_2, \ldots, x_5$ och lös detta. Om vi antar att alla vägar är enkelriktade i pilarnas riktning, vilka vägar, svarande mot flödena $x_1, x_2, \ldots, x_5$, kan då stängas av?



3.31 a) Ett bageri tillverkar tre slags tårtor genom att på olika sätt kombinera tre ingredienser enligt följande recept:

	ingr. 1	ingr. 2	ingr. 3
tårta 1	2	2	1
tårta 2	4	1	0
tårta 3	1	1	3

Sista dagen innan semestern har bageriet 28 enheter av ingrediens 1 kvar, 19 av ingrediens 2 och 18 av ingrediens 3. Kan bageriet göra slut på alla ingredienserna? Hur många tårtor av varje slag skall man i så fall tillverka?

b) Nästa år har bageriet ändrat recepten enligt följande:

	ingr. 1	ingr. 2	ingr. 3
tårta 1	2	2	1
tårta 2	4	1	2
tårta 3	2	1	1

Sista dagen innan semestern har bageriet 24 enheter av ingrediens 1 kvar och 27 av ingrediens 2, men helt slut på ingrediens 3. Går det att komplettera med ingrediens 3 så att bageriet gör slut på alla ingredienserna? Hur många enheter av ingrediens 3 skall man i så fall köpa?

Tips Kapitel 3

3.1 Studera Exempel 3.1, 3.2 och 3.3 på sidorna 63–64 i läroboken.

3.2 Studera Exempel 3.4 på sidan 66 i läroboken.

3.7 Använd Hjälpsats 3.2 på sidan 71 i läroboken.

3.8 Använd t.ex. Följdsats 3.1 på sidan 72 i läroboken.

3.16 Använd Sats 3.3 på sidan 80 i läroboken.

3.17 Använd Sats 3.3 i kombination med Följdsats 3.1, på sidan 80 respektive 72 i läroboken.

3.18 Använd Sats 3.6 på sidan 83 i läroboken.

3.20 Du har ställt upp tillhörande ekvationssystem i Uppgift 1.10.

3.22 Studera Exempel 3.12 på sidan 87 i läroboken.

3.23 Tänk på ekvationerna i systemen som ekvationer för linjer respektive plan.

Svar Kapitel 3

3.1 a) $(x,y)=(-1,-1)$ b) lösning saknas c) $(x,y)=(-1+2t,t)$

I samtliga tre system kan vi se ekvationerna som ekvationer för två linjer i planet. I det första fallet skär linjerna varandra i en punkt, i det andra är de parallella och skär inte varandra, medan de i det sista fallet är samma linje.

3.2 $(x,y,z)=(2,0,-1)$

3.3 $(x,y,z)=(-4,2,9)$

3.4 $(x,y,z)=(-4t,t,-2t), \quad t\in\mathbb{R}$

3.5 Lösning saknas.

3.6 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-4, \quad 1,1,-1)$

3.7 Ja, eftersom $Q:(2,-2)$ ligger på linjen som går genom punkterna $P_1:(1,2)$ och $P_2:(3,-6)$.

3.8 Systemet har oändligt många lösningar.

3.9 Lösning saknas. Ekvationerna svarar mot två plan som är parallella och saknar skärning.

3.10 Skärningen blir linjen $(x,y,z)=(-2,-2,0)+t(1,1,1), \quad t\in\mathbb{R}$.

3.11 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-1,-2,0,1,0)+s(1,-2,0,2,1)+t(1,1,1,0,0), \; s,t\in\mathbb{R}$

3.12 nej

3.13 $a=-\frac{3}{2}$

3.14 Linjerna skär varandra i punkten $(1,-1,2)$.

3.15 Pivåvariabler (exempelvis) x_1,x_2,x_4, fria variabler x_3,x_5.

3.16 Det finns en lösning.

3.17 $(x,y,z)=(0,0,0)$

3.18 $(x,y,z) = (7-4t, -1+t, 4-2t)$

3.19 Ett kg potatis kostar 9 kr, en burk sill 12 kr och ett knippe gräslök 16 kr.

3.20 Reaktionen kan exempelvis skrivas $C_3H_8 + 5O_2 \longrightarrow 4H_2O + 3CO_2$.

3.21 Sektorn E skall ta 8/3 milj. och V skall ta 6 milj.

3.22 Strömstyrkorna blir $I_1 = 2\,\mathrm{A}$, $I_2 = 3\,\mathrm{A}$ och $I_3 = 1\,\mathrm{A}$.

3.23 a) Om $(a,b,c) = k(2,-1,3)$ för något k så får vi oändligt många lösningar, och om $(a,b) = k(2,-1)$ men $c \neq 3k$ för något k så saknas lösning. Övriga värden på (a,b,c) ger en lösning.
b) Om $(a,b,c) = k(2,-1,4)$ men $d \neq 3k$ för något k så saknas lösning. Övriga värden på (a,b,c,d) ger oändligt många lösningar.

3.24 Då $a \neq \pm 2$ har systemet en lösning, då $a = 2$ ingen lösning och då $a = -2$ oändligt många lösningar.

3.25 För $a = -2$ får vi skärningspunkten $(0,4,-3)$.

3.26 a) Den ligger ej i π. b) $x - 4y + z + 2 = 0$. Jämför med Uppgift 2.15.

3.27 Endast $a = -1$.

3.28 a) Alla a och b sådana att $3a + b = 0$.
b) Alla a och b sådana att $3a + b \neq 0$.
c) Alla a, b, c och d sådana att $3a + b = 0$ och $3c + d \neq 0$.

3.29 Reaktionen kan exempelvis skrivas $2H_3O + CaCO_3 \longrightarrow 3H_2O + Ca + CO_2$.

3.30 Lösningen är

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (-20,-15,30,0,0) + s(1,1,-1,1,0) + t(0,1,-1,0,1), \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Vägarna som svarar mot flödena x_1, x_3 och x_5 kan stängas av, enskilt eller parvis, men inte alla tre samtidigt.

3.31 a) Alla ingredienser tar slut om de tillverkar 6 stycken av tårta 1, 3 stycken av tårta 2 och 4 stycken av tårta 3.
b) Nej, det går inte. (Med 12 enheter av ingrediens 3 får visserligen motsvarande ekvationssystem lösning, men inte med ett icke-negativt antal av varje tårta.)

Lösningar Kapitel 3

3.14 Linjerna skär varandra precis då det finns ett parametervärde t till den ena linjen och ett till den andra som ger samma punkt (x,y,z). Det behöver dock inte vara samma parametervärde för de två linjerna, så vi byter beteckning på den ena parametern innan vi eliminerar:

$$\begin{cases} -1+s=2-t \\ 3-2s=2-3t \\ -2+2s=-2+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+t=3 \\ -2s+3t=-1 \\ 2s-4t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+t=3 \\ 5t=5 \\ -6t=-6 \end{cases}.$$

Systemet har i detta fall lösning eftersom båda de två sista ekvationerna ger $t=1$, vilket i sin tur ger $s=2$. Linjerna skär således varandra, och skärningspunkten får vi genom att sätta in aktuellt parametervärde i linjens ekvation:

$$\begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=3-2\cdot 2=-1 \\ z=-2+2\cdot 2=2 \end{cases}, \quad \text{alternativt} \quad \begin{cases} x=2-1=1 \\ y=2-3\cdot 1=-1 \\ z=-2+4\cdot 1=2 \end{cases}.$$

Skärningspunkten blir alltså $(x,y,z)=(1,-1,2)$.

3.26 a) Vi undersöker om det finns s och t som ger den givna punkten:

$$\begin{cases} 4=1+2s-t \\ 3=s+t \\ 5=-3+2s+5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+t=3 \\ 2s-t=3 \\ 2s+5t=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+t=3 \\ -3t=-3 \\ 3t=2 \end{cases}.$$

Vi ser här av de två sista ekvationerna att systemet saknar lösning, och drar slutsatsen att punkten $(4,3,5)$ inte ligger i π.

b) Vi använder samma metod som i a)-uppgiften, med den skillnaden att vi nu eliminerar systemet för en allmän punkt (x,y,z):

$$\begin{cases} x=1+2s-t \\ y=s+t \\ z=-3+2s+5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+t=y \\ 2s-t=x-1 \\ 2s+5t=z+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s+t=y \\ -3t=x-1-2y \\ 3t=z+3-2y \end{cases}. \Leftrightarrow \begin{cases} s+t=y \\ -3t=x-1-2y \\ 0=(z+3-2y)+(x-1-2y) \end{cases}.$$

Den sista ekvationen

$$(z+3-2y)+(x-1-2y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-4y+z+2=0$$

ger ett villkor för vad punkten (x,y,z) måste uppfylla för att systemet skall kunna ha lösning. Om detta väl är uppfyllt så kommer det sista systemet alltid ha lösning, då de två översta ekvationerna bildar ett trappformat system. Vårt system har alltså lösning, dvs. (x,y,z) ligger i π, precis då $x-4y+z+2=0$, vilket blir planets ekvation.

Kapitel 4

Matriser

Definition och räkneoperationer

4.1 Betrakta matriserna

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & -3\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ \mathbf{E}=\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}.$$

Beräkna, i de fall det är definierat,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B},\quad 2\mathbf{B}-3\mathbf{A},\quad \mathbf{C}-\mathbf{A},\quad \mathbf{CD},\quad \mathbf{DC},\quad \mathbf{AC},\quad \mathbf{CA},\quad \mathbf{DE},\quad \mathbf{B}^T\mathbf{C},\quad \mathbf{BC}^T.$$

4.2 För matrisen **D** i Uppgift 4.1 gäller det att

$$\mathbf{DM}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & -4\\ 8 & 10\end{pmatrix}\qquad \text{och}\qquad \mathbf{M}_2\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}.$$

Vilken typ har matriserna $\mathbf{M}_1$ och $\mathbf{M}_2$?

4.3 a) Går det att bestämma talet a så att matriserna

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & a\\ 0 & 2\end{pmatrix}\qquad \text{och}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

kommuterar?

b) Samma fråga för matriserna

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & 2\end{pmatrix}\qquad \text{och}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

T 4.4 Antag att **A** och **B** är två symmetriska matriser av samma typ. Visa att även summan $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ är symmetrisk. Är produkten **AB** symmetrisk?

Matriser och linjära ekvationssystem

4.5 Skriv ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ -4x_1 - 2x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

på matrisformen $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, samt på formen $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{y}$.

Invers matris

T 4.6 Beräkna, i de fall de existerar, inverserna till matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

T 4.7 Beräkna, i de fall de existerar, inverserna till matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.8 a) Beräkna inversen till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Formulera och bevisa en allmän formel för inversen till en inverterbar diagonalmatris $\mathbf{D}$ av typ $n \times n$. Vad krävs av diagonalelementen för att $\mathbf{D}$ skall vara inverterbar?

4.9 Använd resultatet i Uppgift 4.7 (matris **B**) för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 2 \\ -4x - 2z = -2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}.$$

T 4.10 Använd resultatet i Uppgift 4.7 (matris **A**) för att direkt avgöra antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ -x + 2z = -4 \end{cases}.$$

T 4.11 Använd resultatet i Uppgift 4.7 (matris **C**) för att direkt avgöra antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}.$$

T 4.12 Lös matrisekvationen

$$\mathbf{AX} - \mathbf{BX} = \mathbf{C},$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.13 Lös matrisekvationen

$$(\mathbf{XA} + \mathbf{I})^T = \mathbf{B},$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.14 Lös matrisekvationen

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{XB}) = \mathbf{I},$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.15 Antag att **A** och **B** är två kvadratiska matriser av samma typ med $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna för alla sådana **A** och **B**. Ge även bevis alternativt ett motexempel.

a) Antingen **A** eller **B** (eller båda) är lika med **0**.

b) Om **A** är inverterbar så är $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

c) $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$.

d) Det finns en matris $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ sådan att $\mathbf{BAC} = \mathbf{0}$.

4.16 Vilka av följande matriser är ortogonala?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.17 Visa att matrisen

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

är ortogonal.

4.18 Finns det något tal a sadant att matrisen

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

blir ortogonal? Bestäm i så fall detta.

T 4.19 Antag att matrisen $\mathbf{A}$ är ortogonal. Visa att även $\mathbf{A}^T$ och $\mathbf{A}^{-1}$ är ortogonala, samt, om $\mathbf{B}$ är ortogonal och av samma typ som $\mathbf{A}$, att produkten $\mathbf{AB}$ är ortogonal.

Minsta kvadrat-metoden

4.20 Bestäm med hjälp av minsta kvadrat-metoden en approximativ lösning till systemen

a) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -x - y = -5 \\ x - y = 0 \end{cases}$, b) $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

T 4.21 Bestäm koefficienterna k och m så att linjen med ekvation $y = kx + m$ ligger nära (i minsta kvadrat-mening) de tre punkterna $(0,2)$, $(1,4)$ och $(2,5)$.

T 4.22 Antag att man vill hitta ett interpolerande polynom p till de tre punkterna i uppgift 4.21, dvs. sådant att dess graf $y = p(x)$ precis går genom dessa punkter. Vilken grad p ha? Bestäm också polynomet p.

Blandade uppgifter

4.23 Två matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sägs vara *likformiga* om det finns en inverterbar matris $\mathbf{T}$ sådan att $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}$. Visa att två likformiga matriser är kvadratiska och av samma typ.

T 4.24 Visa att kolonnerna i en matrisprodukt $\mathbf{AB}$ är linjärkombinationer av kolonnerna i $\mathbf{A}$.

4.25 En kvadratisk matris $\mathbf{A}$ kallas *skevsymmetrisk* om $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

a) Skriv matrisen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

som en summa av en symmetrisk och en skevsymmetrisk matris. (Vad måste diagonalelementen vara i en skevsymmetrisk matris?)

b) Visa att det för varje kvadratisk matris $\mathbf{A}$ gäller att $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ är symmetrisk.

c) Visa att det för varje kvadratisk matris $\mathbf{A}$ gäller att $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ är skevsymmetrisk.

d) Visa att varje kvadratisk matris $\mathbf{A}$ kan skrivas som en summa av en symmetrisk och en skevsymmetrisk matris, samt ange en formel för denna summa.

4.26 Ange en matris $\mathbf{A}$ sådan att

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.27 Ge, om möjligt, exempel på tal λ, a, b, c sådana att matrisen

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 1 \\ c & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

blir ortogonal.

T 4.28 Antag att $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är två kvadratiska matriser av samma typ sådana att produkten $\mathbf{AB}$ är inverterbar. Visa att även $\mathbf{A}$ är inverterbar.

4.29 En kvadratisk matris $\mathbf{A}$ kallas *nilpotent* om $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ för något positivt heltal k. Visa att en nilpotent matris inte kan vara inverterbar. Ge även ett exempel på en nilpotent matris skild från nollmatrisen.

4.30 a) Antag att $\mathbf{A}$ är en kvadratisk matris som uppfyller att $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$. Beräkna $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2)$.

b) Antag att $\mathbf{A}$ är nilpotent, och att $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$. Visa att $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ är inverterbar och bestäm $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Tips Kapitel 4

4.4 Använd räknelagarna för transponatet.

4.6 Studera Exempel 4.6 och Exempel 4.7 på sidan 108 i läroboken.

4.7 Studera Exempel 4.8 på sidan 109 i läroboken.

4.10 Använd Sats 4.6 på sidan 107 i läroboken.

4.11 Använd Sats 4.6 i kombination med Följdsats 3.1, på sidan 107 respektive 72 i läroboken.

4.12 Studera Exempel 4.9 på sidan 110 i läroboken. Bryt först ut $\mathbf{X}$ ur vänsterledet.

4.19 Använd Sats 4.7 i kombination med Sats 4.4, på sidan 112 respektive 104 i läroboken.

4.21 Studera Exempel 4.11 på sidan 116 i läroboken.

4.22 Jämför med diskussionen på sidan 118 i läroboken.

4.24 Använd Sats 4.1 och Sats 4.2, på sidan 94 respektive 95.

4.28 Enligt Sats 4.5 räcker det att hitta en invers från det ena hållet, så skapa en matris $\mathbf{C}$ som uppfyller att $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$.

Svar Kapitel 4

4.1 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, $2\mathbf{B}-3\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 11\\ -4 & -11\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}-\mathbf{A}$ ej def, $\mathbf{CD}=\begin{pmatrix}-18 & 21\\ -7 & 16\end{pmatrix}$,

$\mathbf{DC}=\begin{pmatrix}-5 & 4 & -3\\ 9 & -8 & 1\\ 0 & 2 & 11\end{pmatrix}$, $\mathbf{AC}=\begin{pmatrix}5 & -4 & 3\\ 3 & 0 & 15\end{pmatrix}$, $\mathbf{CA}$ ej def, $\mathbf{DE}=\begin{pmatrix}8\\ -18\\ 9\end{pmatrix}$,

$\mathbf{B}^T\mathbf{C}=\begin{pmatrix}13 & -10 & 10\\ 11 & -8 & 11\end{pmatrix}$, $\mathbf{BC}^T$ ej def.

4.2 Matrisen $\mathbf{M}_1$ har typ 2×2 och $\mathbf{M}_2$ har typ 1×3.

4.3 a) Ja, sätt $a=0$. b) Går inte.

4.4 Produkten $\mathbf{AB}$ är i allmänhet inte symmetrisk.

4.5 $\mathbf{Ax}=\mathbf{y}$ med $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ -4 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$,

$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3=\mathbf{y}$ med $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$.

4.6 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ är ej inverterbar.

4.7 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 1\\ -5 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ -1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 8\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}$ är ej inverterbar.

4.8 a) $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ ger $\mathbf{D}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$, då alla $\lambda_i\neq 0$.

4.9 $(x,y,z) = (-4,2,9)$

4.10 Det finns en lösning.

4.11 Det finns oändligt många lösningar.

4.12 $\mathbf{X} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

4.13 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.14 $\mathbf{X} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \\ -4 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

4.15 Påståendena b) och d) är sanna. Motexempel för de övriga två hittas i Exempel 4.1 på sidan 93 i läroboken.

4.16 Endast matrisen **B**.

4.18 Ja, $a = 2$.

4.20 a) $(x,y) = (3,1)$ b) $(x,y) = \left(1, -\frac{1}{3}\right)$

4.21 Linjens ekvation blir $y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{6}$.

4.22 Polynomet blir $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 2$, dvs. av grad 2.

4.25 a) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$

4.26 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 18 & 10 & -4 \\ -8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

4.27 Exempelvis ger $\lambda = 1/3$, $a = 2$, $b = -2$, $c = -1$ en ortogonal matris.

4.29 Som exempel på nilpotent matris kan vi ta t.ex. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, för vilken det gäller att $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$.

4.30 a) $\mathbf{I}$ b) $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}$

Kapitel 5

Några centrala begrepp inom linjär algebra

Linjärt beroende/oberoende

5.1 Låt $\mathbf{u} = (2,1,-1)$ och $\mathbf{v} = (1,2,0)$. Avgör för var och en av vektorerna $\mathbf{w}$ nedan huruvida $\mathbf{w}$ är en linjärkombination av $\mathbf{u},\mathbf{v}$:

a) $\mathbf{w} = (-1,4,2)$ b) $\mathbf{w} = (1,3,-1)$

5.2 Avgör, för vektorerna $\mathbf{u} = (-1,3,2)$, $\mathbf{v} = (3,0,1)$ och $\mathbf{w} = (2,-6,-4)$, vilka av dem som är en linjärkombintion av de övriga två.

5.3 Avgör om följande mängder av vektorer är linjärt beroende eller linjärt oberoende:

a) $(1,-3)$, $(-2,5)$
b) $(1,-3)$, $(-2,6)$
c) $(-1,3,2)$, $(2,-6,-4)$
d) $(1,2,3)$, $(-2,1,4)$
e) $(2,-4,1)$, $(-4,0,-1)$, $(2,-2,1)$
f) $(1,2,-1)$, $(1,3,0)$, $(0,2,2)$
g) $(-1,3,2)$, $(3,0,1)$, $(2,-6,-4)$
h) $(1,2,-1,1)$, $(1,3,0,1)$, $(0,2,2,1)$

Bas och Koppling till linjära ekvationssystem

T 5.4 Använd resultatet i Uppgift 5.3 c) respektive d) för att direkt avgöra huruvida följande ekvationssystem har entydig lösning:

a) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

T 5.5 Avgör, utan att utföra några beräkningar, om vektorerna

$$(1,3,0,-2), \quad (-3,5,1,-5), \quad (2,-6,8,0), \quad (4,-1,4,3) \quad \text{och} \quad (0,7,-3,1)$$

är linjärt oberoende.

T 5.6 Avgör, utan att utföra några beräkningar, om vektorerna

$$(1,3,0,-2,4), \quad (-3,5,1,-5,3), \quad (2,-6,8,0,2) \quad \text{och} \quad (4,-1,4,3,1)$$

spänner upp $\mathbb{R}^5$.

T 5.7 Använd resultatet i Uppgift 5.3 e) för att direkt avgöra om de tre vektorerna $\mathbf{u} = (2,-4,1)$, $\mathbf{v} = (-4,0,-1)$ och $\mathbf{w} = (2,-2,1)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

T 5.8 Använd resultatet i Uppgift 5.3 f) för att direkt avgöra om de tre vektorerna $\mathbf{u} = (1,2,-1)$, $\mathbf{v} = (1,3,0)$ och $\mathbf{w} = (0,2,2)$ spänner upp $\mathbb{R}^3$.

T 5.9 Använd resultatet i Uppgift 5.3 e) för att direkt avgöra om ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 8 \\ -4x \phantom{{}-4y} - 2z = -3 \\ x - y + z = 17 \end{cases}$$

är lösbart.

T 5.10 Använd resultatet i Uppgift 5.3 f) för att direkt bestämma antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}+2z} = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ -x \phantom{{}+3y} + 2z = 0 \end{cases}.$$

T 5.11 Använd resultatet i Uppgift 5.3 e) och f) för att direkt avgöra om matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

är inverterbara.

5.12 Bestäm alla värden på talet a sådana att de tre vektorerna $\mathbf{u} = (-1,2,3)$, $\mathbf{v} = (1,-4,-1)$ och $\mathbf{w} = (-2,0,a)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

Rang och nolldimension av en matris

5.13 Ekvationssystemet

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{med} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

har lösningen $\mathbf{x} = (-4,2,9)$. Använd denna information för att skiva vektorn $\mathbf{y}$ som en linjärkombination av kolonnerna i matrisen $\mathbf{A}$.

T 5.14 Bestäm rang och nolldimension av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm även baser för kolonnrummet och nollrummet.

5.15 Bestäm rang och nolldimension av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm även baser för kolonnrummet och nollrummet.

5.16 Använd resultatet i Uppgift 5.3 e) för att direkt bestämma rangen av

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

T 5.17 Använd resultatet i Uppgift 5.3 f) för att bestämma rangen av

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.18 Låt $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ vara en 4×7-matris. Vilka värden är möjliga för $\operatorname{nolldim} \mathbf{A}$?

Kort om linjära rum

L 5.19 Låt $\mathbf{A}$ vara en matris av typ $m \times n$.

a) Visa att mängden av alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ som är lösningar till det homogena linjära ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ är ett linjärt underrum i $\mathbb{R}^n$.

b) Visa att mängden av alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ som är lösningar till det linjära ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, inte är ett linjärt underrum i $\mathbb{R}^n$.

5.20 Låt, för en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, M vara mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot $\mathbf{u}$. Visa att M är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

T 5.21 Låt M vara mängden av alla symmetriska matriser av typ $n \times n$. Visa att M är ett underrum i det linjära rummet av alla $n \times n$-matriser, samt bestäm dimensionen av M. Ange också en bas för M då $n = 3$.

5.22 Låt M vara mängden av alla inverterbara matriser av typ $n \times n$. Är M ett underrum i det linjära rummet av alla $n \times n$-matriser?

Blandade uppgifter

5.23 Bestäm alla värden på talet a som gör matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar, och bestäm även inversen $\mathbf{A}^{-1}$ för dessa a. Uttryck, för resterande värden på a, den sista kolonnen $\mathbf{a}_3$ som en linjärkombination av de två övriga.

5.24 Låt $\mathbf{A}$ vara en 3×3-matris och $\mathbf{y}$ en 3×1-matris. Ange alla implikationer/ekvivalenser mellan följande påståenden:

1: $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ har lösning,
2: $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ har lösning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
3: Kolonnerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende,
4: $\mathbf{A}$ är inverterbar,
5: $\operatorname{rang}\mathbf{A} < 3$,
6: $\operatorname{nolldim}\mathbf{A} = 1$.

L 5.25 Låt M vara mängden av alla möjliga linjärkombinationer av k stycken givna vektorer i $\mathbb{R}^n$. Visa att det inte kan finnas mer än k stycken linjärt oberoende vektorer i M.

5.26 Bestäm, för varje värde på talet a, rangen av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 3 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \\ -1 & -2a & a & 2 \end{pmatrix}.$$

5.27 Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara två matriser sådana att produkten $\mathbf{AB}$ är definierad. Visa att $\operatorname{nolldim}\mathbf{AB} \geq \operatorname{nolldim}\mathbf{B}$.

T 5.28 Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara två kvadratiska matriser som är av samma typ. Visa att $\operatorname{nolldim}\mathbf{AB} \geq \operatorname{nolldim}\mathbf{A}$.

T 5.29 Låt **A** vara en 2×3-matris och **B** en 3×2-matris.

a) Kan **AB** vara inverterbar? Ge ett exempel eller motbevisa.

b) Kan **BA** vara inverterbar? Ge ett exempel eller motbevisa.

T 5.30 Två matriser **A** och **B** sägs vara *likformiga* om det finns en inverterbar matris **T** sådan att $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}$. Visa att två likformiga matriser har samma rang.

T 5.31 En *Vandermondematris* av typ $n \times n$ defineras enligt

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

för tal $a_1, a_2, \dots, a_n$. Visa att en Vandermondematris alltid är inverterbar då alla a_i är olika. Fundera också på vad Vandermondematriser har med interpolation med polynom att göra.

5.32 Antag att $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ är en kolonnmatris, dvs. av typ $n \times 1$, och beräkna rangen av matriserna $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$ och $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$.

5.33 Låt M vara mängden av alla *skevsymmetriska matriser*, dvs. matriser som uppfyller att $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, av typ $n \times n$. Visa att M är ett underrum i det linjära rummet av alla $n \times n$-matriser, samt bestäm dimensionen av M. Ange också en bas för M då $n = 3$.

5.34 Låt M och N vara två underrum i $\mathbb{R}^n$. *Snittet* $M \cap N$ definieras som mängden av alla element som ligger i både M och N, och *unionen* $M \cup N$ är mängden av alla element som ligger i minst en av M och N. Visa att $M \cap N$ är ett linjärt underrum i $\mathbb{R}^n$. Gäller detta också $M \cup N$?

T 5.35 Betrakta, i det linjära rummet av alla kontinuerliga reellvärda funktioner i en variabel, elementen $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$ och $\sin 2x$. Visa att dessa är linjärt oberoende.

Tips Kapitel 5

5.4 Använd Sats 5.6 på sidan 128 i läroboken.

5.5 Använd Hjälpsats 5.1 på sidan 129 i läroboken.

5.6 Använd återigen Hjälpsats 5.1 på sidan 129 i läroboken.

5.7 Använd Sats 5.10 alternativt Sats 5.11, på sidan 130 respektive 132 i läroboken.

5.8 Använd Sats 5.10 alternativt Sats 5.11, på sidan 130 respektive 132 i läroboken.

5.9 Använd Sats 5.11 på sidan 132 i läroboken.

5.10 Använd Sats 5.11 i kombination med Följdsats 3.1, på sidan 132 respektive 72 i läroboken

5.11 Använd Sats 5.11 på sidan 132 i läroboken.

5.14 Studera Exempel 5.10 på sidan 139 i läroboken.

5.17 Du ser nog lätt att $\operatorname{rang}\mathbf{A} \neq 1$.

5.21 Att M är ett underrum visas i Exempel 5.15 på sidan 144 i läroboken. För en bas i fallet $n = 3$ jämför med slutet av Exempel 5.17 på samma sida.

5.28 Använd Sats 5.15 och Sats 5.16, på sidan 139 respektive 140 i läroboken, samt Uppgift 5.27.

5.29 Använd Uppgift 5.27 för b)-delen.

5.30 Matriserna $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{T}$ måste alla ha samma typ (jämför med Uppgift 4.23), så du kan använda både Uppgift 5.27 och Uppgift 5.28.

5.31 Visa att kolonnerna i $\mathbf{V}$ är linjärt oberoende, och använd då att ett polynom av grad $n-1$ kan ha högst $n-1$ nollställen. För dina funderingar angående interpolationen så studera koefficientmatrisen du får då du löser Uppgift 4.22.

5.35 Använd Sats 5.3 på sidan 123 i läroboken och sätt in några lämpliga värden på x.

Svar Kapitel 5

5.1 a) ja, $\mathbf{w} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ b) nej

5.2 Vektorn **u** är en linjärkombination av **v** och **w**, vektorn **w** är en linjärkombination av **u** och **v**, men **v** är inte en linjärkombination av **u** och **w**.

5.3 a) linjärt oberoende b) linjärt beroende c) linjärt beroende
d) linjärt oberoende e) linjärt oberoende f) linjärt beroende
g) linjärt beroende h) linjärt oberoende

5.4 a) Systemet har inte entydig lösning, utan oändligt många lösningar.
b) Systemet har entydig lösning, den triviala lösningen.

5.5 Nej, vi har här 5 vektorer i $\mathbb{R}^4$.

5.6 Nej, vi har här endast 4 vektorer i $\mathbb{R}^5$.

5.7 De utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

5.8 De spänner inte upp $\mathbb{R}^3$.

5.9 Ja, systemet är lösbart, och har entydig lösning.

5.10 Systemet har oändligt många lösningar.

5.11 Matrisen **A** är inverterbar, men matrisen **B** är inte inverterbar.

5.12 De utgör en bas för alla $a \neq 10$.

5.13 $\mathbf{y} = (2,-2,3) = -4(2,-4,1) + 2(-4,0,-1) + 9(2,-2,1)$

5.14 Det gäller att $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 2$ och $\operatorname{nolldim}\mathbf{A} = 1$. En bas för kolonnrummet utgörs av (exempelvis) $(1,1,-1)$ och $(0,1,2)$, och en bas för nollrummet av $(-2,1,1)$.

5.15 Det gäller att $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 3$ och $\operatorname{nolldim}\mathbf{A} = 2$. En bas för kolonnrummet är (exempelvis)

$$(1,0,-1,0), \qquad (-1,-1,0,1), \qquad (0,1,2,2),$$

och en bas för nollrummet är (exempelvis)

$$(-2,0,-1,-2,1), \qquad (2,1,0,0,0).$$

5.16 $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 3$

5.17 $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 2$

5.18 Möjliga värden är 3, 4, 5 och 6.

5.21 Dimensionen är $\frac{n(n+1)}{2}$. En bas i fallet $n = 3$ utgörs av exempelvis de sex matriserna

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

5.22 nej

5.23 För alla $a \neq -1$ blir

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a+1}\begin{pmatrix}a+1&-2&-2\\a+1&-a-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

För $a = -1$ gäller det att $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1$.

5.24 $3 \Leftrightarrow 4 \Rightarrow 1, \quad 2 \Leftrightarrow 5 \Leftarrow 6.$

5.26 Talet $a = 2$ ger $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 2$, alla andra a ger $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 3$.

5.29 a) Ja, t.ex. $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$ och $\mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. b) Nej.

5.32 I båda fallen är rangen lika med ett.

5.33 Dimensionen är $\frac{n(n-1)}{2}$. En bas i fallet $n = 3$ utgörs av exempelvis de tre matriserna

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

5.34 Unionen $M \cup N$ är inte ett linjärt underrum.

Lösningar Kapitel 5

5.19 a) Vi har konstaterat i läroboken att alla lösningar till $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ (nollrummet till $\mathbf{A}$) utgör ett linjärt underrum, och detta kontrolleras också lätt med egenskaperna (5.18) på sidan 143: Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ löser $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ så gäller detta även $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ och $\lambda\mathbf{x}_1$, eftersom

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{Ax}_1 + \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{och} \quad \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}_1) = \lambda\mathbf{Ax}_1 = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

b) Om $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ så gäller däremot, då $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ löser $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, att

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{Ax}_1 + \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{y} + \mathbf{y} = 2\mathbf{y} \neq \mathbf{y}, \quad \text{alt.} \quad \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}_1) = \lambda\mathbf{Ax}_1 = \lambda\mathbf{y} \neq \mathbf{y}$$

då $\lambda \neq 1$, och vi ser att lösningarna till $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ ej bildar ett linjärt underrum.
Alternativt konstaterar vi att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ inte löser $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, så nollelementet ingår inte i vårt mängd, vilket är nödvändigt om den skall utgöra ett linjärt underrum.

5.25 Vi börjar med att titta på fallet med två givna vektorer $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, och visar att tre linjärkombinationer

$$\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + b_1\mathbf{u}_2, \qquad \mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2, \qquad \mathbf{v}_3 = a_3\mathbf{u}_1 + b_3\mathbf{u}_2$$

är linjärt beroende. Vi ställer därför upp ekvationen $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, dvs.

$$\lambda_1(a_1\mathbf{u}_1 + b_1\mathbf{u}_2) + \lambda_2(a_2\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2) + \lambda_3(a_3\mathbf{u}_1 + b_3\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)\mathbf{u}_1 + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 = 0 \\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

(Notera att vi i det sista steget endast har en implikation i fallet då $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ är linjärt beroende.) Vi får alltså ett homogent underbestämt system, som vi vet har oändligt många lösningar. Det gäller alltså att $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ med minst ett $\lambda_i \neq 0$, så $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt beroende.

På precis samma sätt kommer vi, om vi studerar $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l$ som är linjärkombinationer av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$, då $l > k$ få ett underbestämt system med icke-triviala lösningar, vilket visar att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l$ måste vara linjärt beroende.

Kapitel 6

Determinanter

Determinanter av 2×2- och 3×3-matriser

6.1 Beräkna determinanterna av matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.2 Beräkna i a) arean, samt i b) och c) volymen, som vektorerna spänner upp. Ange även hur vektorerna är orienterade.

a) $(1,2)$, $(2,3)$

b) $(1,0,2)$, $(-2,1,3)$, $(-1,-2,0)$

c) $(2,1,-1)$, $(1,3,0)$, $(-3,1,2)$

T 6.3 En tetraeder har hörn i punkterna $P:(1,2,1)$, $Q:(0,2,5)$, $R:(-1,-1,0)$ samt origo. Beräkna, med hjälp av en determinant, volymen av tetraedern.

6.4 Låt E vara en parallellepiped i rummet sådan att alla åtta hörnen endast har heltalskoordinater. Förklara varför volymen av E måste vara ett heltal.

T 6.5 Använd resultatet i Uppgift 6.1 (matris **C**) för att direkt avgöra om vektorerna $\mathbf{u} = (2,-4,1)$, $\mathbf{v} = (-4,0,-1)$ och $\mathbf{w} = (2,-2,1)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Ange i så fall även hur $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är orienterade.

T 6.6 Bestäm alla värden på talet a sådana att de tre vektorerna $\mathbf{u} = (-1,2,3)$, $\mathbf{v} = (1,-4,-1)$ och $\mathbf{w} = (-2,0,a)$ i $\mathbb{R}^3$ blir linjärt oberoende.

T 6.7 Använd resultatet i Uppgift 6.1 (matris **D**) för att direkt avgöra om ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ -x + 2z = 3 \end{cases}.$$

har entydig lösning.

T 6.8 Använd resultatet i Uppgift 6.1 för att bestämma rangen av matriserna

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

T 6.9 Bestäm alla tal a sådana att matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

är inverterbar.

T 6.10 Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ 2x + 3y + az = 4 \\ ax + y + 2z = -2a \end{cases}.$$

Ange dessutom samtliga lösningar då det finns oändligt många lösningar.

T 6.11 Lös, för varje reellt tal a, ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + 2az = 0 \\ x - ay + z = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}.$$

Determinantens egenskaper

T 6.12 Använd resultatet i Uppgift 6.1 (matris **C**) för att beräkna determinanten av matrisen

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

T 6.13 Antag att 2×2-matrisen **A** har kolonnerna $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$, och låt **B** vara matrisen med kolonnerna $2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2$. Vad är sambandet mellan $\det \mathbf{A}$ och $\det \mathbf{B}$?

6.14 Antag att $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är två $n \times n$-matriser med $\det\mathbf{A} = -2$ respektive $\det\mathbf{B} = 3$. Beräkna, om det går,

$$\det\mathbf{AB}, \quad \det(\mathbf{A}+\mathbf{B}), \quad \det\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad \det\mathbf{AB}^T, \quad \det(3\mathbf{A}), \quad \text{samt} \quad \det\mathbf{A}^k$$

för varje positivt heltal k.

6.15 Visa att en kvadratisk matris $\mathbf{A}$ är inverterbar om och endast om $\mathbf{A}^2$ är inverterbar.

6.16 Två matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sägs vara *likformiga* om det finns en inverterbar matris $\mathbf{T}$ sådan att $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}$. Visa att två likformiga matriser har samma determinant.

Cramers regel

6.17 Anga för vilka värden på a som ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ -x + ay = 1 \end{cases}$$

har entydig lösning, samt lös systemet för dessa a.

6.18 Lös ekvationssystemet i Uppgift 6.10 för de värden på talet a där det finns entydig lösning.

Utveckling efter rad eller kolonn

6.19 Beräkna med hjälp av utveckling, dels efter den första raden och dels efter den andra kolonnen, determinanten av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

T 6.20 Beräkna med hjälp av adjunkten inverserna till matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Större determinanter

T 6.21 Beräkna determinanten av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

T 6.22 Beräkna determinanten av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & -1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Blandade uppgifter

T 6.23 Avgör, med hjälp av en determinantberäkning, om punkterna $P:(1,0,1)$, $Q:(1,1,2)$, $R:(-1,3,2)$ och $S:(-2,2,0)$ ligger i ett och samma plan i rummet.

T 6.24 Bestäm, med hjälp av en determinantberäkning, en ekvation för det plan i rummet som går genom punkterna $P:(1,0,1)$, $Q:(1,1,2)$ och $R:(-1,3,2)$.

6.25 En tetraeder i rummet har tre av sina hörn i punkterna $P:(1,1,1)$, $Q:(0,2,-1)$ och $R:(2,1,1)$, samt det fjärde hörnet på z-axeln. Bestäm samtliga möjliga lägen av det fjärde hörnet så att volymen av tetraedern blir lika med 1.

6.26 Bestäm alla värden på talet a sådana att de tre planen

$$x+y+az-1=0, \qquad 2x+ay+4z-4=0 \qquad \text{och} \qquad 4x+5y+2az-4=0$$

skär varandra längs en linje. Bestäm också, för varje sådant a, en ekvation för linjen.

6.27 Antag att $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är två kvadratiska matriser av samma typ sådana att produkten $\mathbf{AB}$ är inverterbar. Använd determinanter för att visa att även $\mathbf{A}$ är inverterbar. (Jämför sedan med din lösning av Uppgift 4.28.)

6.28 Låt $\mathbf{A}$ vara en kvadratisk matris med sådan att $\mathbf{A}^k$ har determinant lika med noll för något k. Visa att $\mathbf{A}$ inte kan vara inverterbar.

6.29 a) Antag att $\mathbf{A}$ är en kvadratisk matris för vilken det gäller att $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$. Vilka värden är möjliga för determinanten av $\mathbf{A}$?

b) Ange, för varje möjligt värde på determinanten i a), en 2×2-matris $\mathbf{A}$ som har denna determinant och för viken det gäller att $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$.

6.30 En $n \times n$-matris $\mathbf{A}$ kallas *skevsymmetrisk* om $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

a) Visa att en skevsymmetrisk matris inte kan vara inverterbar då n är udda.

b) Kan en skevsymmetrisk matris vara inverterbar då n är jämnt? Ge isåfall ett exempel.

T 6.31 Avgör för vilka värden på talet a som vektorerna

$$(a,1,1,1), \quad (1,a,1,1), \quad (1,1,a,1) \quad \text{och} \quad (1,1,1,a)$$

utgör en bas för $\mathbb{R}^4$.

6.32 Beräkna determinanten av $n \times n$-matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

T 6.33 En *Vandermondematris* av typ $n \times n$ defineras enligt

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

för tal $a_1, a_2, \dots, a_n$. Beräkna determinanten av $\mathbf{V}$ då alla a_i är olika.

Tips Kapitel 6

6.3 Volymen av en tetraeder med sidorna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ blir 1/6 av den volym som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$; se tipset till Uppgift 2.26.

6.5 Använd Sats 6.2 på sidan 151 i läroboken, samt diskussionen om orientering på sidan 150.

6.6 Använd Sats 6.2 på sidan 151 i läroboken.

6.7 Använd Sats 6.2 på sidan 151 i läroboken.

6.8 Använd Sats 6.2 på sidan 151 i läroboken. I fallet med matrisen $\mathbf{D}$ krävs också en snabb titt på kolonnerna (jämför Exempel 5.9).

6.9 Använd Sats 6.2 pa sidan 151 i läroboken.

6.10 Studera Exempel 6.4 pa sidan 154 i läroboken.

6.11 Här behöver du också använda Följdsats 3.1 på sidan 72 i läroboken.

6.12 Jämför med Anmärkning 6.5 på sidan 158 i läroboken.

6.13 Använd att determinanten är linjär i varje kolonn och utveckla $\det \mathbf{B}$.

6.20 Använd Sats 6.8 på sidan 170 i läroboken.

6.21 Använd Definition 6.4 på sidan 173 i läroboken.

6.22 Nu använder du rimligtvis att determinanten inte ändras då man till en kolonn (rad) lägger till en multipel av en annan kolonn (rad); jämför med Exempel 6.16 på sidan 174 i läroboken.

6.23 Vad krävs av vektorerna $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ och $\overrightarrow{PS}$ för att alla punkterna skall ligga i samma plan?

6.24 Använd metoden i föregående uppgift, men låt nu S vara en godtycklig punkt (x, y, z).

6.31 Ställ upp en determinant och beräkna denna. Om du använder Följdsats 6.2 på sidan 159 på ett listigt sätt så blir beräkningarna enklare.

6.33 Detta är en svår uppgift!

Svar Kapitel 6

6.1 Det gäller att $\det \mathbf{A} = -1$, $\det \mathbf{B} = 0$, $\det \mathbf{C} = \ \ 4$ och $\det \mathbf{D} = 0$.

6.2 a) De spänner upp arean 1, och är negativt orienterade.

b) De spänner upp volymen 16, och är positivt orienterade.

c) De spänner inte upp någon volym. Således ligger de alla tre i samma plan, och någon orientering är inte definierad.

6.3 Volymen blir 1/2. Jämför gärna med hur du beräknade samma volym i Uppgift 2.26 tidigare.

6.4 Volymen fås av (absolutbeloppet av) en determinant där vi som kolonner sätter in tre vektorer som spänner upp E. Dessa vektorer kommer, då hörnen endast har heltalskoordinater, också endast att ha heltalskoordinater, och värdet av en determinant som endast innehåller heltal kommer i sin tur att bli ett heltal.

6.5 De utgör en bas för $\mathbb{R}^3$, samt är negativt orienterade.

6.6 De är linjärt oberoende för alla $a \neq 10$. Jämför gärna med din lösning till Uppgift 5.12, där du avgjorde när samma vektorer utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

6.7 Systemet har inte entydig lösning.

6.8 Det gäller att $\operatorname{rang} \mathbf{C} = 3$ och $\operatorname{rang} \mathbf{D} = 2$.

6.9 Matrisen $\mathbf{A}$ är inverterbar för alla $a \neq -4$.

6.10 Då $a \neq \pm 2$ har systemet en lösning, då $a = 2$ ingen lösning och då $a = -2$ oändligt många lösningar $(x, y, z) = (t-1, 2, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

6.11 Då $a = 1$ är lösningarna $(x, y, z) = t(3, 1, -2)$, $t \in \mathbb{R}$, och då $a = -1$ är lösningarna $(x, y, z) = t(-3, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. Övriga värden på a ger lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

6.12 $\det \mathbf{A} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-4) = -\frac{4}{27}$

6.13 $\det \mathbf{B} = -7 \det \mathbf{A}$

6.14 $\det \mathbf{AB} = -6$, $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ vet vi ej, $\det \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = -\frac{3}{2}$,

$\det \mathbf{AB}^T = -6$, $\det(3\mathbf{A}) = -2 \cdot 3^n$, $\det \mathbf{A}^k = (-2)^k$.

6.17 För alla värden på a har systemet lösningen $(x,y) = \frac{1}{a^2+2}(a-2, a+1)$.

6.18 $a \neq \pm 2$ ger lösningen $(x,y,z) = \frac{1}{a^2-4}(-2a^2-2a+4, 2a^2-8, 2a+4)$.

6.19 $\det \mathbf{A} = -4$

6.20 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

6.21 $\det \mathbf{A} = -5$

6.22 $\det \mathbf{A} = 10$

6.23 De ligger samtliga i ett plan. Jämför gärna med hur du avgjorde detta tidigare i Uppgift 2.31.

6.24 En ekvation för planet är $-2x-2y+2z=0$, eller ekvivalent, $x+y-z=0$.

6.25 Möjliga lägen är $(0,0,-3)$ och $(0,0,9)$.

6.26 Talet $a=1$ ger linjen $(x,y,z)=(1,0,0)+t(-3,2,1)$, och $a=2$ ger linjen $(x,y,z)=(1,0,0)+t(-6,4,1)$.

6.29 a) 0, 1 och -1 är de möjliga värdena.

b) Man kan t.ex. välja $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ respektive $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

6.30 b) Ja, ett exempel är $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

6.31 De utgör en bas för alla värden på a utom $a=1$ och $a=-3$.

6.32 $\det \mathbf{A} = 1$

6.33 $\det \mathbf{V} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$, dvs. produkten av alla möjliga $a_j - a_i$ där $j > i$.

Kapitel 7

Linjära avbildningar

Linjära avbildningar

T 7.1 Vilka av nedanstående avbildningar kan uttyckas som ett linjärt ekvationssystem $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, där $\mathbf{A}$ är en matris? Vad blir matrisen $\mathbf{A}$ i dessa fall?

$$\mathbf{F}_1(x_1, x_2) = (x_1 + 4x_2,\ 2x_1 + 3x_2),$$
$$\mathbf{F}_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1 x_2),$$
$$\mathbf{F}_3(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1 + x_2 + x_3),$$
$$\mathbf{F}_4(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_3,\ x_1 - 3x_2),$$
$$\mathbf{F}_5(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ 0,\ x_1).$$

TL 7.2 Avbildningen $\mathbf{F}$ av typ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times (1, -2, 2), \qquad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Använd Definition 7.1 på sidan 190 i läroboken för att visa att $\mathbf{F}$ är linjär.

T 7.3 För den linjära avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller det att

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) = (1, 0, 1), \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}_2) = (0, 2, 1), \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}_3) = (1, -1, 1),$$

för några vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ i $\mathbb{R}^3$. Beräkna $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3)$.

T 7.4 Avgör för var och en av nedanstående avbildningar om denna är linjär:

a) $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 3\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

b) $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|\, \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

c) $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (1, 2) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

d) $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + (1, 2), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2.$

7.5 Antag att vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^m$ och att det för den linjära avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gäller att $\mathbf{F}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$ för alla i, $1 \leq i \leq p$. Visa att $\mathbf{F}$ är lika med nollavbildningen, dvs. avbildar varje vektor i $\mathbb{R}^m$ på nollvektorn.

Avbildningsmatris

7.6 Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen med avbildningsmatris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna $\mathbf{F}(1,-1,2)$ och $\mathbf{F}(0,0,1)$. Vilka vektorer avbildas på nollvektorn?

T 7.7 Låt l vara linjen $2x - y = 0$, samt låt $\mathbf{u} = (3,2)$.

a) Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som svarar mot sned projektion på av planets punkter på linjen l, i riktningen $\mathbf{u}$.

b) Beräkna $\mathbf{F}(-1,6)$.

T 7.8 För den linjära avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller det att

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}_1) = (1,-2,1), \qquad \mathbf{F}(\mathbf{e}_2) = (0,3,3), \qquad \mathbf{F}(\mathbf{e}_3) = (2,-2,3),$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Vad blir avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$?

7.9 Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildningen i Uppgift 7.2.

7.10 Bestäm avbildningsmatriserna för de avbildningar i Uppgift 7.4 som är linjära.

T 7.11 Bestäm, om möjligt, matrisen för den linjära avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, om det är känt att

a) $\mathbf{F}(1,0,1) = (3,0,1), \quad \mathbf{F}(-1,1,0) = (-1,-1,3), \quad \mathbf{F}(0,1,2) = (1,-1,1)$

b) $\mathbf{F}(-1,-1,2) = (0,2,1), \quad \mathbf{F}(1,2,1) = (1,-1,2), \quad \mathbf{F}(1,4,7) = (3,1,8).$

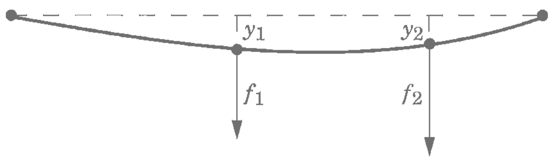
L 7.12 För den linjära avbildningen $\mathbf{F}$ i Uppgift 7.11 b), är det utifrån den givna informationen möjligt att bestämma bilden a) $\mathbf{F}(0,1,3)$ b) $\mathbf{F}(0,1,2)$?

T 7.13 För avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är det känt att

$$\mathbf{F}(2,3) = (1,0), \qquad \mathbf{F}(-1,1) = (1,2), \qquad \mathbf{F}(-3,-2) = (4,1).$$

Kan $\mathbf{F}$ vara linjär?

T 7.14 En stålbalk belastas med krafter av storlek f_1 och f_2 i två olika punkter. Detta orsakar att balken böjs, och vi betecknar med y_1 och y_2 storleken av denna nedböjning i respektive punkt (se figuren). Enligt Hookes lag kan vi förutsätta att nedböjningarna beror linjärt av krafterna, dvs. att det finns en linjär avbildning som avbildar vektorn $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ på vektorn $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.



Genom att studera balken vid två olika tillfällen, med olika belastningar, mäter man upp följande resultat:

	f_1	f_2	y_1	y_2
mätning 1	1	3	7	5
mätning 2	2	5	13	9

Bestäm, om möjligt, avbildningsmatrisen för den linjära avbildningen. Ge även förslag på hur belastningarna (f_1, f_2) kan väljas i de två mätningarna ovan för att matrisen skall bli lättare att ta fram.

Geometriska exempel

T 7.15 Låt l vara linjen $2x - y = 0$. Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som svarar mot

a) ortogonal projektion på l

b) spegling i l.

T 7.16 Låt π vara planet $2x - y + z = 0$. Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning av typ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som svarar mot

a) ortogonal projektion på π

b) spegling i π.

7.17 Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som svarar mot ortogonal projektion på yz-planet.

T 7.18 Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som svarar mot ortogonal projektion på linjen $(x, y, z) = t(1, 2, -2)$, $t \in \mathbb{R}$.

T 7.19 Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som svarar mot rotation i planet, $2\pi/3$ radianer i positiv riktning (moturs).

T 7.20 Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som svarar mot rotation i rummet kring x-axeln, $2\pi/3$ radianer i positiv riktning sett från spetsen av x-axeln.

Blandade uppgifter

7.21 För den linjära avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller det att

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) = (0,2,-1), \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2) = (-6,2,3), \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3) = (3,5,-3),$$

för några vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ i $\mathbb{R}^3$. Beräkna $\mathbf{F}(\mathbf{u}_2)$ och $\mathbf{F}(\mathbf{u}_3)$.

7.22 a) Ett bageri tillverkar tre slags tårtor genom att genom att på olika sätt kombinera tre ingredienser enligt följande recept:

	ingr. 1	ingr. 2	ingr. 3
tårta	2	2	1
tårta 2	4	1	0
tårta 3	1	1	3

Låt nu y_1, y_2 och y_3 beteckna de mängder som går åt av ingrediens 1, 2 respektive 3 för att baka x_1, x_2, och x_3 stycken tårtor av typ 1, 2 respektive 3. Bestäm avbildningsmatrisen $\mathbf{A}$ för den linjära avbildning som avbildar vektorn (x_1, x_2, x_3) på vektorn (y_1, y_2, y_3).

b) Något senare ändrar bageriet sina recept. Ett konkurrerande bageri försöker därför lista ut dessa genom att kartlägga den totala ingrediensåtgången under tre olika dagar:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
dag 1	1	2	1	5	9	6
dag 2	1	0	2	5	4	3
dag 3	2	1	3	9	10	7

Bestäm, om möjligt, den nya avbildningsmatrisen $\mathbf{B}$ för hur antalet tårtor (x_1, x_2, x_3) avbildas på ingrediensåtgången (y_1, y_2, y_3). Ange i så fall även de nya recepten för tårtorna.

c) Bageriet ändrar sina recept ytterligare en gång. En ny kartläggning ger följande data:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
dag 1	1	1	2	9	3	7
dag 2	2	1	0	7	5	6
dag 3	3	2	2	16	8	13

Bestäm, om möjligt, avbildningsmatrisen $\mathbf{C}$ för hur (x_1, x_2, x_3) avbildas på (y_1, y_2, y_3). Vad blir i så fall recepten?

7.23 Låt π vara planet genom punkterna P . $(1,0,2)$, Q . $(1,1,4)$ och origo. Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som svarar mot spegling i π.

T 7.24 Matrisen

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

är avbildningsmatris för den linjära avbildning som svarar mot ortogonal projektion av rummets punkter på ett plan π (som innehåller origo). Bestäm en ekvation på normalform för planet π.

7.25 Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som svarar mot rotation i rummet kring y-axeln, $2\pi/3$ radianer i positiv riktning sett från spetsen av y-axeln.

T 7.26 Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Antag att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ är en uppsättning linjärt beroende vektorer i $\mathbb{R}^m$. Visa att bildvektorerna $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1), \mathbf{F}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{u}_p)$ också är linjärt beroende.

7.27 Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Antag att det existerar en uppsättning linjärt oberoende vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ i $\mathbb{R}^m$ sådan att motsvarande bildvektorer $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1), \mathbf{F}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{u}_p)$ är linjärt beroende. Visa att det finns en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ sådan att $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

7.28 Låt $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ vara två avbildningar av typen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som uppfyller att $\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ och $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Visa att om $\mathbf{F}$ är en linjär avbildning så är $\mathbf{G}$ en linjär avbildning.

Tips Kapitel 7

7.1 Se sidan 189 i läroboken

7.2 Jämför med Exempel 7.1 på sidan 190 i läroboken. Utnyttja räknelagarna för vektorprodukt.

7.3 Se formel (7.9) på sidan 194 i läroboken.

7.4 För var och en av avbildningarna, antingen försök att visa att denna är linjär med hjälp av definitionen av linjär avbildning (Definition 7.1 alternativt 7.2 i läroboken), eller försök att använda ett argument liknande dem i lärobokens Exempel 7.3 och 7.4 för att visa att denna inte är linjär.

7.7 Använd metoden i lärobokens Exempel 7.5 på sidan 195, alternativt metoden i Exempel 7.6 på sidan 199.

7.8 Utnyttja Sats 7.2 på sidan 199 i läroboken.

7.11 Se Exempel 7.8 och 7.9 på sidorna 202–203 i läroboken.

7.13 Se Exempel 7.11 på sidan 206 i läroboken.

7.14 Jämför med Exempel 7.8 på sidan 202 i läroboken.

7.15 Bestäm bilderna av standardbasvektorerna och utnyttja Sats 7.2 på sidan 199 i läroboken. Alternativt går det bra att kolla var en allmän vektor avbildas, som i Exempel 7.14 och Exempel 7.15 på sidan 209 respektive 211 i läroboken.

7.16 Se Exempel 7.16 respektive 7.17 på sidorna 212–213 i läroboken.

7.18 Använd metoden med skalärprodukt; se Exempel 2.18 på sidan 52 i läroboken.

7.19 Se Exempel 7.18 på sidan 214 i läroboken.

7.20 Jämför med Exempel 7.19 på sidan 215 i läroboken.

7.24 Det finns många olika sätt att lösa denna uppgift på. Fundera t.ex. på vad det går att säga om kolonnerna i matrisen. Var måste de ligga i detta fall? Kan vi utnyttja detta för att ta fram planets ekvation?

7.26 Eftersom $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ är linjärt beroende uppfyller de villkoret i Sats 5.2 på sidan 122 i läroboken. Tillämpa sedan $\mathbf{F}$ ledvis på detta villkor och utnyttja linjäriteten hos $\mathbf{F}$.

Svar Kapitel 7

7.1 Avbildningarna $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_4$ och $\mathbf{F}_5$ kan uttryckas på denna form. Matriserna är

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa tre avbildningar är exempel på linjära avbildningar; matriserna ovan är deras avbildningsmatriser.

7.3 $(0,7,3)$

7.4 a) linjär b) ej linjär c) linjär d) ej linjär

7.6 Det gäller att $\mathbf{F}(1,-1,2) = (5,-4,-3)$ och att $\mathbf{F}(0,0,1) = (1,-1,-1)$. Vektorerna $t(0,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$, avbildas på nollvektorn.

7.7 a) $\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(5,10)$ (Denna deluppgift svarar mot Uppgift 2.16 på sidan 13.)

7.8 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

7.9 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

7.10 a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\mathbf{I}$ c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ (en radmatris!)

7.11 a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

b) Matrisen går ej att ta fram, eftersom vi endast har information om två linjärt oberoende vektorer i definitionsmängden $\mathbb{R}^3$ (de tre givna vektorerna i definitionsmängden är linjärt beroende).

7.12 a) ja, $\mathbf{F}(0,1,3) = (1,1,3)$ b) nej

7.13 Nej. Vi har att $(-3,-2) = -(2,3)+(-1,1)$, vilket om $\mathbf{F}$ är linjär innebär att

$$\mathbf{F}(-3,-2) = -\mathbf{F}(2,3)+\mathbf{F}(-1,1) = -(1,0)+(1,2) = (0,2).$$

Detta motsäger förutsättningen att $\mathbf{F}(-3,-2) = (4,1)$.

7.14 Avbildningsmatrisen ges av

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enklare hade varit att mäta nedböjningarna för belastningarna $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ och $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ och sedan utnyttja Sats 7.2 på sidan 199 i läroboken.

7.15 a) $\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

7.16 a) $\mathbf{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7.17 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.18 $\mathbf{A} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

7.19 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

7.20 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

7.21 $\mathbf{F}(\mathbf{u}_2) = (-3,0,2)$, $\mathbf{F}(\mathbf{u}_3) = (3,1,-2)$

7.22 a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Recepten kan vi läsa av i matrisens kolonner, svarande mot bilderna $\mathbf{F}(\mathbf{e}_i)$ av standardbasvektorerna:

	ingr. 1	ingr. 2	ingr. 3
tårta 1	1	2	1
tårta 2	1	3	2
tårta 3	2	1	1

c) Vi har här inte tillräcklig information för att bestämma matrisen (recepten). Notera att indatan är linjärt beroende, då det gäller att $(3,2,2) = (1,1,2) + (2,1,0)$.

7.23 $\mathbf{A} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

7.24 $x + y - 2z = 0$

7.25 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lösningar Kapitel 7

7.2 Egenskaperna i) och ii) i Definition 7.1 för linjär avbildning (se sidan 190 i läroboken) följer av räknelagarna för vektorprodukt. Det gäller att

i) $$\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(1,-2,2) = \\ = \mathbf{u}\times(1,-2,2)+\mathbf{v}\times(1,-2,2) = \mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{F}(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3,$$

ii) $$\mathbf{F}(\lambda\mathbf{u}) = (\lambda\mathbf{u})\times(1,-2,2) = \lambda\big(\mathbf{u}\times(1,-2,2)\big) = \lambda\mathbf{F}(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u}\in\mathbb{R}^3, \lambda\in\mathbb{R}.$$

Alternativt visar man det ekvivalenta villkoret i') i Definition 7.2.

7.12 a) I Uppgift 7.11 b) såg vi att informationen om $\mathbf{F}$ inte var tillräcklig för att bestämma avbildningsmatrisen, då de tre "invektorerna"

$$\mathbf{u}_1 = (-1,-1,2), \quad \mathbf{u}_2 = (1,2,1), \quad \mathbf{u}_3 = (1,4,7)$$

var linjärt beroende. Trots att dessa tre vektorer inte bildar en bas, och därmed inte spänner upp hela $\mathbb{R}^3$, så kan vektorn $(0,1,3)$ t.ex. skrivas som linjärkombinationen

$$(0,1,3) = 1\cdot\underbrace{(-1,-1,2)}_{\mathbf{u}_1}+1\cdot\underbrace{(1,2,1)}_{\mathbf{u}_2}+0\cdot\underbrace{(1,4,7)}_{\mathbf{u}_3}.$$

Linjäriteten av $\mathbf{F}$ ger oss då att

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(0,1,3) &= \mathbf{F}\big(1\cdot(-1,-1,2)+1\cdot(1,2,1)+0\cdot(1,4,7)\big) = \\ &= 1\cdot\mathbf{F}(-1,-1,2)+1\cdot\mathbf{F}(1,2,1)+0\cdot\mathbf{F}(1,4,7) = \\ &= (0,2,1)+(1,-1,2)+(0,0,0) = (1,1,3).\end{aligned}$$

I detta fall gick det alltså att bestämma bilden.

b) I enlighet med a)-uppgiften undersöker vi om vektorn $(0,1,2)$ går att uttrycka som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1 = (-1,-1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,1)$ och $\mathbf{u}_3 = (1,4,7)$. Vi får

$$(0,1,2) = \lambda_1(-1,-1,2)+\lambda_2(1,2,1)+\lambda_3(1,4,7)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1+\lambda_2+7\lambda_3 = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2+3\lambda_3 = 1 \\ 0 = -1 \end{cases},$$

vilket saknar lösning. Det finns alltså ingen sådan linjärkombination, och bilden $\mathbf{F}(0,1,2)$ går således ej att beräkna utifrån den givna informationen.

Kapitel 8

Egenskaper hos linjära avbildningar

Värdemängd

8.1 Låt $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildningen med avbildningsmatris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avgör om vektorerna $(1,1,-2,-2)$ och $(1,1,-3,-2)$ ligger i värdemängden för $\mathbf{F}$.

T 8.2 Bestäm värdemängden för den linjära avbildning som har matris

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

T 8.3 Ange, utan att utföra några beräkningar, värdemängden för den linjära avbildning som svarar mot

a) spegling i linjen $2x - y = 0$

b) ortogonal projektion på planet $2x - y + z = 0$

c) ortogonal projektion på linjen $(x,y,z) = t(1,2,-2)$, $t \in \mathbb{R}$

d) rotation i planet, $2\pi/3$ radianer i positiv riktning.

T 8.4 Studera avbildningarna i Uppgift 8.3. Ange, utan att utföra några beräkningar,

a) rangen för matrisen för var och en av dessa avbildningar

b) nollrummet samt nolldimensionen för matrisen för var och en av dessa avbildningar.

Sammansättning av linjära avbildningar

T 8.5 Bestäm matrisen för den linjära avbildning av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som svarar mot

a) spegling i linjen $2x - y = 0$, åtföljd av rotation i planet $2\pi/3$ radianer i positiv riktning

b) rotation i planet $2\pi/3$ radianer i positiv riktning, åtföljd av spegling i linjen $2x - y = 0$.

Blir matriserna i a) och b) lika? (Notera att du redan har beräknat matriserna för de ingående avbildningarna ovan i Uppgift 7.15 b) och 7.19 a).)

T 8.6 Låt **F** och **G** vara linjära avbildningar med avbildningsmatris

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Avgör vilka av nedanstående sammansättningar som är väldefinierade:

a) $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ b) $\mathbf{F}\circ\mathbf{G}$.

Bestäm i de fall då sammansättningen är väldefinierad vilken typ, $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, den sammansatta avbildningen får, samt bestäm avbildningsmatrisen för sammansättningen.

T 8.7 Den linjära avbildningen $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har avbildningsmatris

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Bestäm avbildningsmatrisen för sammansättningen $\mathbf{F}\circ\mathbf{F}$. Vad blir matrisen för sammansättningen av n stycken avbildningar **F**, dvs. för avbildningen

$$\mathbf{F}^n = \underbrace{\mathbf{F}\circ\mathbf{F}\circ\cdots\circ\mathbf{F}}_{n\text{ st.}}?$$

Invers avbildning

T 8.8 Vi återgår till avbildningarna i Uppgift 8.2. Avgör om de linjära avbildningarna med nedanstående avbildningsmatriser är injektiva:

a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Notera att du eventuellt kan återanvända delar av dina lösningar av Uppgift 8.2.

T 8.9 Vi återgår till avbildningarna i Uppgift 8.3. Avgör, utan att utföra några beräkningar, om de linjära avbildningarna svarande mot nedanstående geometriska tolkningar är injektiva:

a) spegling i linjen $2x-y=0$

b) ortogonal projektion på planet $2x-y+z=0$

c) ortogonal projektion på linjen $(x,y,z)=t(1,2,-2)$, $t\in\mathbb{R}$

d) rotation i planet, $2\pi/3$ radianer i positiv riktning.

8.10 Vi återgår ännu en gång till avbildningarna i Uppgift 8.2. Använd resultaten i denna uppgift för att direkt avgöra om de linjära avbildningarna med nedanstående avbildningsmatriser är surjektiva:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.11 Vi återgår ännu en gång till avbildningarna i Uppgift 8.3. Använd resultaten i denna uppgift för att direkt avgöra om de linjära avbildningarna med nedanstående geometriska tolkningar är surjektiva:

a) spegling i linjen $2x - y = 0$

b) ortogonal projektion på planet $2x - y + z = 0$

c) ortogonal projektion på linjen $(x, y, z) = t(1, 2, -2)$, $t \in \mathbb{R}$

d) rotation i planet, $2\pi/3$ radianer i positiv riktning.

T 8.12 Vi återgår en sista gång till avbildningarna i Uppgift 8.2. Kombinera dina resultat av Uppgift 8.8 och 8.10 för att avgöra om de linjära avbildningarna med nedanstående avbildningsmatriser är bijektiva:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestäm avbildningsmatrisen för den inversa avbildningen i förekommande fall.

8.13 Vi återgår en sista gång till avbildningarna i Uppgift 8.3. Kombinera dina resultat av Uppgift 8.9 och 8.11 för att avgöra om de linjära avbildningarna med nedanstående geometriska tolkningar är bijektiva:

a) spegling i linjen $2x - y = 0$

b) ortogonal projektion på planet $2x - y + z = 0$

c) ortogonal projektion på linjen $(x, y, z) = t(1, 2, -2)$, $t \in \mathbb{R}$

d) rotation i planet, $2\pi/3$ radianer i positiv riktning.

Bestäm avbildningsmatrisen för den inversa avbildningen i förekommande fall. Notera att du i Uppgift 7.15 b), 7.16 a), 7.18 respektive 7.19 a) redan har beräknat matriserna för avbildningarna ovan.

T 8.14 En linjär avbildning **F** har avbildningsmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & a-1 \end{pmatrix}.$$

För vilka värden på talet a gäller det att **F** är bijektiv?

Övriga egenskaper hos linjära avbildningar

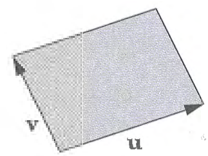
T 8.15 Låt **F** och **G** vara linjära avbildningar med avbildningsmatris

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Avgör om avbildningarna är isometriska.

T 8.16 Avgör om de linjära avbildningarna i Uppgift 8.15 är symmetriska.

T 8.17 Vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ spänner upp ett parallellogram i planet (se figuren) med area 3. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm arean av det parallellogram som spänns upp av $\mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{F}(\mathbf{v})$. Förutsatt att $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ är positivt orienterade, vad går att säga om orienteringen av $\mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{F}(\mathbf{v})$?

8.18 Vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$ spänner upp en volym i rummet. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -a \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm de värden på konstanten a för vilka vektorerna $\mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{F}(\mathbf{v}), \mathbf{F}(\mathbf{w})$ inte spänner upp någon volym.

Blandade uppgifter

8.19 Bestäm värdemängden för den linjära avbildning som har matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vad blir rangen av **A**? Är den linjära avbildningen surjektiv?

8.20 Bestäm matrisen för den linjära avbildning som ges av att först rotera rummets punkter $\pi/2$ radianer i positiv riktning kring x-axeln (sett från x-axelns spets) och sedan rotera $\pi/2$ radianer i positiv riktning kring y-axeln (sett från y-axelns spets). Blir matrisen densamma om rotationerna utförs i omvänd ordning?

T 8.21 Ge ett exempel på en (reell) 2×2-matris $\mathbf{A}$, utöver $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, som uppfyller att $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$.

8.22 Låt $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ vara avbildningarna definierade av

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, 0), \qquad \mathbf{G}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 x_2).$$

Är $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ linjära? Är sammansättningarna $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ och $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ linjära?

8.23 Är den linjära avbildningen i Uppgift 7.2 bijektiv? Bestäm i så fall matrisen till den inversa avbildningen. (Observera att ett geometriskt resonemang sparar dig räknearbete jämfört med att gå via avbildningsmatrisen.)

8.24 Är den linjära avbildningen i Uppgift 7.8 bijektiv? Bestäm i så fall matrisen till den inversa avbildningen.

8.25 Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en bijektiv linjär avbildning. Visa att om en uppsättning vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ är linjärt oberoende, så är även bildvektorerna $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1), \mathbf{F}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{u}_p)$ linjärt oberoende.

8.26 Låt T vara en triangel i planet med area 5. Punkterna i T speglas först i linjen $x - 2y = 0$ och avbildas sedan med den linjära avbildningen med matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm arean av den triangel som blir resultatet av denna sammansatta avbildning.

L 8.27 Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning som både är isometrisk och symmetrisk. Visa att $\mathbf{F}$ är bijektiv, och att den inversa avbildningen $\mathbf{F}^{-1}$ är lika med $\mathbf{F}$.

8.28 Låt $\mathbf{F}$ vara en linjär avbildning mellan två linjära rum V och W, dvs. en avbildning av typ $V \to W$ som uppfyller att

$$\mathbf{F}(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) = \lambda_1 \mathbf{F}(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 \mathbf{F}(\mathbf{u}_2)$$

för alla $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ och $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

a) Visa att nollrummet för $\mathbf{F}$ (dvs. alla vektorer som avbildas på nollvektorn) är ett linjärt underrum i V, samt att värdemängden för $\mathbf{F}$ är ett linjärt underrum i W.

b) Låt Z vara ett linjärt underrum i W, och låt M vara mängden av alla vektorer $\mathbf{u} \in V$ för vilka det gäller att $\mathbf{F}(\mathbf{u}) \in Z$. Visa att M utgör ett linjärt underrum i V.

Tips Kapitel 8

8.2 Se Exempel 8.1 på sidan 218 i läroboken.

8.3 Se Exempel 8.2 på sidan 219 i läroboken.

8.4 a) Använd sambandet på sidan 220 i läroboken.
b) För nollrummet, tänk på den geometriska tolkningen. Vilka vektorer avbildas på $\mathbf{0}$? Nolldimensionen anger sedan dimensionen av nollrummet. Alternativt kan man få fram nolldimensionen genom att utnyttja dimensionssatsen, Sats 5.15, på sidan 139 i läroboken. Hur många kolonner n har avbildningsmatrisen i respektive fall?

8.5 Se Exempel 8.4 på sidan 221 i läroboken.

8.6 Se Exempel 8.5 på sidan 223 i läroboken.

8.7 För att bestämma matrisen till avbildningen $\mathbf{F}^n$, ta fram matriserna för de första värdena på n, och försök hitta ett allmänt mönster.

8.8 Se Exempel 8.6 på sidan 225 i läroboken.

8.9 Tänk på den geometriska tolkningen. Jämför med Exempel 8.7 på sidan 226 i läroboken. (Om du löste Uppgift 8.4 b) så kanske du kan utnyttja resultatet där för att avgöra injektiviteten?)

8.12 För avbildningsmatrisen, använd Sats 8.2 på sidan 230 i läroboken. (Jämför även med Exempel 8.8 på samma sida.)

8.14 Utnyttja den sammanfattande satsen på sidan 232 i läroboken.

8.15 Använd Sats 8.4 på sidan 235 i läroboken.

8.16 Använd Sats 8.5 på sidan 238 i läroboken.

8.17 Se Sats 8.6 på sidan 241 i läroboken.

8.21 Går det att låta $\mathbf{A}$ vara avbildningsmatris till någon lämplig rotation i planet?

Svar Kapitel 8

8.1 $(1,1,-2,-2)$ ligger i värdemängden, $(1,1,-3,-2)$ ligger ej i värdemängden

8.2 a) de (y_1,y_2,y_3) i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller att $3y_1-2y_2+y_3=0$

b) hela $\mathbb{R}^2$

c) de (y_1,y_2,y_3) i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller att $5y_1-4y_2+3y_3=0$

d) hela $\mathbb{R}^2$

8.3 a) hela $\mathbb{R}^2$

b) de (y_1,y_2,y_3) i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller att $2y_1-y_2+y_3=0$, dvs. själva planet

c) de (y_1,y_2,y_3) i $\mathbb{R}^3$ som är på formen $t(1,2,-2)$, $t\in\mathbb{R}$, dvs. själva linjen

d) hela $\mathbb{R}^2$

8.4 a) Rangen, motsvarande dimensionen av värdemängden, är 2 i a), b) och d) samt 1 i c).

b) Nollrummet i 8.3 a) och d) blir enbart nollvektorn; nolldimensionen är då 0. I b) ges nollrummet av alla vektorer ortogonala mot planet $2x-y+z=0$, dvs. vektorerna parallella med linjen $t(2,-1,1)$, $t\in\mathbb{R}$. Nolldimensionen är i detta fall lika med 1. Nollrummet i c) blir samtliga vektorer ortogonala mot linjen $(x,y,z)=t(1,2,-2)$, $t\in\mathbb{R}$, dvs. de vektorer som ligger i planet $x+2y-2z=0$. Nolldimensionen är då lika med 2.

8.5 a) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3-4\sqrt{3} & -4-3\sqrt{3}\\ -4-3\sqrt{3} & -3+4\sqrt{3}\end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3+4\sqrt{3} & -4+3\sqrt{3}\\ -4+3\sqrt{3} & -3-4\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Matriserna är som synes olika.

8.6 a) $\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 8 & -1\\ 10 & -2\end{pmatrix}$; $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ är av typ $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$.

b) ej definierad

8.7 Avbildningen $\mathbf{F}\circ\mathbf{F}$ har matrisen $\mathbf{A}^2=\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, medan, mer allmänt, avbildningen $\mathbf{F}^n$ har matrisen $\mathbf{A}^n=\left(\begin{smallmatrix}1&n\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

8.8 a) ej injektiv b) injektiv c) injektiv d) ej injektiv

8.9 a) injektiv b) ej injektiv c) ej injektiv d) injektiv

8.10 a) ej surjektiv b) surjektiv c) ej surjektiv d) surjektiv

8.11 a) surjektiv b) ej surjektiv c) ej surjektiv d) surjektiv

8.12 a) ej bijektiv b) bijektiv c) ej bijektiv

d) ej bijektiv Inversen i b) får matrisen $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.13 a) bijektiv b) ej bijektiv c) ej bijektiv d) bijektiv

Inversen i a) och d) får matrisen $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ respektive $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Notera att inversen till speglingen blir lika med speglingen själv, och att inversen till rotationen blir rotation $2\pi/3$ radianer i *negativ* riktning.

8.14 $a \neq -2$ och $a \neq 3$

8.15 **F** är isometrisk, **G** är ej isometrisk.

Notera att **F** är spegling i linjen $2x - y = 0$, en för oss välbekant avbildning; vid spegling i en linje bevaras ju längder och vinklar. Matrisen **B** är inte ortogonal; visserligen är kolonnerna ortogonala, men dessa är inte normerade.

8.16 **F** är symmetrisk, **G** är ej symmetrisk.

8.17 Arean blir 21, och $\mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{F}(\mathbf{v})$ är negativt orienterade.

8.18 $a = -1$ och $a = 1/2$

8.19 Värdemängden är $t(1,-1,2)$, $t \in \mathbb{R}$, rangen är 1 och avbildningen är ej surjektiv.

8.20 Avbildningsmatrisen ges av $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Matrisen för den ”omkastade avbildningen” blir $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alltså ej densamma.

8.21 Exempelvis $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, som svarar mot rotation i planet $2\pi/3$ radianer i positiv riktning.

8.22 Avbildningarna **F** och $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ är linjära, men **G** och $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ är ej linjära.

8.23 nej

8.24 Ja, inversen har matrisen $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -15 & -6 & 6 \\ -4 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

8.26 20

Lösningar Kapitel 8

8.27 Låt $\mathbf{A}$ vara avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$. Då $\mathbf{F}$ är isometrisk följer det av Sats 8.4 på sidan 235 i läroboken att $\mathbf{A}$ är ortogonal, vilket enligt Sats 4.7 på sidan 112 innebär att $\mathbf{A}$ är inverterbar med $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Samtidigt, eftersom $\mathbf{F}$ är symmetrisk, gäller det enligt Sats 8.5 på sidan 238 att $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Kombinerar vi dessa likheter får vi

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Det följer nu att $\mathbf{F}$ är bijektiv, och att $\mathbf{F}^{-1}$ har avbildningsmatris $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$. Eftersom $\mathbf{F}$ och $\mathbf{F}^{-1}$ har samma avbildningsmatris drar vi slutsatsen att $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}$.

Kapitel 9

Bas- och koordinatbyte

Byte av bas och koordinater

T 9.1 Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$, och antag att vi inför en ny bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ enligt

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = (3, -1), \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 = (2, 1)$$

med avseende på den ursprungliga basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

a) Verifiera att $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

b) Ange matrissambandet för hur de nya basvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ uttrycks i de ursprungliga basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Vi skall nu steg för steg utföra ett basbyte med åtföljande koordinatbyte: Givet en allmän vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i den ursprungliga basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, låt $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ beteckna koordinaterna för $\mathbf{x}$ i den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$.

c) Ange matrissambandet för hur de ursprungliga koordinaterna $\mathbf{x}$ uttrycks i de nya koordinaterna $\hat{\mathbf{x}}$. Vad blir koordinatbytesmatrisen? Vad går det att säga om kolonnerna till denna matris?

d) Använd sambandet i c) för att bestämma koordinaterna $\mathbf{x}$ för den vektor som i den nya basen har koordinaterna $\hat{\mathbf{x}} = (1, -2)$.

e) Ange matrissambandet för hur de nya koordinaterna $\hat{\mathbf{x}}$ uttrycks i de ursprungliga koordinaterna $\mathbf{x}$.

f) Använd sambandet i e) för att bestämma de nya koordinaterna $\hat{\mathbf{x}}$ för vektorn $\mathbf{x} = (-6, 7)$.

9.2 Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$, och inför nya basvektorer $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ enligt

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{cases}.$$

Bestäm koordinaterna med avseende på basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ för den vektor som i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ har koordinaterna $(1,2)$. Bestäm även koordinaterna med avseende på basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ för den vektor som i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ har koordinaterna $(3, -1)$.

Ortonormerat basbyte

T 9.3 Låt $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ vara en bas för $\mathbb{R}^3$, och antag att vi inför en ny *ortonormerad* bas $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3$ enligt

$$\hat{\mathbf{e}}_1=\tfrac{1}{3}(2,2,-1),\quad \hat{\mathbf{e}}_2=\tfrac{1}{3}(1,-2,-2),\quad \hat{\mathbf{e}}_3=\tfrac{1}{3}(-2,1,-2)$$

med avseende på den ursprungliga basen $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$.

a) Verifiera att $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3$ utgör en ortonormerad bas för $\mathbb{R}^3$.

b) Ange matrissambandet för hur de nya basvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3$ uttrycks i de ursprungliga basvektorerna $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$.

Vi skall nu steg för steg utföra ett ortonormerat basbyte med åtföljande koordinatbyte: Givet en allmän vektor $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ i den ursprungliga basen $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, låt $\hat{\mathbf{x}}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ beteckna koordinaterna för $\mathbf{x}$ i den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3$.

c) Ange matrissambandet för hur de ursprungliga koordinaterna $\mathbf{x}$ uttrycks i de nya koordinaterna $\hat{\mathbf{x}}$.

d) Använd sambandet i c) för att bestämma koordinaterna $\mathbf{x}$ för den vektor som i den nya basen har koordinaterna $\hat{\mathbf{x}}=(4,-1,2)$.

e) Ange matrissambandet för hur de nya koordinaterna $\hat{\mathbf{x}}$ uttrycks i de ursprungliga koordinaterna $\mathbf{x}$.

f) Använd sambandet i e) för att bestämma de nya koordinaterna $\hat{\mathbf{x}}$ för vektorn $\mathbf{x}=(1,2,3)$.

T 9.4 Planet π ges av ekvationen $-2x+2y-z=0$ med avseende på en given bas $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$.

a) Bestäm en *positivt orienterad* ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att vektorerna $\hat{\mathbf{e}}_1$ och $\hat{\mathbf{e}}_2$ är parallella med π.

b) Vi byter nu bas till $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3$. Vad blir ekvationen för π i denna nya bas?

Koordinatbyte för linjära avbildningar

T 9.5 Antag att den linjära avbildningen $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ har avbildningsmatris

$$\mathbf{A}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -18\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

i en given bas $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$, och att vi utför basbytet i Uppgift 9.1, dvs. inför de nya basvektorerna

$$\hat{\mathbf{e}}_1=(3,-1),\qquad \hat{\mathbf{e}}_2=(2,1)$$

med avseende på den ursprungliga basen $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$. Bestäm avbildningsmatrisen $\hat{\mathbf{A}}$ med avseende på den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2$.

T 9.6 Låt **F** vara den linjära avbildning som svarar mot spegling i linjen l med ekvation $2x - y = 0$.

a) Bestäm avbildningsmatrisen för **F**. (Har du löst Uppgift 7.15 b) på sidan 59 så har du redan svaret.)

b) Bestäm en ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ för $\mathbb{R}^2$ sådan att $\hat{\mathbf{e}}_1$ är parallell med l och $\hat{\mathbf{e}}_2$ är ortogonal mot l.

c) Bestäm avbildningsmatrisen för **F** med avseende på basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$.

T 9.7 Bestäm avbildningsmatrisen **A** för den linjära avbildning som svarar mot rotation vinkeln $\pi/2$ radianer kring linjen $(x,y,z) = t(-2,2,-1)$, $t \in \mathbb{R}$. Rotationen sker i positiv riktning sett från spetsen av vektorn $(-2,2,-1)$.

Blandade uppgifter

9.8 Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$, och antag att vi inför en ny bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ enligt

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = (3,-3), \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 = (4,-5)$$

med avseende på den ursprungliga basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Finns det vektorer, utöver nollvektorn, som har samma koordinater med avseende på båda dessa baser? I så fall vilka?

9.9 Efter ett basbyte i $\mathbb{R}^2$ gäller det att vektorerna $\mathbf{x}_1 = (-1,2)$ och $\mathbf{x}_2 = (2,-3)$, med koordinater avseende på den gamla basen, i den nya basen får koordinaterna $\hat{\mathbf{x}}_1 = (0,3)$ respektive $\hat{\mathbf{x}}_2 = (4,1)$. Låt $\mathbf{x} = (3,-1)$ vara en vektor med koordinater med avseende på den gamla basen. Vad blir koordinaterna för denna vektor med avseende på den nya basen?

9.10 Låt l_1 och l_2 vara de linjer i rummet som på parameterform ges av

$$l_1 : (x,y,z) = t(1,1,-1) \qquad \text{respektive} \qquad l_2 : (x,y,z) = t(2,1,0).$$

a) Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att $\hat{\mathbf{e}}_1$ är parallell med l_1 och $\hat{\mathbf{e}}_2$ är ortogonal mot l_2.

b) Ange ekvationer på parameterform för linjerna l_1 och l_2 med avseende på den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$.

Tips Kapitel 9

9.1 Se Exempel 9.2 på sidan 250 i läroboken.

9.3 Se Exempel 9.3 på sidan 252 i läroboken.

9.4 Jämför med Exempel 9.5 och Anmärkning 9.4 på sidorna 257-258 i läroboken.

9.5 Se Exempel 9.4 på sidan 256 i läroboken.

9.6 Jämför med Exempel 9.5 på sidan 257 i läroboken.

9.7 Utför allra först ett basbyte till en positivt orienterad ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$, där $\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{3}(-2,2,-1)$. (Ett sådant basbyte utförde du faktiskt i Uppgift 9.4; återanvänd gärna dina beräkningar därifrån.) I den nya basen är det mycket lättare att ta fram avbildningsmatrisen (se Exempel 7.19 på sidan 215 i läroboken), som vi betecknar $\hat{\mathbf{A}}$. Slutligen kan man beräkna avbildningsmatrisen $\mathbf{A}$ i den ursprungliga basen genom att utgå från sambandet i Sats 9.3 på sidan 256.

Svar Kapitel 9

9.1 a) Det är inte svårt att se att de två vektorerna $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ ej är parallella, och därmed utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{E}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}}$

c) Det gäller att

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}}.$$

Matrisen $\mathbf{S}$ är den s.k. koordinatbytesmatrisen, vars kolonner är koordinaterna för de nya basvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$.

d) $\mathbf{x} = (-1, -3)$

e) $\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}$

f) $\hat{\mathbf{x}} = (-4, 3)$

9.2 Koordinaterna med avseende på basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ för den vektor som i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ har koordinaterna (1,2) är (4,1). Koordinaterna med avseende på $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ för den vektor som i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ har koordinaterna $(3, -1)$ är $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

9.3 a) Eftersom varje ortonormerad mängd av tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ också är en bas för $\mathbb{R}^3$ (se Exempel 5.8 på sidan 131 i läroboken) räcker det att visa att $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ utgör en ortonormerad mängd. Det är lätt att kontrollera att så är fallet; det gäller att

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = 0 \qquad \text{och} \qquad \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = 1.$$

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{E}}} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}}$ c) $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}}$

d) $\mathbf{x} = (1, 4, -2)$ e) $\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{S}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}$ f) $\hat{\mathbf{x}} = (1, -3, -2)$

9.4 a) exempelvis $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,\quad 1,-4)$ och $\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{3}(-2,2,-1)$

b) $\hat{z} = 0$

9.5 $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (en diagonalmatris!)

9.6 a) $\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b) t.ex. $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$

c) $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

9.7 $\mathbf{A} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -7 & 4 & 4 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

9.8 Ja, vektorerna $t(2,-1)$, $t \neq 0$.

9.9 $(20,26)$

9.10 a) exempelvis $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)$, $\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$

b) Med svaret i a) får vi $l_1 : (\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = t(1,0,0)$ och $l_2 : (\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = t(\sqrt{3},0,-\sqrt{2})$.

Kapitel 10

Egenvektorer och egenvärden

Definition

T 10.1 Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen med avbildningsmatris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Vilken eller vilka av vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = (1,1), \quad \mathbf{u}_2 = (1,-3), \quad \mathbf{u}_3 = (4,-1), \quad \mathbf{u}_4 = (0,0),$$

är egenvektorer till $\mathbf{F}$? Vad blir egenvärdet i respektive fall?

L 10.2 Bestäm värdet på a så att den linjära avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med avbildningsmatris

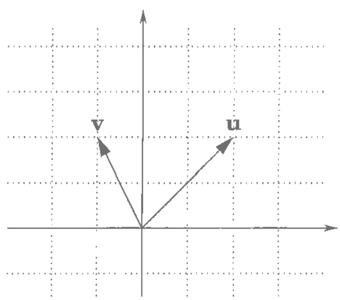
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 5 & 5 \\ 1 & 3 & a-2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

får egenvektorn $\mathbf{u} = (1,1,-1)$. Vad blir motsvarande egenvärde?

T 10.3 Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i figuren är egenvektorer med egenvärden $-1/2$ respektive 2 till en linjär avbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) Rita ut vektorerna $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ och $\mathbf{F}(\mathbf{v})$.

b) Rita ut vektorerna $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och $\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$. Är $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ en egenvektor till $\mathbf{F}$?



T 10.4 Använd ett geometriskt resonemang (dvs. räkna ej) för att bestämma alla egenvektorer och egenvärden till den linjära avbildning som svarar mot

a) ortogonal projektion på linjen $2x - y = 0$

b) spegling i planet $2x - y + z = 0$

c) ortogonal projektion på linjen $(x,y,z) = t(1,2,-2)$, $t \in \mathbb{R}$

d) rotation π radianer i planet

e) rotation i rummet $\pi/3$ radianer kring z-axeln.

10.5 En kvadratisk matris $\mathbf{A}$ har egenvektorn $\mathbf{x}$ med egenvärde λ. Visa att $\mathbf{x}$ också är egenvektor till var och en av matriserna $\mathbf{A}^2$ och $\mathbf{A}^3 - 3\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{I}$. (Här står $\mathbf{I}$ som vanligt för enhetsmatrisen.) Vad blir egenvärdet i respektive fall?

T 10.6 Den linjära avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har egenvektorerna

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1) \qquad \text{och} \qquad \mathbf{u}_2 = (1, 2),$$

med egenvärdena 2 respektive -1. Bestäm avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$.

Beräkning av egenvärden och egenvektorer

T 10.7 Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

a) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

T 10.8 Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

T 10.9 Bestäm samtliga egenvärden till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

T 10.10 Använd de beräknade egenvektorerna och egenvärdena till matriserna i Uppgift 10.7 d) och 10.8 b) för att, till var och en av dessa matriser, göra en geometrisk tolkning av motsvarande linjära avbildning.

Blandade uppgifter

10.11 Antag att matrisen $\mathbf{A}$ är inverterbar, och har ett egenvärde $\lambda \neq 0$. Visa att $\mathbf{A}^{-1}$ har egenvärdet $1/\lambda$.

10.12 Den linjära avbildningen $\mathbf{F}$ av typ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times (1,-2,2), \qquad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{F}$. (Observera att ett geometriskt resonemang i detta fall sparar dig väldigt mycket räknearbete jämfört med att gå via avbildningsmatrisen.)

10.13 Den linjära avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har egenvektorn $\mathbf{u}_1 = (0,1,1)$ med egenvärde 2, och avbildar de båda vektorerna $\mathbf{u}_2 = (1,3,0)$ och $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$ på nollvektorn. Bestäm avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$.

10.14 För vilka värden på talet a gäller det att matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

har två olika reella egenvärden?

10.15 Matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

har egenvektorn $(1,1,1)$. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{A}$.

10.16 Ge en geometrisk tolkning av den linjära avbildningen med matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.17 En kvadratisk matris $\mathbf{A}$ sägs vara *idempotent* om $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Visa att om λ är ett egenvärde till en idempotent matris så är $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$. Ge även ett exempel på en idempotent 2×2-matris utöver nollmatrisen och enhetsmatrisen.

10.18 En kvadratisk matris $\mathbf{A}$ sägs vara *nilpotent* om $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ för något positivt heltal k. Visa att om λ är ett egenvärde till en nilpotent matris så är $\lambda = 0$.

T 10.19 Låt $\mathbf{A}$ vara en kvadratisk matris.

a) Visa att matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{A}^T$ har samma karakteristiska polynom (och därmed har samma egenvärden).

b) Har $\mathbf{A}$ och $\mathbf{A}^T$ i allmänhet samma egenvektorer? Ge ett bevis eller ett motexempel.

T 10.20 a) Med en *radstokastisk* matris menas en kvadratisk matris vars rader samtliga summerar till 1. Visa att varje radstokastisk matris har egenvärdet 1.

b) Med en *kolonnstokastisk* matris menas en kvadratisk matris vars kolonner samtliga summerar till 1. Visa att varje kolonnstokastisk matris har egenvärdet 1.

10.21 Två matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sägs vara *likformiga* om det finns en inverterbar matris $\mathbf{T}$ sådan att $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BT}$. Visa att två likformiga matriser har samma karakteristiska polynom (och därmed har samma egenvärden).

T 10.22 Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara $n \times n$-matriser och antag att $\mathbf{B}$ är inverterbar. Visa att matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har samma karakteristiska polynom (och därmed har samma egenvärden).

Tips Kapitel 10

10.1 Se Exempel 10.1 på sidan 260 i läroboken.

10.3 b) Notera att $\mathbf{F}$ är en linjär avbildning. Vad gäller då för $\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$? Blir $\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ parallell med $\mathbf{u}+\mathbf{v}$?

10.4 Jämför med resonemangen i Exempel 10.2–10.4 på sidorna 261–263 i läroboken. Rita figur i varje enskilt fall!

10.6 Bestäm först $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1)$ och $\mathbf{F}(\mathbf{u}_2)$. Utnyttja sedan metoden i Exempel 7.8 på sidan 202 i läroboken.

10.7 Se Exempel 10.5 på sidan 265 i läroboken. I d) och e) använder man lämpligen metoden i Exempel 10.6 för att undvika faktorn framför matrisen.

10.8 Se Exempel 10.6 på sidan 266 i läroboken. Har du problem att lösa tredjegradsekvationen i d)-uppgiften så ta en titt på Uppgift 10.2, där du har exakt samma matris (efter att a-värdet har bestämts). Vilket egenvärde har vi i Uppgift 10.2?

10.9 För determinantberäkningen, jämför med Exempel 6.17 på sidan 176 i läroboken.

10.10 Jämför med Exempel 10.7 på sidan 268 i läroboken. Problemet är i princip det omvända till det i Uppgift 10.4, så det kan vara bra att först tänka igenom dina lösningar av 10.4.

10.19 a) Utgå från definitionen av karakteristiskt polynom och utnyttja räknelagen för determinanter i Sats 6.4 på sidan 160 i läroboken.

10.20 a) Går det på ett enkelt sätt att konstruera en egenvektor till matrisen med det sökta egenvärdet?

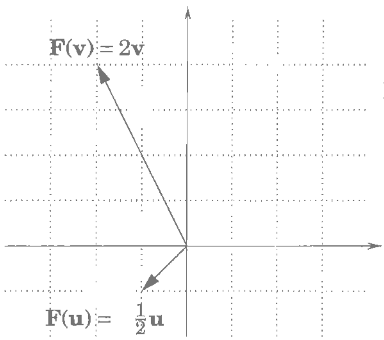
10.22 Försök att utnyttja resultatet i Uppgift 10.21.

Svar Kapitel 10

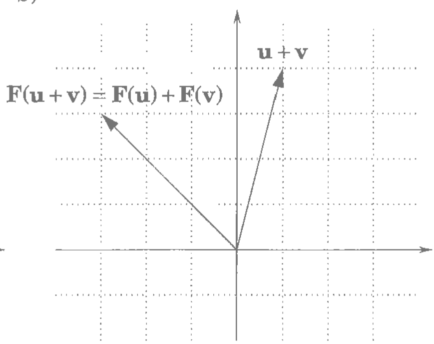
10.1 Vektorerna $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är egenvektorer med egenvärdena -4 respektive 7.

10.2 $a = 3$, egenvärde $\lambda = 3$

10.3 a)



b)



Nej, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ är inte en egenvektor, då den ej är parallell med $\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$.

10.4
a) Alla nollskilda vektorer parallella med linjen, dvs. alla vektorer $t(1,2)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 1, och alla nollskilda vektorer ortogonala mot linjen, $t(2,-1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 0.

b) Alla nollskilda vektorer parallella med planet, dvs. alla vektorer $(x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$ som uppfyller $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ är egenvektorer med egenvärde 1, och alla nollskilda vektorer ortogonala mot planet, $t(2,-1,1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde -1.

c) Alla nollskilda vektorer parallella med linjen, dvs. vektorerna $t(1,2,-2)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 1. Alla nollskilda vektorer ortogonala mot linjen är egenvektorer med egenvärde 0. En vektor är ortogonal mot linjen precis då den är parallell med ett plan som har $(1,2,-2)$ som normalvektor. Dessa egenvektorer kan således beskrivas som all vektorer $(x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$ som uppfyller ekvationen $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$.

d) Alla nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^2$ (!) är egenvektorer med egenvärde -1.

e) Alla nollskilda vektorer parallella med z-axeln, dvs. $t(0,0,1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 1.

10.5 Egenvärdet blir λ^2 respektive $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.

10.6 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

10.7 a) Vektorerna $t(4,-1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 7, och vektorerna $t(1,-3)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde -4. (Observera att matrisen är densamma som i Uppgift 10.1.)

b) Vektorerna $t(3,4)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 5, och vektorerna $t(1,-1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde -2.

c) Vektorerna $t(0,1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 2.

d) Vektorerna $t(1,2)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 1, och vektorerna $t(2,-1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde -1.

e) Reella egenvärden och egenvektorer saknas. Matrisen svarar mot rotation i planet $\pi/3$ radianer i positiv riktning; jämför med Exempel 10.4 på sidan 263 i läroboken.

f) Vektorerna $t(1,0)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 2, och vektorerna $t(0,1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde -3.

g) Alla nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^2$ är egenvektorer med egenvärde -1. Matrisen svarar mot avbildningen i Uppgift 10.4 d), dvs. rotation i planet π radianer.

10.8 a) Vektorerna $t(0,1,1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde -1, vektorerna $t(1,1,1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 0 och vektorerna $t(1,0,-1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 3.

b) Vektorerna $t(2,-1,1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 0, och alla vektorer $(x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$ som uppfyller $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ är egenvektorer med egenvärde 2.

c) Vektorerna $t(1,2,-2)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde -1, och alla vektorer $(x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$ som uppfyller $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ är egenvektorer med egenvärde 0.

d) Egenvektorerna ges av $t(0,-1,1)$, $t(-1,0,1)$ och $t(1,1,-1)$, $t \neq 0$, med egenvärdena 2, -2 respektive 3.

e) De enda egenvektorerna är vektorerna $t(1,0,0)$, $t \neq 0$, med egenvärde 4.

f) Alla nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^3$ är egenvektorer med egenvärde 1.

10.9 Egenvärdena är 1, 2, 3 och 4.

10.10 Matrisen i Uppgift 10.7 d) svarar mot spegling i linjen $2x - y = 0$. I Uppgift 10.8 b) har vi ortogonal projektion på planet $2x - y + z = 0$ följt av förlängning faktorn 2.

10.12 Vektorerna $t(1,-2,2)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 0.

10.13 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

10.14 $0<a<1$

10.15 Vektorerna $t(1,1,1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde -1, och alla vektorer $(x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$ som uppfyller $x_1-x_2+x_3=0$ är egenvektorer med egenvärde 2.

10.16 Ortogonal projektion på linjen $x+y=0$ följt av förlängning faktorn 2.

10.17 Ett exempel är matrisen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

10.19 b) Nej, egenvektorerna är i allmänhet inte desamma. Exempelvis har matrisen $\mathbf{A}=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ egenvektorerna $t(1,0)$, $t \neq 0$, medan $\mathbf{A}^T=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ har egenvektorerna $t(0,1)$, $t \neq 0$ (kolla!).

Lösningar Kapitel 10

10.2 Enligt Definition 10.2 av egenvektor på sidan 260 i läroboken skall det för $\mathbf{x} = (1, 1, -1)$ gälla att $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, för något reellt tal λ. Uppställning av detta ekvationssystem ger att

$$\begin{pmatrix} a & 5 & 5 \\ 1 & 3 & a-2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ -a+6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = \lambda \\ -a+6 & = \lambda \\ -3 & = -\lambda \end{cases}.$$

Från den sista ekvationen ser vi att $\lambda = 3$, och det följer då från den första ekvationen att även $a = 3$. Till slut noterar vi att dessa värden på λ och a även uppfyller den mittersta ekvationen. Sammanfattningsvis får vi alltså att $a = 3$ och att egenvärdet är $\lambda = 3$.

Kapitel 11

Diagonalisering

Basbyte och diagonalisering

T 11.1 Den linjära avbildningen $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har avbildningsmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi skall nu steg för steg diagonalisera denna matris:

a) Bestäm samtliga egenvektorer och egenvärden till $\mathbf{A}$.

b) Ange en bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ av egenvektorer till $\mathbf{A}$.

c) Vi byter nu bas, och låter $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ vara den nya basen för $\mathbb{R}^2$. Vilken blir koordinatbytesmatrisen $\mathbf{S}$ för detta basbyte?

d) Bestäm avbildningsmatrisen $\mathbf{D}$ med avseende på basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ genom att utföra beräkningen $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$. Vi har nu fått en diagonalmatris $\mathbf{D}$.

e) Är det nödvändigt att utföra beräkningen $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ för att bestämma $\mathbf{D}$?

T 11.2 Diagonalisera, i de fall det är möjligt, nedanstående matriser. Med andra ord, bestäm i vart och ett av fallen en inverterbar matris $\mathbf{S}$ och diagonalmatris $\mathbf{D}$ sådana att $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, om matrisen $\mathbf{A}$ ges av

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(Dessa matriser förekom tidigare i Uppgift 10.7, så du behöver inte beräkna egenvektorer och egenvärden på nytt.)

11.3 Diagonalisera matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Detta är samma matris som i Uppgift 10.8 a), så du behöver inte beräkna egenvektorer och egenvärden på nytt.)

T 11.4 a) Diagonalisera matrisen

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(Matrisen är densamma som i Uppgift 10.8 b), så du kan utnyttja beräkningar därifrån.)

b) Går det att utföra diagonaliseringen i a) så att koordinatbytesmatrisen $\mathbf{S}$ blir ortogonal? Gör i så fall det!

T 11.5 Låt $\mathbf{A}$ vara avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som svarar mot spegling i planet $x+2y+2z=0$. Bestäm en *ortogonal* matris $\mathbf{S}$ och en diagonalmatris $\mathbf{D}$ sådana att $\mathbf{D}=\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$.

Tillämpningar av diagonalisering

T 11.6 Beräkna potensen $\mathbf{A}^k$, $k \geq 1$, av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Du har redan diagonaliserat denna matris i Uppgift 11.1.)

T 11.7 Lös följande system av rekursionsekvationer:

$$\begin{cases} x_k = 2x_{k-1} - 3y_{k-1} \\ y_k = -2x_{k-1} + y_{k-1} \end{cases}, \qquad (x_0, y_0) = (1,3).$$

T 11.8 Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) - x_2(t) \end{cases}, \qquad x_1(0) = 5,\ x_2(0) = 2.$$

T 11.9 En region, där den totala invånarantalet antas vara konstant, består av två invånarpopulationer – stad och landsbygd. Under ett årtionde gäller det att 30% av invånarna på landsbygden flyttar till staden (dvs. 70% stannar kvar på landsbygden). Samtidigt gäller det att 10% av stadsbefolkningen under ett årtionde flyttar från staden till landsbygden. Vid ett visst tillfälle var fördelningen 90% landsbygd, 10% stad. Ta fram ett uttryck för hur fördelningen ser ut k årtionden senare. Hur ser fördelningen ut efter mycket lång tid?

Blandade uppgifter

11.10 a) Diagonalisera matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Beräkna $\mathbf{A}^{200}$.

11.11 Diagonalisera matrisen i Uppgift 10.15.

11.12 a) Låt $\mathbf{A}$ vara en kvadratisk matris. Visa att

$$\mathbf{A} \text{ är diagonaliserbar} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^2 \text{ är diagonaliserbar.}$$

b) Gäller den omvända implikationen i a)? Ge ett bevis eller ett motexempel!

11.13 Låt $\mathbf{A}$ vara en kvadratisk matris som går att diagonalisera med en ortogonal koordinatbytesmatris $\mathbf{S}$. Visa att $\mathbf{A}$ är symmetrisk.

T 11.14 Antag att 2×2-matrisen $\mathbf{A}$ har egenvektorn $(1,2)$ med egenvärde 3 samt att spåret av $\mathbf{A}$ är lika med -2. Bestäm $\det \mathbf{A}$.

11.15 Den homogena linjära differentialekvationen

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 0 \tag{11.1}$$

går att lösa genom att transformera den till ett system av ekvationer av första ordningen: Inför beteckningarna $x_1(t) = x'(t)$ och $x_2(t) = x(t)$; vi får då sambandet $x_2'(t) = x_1(t)$. Vidare kan ekvation (11.1) skrivas som $x_1'(t) + 4x_1(t) + 3x_2(t) = 0$. Sammantaget får vi alltså systemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}.$$

dvs. ett system på formen $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Lös detta system för att bestämma lösningen till ekvation (11.1).

T 11.16 Ett element i *Fibonaccisekvensen*

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad \ldots$$

bildas genom att beräkna summan av de två föregående elementen i följden, och kan således beskrivas med rekursionsekvationen

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \quad k \geq 1, \qquad F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Genom att lägga till sambandet $F_k = F_k$ kan vi konvertera denna ekvation till ett system av rekursionsekvationer enligt följande:

$$\begin{cases} F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \\ \quad F_k = F_k \end{cases}, \qquad F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_k} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{k-1}}, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. vi får ett system på formen $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$. Ta fram en formel för Fibonaccielementet F_k genom att lösa detta system.

Tips Kapitel 11

11.1 Se Exempel 11.1 på sidan 273 i läroboken.

11.2 Tänk på att matrisen endast är diagonaliserbar om villkoret i Sats 11.1 på sidan 277 i läroboken är uppfyllt.

11.4 a) Jämför med Exempel 11.3 på sidan 278 i läroboken.

b) Om du har problem att ta fram en ortonormerad bas av egenvektorer så kan det vara bra att jämföra med Exempel 9.5 på sidan 257 i läroboken.

11.5 Du slipper mycket beräkningar om du tar fram egenvektorer och egenvärden direkt utifrån den geometriska tolkningen. Det är alltså inte nödvändigt att först beräkna matrisen **A**.

11.6 Se Exempel 11.5 på sidan 285 i läroboken.

11.7 Se sidorna 286–288 i läroboken.

11.8 Se sidorna 288–290 i läroboken.

11.9 Du kan t.ex. studera Exempel 11.6 och 11.7 på sidan 293 respektive 296 i läroboken.

11.14 Utnyttja Sats 11.5 på sidan 282 i läroboken samt egenskapen för spåret på sidan 283.

11.16 För att underlätta de ganska besvärliga beräkningarna kan det vara smart att införa beteckningar för de båda egenvärden du får fram.

Svar Kapitel 11

11.1 a) Vektorerna $t(2,-1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 2, och vektorerna $t(1,-1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer med egenvärde 3.

b) En bas av egenvektorer ges exempelvis av $\hat{\mathbf{e}}_1 = (2,-1)$ och $\hat{\mathbf{e}}_2 = (1,-1)$. (Observera att svaret inte är entydigt. Du kan som bas också välja multiplar av dessa vektorer.)

c) Med basen i b) blir $\mathbf{S} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, vars kolonner är koordinaterna för basvektorerna.

d) Med matrisen $\mathbf{S}$ som i b) får vi diagonalmatrisen $\mathbf{D} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

e) Nej, det är inte nödvändigt (även om det kan vara bra att göra det för att kontrollera ditt svar). Diagonalelementen i $\mathbf{D}$ blir alltid egenvärdena för de egenvektorer som placeras som kolonner i $\mathbf{S}$. Ordningsföljden av diagonalelementen i $\mathbf{D}$ bestäms av ordningsföljden av kolonnerna i $\mathbf{S}$.

11.2 a) T.ex. $\mathbf{S} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ och $\mathbf{D} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Matrisen är ej diagonaliserbar. De enda egenvektorerna är $t(0,1)$, $t \neq 0$, och det går inte välja en bas för $\mathbb{R}^2$ bland dessa eftersom vektorerna är inbördes parallella. (Se Sats 11.1 på sidan 277 i läroboken.)

c) T.ex. $\mathbf{S} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ och $\mathbf{D} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

d) Matrisen är ej diagonaliserbar. Eftersom reella egenvektorer saknas kan vi inte bilda en bas av egenvektorer.

e) T.ex. $\mathbf{S} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ och $\mathbf{D} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ (!)

11.3 Exempelvis $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11.4 a) Exempelvis $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Ja, exempelvis

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notera att sambandet $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ i detta fall kan skrivas $\mathbf{D} = \mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$, eftersom $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$ då $\mathbf{S}$ är ortogonal.

11.5 Exempelvis

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

11.6 $\mathbf{A}^k=\begin{pmatrix}2^{k+1}-3^k & 2^{k+1}-2\cdot 3^k\\ -2^k+3^k & -2^k+2\cdot 3^k\end{pmatrix}$

11.7 $\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}=-\frac{2}{5}4^k\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}+\frac{11}{5}(-1)^k\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

11.8 $\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}+3e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

11.9 Om x_k, y_k betecknar andelen befolkning på landsbygden respektive i staden efter k årtionden, så gäller det att

$$\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}+\frac{13}{20}\left(\frac{3}{5}\right)^k\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Fördelningen efter lång tid blir (1/4, 3/4), dvs. 75% kommer att bo i staden.

11.10 a) t.ex. $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ och $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A}^{200}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^{200}+2 & -2\cdot 5^{200}+2\\ -5^{200}+1 & 2\cdot 5^{200}+1\end{pmatrix}$

11.11 t.ex. $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ och $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

11.12 b) Nej, låt exempelvis $\mathbf{A}=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$. Denna matris är ej diagonaliserbar (kolla!), men $\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$ är diagonaliserbar (observera att nollmatrisen redan är en diagonalmatris).

11.14 $\det\mathbf{A}=-15$

11.15 $x(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}$, där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter

11.16 $F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right), \quad k\geq 0$

Kapitel B

Blandade uppgifter

B.1 a) Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ 4x + ay + 4z = 2 \end{cases}.$$

b) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen med avbildningsmatris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & a & 4 \end{pmatrix}.$$

För vilka värden på talet a gäller det att $(2,1,2)$ ligger i värdemängden för $\mathbf{F}$?

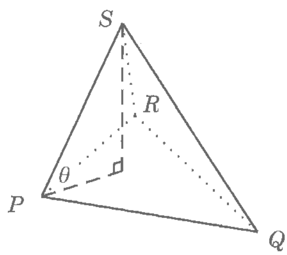
B.2 En tetradeder har hörn i punkterna

$$P:(1,1,1), \quad Q:(3,2,1), \quad R:(1,2,2) \quad \text{och} \quad S:(1,-1,3).$$

a) Beräkna arean av sidoytan PQR.

b) Beräkna höjden från hörnet S (se figuren).

c) Bestäm vinkeln θ mellan kanten PS och sidoytan PQR (se figuren) .



B.3 För 3×3-matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 2 & -1 & ? \\ -4 & 2 & ? \end{pmatrix}$$

är endast de två första kolonnerna kända. Antag att $\mathbf{A}$ är inverterbar. Går det då, utifrån informationen ovan, att bestämma den första kolonnen i inversen $\mathbf{A}^{-1}$? Vad blir i så fall denna kolonn?

B.4 a) Diagonalisera den symmetriska matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

genom att bestämma en *ortogonal* matris $\mathbf{S}$ och en diagonalmatris $\mathbf{D}$ sådana att $\mathbf{D} = \mathbf{S}^T\mathbf{AS}$.

b) Antag att matrisen i a) är avbildningsmatrisen för en linjär avbildning. Hur kan denna avbildning tolkas geometriskt?

B.5 Antag att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$, alla skilda från nollvektorn, och att $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en linjär avbildning sådan att $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{F}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_3$ och $\mathbf{F}(\mathbf{u}_3) = \mathbf{0}$. Visa att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende.

B.6 Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att $\hat{\mathbf{e}}_1$ är ortogonal mot planet $\pi : 2x + 2y + z = 0$ och $\hat{\mathbf{e}}_2$ är ortogonal mot linjen $l : (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(2, 3, 2)$. Bestäm också en ekvation för π i den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$.

B.7 Låt $\mathbf{F}$ vara en linjär avbildning som avbildar vektorerna

$$(1,0,0), (1,1,0) \text{ och } (1,1,1) \quad \text{på} \quad (2,1,0), (0,0,1) \text{ respektive } (0,-1,3).$$

Låt vidare $\mathbf{G}$ vara avbildningen som speglar rummets vektorer i xz-planet, dvs. i planet $y = 0$. Låt slutligen $\mathbf{H}$ vara den sammansatta avbildning som innebär att vi först tillämpar $\mathbf{F}$ och därefter $\mathbf{G}$.

a) Bestäm avbildningsmatrisen för $\mathbf{H}$.

b) Blir volymen av en parallellepiped större eller mindre då vi tillämpar $\mathbf{H}$ på den?

B.8 a) Bestäm en ekvation på normalform för det plan π som innehåller punkterna $P_1 : (1, 0, 3)$, $P_2 : (2, -1, 1)$ och $P_3 : (-1, 2, -1)$.

b) Bestäm en ekvation för linjen l som utgör skärningen mellan planet π i a) och planet med ekvation $2x + y - z - 2 = 0$.

c) Bestäm kortaste avståndet mellan punkten P_1 i a) och linjen l i b).

B.9 Låt $\mathbf{A}$ vara en 3×3-matris och $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ange alla implikationer/ekvivalenser mellan följande påståenden:

1: $\det \mathbf{A} = 0$, 2: $\det \mathbf{A} \neq 0$,

3: $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ har entydig lösning, 4: $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ saknar lösning.

B.10 Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en ortonormerad bas i planet. Skapa en ny (ej nödvändigtvis ortonormerad) bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ sådan att $\hat{\mathbf{e}}_1$ är vinkelrät mot vektorn $(-2,1)$ och sådan att den vektor som har koordinaterna $(3,-1)$ med avseende på basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ får koordinaterna $(1,1)$ i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$.

B.11 För matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & d \\ c & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

gäller det att $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$. Bestäm konstanterna a, b, c, d, e och f.

B.12 Låt $ABCD$ vara en kvadrat i planet, med $A:(-2,-5)$, $B:(1,1)$, $C:(-5,4)$.

a) Bestäm koordinaterna för punkten D.

b) Bestäm koordinaterna för vektorn $\overrightarrow{BD}$ i basen $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$.

B.13 Bestäm matrisen för den linjära avbildning som avbildar vektorn $(1,0,1)$ på sig själv och där alla vektorer i planet $x+y=0$ är egenvektorer med egenvärde 2.

B.14 a) Låt l_1 vara skärningslinjen mellan de två planen $\pi_1 : x+z-2=0$ och $\pi_2 : x-2y-z=0$, och låt l_2 vara linjen $(x,y,z)=(2t,3t,1+t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm en ekvation på normalform för det plan π som är parallellt med l_1 och innehåller l_2.

b) Bestäm avståndet mellan l_1 och π.

B.15 Ange vilka av påståendena nedan som är sanna respektive falska.

a) För alla $n \times n$-matriser $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ gäller det att $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

b) För alla inverterbara matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ av typ $n \times n$ gäller det att $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$.

c) Om det för 3×3-matrisen $\mathbf{A}$ gäller att $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 3$ så är $\mathbf{A}$ inverterbar.

d) Om kolonnerna i en 3×4-matris spänner upp $\mathbb{R}^3$ så är dessa kolonner linjärt oberoende.

e) Låt $\mathbf{A}$ vara en kvadratisk matris. Om ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ är lösbart för alla $\mathbf{y}$ så har detta system entydig lösning för alla $\mathbf{y}$.

B.16 Vektorerna i rummet projiceras först ortogonalt på xz-planet, varefter de vrids $\pi/2$ radianer kring z-axeln, i positiv riktning sett från spetsen av z-axeln. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$ för denna sammansatta avbildning $\mathbf{F}$. Bestäm rang och nolldimension för $\mathbf{A}$, samt en bas för nollrummet. Ange slutligen värdemängden till $\mathbf{F}$.

B.17 a) Bestäm en ekvation på normalform för planet π genom punkterna

$$P_1:(1,0,-1),\quad P_2:(2,1,3),\quad \text{och}\quad P_3:(3,-1,1).$$

b) Bestäm skärningen mellan planet π ovan och linjen l som går genom punkterna

$$P_4:(3,2,1)\quad \text{och}\quad P_5:(2,1,-1).$$

c) Bestäm avståndet mellan punkten P_3 och linjen l.

B.18 Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att

$\hat{\mathbf{e}}_1$ är parallell med linjen $l:(x,y,z)=(1,0,2)+t(2,2,1)$ och

$\hat{\mathbf{e}}_2$ är parallell med planet $\pi: 2x+3y+2z-7=0$.

Ange också koordinaterna, i den gamla basen, för den vektor som i din nya bas får koordinaterna $(9,3,6)$.

B.19 Antag att vi vrider rummets vektorer vinkeln θ radianer kring linjen med ekvation $(x,y,z)=t(402,-512,267)$, $t\in\mathbb{R}$, i positiv riktning sett från spetsen av vektorn $(402,-512,267)$, och låt $\mathbf{A}$ vara avbildningsmatrisen för denna avbildning.

a) Bestäm, för varje värde på θ, rangen av $\mathbf{A}$.

b) Bestäm, för varje värde på θ, determinanten av $\mathbf{A}$.

c) Bestäm, för varje värde på θ, alla (reella) egenvärden till $\mathbf{A}$.

d) Bestäm, för varje värde på θ, huruvida $\mathbf{A}$ är diagonaliserbar eller ej.

B.20 Antag att $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ är en bas i planet, och låt

$$\begin{cases}\hat{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\\ \hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\end{cases},$$

där a är ett reellt tal.

a) Bestäm alla värden på a sådana att $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2$ blir en bas i planet.

b) Bestäm a så att linjen som har ekvation $x_1+x_2=0$ i basen $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ får ekvation $\hat{x}_1=0$ i basen $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2$.

c) Bestäm alla värden på a sådana att det finns oändligt många vektorer som har samma koordinater i de båda baserna $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ och $\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2$.

B.21 Antag att en linjär avbildning $\mathbf{F}$ avbildar vektorn $(1,0,0)$ på $\frac{1}{3}(2,-1,2)$, och $(1,1,0)$ på $\frac{1}{3}(1,1,4)$. Antag vidare att avbildningsmatrisen $\mathbf{A}$ till $\mathbf{F}$ är ortogonal. Bestäm alla möjliga vektorer som $(1,1,1)$ kan avbildas på.

B.22 Låt l vara linjen genom punkterna $P:(1,2,3)$ och $Q:(3,3,5)$. Skär denna linje planet $\pi: -4x+y-z=4$? I så fall, i vilken punkt? Bestäm slutligen skärningsvinkeln mellan linjen l och planet π.

B.23 En triangelskiva i rummet har hörn i punkterna $P_1:(0,0,0)$, $P_2:(3,1,-1)$ och $P_3:(1,2,3)$. Avgör vilka av punkterna $Q_1:(1,1,0)$, $Q_2:(1,1,1)$ och $Q_3:(3,3,3)$ som ligger på triangelskivan.

B.24 Punkten $P:(1,2,3)$ speglas i ett plan π, och spegelbilden blir $S:(3,-2,5)$. Bestäm en ekvation för π.

B.25 Låt $\mathbf{v}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ och bilda den linjära avbildningen

$$\mathbf{F_v}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

a) Visa att avbildningsmatrisen $\mathbf{A_v}$ för $\mathbf{F_v}$ är skevsymmetrisk (dvs. $\mathbf{A_v}^T = -\mathbf{A_v}$) för varje $\mathbf{v}$.

b) Visa att varje skevsymmetrisk 3×3-matris är avbildningsmatris till en avbildning av formen $\mathbf{F_v}$ ovan. Vilken vektor $\mathbf{v}$ ger matrisen

$$\mathbf{A_v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}?$$

B.26 Antag att det för $n\times n$-matriserna $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ gäller att $\mathbf{ABC}=\mathbf{I}$. Visa att $\mathbf{B}$ är inverterbar, samt ange inversen $\mathbf{B}^{-1}$.

B.27 Låt $\mathbf{A}$ vara en matris av typ 3×3 med kolonnerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Visa att

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{a}_3}\begin{pmatrix} \mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2 \end{pmatrix}.$$

(Matrisen har alltså de tre angivna vektorprodukterna som rader.)

B.28 En linjär avbildning $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ avbildar vektorn $(3,-3,3)$ på vektorn $(-1,-1,1)$, samt svarar mot en ortogonal projektion på ett plan genom origo. Bestäm avbildningsmatrisen $\mathbf{A}$ för $\mathbf{F}$.

B.29 Matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & b & a \\ b & 2 & c \\ -2 & c & 4 \end{pmatrix}$$

har egenvektorn $(1,1,1)$ och är inte inverterbar. Bestäm alla möjliga värden på talen a, b och c.

B.30 För en linjär avbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller det att

$$\mathbf{F}(3,-3,-3) = (5,1,1) \qquad \text{och} \qquad \mathbf{F}(3,6,-3) = (-2,5,5),$$

samt att den svarar mot en rotation kring en linje l genom origo. Bestäm en ekvation för l, och bestäm även rotationsvinkeln.

B.31 a) Diagonalisera matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestäm, för alla $n \geq 1$, talen (a_n, b_n, c_n) om

$$\begin{cases} a_k = 2a_{k-1} - 2b_{k-1} + 2c_{k-1} \\ b_k = a_{k-1} - b_{k-1} - c_{k-1}, \qquad k \geq 1, \\ c_k = 3a_{k-1} - 3b_{k-1} + c_{k-1} \end{cases}$$

och $(a_0, b_0, c_0) = (1,1,1)$.

B.32 Låt **F** och **G** vara två linjära avbildningar av typ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, där **F** svarar mot vridning $\pi/6$ radianer kring x-axeln, i positiv riktning sett från spetsen av x-axeln, och **G** svarar mot sned projektion på planet $x - y + z = 0$, i riktningen $(1,1,1)$.

a) Finns det någon linjär avbildning $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sådan att $\mathbf{H} \circ \mathbf{F} = \mathbf{G}$? Bestäm i så fall avbildningsmatrisen för **H**.

b) Finns det någon linjär avbildning $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sådan att $\mathbf{H} \circ \mathbf{G} = \mathbf{F}$? Bestäm i så fall avbildningsmatrisen för **H**.

Svar Kapitel B

B.1 a) $a = -2$ ger oändligt många lösningar, $a = 1$ ingen lösning och övriga värden på a entydig lösning

b) $a \neq 1$ (vektorn ligger i värdemängden precis då systemet i a) har minst en lösning)

B.2 a) 3/2 b) 8/3 c) $\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\sqrt{8}}{3}$

B.3 Ja, den första kolonnen i $\mathbf{A}^{-1}$ blir $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T$.

B.4 a) t.ex. $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) ortogonal projektion på linjen $(x,y,z) = t(2,-1,-1)$, $t \in \mathbb{R}$, följt av en förlängning faktorn 6

B.6 Man kan t.ex. välja $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$ och $\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$. Planet π har i den nya basen ekvation $\hat{x} = 0$.

B.7 a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Volymen blir större.

B.8 a) $x + y - 1 = 0$ b) $(x,y,z) = (0,1,-1) + t(1,-1,1)$ c) $\sqrt{6}$

B.9 $2 \Leftrightarrow 3$, $4 \Rightarrow 1$

B.10 exempelvis $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1,2)$ och $\hat{\mathbf{e}}_2 = (2,-3)$

B.11 $a = -2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -1$, $e = 4$ och $f = -2$

B.12 a) $(-8,-2)$ b) $(1,\ 1)$

B.13 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

B.14 a) $4x - 3y + z - 1 = 0$ b) $\frac{4}{\sqrt{26}}$

B.15 a) sant b) falskt c) sant d) falskt e) sant

B.16 Matrisen blir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Här gäller det att $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 2$, $\operatorname{nolldim}\mathbf{A} = 1$, och bas för nollrummet är vektorn $(0,1,0)$. Värdemängden till $\mathbf{F}$ blir planet $x = 0$, dvs. yz-planet.

B.17 a) $2x + 2y - z - 3 = 0$ b) $(0,-1,-5)$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{30}$

B.18 Man kan välja $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$ och $\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$. Vektorn får då (de gamla) koordinaterna $(11,2,1)$. (Har du valt motsatt tecken på $\hat{\mathbf{e}}_2$ och $\hat{\mathbf{e}}_3$ så får vektorn i stället koordinaterna $(1,10,5)$.)

B.19 a) $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 3$ b) $\det\mathbf{A} = 1$

c) Vinkeln $\theta = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, ger $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$. Övriga θ ger endast $\lambda = 1$.

d) Diagonaliserbar endast då $\theta = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

B.20 a) $a \neq -2$ b) $a = -1$ c) $a = 0$

B.21 vektorerna $(1,1,1)$ och $\frac{1}{3}(-1,-1,5)$

B.22 Linjen skär planet i punkten $(-1,1,1)$. Skärningsvinkeln är $\pi/4$.

B.23 Endast Q_2 ligger på T. (Punkten Q_1 ligger inte ens i samma plan som triangelskivan. Det gör däremot Q_3, men denna ligger utanför T.)

B.24 $x - 2y + z - 6 = 0$

B.25 b) $\mathbf{v} = (3,-2,1)$

B.26 $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{CA}$

B.28 $\mathbf{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

B.29 Möjliga värden är de två kombinationerna $(a,b,c) = (4,0,0)$ och $(a,b,c) = (2,0,-2)$.

B.30 En ekvation för l är $(x,y,z) = t(2,-2,1)$, $t \in \mathbb{R}$, och rotationsvinkeln är $\pi/2$ radianer (i positiv riktning sett från spetsen av vektorn $(2,-2,1)$).

B.31 a) Exempelvis

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) $(a_n, b_n, c_n) = \frac{1}{2}\left(4^n, (-2)^n, 4^n + (-2)^n\right)$

B.32 a) Det finns, med avbildningsmatris

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ -2 & 1+2\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Det finns ingen sådan avbildning.