# TRIGONOMETRISKA FUNKTIONER (forts.) (Kap 8.4 & 8.5)

Denna föreläsning behandlar

- trigonometriska ekvationer "$\cos(x) = \sin(4x)$"
- additionsteorem $\sin(x+y) = \dots ?$
- hjälpvinkelmetoden $\cos(x) + 2\sin(x) = \dots$
- arcusfunktioner $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$
- tangens och cotangens $\tan(x)$, $\cot(x)$

Senast diskuterade vi funktionsgrafen och egenskaper av

$\sin(x)$ och $\cos(x)$

De är viktiga för periodiska processer, vågfenomen, signalbehandling, svängning och mera. Testa Desmos-länken för att se hur de kan modifieras

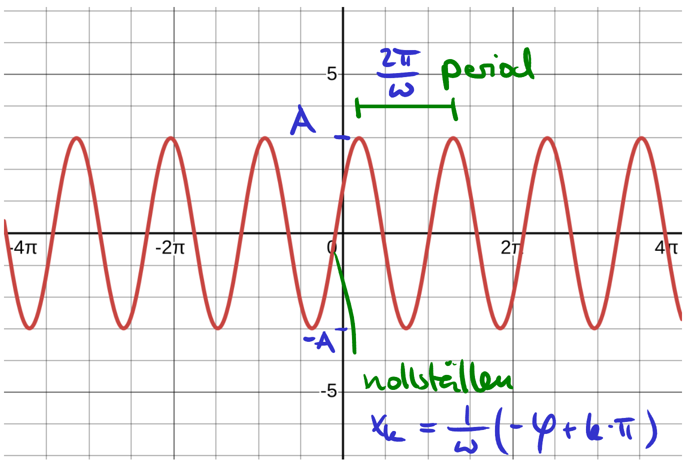
A: amplitud

$\varphi$: fasförskjutning

$$y(x) = A \cdot \sin(\omega x + \varphi) + C$$

$\omega$: vinkelfrekvens

$\Rightarrow$ $y(x)$ har period $\frac{2\pi}{\omega}$



# Trigonometriska ekvationer

Ska man lösa ekvationer som $\frac{1}{2} = \cos(4x)$ eller $\sin(x) = \cos(\frac{x}{2})$, kom ihåg att

1) $\cos(x) = \cos(-x)$ och $\sin(x) = \sin(\pi - x)$

⇒ detta ger två olika lösningar

2) $\sin(x), \cos(x)$ är periodiska med period $2\pi$

=> detta ger oändligt fler lösningar för varje lösning i 1)

3) $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

alternativ $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

## Exempel $\cos(4x) = \frac{1}{2}$

1) vi vet att $\cos(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{-\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

→ två lösningar $x = \frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}$

2) alla lösningar

$$\cos(4x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{eller } 4x = \frac{-\pi}{3} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{\pi(1 + 6\pi k)}{12}, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{eller } x = \frac{1}{4}\left(\frac{-\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{\pi(-1 + 6\pi k)}{12}, \; k \in \mathbb{Z}$$

! korrigering

## Exempel $\sin(2x) = \cos(\frac{x}{2})$

Först tar vi 3) och skriver

$$\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

periodicitet (2) andra lösning (1)

$$\Leftrightarrow 2x + 2\pi k = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \text{eller} \quad \pi - 2x + 2\pi k = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k \quad \text{eller} \quad \frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) \quad \text{eller} \quad x = \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi + 4\pi k}{3} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi + 4\pi k}{5}, \; k \in \mathbb{Z}$$

eftersom alla $k \in \mathbb{Z}$ förekommer, får vi byta tecken "-" -> "+"

# Additions- och subtraktionssatser för sinus och cosinus

Boken (Sats 8.6) ges en bevis av följande

**Sats**

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

- Studera gärna beviset där

satsen ges på tentan, men deriveringar ska ni kunna!

Från denna sats följes en rad viktiga formler, som vi kan bevisa med hjälp av satsen och de egenskapes av (co)-sinus vi kan utantill.

$$\text{(I)}\ \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\text{(II)}\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\text{(III)}\ \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$\text{(IV)}\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\text{(V)}\ \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\text{(VI)}\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

**Bevis** Vi antar att (I) redan är bevisad.

(II) följer från (I) efter byte $y \to (-y)$

$$\cos(x+y) = \cos(x-(-y)) \overset{(I)}{=} \cos(x)\cos(-y) + \sin(x)\sin(-y)$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

(IV) använd $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ och (II)

$$\sin(x+y) = \cos(x+y-\tfrac{\pi}{2}) \overset{(II)}{=} \cos(x)\cos(y-\tfrac{\pi}{2}) - \sin(x)\sin(y-\tfrac{\pi}{2})$$

$$= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2}-y)}_{=\cos(-y)\ =\cos(y)}$$

$$= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

(III) gör denna bevis hemma! bra tenta-träning :)

(V) välj $y=x$ i (II)

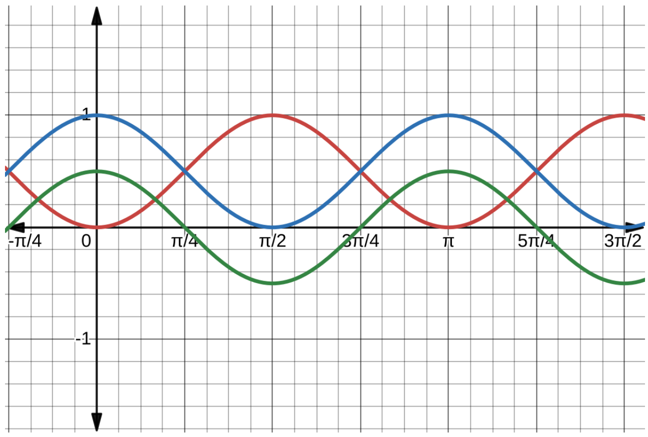
$$\Rightarrow \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$$
$$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

(VI) välj $y=x$ i ... gör själv hemma! $\square$

OBS Kombinerar vi Trigettan med (V) och (VI) ovan får vi

$$\rightarrow \cos^2(x) = \cos(2x) + \sin^2(x) = \cos(2x) + 1 - \cos^2(x)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\cos^2(x) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))}$$

$$\rightarrow \sin^2(x) = \cos^2(x) - \cos(2x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x) - \cos(2x)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\sin^2(x) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))}$$




$y = \cos^2(x)$
$y = \sin^2(x)$
$y = \cos(2x)$

## Hjälpvinkelsatsen

Kolla på Desmos-länken: sinus och cosinus av samma frekvens kan adderas up enligt

**Sats** (Hjälpvinkelmetoden) Låt $a, b, \omega \in \mathbb{R}$ då gäller

$$a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\omega x + \varphi)$$

där $\varphi$ uppfyller

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{och} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

**Bevis** $\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\omega x+\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin(\omega x)\cos\varphi + \cos(\omega x)\sin\varphi\right)$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin(\omega x)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos(\omega x)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x) \qquad \square$$

# Arcusfunktioner

När vi löser ekvationer som $\cos(x) = \frac{1}{2}$ går det bra när vi vet exakta värden av cos. Men $\sin(x) = \frac{1}{5}$ ... ?

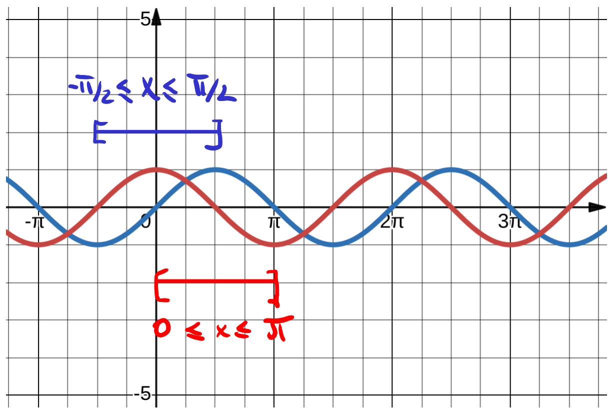
→ Vi behöver en inversfunktion till sinus och till cosinus.

Men $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är inte injektiva!

→ Vi väljer restriktioner

(samma funktionsföreskrift, men mindre definitionsmängd)

→ behöver olika restriktioner för sin och cos




Funktionen

alla $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

$$\sin_{[-\pi/2,\pi]} : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin(x)$$

är injektiv med värdemängd $[-1,1]$. Vi kallar dess inversfunktion

<u>arcussinus</u> $\arcsin = \sin^{-1}$

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$
$$x \longmapsto \arcsin(x)$$

→ OBS: $\sin^{-1}(x) \neq \frac{1}{\sin(x)}$ utan $\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$

→ $\alpha = \arcsin(\frac{1}{5})$ står för ett reellt tal i radianer så att

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{5}$$

" vinkeln inom $-\pi/2$ och $\pi/2$ som har sinus lika $\frac{1}{5}$ "

Några värden är enkla $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{2}}) = \frac{-\pi}{4}$

men inte alla, t.ex. $\arcsin(\frac{1}{5}) = 0.2013579\ldots$

Kom ihåg att arcsin har ett värde, men det finns många lösningar till en ekvation!

Exempel $\sin(x) = \frac{1}{5} \iff x = \arcsin(\frac{1}{5}) + 2\pi k$

eller $x = \pi - \arcsin(\frac{1}{5}) + 2\pi k$

medan $\arcsin(\frac{1}{5}) \approx 0.2013579\ldots$

På samma sätt är

$$\cos_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos(x)$$

injektiv med värdemängd $[-1,1]$ och vi definierar inversfunktionen

arcuscosinus

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$x \mapsto \arccos(x) = \cos^{-1}(x)$$

" $\arccos(x)$ ger vinkeln inom $0$ och $\pi$ vars cosinus är $x$ "

Några värden är enkla $\arccos(1) = 0$, $\arccos(0) = \pi/2$, $\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}, \ldots$

men inte alla!

Exempel $\arccos(\frac{1}{5}) \approx 1.3694\ldots$ ← finns ingen exakt form

men ekvationen har många lösningar.

$\cos(x) = \frac{1}{5} \iff x = \arccos(\frac{1}{5}) + 2\pi k$

eller $x = -\arccos(\frac{1}{5}) + 2\pi k$

# Tangens och Cotangens

Vi kan definiera tangens och cotangens som funktioner

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

men behöver vara lite försiktig med definitionsmängderna.

- tangens är inte definierad när $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + \pi \cdot k$

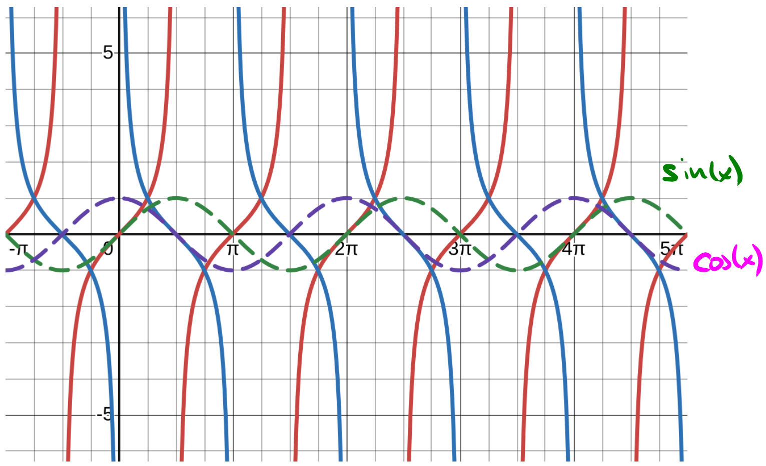
$$D_{tan} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \tfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \}$$

- cotangens är inte definierad när $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$

$$D_{cot} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \}$$

På detta sätt får vi funktionerna

tan(x) cot(x)




$$\tan : D_{tan} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot : D_{cot} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

<u>OBS</u> tangens och cotangens har period $\pi$ ! (inte $2\pi$)

För att få injektiva funktioner tar vi restriktionerna

$$\tan_{(-\pi/2, \pi/2)} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$$

$$\text{cotan}_{(0,\pi)} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$$

hela $\mathbb{R}$ är värdemängd !

och får arcustangens och arcuscotangens som deras inversfunktioner.

<u>Korrigering</u> $(0,\pi) = ]0,\pi[ = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi \}$

två sätt att skriva öppna intervall $0 < x < \pi$

## Arcustangens

$\arctan(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

$x \longmapsto \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$

$\operatorname{arccot}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$

$x \longmapsto \operatorname{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$

## Exempel

$$\arctan\left(\tfrac{1}{5}\right) \approx 0.197\ldots$$

men ekvationen

bara periodicitet $\pi$

$$\tan(x) = \tfrac{1}{5} \iff x = \arctan(x) + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

har många lösningar.

OBS För arctan och arccot får vi bara en lösning som sedan repeteras med period $\pi$. Vi behöver inte räkna ut en andra lösning som för sinus eller cosinus.