GRÄNSVÄRDEN : Oändlighet, satser och egenskaper

Innehåll & mål

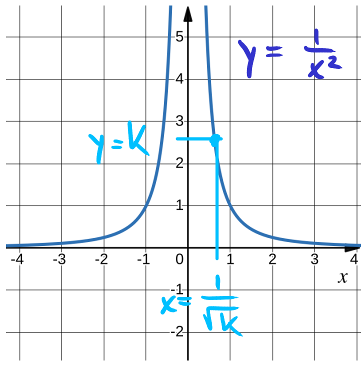
→ ensidiga gränsvärden

→ oegentliga gränsvärden $f(x) \xrightarrow{x\to a} \infty$

→ gränsvärden vid oändligheten $\lim_{x\to\infty} f(x)$

→ satser och standardfall : gör det enklare att hitta gränsvärden

Oegentliga gränsvärden



Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- är inte definierad i $x = 0$
- blir "hur stor som helst" när $x \to 0$

Definition Funktionen f har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x \to a$

och vi skriver

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{eller} \quad f(x) \xrightarrow{x\to a} \infty$$

om det för varje $K > 0$ finns ett $\delta_K > 0$ sådan att

$$0 < |a-x| < \delta_K \Rightarrow f(x) > K.$$

"alla $a-\delta_K \leq x \leq a+\delta_K$ har $f(x)$ större än K"

Motsvarande definierar vi att

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

om det för varje $K < 0$ finns ett $\delta_K > 0$ sådant att

$$0 < |x-a| < \delta_K \Rightarrow f(x) < K.$$

Exempel $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Bevis För godtydelig $K > 0$ välj $\delta_K < \frac{1}{\sqrt{K}}$. Då gäller

$$0 < |x| < \delta_K = \frac{1}{\sqrt{K}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{|x|^2} > \frac{1}{\delta_K^2} = K \quad \square$$

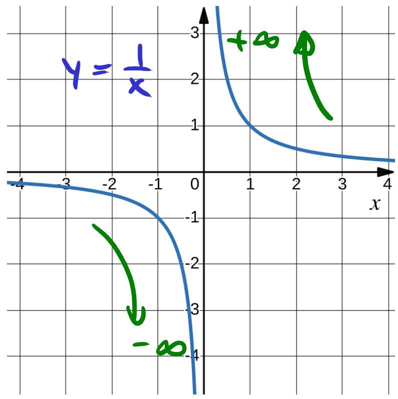
Men funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$

har inget gränsvärde när $x \to 0$.

→ Ena sidan går mot $+\infty$,

den andra mot $-\infty$ ...

Dessa är ensidiga gränsvärden



Ensidiga gränsvärden

Def Funktionen f har <u>vänstergränsvärdet</u> $A \in \mathbb{R}$ då $x \to a$ och vi skriver

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = A$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att

$$a - \delta_\varepsilon < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Funktionen har gränsvärdet

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \quad \text{eller} \quad f(x) \xrightarrow{x \to a^-} +\infty$$

om det för varje $K > 0$ finns ett $\delta_K > 0$ sådant att

$$a - \delta_K < x < a \Rightarrow f(x) > K.$$

→ Högergränsvärdet $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ likadant (boken s.186)

→ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ likadant

Exempel

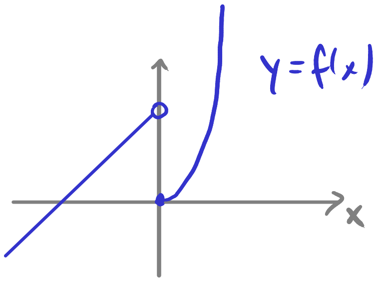
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

korrektur

→ välj $\delta_K < \frac{1}{|K|}$

Exempel

$$f(x) = \begin{cases} 2+x, & \text{om } x<0 \\ x^2, & \text{om } x\geq 0 \end{cases}$$



har $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ och $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

OBSERVERA

Gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar om och bara om $\lim_{x\to a^+} f(x)$ och $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existerar och är lika. Då gäller också

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

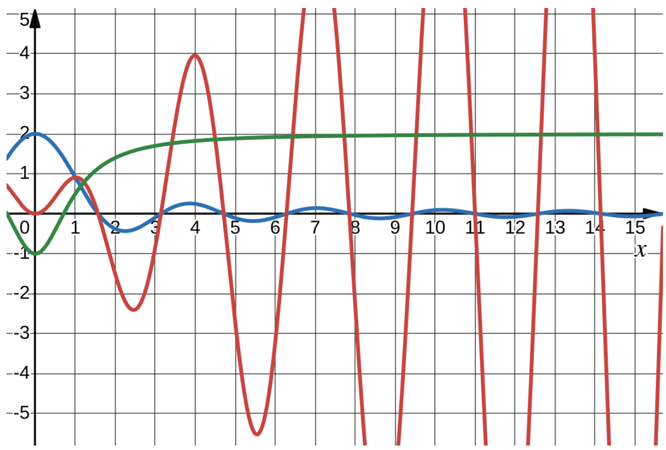
→ allt vi vet för ensidiga gränsvärden kan vi också använda för vanliga!

Det finns en viktig typ av gränsvärde kvar, som är ett slags ensidig gränsvärde ...

$\boxed{\text{Gränsvärden vid oändligheten}}$

Hur beter sig följande funktioner för stora (oändligt stora) argument?

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad g(x) = x\cdot\sin(x) \qquad h(x) = \frac{(2x^2-1)}{x^2+1}$$



Def Funktionen f har <u>gränsvärdet vid oändligheten</u> $A \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{eller} \quad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} A$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega_\varepsilon > 0$ sådant att

$$x > \omega_\varepsilon \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Funktionen har det oegentliga gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

om det för varje $K > 0$ finns ett $\omega_\varepsilon > 0$ sådant att

$$x > \omega_\varepsilon \implies f(x) > K.$$

→ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ definieras motsvarande "$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$"

<u>Exempel</u>

→ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

→ Bevis: välj $\omega_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$:

$$x > \omega_\varepsilon \implies \left|\frac{\sin(x)}{x} - 0\right| = \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

→ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \sin(x)\cdot x$ existerar inte!

Efter varje möjlig gräns ω följer det både nollställen

$$g(x) = 0 \iff x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

och godtyckligt stora värden

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \implies g(x) = 2\pi k$$

→ $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2-1)}{x^2+1} = 2$

Intuition: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{\underbrace{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

$\approx \frac{2x^2}{x^2}$ för stora x

→ vi behöver metoder ... !

Gränsvärden av begränsade och monotona funktioner

Ibland kan man bevisa att ett gränsvärde existerar i $x \to \infty$, även utan att räkna ut det...

Sats Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara
- växande och uppåt begränsade funktion,
- eller fallande och nedåt begränsade funktion,

teknisk detalj → (för alla $x > K$ för något $K > 0$)

då existerar ett ändligt gränsvärde $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

Exempel $h(x) = \dfrac{(2x^2-1)}{x^2+1} = 2 - \dfrac{3}{x^2+1}$ är (för alla $x > 0$)

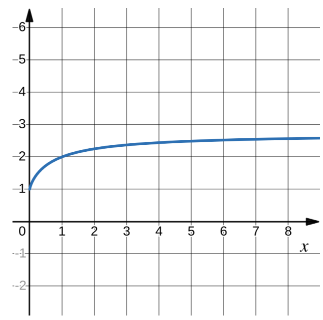
- begränsad $h(x) = 2 - \dfrac{3}{x^2+1} < 2$
- och växande $y > x \Rightarrow \dfrac{-1}{y^2+1} > \dfrac{-1}{x^2+1} \Leftrightarrow 2 - \dfrac{3}{y^2+1} > 2 - \dfrac{3}{x^2+1}$
  $\Leftrightarrow h(y) > h(x)$

Därför existerar $\lim_{x\to\infty} h(x) \in \mathbb{R}$.

Eulers Tal e

Funktionen $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ för $x > 0$ är

fråga efter bevis på verkstad!
- växande
- begränsad $f(x) < 3$



Def Eulers tal $e \in \mathbb{R}$ ("talet e") är definierad som

$$e := \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

<u>Observera</u> - att också $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

- att e är irrationellt $e \approx 2.71828\ldots$

Standardgränsvärden

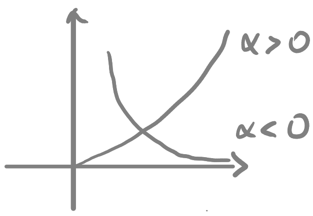
Vår strategi är nu att samla viktiga standardresultat som senare kan kombinera till andra gränsvärden.

<u>Gränsvärden av elementära funktioner</u>

t.ex. x^3

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} = \begin{cases} \infty, & \text{då } \alpha > 0 \\ 0, & \text{då } \alpha < 0 \end{cases}$$

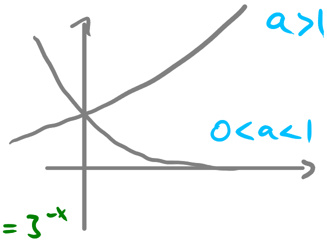
t.ex. $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$



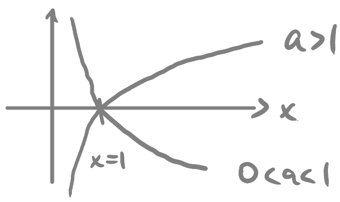
$(1.5)^x$

$$\lim_{x \to \infty} a^{x} = \begin{cases} \infty, & \text{då } a > 1 \\ 0, & \text{då } 0 < a < 1 \end{cases}$$

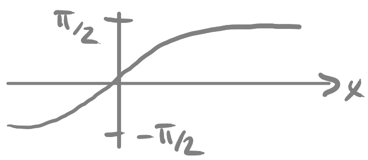
$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x}$



$$\lim_{x \to \infty} {}^{a}\log x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$



"Jämförelsesatsen"

Även om flera funktioner växer oändligt, växer de inte lika snabbt.

Vi kan se att (med $a>1$, $\alpha>0$, $b>1$) gäller

"${}^{a}\log(x)$ långsammare än x^{α} långsammare än b^{x}".

Detta leder till följande gränsvärden (bevis: boken Sats 9.3)

För $a>1, \beta>0, c>1$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = \infty \quad \left(\text{och} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0 \right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{{}^{c}\log x} = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{{}^{c}\log x}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{{}^{c}\log x} = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{{}^{c}\log x}{a^x} = 0$$

Sammansatta gränsvärden och variabelbyte

(boken Sats 9.7 och 9.2 är mera generella!)

Sats Antag att f och g är kontinuerliga funktioner sådana att

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \quad \text{och} \quad \lim_{y\to A} f(y) = B$$

där a, A, B är reella tal eller $\pm\infty$, då är

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = B.$$

Bevis se boken Sats 9.2 och 9.7.

Den vanligaste användningen av satsen är ett variabelbyte. Här skriver vi en variabel som en funktion av en annan.

Exempel

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x^2) = \begin{bmatrix} x=\sqrt{y} & \Rightarrow y = x^2 \\ x\to\infty & \Rightarrow y\to\infty \end{bmatrix} = \lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

<u>Exempel</u>

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

med $g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad \lim_{x \to 0} g(x) = \infty$

$f(x) = e^{-x}$ $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

alternativ skriven som ett variabelbyte

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{-1}{x^2}} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x^2} \\ x \to 0 \Rightarrow t \to \infty \end{array} \right] = \lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0$$