Exempel, extrempunkter, högre derivator (Kap 10.4, 5, 6, 8)

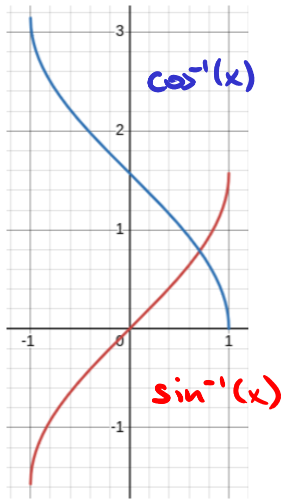
Innehåll: - Exempel och strategi för komplicerade derivator

- Implicit derivering
- Stationära punkter
- Monotonitet
- Högre derivator
- Konvexitet

Derivering - Strategi & exempel

Derivata av inversfunktion (Bevis av $D(\arcsin)$)

→ $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ är inversfunktion av $\sin$ begränsad till $[-\pi/2, \pi/2]$.



→ Satsen säger

$$D(f^{-1})(f(a)) = \frac{1}{D(f)(a)}$$

Samma sak som

$$D(f^{-1})(x) = \frac{1}{D(f)(f^{-1}(x))}$$

om vi sätter $f(a) = x \iff a = f^{-1}(x)$

$$\Rightarrow D(\arcsin(x)) = \frac{1}{D(\sin)(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

→ Vad är $\cos(\arcsin(x))$?

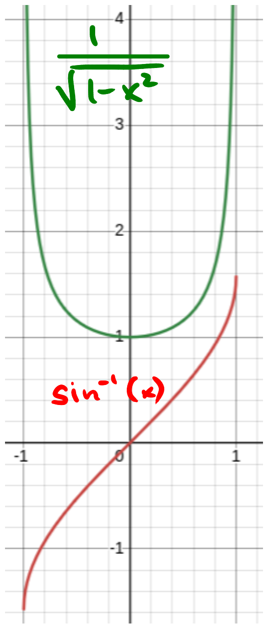
- icke-negativ för att

$-\pi/2 \leq \arcsin(x) \leq \pi/2 \Rightarrow \cos(\arcsin(x)) \geq 0$

- trigettan

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$



$$\Rightarrow D(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

OBS $\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x)$

$$\Rightarrow D(\arccos(x)) = -D(\arcsin(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exempel på derivering

Här kör vi 2-3 exempel som vi föreslår i föreläsningen

Strategi för derivata är att arbeta lager för lager

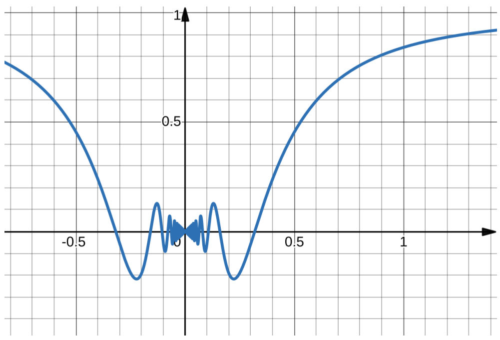
→ jobba utifrån och in

→ använd regler (kedje, summa, produkt, kvot)

för att nå kombination av elementära funktioner

Exempel

$$f(x) = \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot x$$



$$Df(x) = D\left(\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \overset{\text{produkt}}{\cdot} x\right)$$

$$= D\Big(\underbrace{\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\text{kedje}}\Big) \cdot x + \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot D(x)$$

$$= D(\sin)\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot D\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot x + \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$= \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot x + \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x} + \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

OBS $f(x)$ är inte deriverbar i punkten $x = 0$ fast den kan fortsättas kontinuerlig där!

$$-|x| \leq \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot x \leq \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot |x| \quad \text{för alla } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Fler exempel i föreläsningen ...

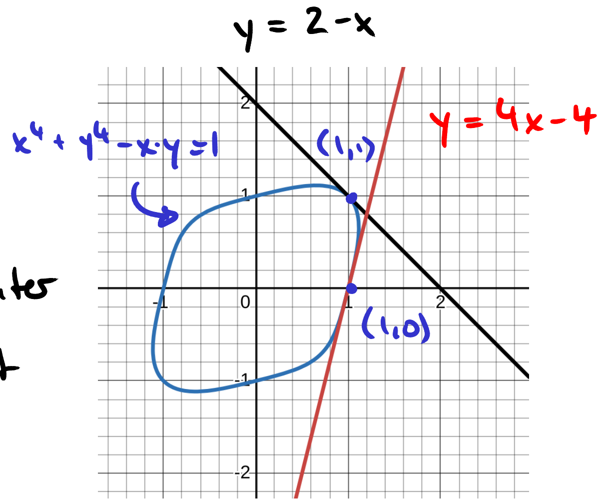
Implicit derivering

__Idé:__ När det är svårt att bryta ut en funktion för att derivera den → försök att derivera båda led i ekvationen

__Exempel__

Lösningsmängden av

$$x^4 + y^4 - x\cdot y = 1$$



ges en kurva. För att bestämma tangenter behöver vi $y'(x)$. Men det är svårt att bryta ut $y(x)$ ...

→ använd implicit derivering

$$\underbrace{x^4 + y^4 - x\cdot y}_{\text{tänk } f(x) = x + y(x) + x\cdot y(x)} = 1 \quad \Rightarrow D(x^4 + y^4 - x\cdot y) = 0$$

$$Df(x) = 0$$

derivatan av vänstersidan

$$D(x^4 + y(x)^4 - x\cdot y(x)) = 4x^3 + 4\cdot y(x)^3 y'(x) - y(x) - x\cdot y'(x)$$
$$= (4x^3 - y(x)) + y'(x)\,(4y^3(x) - x)$$

därför

$$D(x^4 + y^4 - x\cdot y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x)\,(4y^3(x) - x) = (y(x) - 4x^3)$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{y(x) - 4x^3}{4y^3(x) - x} \quad \text{om } 4y^3 \neq x.$$

om vi nu vet punkter på kurvan (exakt eller numeriskt) kan vi beräkna tangenten i punkten, t.ex.

$(x=1,\ y=0) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-4}{-1} = 4$ har tangent $y = (x-1)\cdot 4$
$= 4x - 4$

$(x=1,\ y=1) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-3}{3} = -1$ har tangent $y = 1 + (x-1)\cdot(-1)$
$= 2 - x$

Stationära punkter (Kap 10.5)

Vad lär vi oss om funktions(grafen) av derivatan?

I de följande diskuterar vi sammanhanget med
- → extrempunkter → monotona funktioner
- → konvexa och konkava funktioner

En punkt a kallas en stationär punkt av f om $f'(a)=0$.

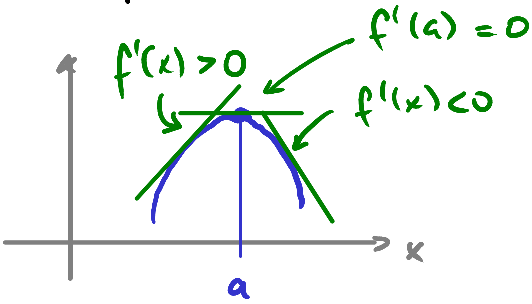
Hur kan f se ut i området av a?

Lokalt maximum

om $f'(x)$ byter från positiv till negativ i punkten $x=a$

värdetabell i ett område av a

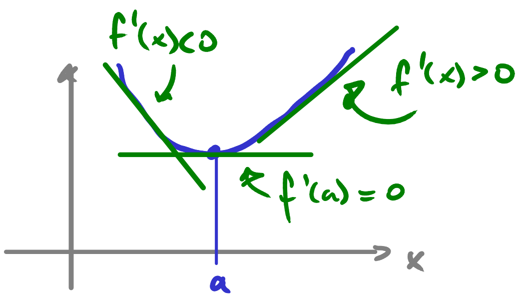
	$x<a$	a	$x>a$
$f'(x)$	>0	0	<0
	uppför		nedför



Lokalt minimum

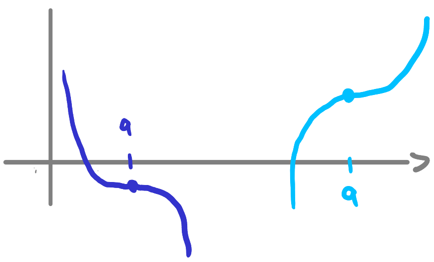
om $f'(x)$ byter från negativ till positiv i punkten $x=a$

	$x<a$	a	$x>a$
$f'(x)$	<0	0	>0



Terrasspunkt Om $f'(x)$ har samma tecken före och efter $x=a$

	$x<a$	a	$x>a$
$f'(x)$	<0	0	<0



	$x<a$	a	$x>a$
$f'(x)$	>0	0	>0

Def (Extrempunkter)

Låt f vara en reell funktion. En punkt $a \in D_f$ kallas

a) en lokal maximipunkt om det finns en omgivning $I = (a-\delta, a+\delta)$ sådan att

$$\underbrace{x \in I \text{ och } x \in D_f}_{\text{"för alla } x \text{ nära } a\text{"}} \Rightarrow f(a) \geq f(x)$$

"är $f(x)$ mindre"

b) en lokal minimipunkt om det finns en omgivning $I = (a-\delta, a+\delta)$ sådan att

$$x \in I \text{ och } x \in D_f \Rightarrow f(a) \leq f(x)$$

Sats Antag att a är en lokal extrempunkt av f. Om f är deriverbar i a, då är $f'(a) = 0$.

Bevis (för minimipunkt) ← maximi på samma sätt (se boken)

Vi vill visa att $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$.

Gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existerar, eftersom f är deriverbar.

Vi har att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Eftersom a är minimi, är $f(x)-f(a) \geq 0$ in en omgivning av a

$$\Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \begin{cases} \geq 0 & \text{om } h > 0 \\ \leq 0 & \text{om } h < 0 \end{cases}, \text{ för } a+h \text{ nära } a$$

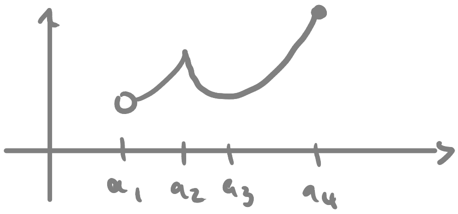
det betyder att

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(c)}{h}\geq 0 \quad \text{men} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(c)}{h}\leq 0$$

så att (eftersom båda måste vara lika så är de noll)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(c)}{h}=0 \qquad \square$$

<u>OBS</u> Vi hittar bara de extrema där $f'(x)$ existerar!



a_2, a_3, a_4 är extrempunkter

men bara i a_3 har vi $f'(a_3)=0$.

<u>Exempel</u> $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$

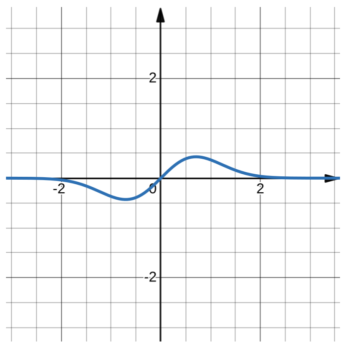
$$D(x\cdot e^{-x^2})=D(x)\cdot e^{-x^2}+x\cdot D(e^{-x^2})=e^{-x^2}+x\,D(e^{x})(-x^2)\cdot D(-x^2)$$

$$=e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=e^{-x^2}\cdot(1-2x^2)$$

$$=e^{-x^2}\,2\left(\tfrac{1}{2}-x^2\right)$$

$$=\underbrace{e^{-x^2}\,2}_{\text{alltid }>0}\underbrace{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}-x\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+x\right)}_{\text{nollställen}}$$

$: x=\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$



<u>värdetabell</u>

		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$(\frac{1}{\sqrt{2}}-x)$	+	+	+	0	-
$(\frac{1}{\sqrt{2}}+x)$	-	0	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$\Rightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ lokalt minimum

$\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ lokalt maximum