

DERIVATA (Kap 10)

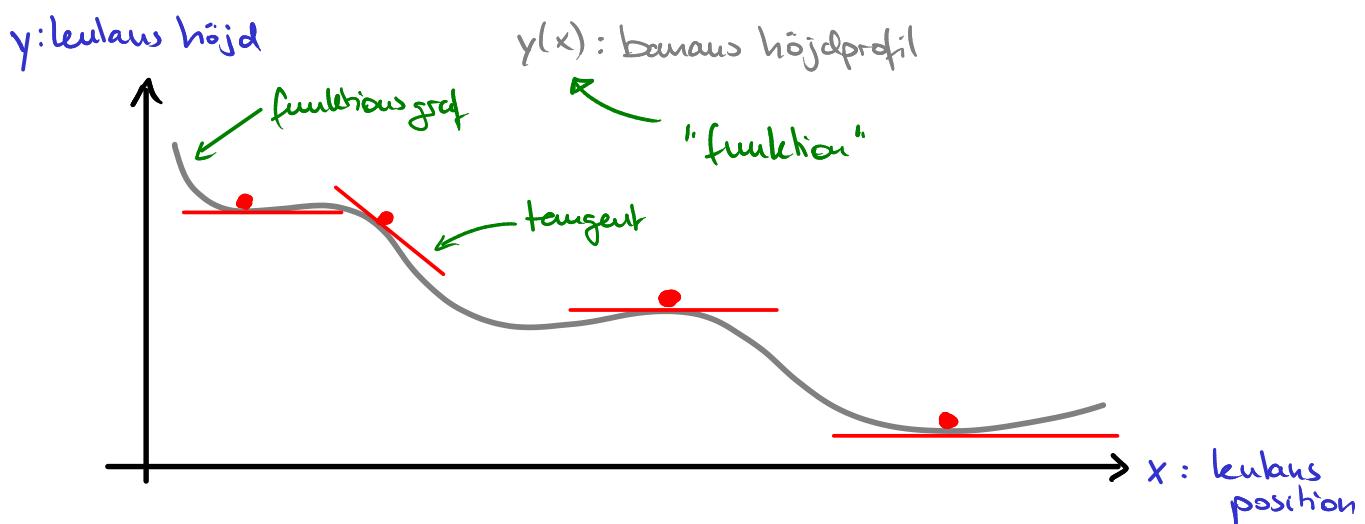
- I dag:
- Definition & Intuition (Kap 10.1)
 - första standardderivator

Vi börjar med två exempel om derivatans betydelse och funktion.

Exempel : En lekbanan

Tänk på en lekbanan med följande höjdprofil:

- * På vilka ställen kan buntan placeras så att den ligga stilla?
- * Varför - vad exakt besör det på?



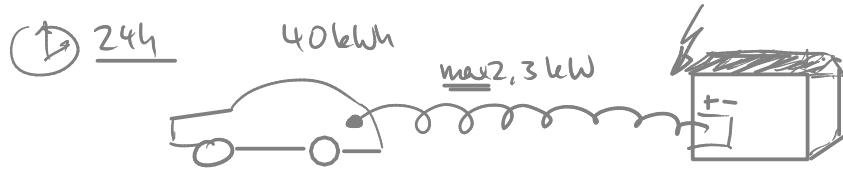
Lutningen av en funktionsgraf motsvarar funktionens derivata!

- positiv derivata: "uppförbäck" lutning så att buntan rullar tillbaks
↳ "större x ger större $y(x)$ "
- negativ derivata: "nedförbäck", buntan rullar framåt
↳ "större x ger mindre $y(x)$ "
- derivata noll: ingen lutning, buntan kan ligga still

Observera: Vid funktionens maxima och minima,
är derivatan (grafenas lutning) noll !

super viktigt i all optimering, fysik, ingjenvärsteamt!!!

Exempel Elbilsladdning



V: vill ladda en elbilsbatteri:

→ behöver ladda med 40 kWh

→ har tid i ett dygn 24 h

→ men kabeln tål maximalt $2,3 \text{ kW}$

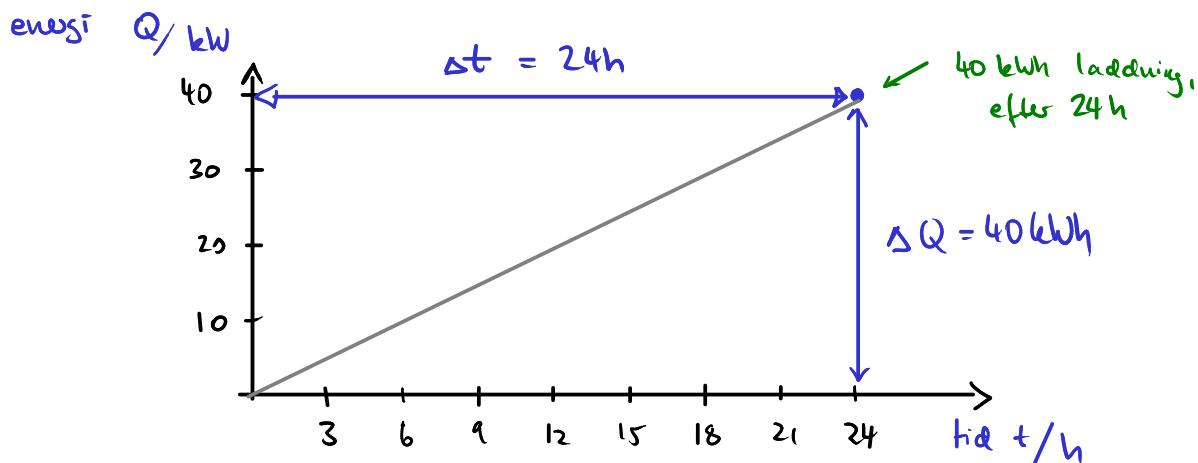
kilowattimmar (energi)

watt (effekt = $\frac{\text{energi}}{\text{tid}}$)

- * Hur kan vi fördela laddningen över dygnet, utan att överlasta kabeln ...?

spara pengar på
tiumpri av elen...

Ettelaste alternativ: Laddning med konstant effekt



Hur stor är effekten?

Effekten är energi per tid. Här har vi

$$\text{"effekt} = \frac{\text{energi}}{\text{tid}}$$

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{40 \text{ kWh}}{24 \text{ h}} = 1,4 \text{ kW} < 2,3 \text{ kW}$$

Kabeln hålls.

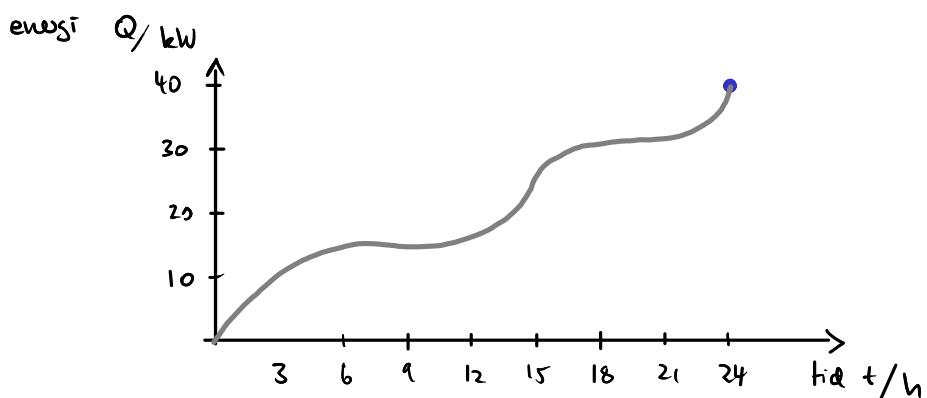
Observera

→ Laddningskurvan $Q(t)$ med konstant effekt har en rät linje som funktionsgraf

→ Laddningskurvans lutning är lika med
* effekten, som är lika med
* derivatan av funktionen $Q(t)$

En rät linje har konstant lutning (derivata) \Rightarrow motiverar konstant effekt.

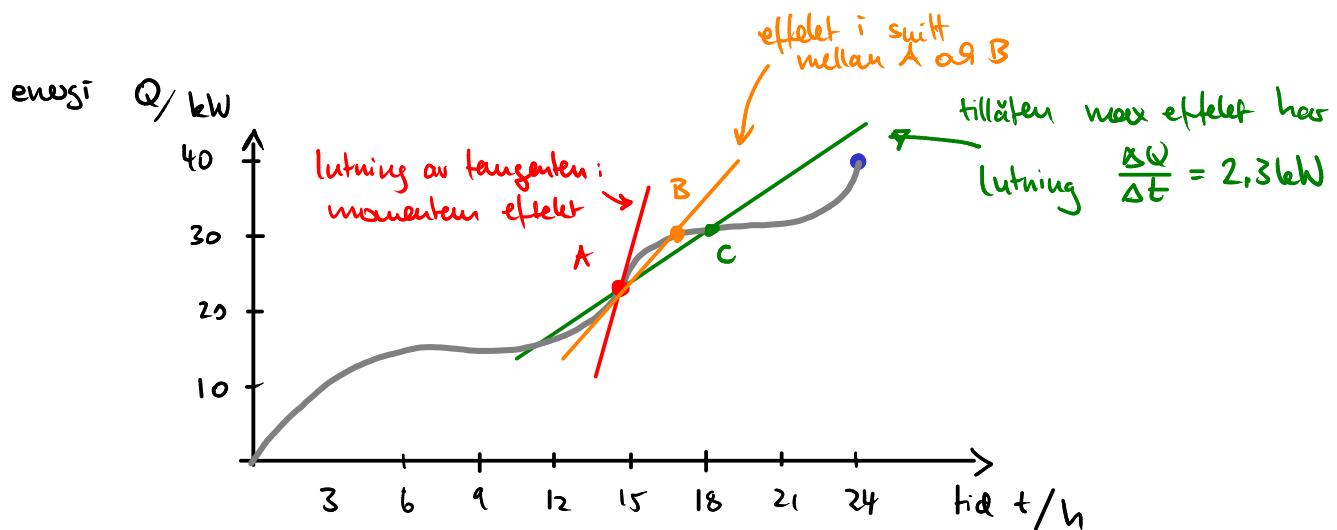
Men för att spara pengar föreslår appen följande laddningsschema



Kan ledetna klarat detta...?

För att kontrollera om effekten överstiger de tillåtna 2,3 kW

kan vi kontrollera om grafen har en lutning som är större än så.



Den gröna linjen motsvarar en effekt på 2,3 kwh, men grafen har en större lutning i flera punkter...

↳ Effekten överstiger 2,3 kwh. Kabeln går sönder!

Observera För att konstruera tangenten i en punkt kan vi:

- rita en linje genom två punkter på grafen
- ju närmare vi väljer punkten ju närmare blir linjen till tangenten

Vi får tangenten exakt när avståndet blir oändligt litet.

Derivater

Def Antag att f är definierad i en omgivning av $a \in \mathbb{R}$.

Vi säger att f är deriverbar i a om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar och är ändligt. Gränsvärdet kallas då för derivatam av f i punkten a och vi skriver

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eller

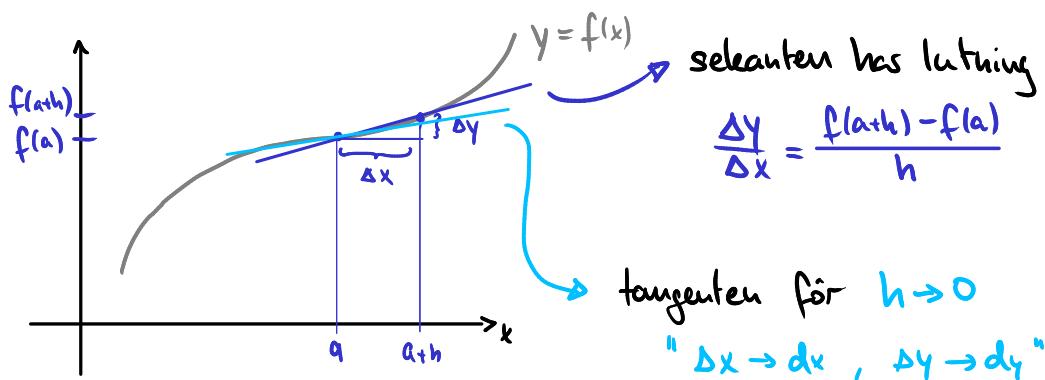
$$(Df)(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

summa s.k.,
ibland är den
enna betydningen
snälligare

Exempel → Derivata av $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2. \\ \Rightarrow f'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

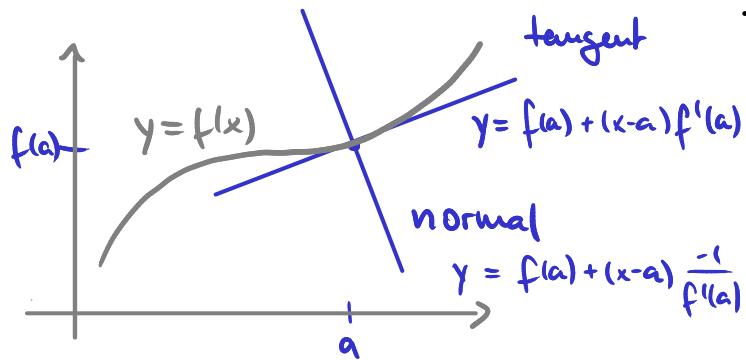
Grafisk interpretation: Lutning av tangenten



Man kan tänka på dx, dy som oändligt små versioner av $\Delta x, \Delta y$
→ detta motiverar beteckningen

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

Tangent och normal



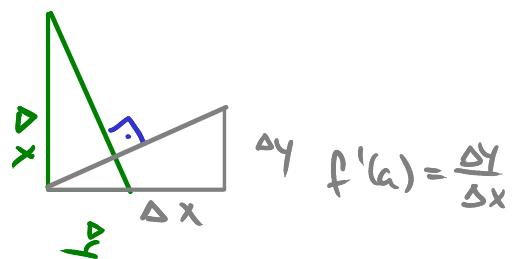
Tangenten

- rät linje
- genom punkt $(a, f(a))$
- med lutning $f'(a)$
- har elevation

$$y = f(a) + (x-a) f'(a)$$

Normalen

- rät linje genom punkt $(a, f(a))$
- vinkelrät mot tangenten
- lutning $\frac{-\Delta x}{\Delta y} = \frac{-1}{f'(a)}$



- elevation $y = f(a) + \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x-a)$

Exempel & Övning: Testa egna idéer och plotta med Desmos...!

Vanliga beteckningar för derivatam

Förutom $f'(x)$ kan ni också se

$$Df, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f, \underbrace{y'}, \underbrace{\frac{dy}{dx}}$$

för funktionskurva $y(x)$

Differentierbar vs. kontinuerlig

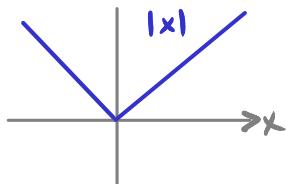
Vilken funktioner kan vi derivera? Dessa som är differentierbara...

→ det finns ingen allmän regel

TVÅ EXEMPLER SOM INTE ÄR DIFFERENTIERBARA

komma senare
och $x \sin(\frac{1}{x})$

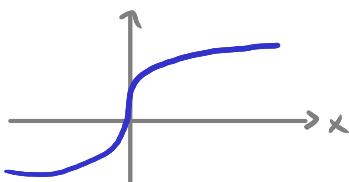
Absolutvärdet $f(x) = |x|$ i punkten 0



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases} \quad \text{existerar inte!}$$

Tredje roten $g(x) = x^{1/3}$ i punkten 0



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h+0) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

g är inte differentierbar för att gränsvärdelet är oändligt.

Men tvärtom gäller: "differentierbar \Rightarrow kontinuerlig"

Sats Om en funktion är derivabel i en punkt är den också kontinuerlig i punkten.

Bewis Låt f vara derivabel i punkten $a \in \mathbb{R}$. Då ska vi visa att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{så att } f \text{ är kontinuerlig.}$$

Detta är ekivalent med

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$$

vilket följer eftersom

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) && \text{variabelbyte } x = a+h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h && \text{eft. av } (Df)(a) \\ &= (Df)(a) \cdot 0 = 0. && \square \\ &&& \text{produkten av gränsvärden} \end{aligned}$$

Tre första standardderivator

- 1) $D(e^x) = e^x$
- 2) $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$ (konstant)
- 3) $D(\sin x) = \cos x$
- 4) $D(\cos x) = -\sin x$

Bewis 1) $D(e^x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1 \text{ standardgränsvärde}} = e^x$

2) Bevis för fallet $\alpha \in \mathbb{N}$ (positiv heltal)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k h^{\alpha-k} - x^\alpha \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(h^\alpha + \binom{\alpha}{1} h^{\alpha-1} x + \dots + \binom{\alpha}{\alpha-2} x^{\alpha-2} h^2 + \underbrace{\binom{\alpha}{\alpha-1} x^{\alpha-1} h}_{\alpha} \right) \\ h^k \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{1} h^{\alpha-2} x + \dots + \binom{\alpha}{\alpha-2} x^{\alpha-2} h + \underbrace{\binom{\alpha}{\alpha-1} x^{\alpha-1}}_{\alpha} \\ &= 0 + \dots + \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

$$3) D(\sin(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

sidoräkning

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{-\sin^2(h)}{h(1 + \cos(h))} = \frac{-\sin(h)}{h} \cdot \frac{\sin(h)}{1 + \cos(h)}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \left(\frac{-\sin(h)}{1 + \cos(h)} + \cos(x) \right) \\ &= 1 \cdot (0 + \cos(x)) = \cos(x) \end{aligned}$$

gör det som
övning!

För beviset av 4) kan man använda samma strategi som för 3).

Men som en sneak preview, låt oss ta serien

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

och se vad som händer om man deriveras term för term...

Tänk om

$$D(\cos(x)) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \dots$$

eftersom

$$D(x^{2k}) = 2k \cdot x^{2k-1} \quad \text{se 2) ovanför}$$

då är

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} D(x^{2k}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2k \cdot x^{2k-1} \\ &= 0 + \frac{-1}{2!} x^1 + \frac{1}{4!} x^3 + \frac{-1}{6!} x^5 + \dots \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} = -\sin(x) \quad ! \end{aligned}$$

Är derivatans av en summa verkligen summan av derivatorna?

→ ja för äntliga summer (se nästa föreläsning)

→ för vissa seriers också (som för \exp, \sin, \cos)