POLYNOM & POLYNOMDIVISION, RATIONELLA UTTRYCK (Kap 2.3)

"En <u>reell polynomfunktion</u> tillordnar argumentet en summa av dess icke-negativa heltalspotenser viktade med reella koefficienter."

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad , \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} .$$

Vi kommer att säga <u>polynom</u> synonymt med <u>reell polynomfunktion</u>.

<u>Exempel</u>

- $p_1(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 1$

  $a_3 = 4, \ a_2 = -1, \ a_1 = 3, \ a_0 = -1$

- $p_2(x) = 8$

  $a_1 = 8, \ a_0 = 0$

- <u>Nollpolynomet</u> $p(x) = 0$ är ett polynom

  $a_0 = 0$

- $p_3(x) = (x+2)^2 - (4-x)(x+1)$

Varför räknas p_3 som polynom?

korrigering

$$p_3(x) = (x+2)^2 - (4-x)(x+1) = x^2 + 4x + \cancel{4} - 4x - \cancel{4} + x^2 + x$$

$$= 2x^2 + x$$

$a_2 = 2, \ a_1 = +1, \ a_0 = 0$

> <u>Def</u> Låt p vara ett polynom. Polynomens <u>grad</u> $\deg p$ är den högsta förekommande exponenten (vars koefficient inte är noll).

<u>Exempel</u> - $\deg p_1 = 3, \ \deg p_2 = 0, \ \deg p_3 = 2$

<u>OBS</u> Nollpolynomets grad är odefinierad!

Multiplikation av polynomer

Multiplicerar vi två polynom får vi igen ett polynom.

Exempel $p_1(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 1$, $q(x) = 2x^2 - x$

$\deg p_1 = 3$ $\qquad \deg q = 2$

$$\Rightarrow p_1(x)\, q(x) = (4x^3 - x^2 + 3x - 1)(2x^2 - x)$$
$$= 8x^5 - 4x^4 - 2x^4 + x^3 + 6x^3 - 3x^2 - 2x^2 + x$$
$$= 8x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 5x^2 + x$$

$\deg(p_1 \cdot p_2) = \deg p_1 + \deg p_2 = 5$

Sats Låt p och q vara polynomer. Då gäller

$$\deg(p \cdot q) = \deg p + \deg q$$

Bevis Vi skriver

$$p(x) = a_m x^m + \dots + a_0 \quad \text{och} \quad q(x) = b_n x^n + \dots + b_0,$$

med $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$. Då har produkten

$$p(x)\, q(x) = (a_m \cdot b_n)\, x^{m+n} + \dots + a_0 \cdot b_0$$

grad $m+n = \deg p + \deg q$. $\square$

Går det att vända om multiplikationen...?

POLYNOMDIVISION

Sats Antag att f och g är polynom, att $\deg f \geq \deg g$ och att $\deg g(x) \geq 1$.

Då finns det polynom q och r sådana att

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

och $\deg r(x) < \deg g(x)$ eller $r(x) = 0$.

OBS Vi kan skriva om satsen till

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Man beräknar q och r genom polynomdivision.

Hur och varför fungerar polynomdivision?

Exempel

Vad är $\dfrac{2x^3+3x^2+x}{x-2} = \ldots ?$

→ kolla högsta termerna $\dfrac{2x^3}{x} = \underline{2x^2}$ första term i $q(x)$

$$(2x^3+3x^2+x) - 2x^2(x-2)$$
$$= 2x^3+3x^2+x - 2x^3+4x^2 = 7x^2+x \quad (\mathrm{I})$$

→ repetera samma steg för $7x^2+x$

$$(7x^2+x) - 7x(x-2)$$
$$= 7x^2+x - 7x^2+14x = 15x \quad (\mathrm{II})$$

→ repetera för $15x$

$$15x - 15(x-2) = 30 \quad (\mathrm{III})$$

⇒ Nu vet vi att

$$30 = 15x - 15(x-2) \quad (\mathrm{III})$$
$$= (7x^2+x) - 7x(x-2) - 15(x-2) \quad (\mathrm{II})$$
$$= (2x^3+3x^2+x) - 2x^2(x-2) - 7x(x-2) - 15(x-2) \quad (\mathrm{I})$$
$$= 2x^3+3x^2+x - (2x^2+7x+15)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2x^3+3x^2+x}_{f(x)} = \underbrace{(2x^2+7x+15)}_{q(x)}\underbrace{(x-2)}_{g(x)} + \underbrace{30}_{r(x)=30}$$

Det finns ett smidigare sätt att skriva upp detta ...

"Liggande stolen"

kvoten $q(x)$

täljaren $f(x)$

nämnaren $g(x)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 2x^2 & +7x & +15 & \\
\hline
2x^3 & +3x^2 & +x & & x-2 \\
-(2x^3 & -4x^2) & & & \\
\hline
 & 7x^2 & +x & & \\
 & -(7x^2 & -14x) & & \\
\hline
 & & 15x & & \\
 & & -(15x & -30) & \\
\hline
 & & & +30 &
\end{array}
$$

resten $r(x)$

Ett långt och pedantiskt exempel

$$\frac{3x^8-4x^6+2}{x^5+x^3+2x^2} = \ldots ?$$

$f(x) = 3x^8-4x^6+2$

$g(x) = x^5+x^3+2x^2$

① Robert rekommenderar: skriv ner täljaren med alla noll-koefficienter!

en spalt per potens

	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	$g(x)$
$f(x) \rightarrow$	$3x^8$	$+0\cdot x^7$	$-4x^6$	$+0x^5$	$+0x^4$	$+0x^3$	$+0x^2$	$+0x$	$+2$	$x^5+x^3+2x^2$

② Första koefficient i kvoten: $3x^3 = \frac{3x^8}{x^5}$.

$3x^3$									
$3x^8$	$+0\cdot x^7$	$-4x^6$	$+0x^5$	$+0x^4$	$+0x^3$	$+0x^2$	$+0x$	$+2$	$x^5+x^3+2x^2$
$-(3x^8$		$+3x^6$	$+6x^5)$						
		$-7x^6$	$-6x^5$	$+0x^4$	$+0x^3$	$+0x^2$	$+0x$	$+2$	$\leftarrow f(x)-3x^2g(x)$

$-3x^2\cdot g(x)$

→ Räknar ut $3x^3(\underbrace{x^5+x^3+2x^2}_{g(x)}) = \underbrace{3x^8+3x^6+6x^5}_{3x^2\cdot g(x)}$ och subtraheras där.

③ andra koefficient i kvoten: $\dfrac{-7x^6}{x^5} = -7x$

räknar ut $-7x(\underbrace{x^5+x^3+2x^2}_{g(x)}) = -7x^6-7x^4-14x^3$ och subtraherar

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 \quad -7x & \\
\hline
3x^8 + 0\cdot x^7 - 4x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 2 & \overbrace{x^5 + x^3 + 2x^2}^{g(x)} \\
\hline
-(3x^8 \quad + 3x^6 + 6x^5) & \\
\hline
\quad -7x^6 - 6x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 2 & \\
\underbrace{-(-7x^6}_{(-7x)\,g(x)} \quad - 7x^4 - 14x^3 & \\
\hline
\quad -6x^5 + 7x^4 + 14x^3 \quad + 2 \leftarrow f(x) - (3x^2 - 7x)\,g(x) &
\end{array}
$$

④ tredje koefficient $\dfrac{-6x^5}{x^5} = -6$ och $-6(x^5+x^3+2x^2) = -6x^5 - 6x^3 - 12x^2$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 \quad -7x \quad -6 & \\
\hline
3x^8 + 0\cdot x^7 - 4x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 2 & \overbrace{x^5 + x^3 + 2x^2}^{g(x)} \\
\hline
-(3x^8 \quad + 3x^6 + 6x^5) & \\
\hline
\quad -7x^6 - 6x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 2 & \\
-(-7x^6 \quad - 7x^4 - 14x^3 & \\
\hline
\quad -6x^5 + 7x^4 + 14x^3 \quad + 2 & \\
-(-6x^5 \quad - 6x^3 - 12x^2) & \\
\hline
\quad 7x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 0\cdot x + 2 &
\end{array}
$$

→ rest, vi är klara!

⑤ sista raden har lägre grad (deg $7x^4 = 4$) än deg $g(x) = 5$

$\Rightarrow$ resten är $r(x) = 7x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 2$

Svar

täljare, nämnare, rest

$$\underbrace{3x^8 - 4x^6 + 2}_{f(x)} = \underbrace{(3x^3 - 7x - 6)}_{q(x)}\underbrace{(x^5 + x^3 + 2x^2)}_{g(x)} + \underbrace{(7x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 2)}_{r(x)}$$

kvoten vi har räknat ut

Låt oss betrakta resttermen i polynomdivisionen närmare ...

Sats (Faktorsats) Låt p vara ett polynom och $t \in \mathbb{R}$, då

$$p(t) = 0 \iff p(x) = (x-t)\,g(x) \text{ för något polynom } g,$$

det vill säga att t är ett nollställe av p om och endast om $(x-t)$ är en <u>Linearfaktor</u> av $p(x)$.

Bevis (av satsen)

"$\Rightarrow$" Om vi vet att $p(x) = (x-t)\,g(x)$ så gäller

$$p(t) = (t-t)\cdot g(t) = 0 \cdot g(t) = 0$$

"$\Leftarrow$" Om vi vet att $p(t) = 0$, då vet vi från polynomdivision att

$$p(x) = (x-t)\,q(x) + r(x)$$

där $\deg r(x) < \deg(x-t) = 1$ eller $r(x) = 0$ ← Nollpolynomen

Om $r(x) \neq 0$, då är $\deg r(x) = 0$ alltså är $r(x) = C$ för någon konstant $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$.

Men då skulle

$$p(t) = (t-t)q(t) + r(t) = 0 + C = C \neq 0 \;\lightning$$

vilket är utesluten. Alltså kan vi bara ha $r(x) = 0$. $\square$

Satsen är viktig och praktisk för att förenkla polynom

$\rightarrow$ varje nollställe ges en linearfaktor

Exempel $(x^4 - 1)$ har nollställen $x = 1, -1$

$\Rightarrow$ kan skrivas som $x^4 + 1 = (x+1)(x-1)\,g(x)$ ← $\deg g = 2$

Med hjälp av två polynomdivisioner kan vi räkna ut att

$\rightarrow$ $x^4 + 1 = (x^3 - x^2 + x - 1)(x+1)$

$\rightarrow$ $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2+1)(x-1)$

$\Rightarrow$ $x^4 + 1 = (x^2+1)(x-1)(x+1) = (x^2+1)(x^2-1)$

Polynomdivisionen för exemplet

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - x^2 + x - 1 & \\
\hline
x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & \big| \; x+1 \\
-(x^4 + x^3) \qquad\qquad\quad & \\
\hline
-x^3 \qquad\qquad - 1 & \\
(-x^3 - x^2) \qquad\qquad & \\
\hline
x^2 \qquad - 1 & \\
-(x^2 + x) \quad & \\
\hline
-x \quad -1 & \\
-(-x-1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
x^2 \qquad + 1 & \\
\hline
x^3 - x^2 + x - 1 & \big| \; x-1 \\
-(x^3 - x^2) \qquad & \\
\hline
x - 1 & \\
-(x-1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

RATIONELLA UTTRYCK

Def Ett uttryck $f(x)$ som kan skrivas som

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ där } p, q \text{ är polynomer,}$$

kallas <u>rationellt uttryck</u>.

→ till exempel $\frac{r(x)}{g(x)}$ i polynomdivision

→ men allmänt kan vi ha $\deg p > \deg p$, t.ex.

$\frac{7x^3+1}{x^2-5}$ är ett rationellt uttryck

kan använda polynomdivision om vi vill!

Arbetar man med rationella uttryck är det ofta bra att förenkla summor till ett enda bråk.

→ Alltid möjligt genom att förlänga bråken till gemensam nämnare

<u>Exempel</u>

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x-5} = \frac{(x-5)}{(x+2)(x-5)} + \frac{(x+2)x}{(x+2)(x-5)}$$

$$= \frac{(x-5)+(x^2+2x)}{(x+2)(x-5)} = \frac{x^2+3x-5}{x^2-3x-10}$$

Detta fungerar alltid, men ibland är det smart att först kolla om det finns gemensamma faktorer att förenkla

Exempel

$$\frac{x^2+2x}{x+2} + \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{(x^2-4)(x^2+2x) + (x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-4)}$$

$$= \frac{x^4+2x^3-4x^2-8x+x^2-4}{x^3+2x^2-4x-8} = \frac{x^4+2x^3-3x^2-8x-4}{x^3+2x^2-4x-8}$$

här skulle jag nu börja leta gissa linearfaktorer i täljare och nämnare ...

→ smartare att först förenkla innan förlänga bråken

$$\frac{x^2+2x}{x+2} + \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x(x+2)}{x+2} + \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(x+2)}{x+2} + \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{x(x+2)+1}{x+2} = \frac{x^2+2x+1}{x+2} = \frac{(x+1)^2}{x+2}$$