Komplexa tal II: Konjugat, absolutbelopp, (polärform) → nästa gång

& Eulers formula

Komplexa konjugatet

Def Låt $z \in \mathbb{C}$ vara ett komplext tal, då definierar vi det <u>komplexa konjugatet</u> av z som

$$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$$

kom ihåg $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$

byt tecken på imaginärdelen

→ Detta betyder att om $x, y \in \mathbb{R}$

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

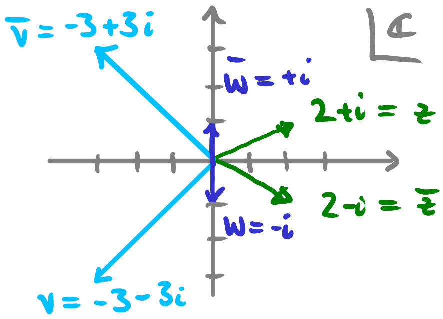
→ I det komplexa talplanet: Spegling i den reella axeln!

rättat

$$\overline{2+i} = 2 - i$$

$$\overline{-3-3i} = -3+3i$$

$$\overline{-i} = i$$



För det komplexa konjugatet gäller

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ c) $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$ d) $\bar{\bar{z}} = z$

Bevis Skriv $z = x + iy$, $w = a + ib$ med $x, y, a, b \in \mathbb{R}$

a) $\overline{z+w} = \overline{(x+a+i(y+b))} = x + a - i(y+b) = x - iy + a - ib = \bar{z} + \bar{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{(x\cdot a - b \cdot y) + i(xb + ya)} = (xa - yb) - i(xb + ya)$

$= (xa - yb) + i(x\cdot(-b) + (-y)\cdot a) = (x - iy)(a - ib) = \bar{z} \cdot \bar{w}$

c) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\frac{x-iy}{x^2+y^2}} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\bar{z}}$

$\Rightarrow \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \overline{\left(w \cdot \frac{1}{z}\right)} \overset{b)}{=} \bar{w} \cdot \overline{\frac{1}{z}} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$

d) $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$ □

Detta gör det enkelt att ta komplexa konjugat av långa uttryck.

Exempel

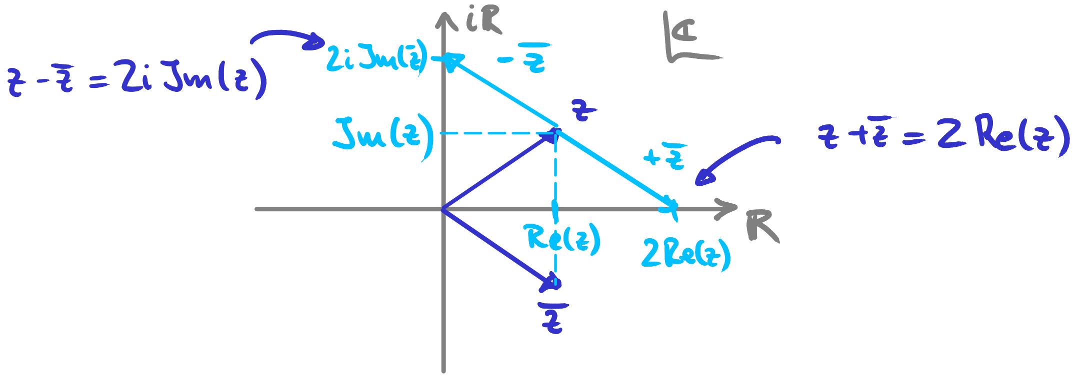
$$\overline{z^4 \cdot u^2 - 3i \cdot z + \bar{u}} = \overline{z^4 \cdot u^2} - \overline{3i \cdot z} + \overline{\bar{u}}$$
$$= (\bar{z})^4 \cdot (\bar{u})^2 + 3i \cdot \bar{z} + u$$

Det komplexa konjugatet används för att uttrycka realdel och imaginärdel:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{-i}{2}(z - \bar{z})$$

→ Viktigt när man räknar med variabler. (För tal som vi känner exakt, t.ex. $3+i\cdot 2$, kan vi ju bara läsa av $\mathrm{Re}(3+i2) = 3$.)

→ Grafisk förklaring i talplanet



Bevis Skriv $z = x + iy$ med $x, y \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{Re}(z) = x$

$$\Rightarrow \; z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \iff x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

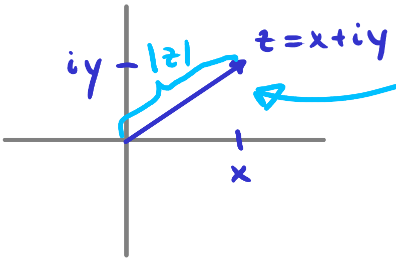
$\mathrm{Im}(z) = y$

$$\Rightarrow \; z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy \iff y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$
$$= \frac{-i}{2}(z - \bar{z})$$

Absolutbelopp

Ta ett komplext tal $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$ och beräkna

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)\cdot(x-i\cdot y) = (x\cdot x - y\cdot(-y)) + i\,(x\cdot(-y) + y\cdot x) = x^2+y^2$$



längden av vektorn för z i ritningen är $\sqrt{x^2+y^2} = |z|$

Def Absolutbeloppet av ett komplext tal $z \in \mathbb{R}$ är

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

→ Motsvarar vektorns längd i talplanet

→ Om $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$ så är $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

→ Är $z = x$ reell, så är $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ samma som vanliga absolutbeloppet för reella tal.

Exempel

$$|1+i\sqrt{15}| = \sqrt{1^2+\sqrt{15}^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$|-1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$|-i3| = \sqrt{3^2} = 3$$

Absolutbeloppet har följande egenskaper

För $z, w \in \mathbb{C}$ gäller

a) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

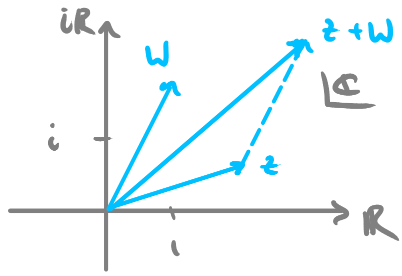
b) $|z+w| \leq |z| + |w|$ ← triangelolikheten

c) $|z\cdot w| = |z| \cdot |w|$

d) $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$

→ Samma egenskaper som för reella absolutbeloppet!

→ Observera att triangelolikheten verkligen ses ut som en triangel i talplanet!



Bevis: Se sida 87 i boken.

→ c) är enkelt att bevisa (med hjälp av a))

$$|w\cdot z|^2 = (w\cdot z)\cdot\overline{(w\cdot z)} = w\cdot z\cdot\bar{w}\cdot\bar{z} = w\cdot\bar{w}\cdot z\cdot\bar{z} = |w|^2\cdot|z|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |w\cdot z| = |w|\cdot|z|$$

→ vi kan nu skriva $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$ $\qquad \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

med detta är

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \left|\bar{z}\cdot\frac{1}{|z|^2}\right|^2 = |\bar{z}|^2\cdot\frac{1}{(|z|^2)^2} = \frac{\bar{z}\cdot z}{z\cdot\bar{z}\cdot z\cdot\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}$$

och därför $\left|\frac{w}{z}\right| = \left|w\cdot\frac{1}{z}\right| = |w|\cdot\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$

Eulers formula

Vad är e^{ix} där $x \in \mathbb{R}$?

Kom ihåg definitionen som serie...

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

$$= 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \dots$$

$$= 1 + i\,x + \frac{1}{2!}\underbrace{i^2}_{(-1)} x^2 + \frac{1}{3!} i \cdot \underbrace{i^2}_{(-1)} x^3 + \frac{1}{4!}\underbrace{i^4}_{(+1)} x^4 + \frac{1}{5!} i \cdot \underbrace{i^4}_{(+1)} x^5 + \frac{1}{6!}\underbrace{i^6}_{(i^2)^3=(-1)} x^6 + \frac{1}{7!}\underbrace{i \cdot i^6}_{i\cdot(-1)} x^7$$

$$= 1 + i \cdot x - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - i\frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

det här steget borde bevisas ...

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(x) + i\sin(x)$$

STOPP! TÄNK! BEUNDRA!

i introducerades för $x^2+1=0$

$\cos(x), \sin(x)$ började i geometrin

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}$$

e^x blev hittad för att ha $f'(x) = f(x)$

PLÖTSLIGT HÄNGER DESSA IHOP!

Exempel

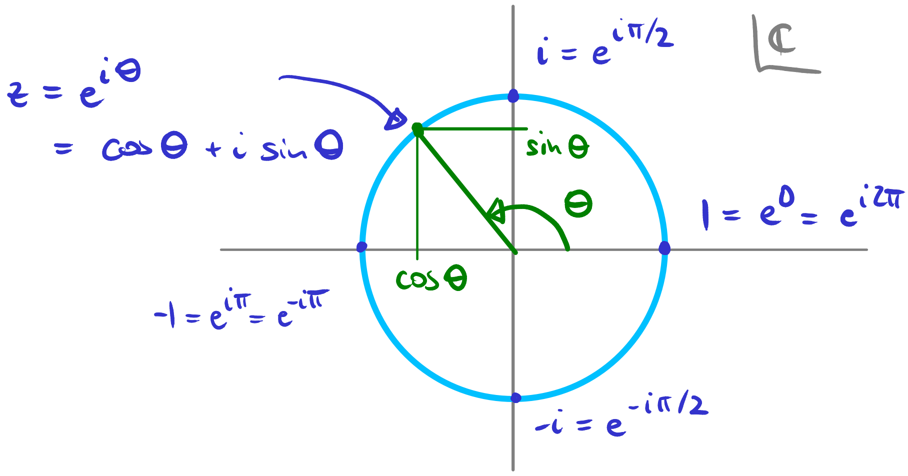
a) $e^{i\pi/2} = i$ b) $e^{i\pi} = -1$ c) $e^{-i\pi} = -1$ d) $e^{-i\pi/2} = -i$

e) $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ f) $e^{i3\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

g) $e^{i(x+2\pi k)} = e^{ix}, \; k \in \mathbb{Z}$ h) $e^{2\pi i} = e^0 = 1$

Enhetscirkeln i de komplexa talplanet

Alla komplexa tal av formen $e^{i\theta}$ formar enhetscirkeln i det komplexa talplanet.



Vi ser att om $z = e^{i\theta}$ då är

- konjugatet $\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$
- absolutbelopp $|z|^2 = z\cdot\bar{z} = e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{0} = 1$
- invers $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{\bar{z}}{1} = \bar{z} = e^{-i\theta}$

Multiplicerar vi två tal från enhetscirkeln

$$z = e^{i\theta} \qquad w = e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad z\cdot w = e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

Vi ser att vinklarna adderas !

Exempel $z = e^{i\pi/3}$ $\quad w = e^{-i2\pi/3}$

$$z\cdot w = e^{i(\pi/3 - 2\pi/3)} = e^{-i\pi/3}$$