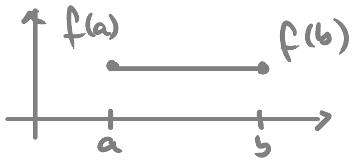
# Monotona funktioner och derivatan (Kap 10.6)

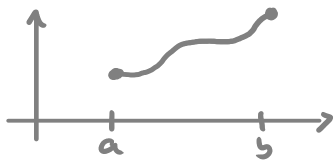
Följande sats är ganska uppenbar om man försöker rita grafen...

**Sats** Antag att $f$ är deriverbar på intervallet $I$. Då gäller

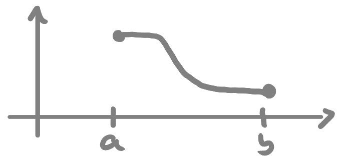
1) $f'(x) = 0$ för alla $x \in I$
$\Rightarrow$ $f$ är konstant på $I$



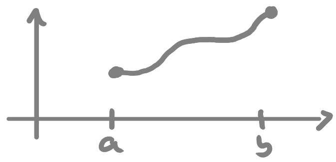

2) $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in I$
$\Rightarrow$ $f$ är växande på $I$



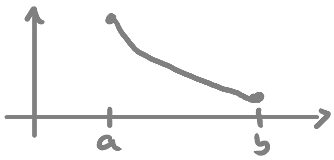

3) $f'(x) \leq 0$ för alla $x \in I$
$\Rightarrow$ $f$ är avtagande på $I$



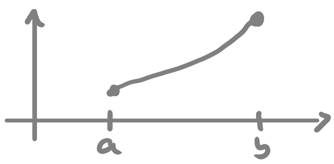

4) $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in I$
$\Rightarrow$ $f$ är växande på $I$




5) $f'(x) < 0$ för alla $x \in I$
$\Rightarrow$ $f$ är strängt avtagande på $I$



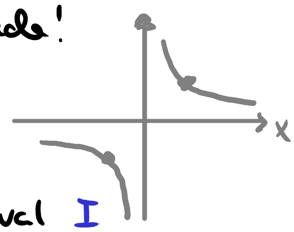

6) $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in I$
$\Rightarrow$ $f$ är strängt växande på $I$




**OBS** Förutsättningen om intervallet är viktigt!

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ är negativ för alla $x \neq 0$

men $f(-1) = -1 < f(1) = 1$ är inte avtagande!




**Problem** $f(0)$ inte definierad

$\longrightarrow$ inget genomgående intervall $I$

Viktig för primitivfunktioner, integraler, differentialekvationer!

Satsen har en viktig konsekvens:

**Följdsats** Antag att $f, g$ är deriverbara på intervallet $I$ och att $f'(x) = g'(x)$ för alla $x \in I$.

Då är
$$f(x) = g(x) + C \quad \text{för en konstant } C \in \mathbb{R}.$$

**Bevis** Betrakta $h(x) = f(x) - g(x)$. Eftersom
$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \text{för alla } x \in I$$
är $h(x) = C$ en konstant funktion enligt i) i satsen.

(bevis i boken 10.6)
$$h(x) = f(x) - g(x) = C \iff f(x) = g(x) + C \qquad \square$$

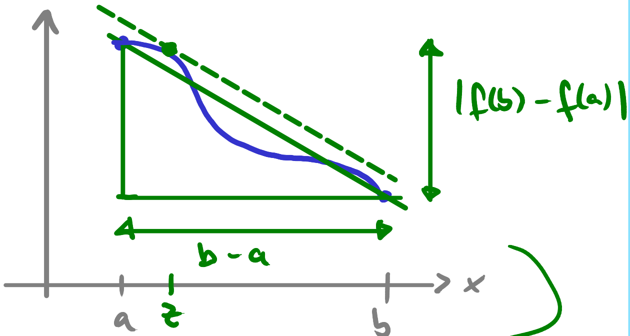
Beviset av satsen ovan kan man bygga på en viktig men lite svårare sats:

**Sats** (Medelvärdsatsen för derivata) för $a, b \in \mathbb{R}$

Antag att $f$ är
- kontinuerlig på slutna intervallet $[a,b]$
- och deriverbar på öppna intervallet $(a,b)$.

Då finns det (minst) en punkt $a < z < b$ sådan att

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$




**OBS** $z$ är punkten där $f(x)$ är längst ifrån räta linjen...

bevisidé

**Bevis** Om $y = f(x)$ är en rät linje då är

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

och vi har $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ för alla $x \in I$.

I allmänna fallet betrakta funktionen på intervallet $[a,b]$

$$g(x) = \underbrace{f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)}_{f(x)\ -\ \text{"räta linjen"}}.$$

Korrigering

Den motsvarar avvikelsen av $f(x)$ från räta linjen och har derivatan $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Sats 9.9 i boken

→ $g$ är kontinuerlig och antar därför ett maximalt och ett minimalt värde i $[a,b]$, låt oss kalla dessa $x_{min}$ och $x_{max}$.

→ i ändpunkterna har vi

$$g(a) = \underbrace{f(a) - f(a)}_{=0} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\underbrace{(a-a)}_{=0} = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)}_{=f(b)-f(a)} = 0$$

→ om både $x_{min}$ och $x_{max}$ ligger i ändpunkterna då är

$$a \leq x \leq b \Rightarrow g(a) \leq g(x) \leq g(b)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

$g$ noll på hela intervallet, alltså är $f(x)$ redan en rät linje

→ om $f(x)$ inte är en rät linje ligger minst en av $x_{min}, x_{max}$ i intervallets inre $(a,b)$. Kalla denna punkt $z$

$z$ är en extrempunkt av $g(x)$ därför är

$$g'(z) = 0 \Leftrightarrow 0 = f'(z) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

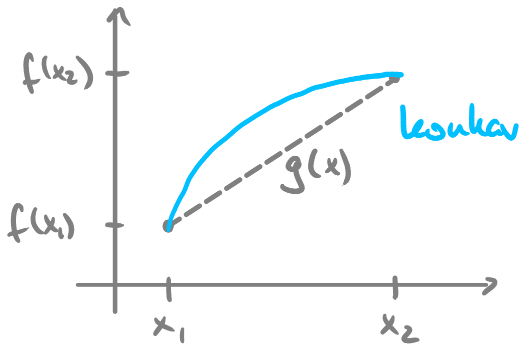
$$\Leftrightarrow f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Alltså har funktionen i $z \in (a,b)$ just den derivatan i satsen. □

# Konvexa och konkava funktioner

**Def** Låt $f$ vara definierad på ett intervall $I$. Välj två punkter $x_1, x_2 \in I$ med $x_1 < x_2$ och betrakta

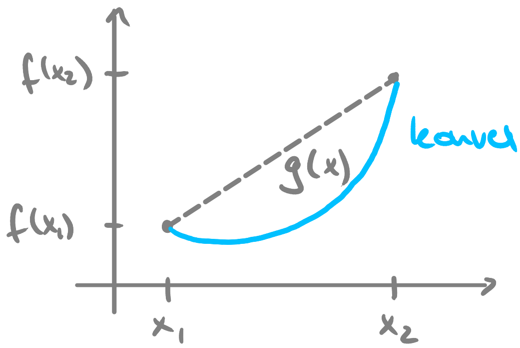
$$g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot x$$




→ om då (för alla val av $x_1, x_2$)

$f(x) \geq g(x)$ för alla $x_1 \leq x \leq x_2$

kallas funktionen <u>konkav</u>




→ om då (för alla val av $x_1, x_2$)

$f(x) \geq g(x)$ för alla $x_1 \leq x \leq x_2$

kallas funktionen <u>konvex</u>

t.ex. uppskattning, marginal, osv.

Denna egenskap kan användas bl.a. i olikheter:

→ Antag att $f$ är konkav på $[0, \infty)$ och $f(0) = 0$.

(Till exempel $f(x) = \sqrt{x}$.)

Då är för alla $a > 0$

$$0 < x \leq a \Rightarrow f(x) \geq g(x) = \frac{f(a)}{a} \cdot x$$

$$\Rightarrow f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad \text{för alla} \quad 0 < x, y < \infty$$

för att

$$f(x+y) = \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) f(x+y) = \frac{x}{x+y} f(x+y) + \frac{y}{x+y} f(x+y)$$

$a = x+y$

$$\leq f(x) + f(y)$$

Detta kallas <u>subadditiv</u>.

Observera • $f$ är konvex om $f'$ är växande

$\Rightarrow$ derivatan av $f'$ är positiv (eller noll)

$$f''(x) \geq 0$$

$f$ är konkav om $f'$ är fallande

$\Rightarrow$ derivatan av $f'$ är negativ (eller noll)

$$f''(x) \leq 0$$

$\rightarrow$ För deriverbara funktioner hjälper andra derivatan att testa konvexitet.

## Högre derivator

- Andra derivatan av $f$ är derivatan av derivatan av $f$:

$$D^{(2)}(f) = D(D(f)) = f''$$

- Analog är n-te derivatan definierad som

$$D^{(n)}(f) = D(D^{(n-1)}(f)) = f^{(n)}$$

rekursiv definition...

Exempel a) $f(x) = e^{-x^2} \cdot x \qquad Df(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$

$$D^{(2)}f(x) = D(e^{-x^2}(1-2x^2)) = D(e^{-x^2})(1-2x^2) + e^{-x^2}D(1-2x^2)$$
$$= e^{-x^2}(-2x)(1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x)$$
$$= e^{-x^2}(4x^3-6x)$$

b) $g(x) = \sin(x) \qquad g'(x) = \cos(x) \qquad g''(x) = -\sin(x) \qquad g'''(x) = -\cos(x)$

$g^{(4)}(x) = \sin(x) \quad \ldots \quad !$

# Andraderivata och extrempunkter

Andra derivatan kan känneteckna extrempunkter $f'(a) = 0$

$f''(a) > 0 \Rightarrow$ a är lokal minimipunkt

$f''(a) < 0 \Rightarrow$ a är lokal maximipunkt

OBS $f''(a) = 0$ säger ingenting!

↳ Exempel $f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$

→ $x = 0$ är minimum och $f''(0) = 0$

$g(x) = x^3$ $g'(x) = 3x^2$ $g''(x) = 6 \cdot x$

→ $x = 0$ är terraspunkt och $g''(0) = 0$.

Exempel $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

Vi såg förut att $f'(x) = 2e^{-x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right)$

hade stationära punkter för $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ och $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vi beräknade ovan $D^{(2)}(f)(x) = e^{-x^2}(4x^3 - 6x)$

→ $\underline{x = \frac{-1}{\sqrt{2}}}$: $D^{(2)}f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2}\left(\frac{-4}{2\sqrt{2}} + 6\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2}}(-2+6) > 0$

$\Rightarrow$ minimipunkt

→ $\underline{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$: $D^{(2)}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2}\left(\frac{4}{2\sqrt{2}} - 6\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2}}(+2-6) < 0$

$\Rightarrow$ maximipunkt

## Andra derivata och konvexitet

**Sats** Antag att $f$ är två gånger deriverbar på $I$.
→ Om $f''(x) \geq 0$ för alla $x \in I$ är $f$ konvex.
→ Om $f''(x) \leq 0$ för alla $x \in I$ är $f$ konkav

**Exempel** Visa att $s(x)$ är konkav!

$s(x) = -x\log(x) - (1-x)\log(1-x)$ för $0 < x < 1$. "binär entropi"

$$Ds(x) = D(-x\log(x)) - D((1-x)\log(1-x))$$
$$= (-1)\log(x) + (-x)\cdot\frac{1}{x} - \left((-1)\log(1-x) + (1-x)\frac{1}{1-x}\cdot(-1)\right)$$
$$= -\log(x) \cancel{-1} + \log(1-x) \cancel{+1}$$

$$D^{(2)}(s)(x) = D(\log(1-x) - \log(x)) = \frac{1}{1-x}\cdot(-1) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)} < 0 \text{ för alla } 0 < x < 1$$

$\Rightarrow$ $s(x)$ är konkav och
$$s(x+y) \leq s(x) + s(y)$$

## Räkneregler för högre derivator

Antag att $f, g$ är $n$ gånger deriverbara i $a$, då är

→ $D^{(n)}(f+g)(a) = D^{(n)}f(a) + D^{(n)}g(a)$

→ $D^{(n)}(f\cdot g) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D^{(k)}f(a)\cdot D^{(n-k)}g(a)$ som binomialsats