Komplexa tal III : Polärform, Multiplikation, Ekvationer & Polynom

Polär form

Med Eulers formel är det möjligt att skriva alla komplexa tal på <u>polär form</u>.

kan välja $0 \leq \theta < 2\pi$

$$z = r \cdot e^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$r = |z|$ är absolutbeloppet $\qquad \theta = \arg(z)$ kallas argument

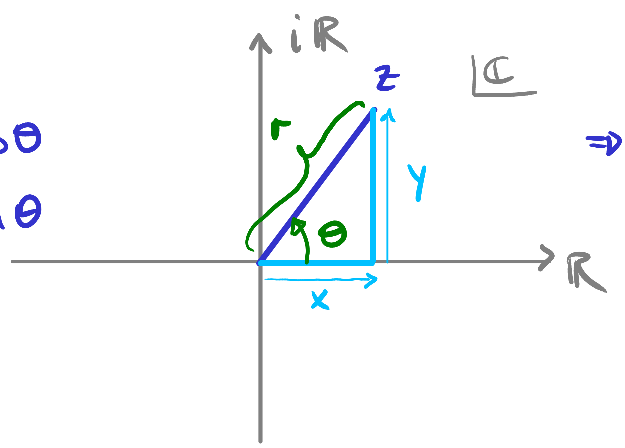
Hur hänger rektangulär form och polär form ihop?

rektangulär form $\qquad$ polär form

$z = x + iy \qquad z = r \cdot e^{i\theta}$

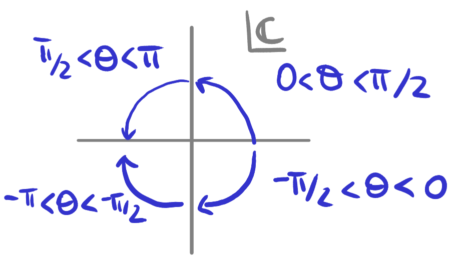
$\Rightarrow x = r \cdot \cos\theta$

$y = r \cdot \sin\theta$



$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$

→ $\arg(z)$ beror på var z ligger



$$\Rightarrow \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ +\pi/2, & x = 0, y > 0 \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0 \\ \text{odefinierad}, & z = 0 \end{cases}$$

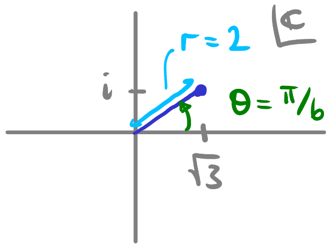
Exempel

a) $z = \sqrt{3} + i$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad z = 2\, e^{i\pi/6}$$



b) $z = 3\, e^{i \frac{15}{2}\pi}$

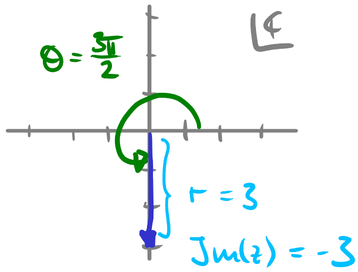
först förenklar vi argumentet

$$e^{i\frac{15}{2}\pi} = e^{i\left(6+\frac{3}{2}\right)\pi} = \underbrace{e^{i6\pi}}_{=(e^{2\pi i})^3 = 1^3 = 1} \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad z = 3e^{i\frac{15}{2}\pi} = 3\, e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 3\left(\underbrace{\cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}\right)$$

$$= -3 \cdot i$$



Grafisk interpretation av multiplikation

Skriv $\quad z = |z|\, e^{i\arg(z)}, \quad w = |w|\, e^{i\arg(w)}$

$$\Rightarrow \quad z\cdot w = |z|\, e^{i\arg(z)} \cdot |w|\, e^{i\arg(w)} = \underbrace{|z|\cdot|w|}_{=|z\cdot w|} \cdot e^{i\overbrace{(\arg(z)+\arg(w))}^{\arg(z\cdot w) = \arg(z) + \arg(w)}}$$

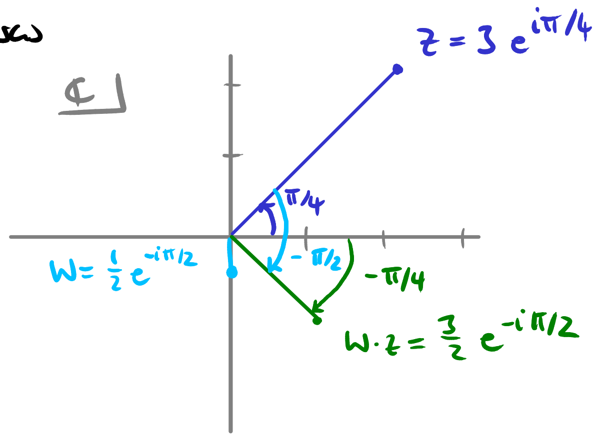
→ Absolutbeloppen multipliceras

→ argumenten adderas

$$z = 3\, e^{i\pi/4}$$

$$w = \frac{-i}{2} = \frac{1}{2} e^{-i\pi/2}$$

$$\Rightarrow \quad z\cdot w = \frac{3}{2}\, e^{-i\pi/4}$$



Potenslagar för komplexa tal

Vi har redan använt följande:

> För alla komplexa tal $z, w \in \mathbb{C}$ gäller
> $$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

-> kan bevisas med $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)}$

-> speciellt (viktigt) fall

polär form!

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{=|z|} \cdot e^{iy}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

kolla, t.ex, Wikipedia (engelska)

-> komplexa baser z^x, $(z \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R})$ är intressant men komplicerad

Men heltalspotenser är alltid tydligt definierade.

$$z^4 = z \cdot z \cdot z \cdot z \quad , \quad z^{-3} = \left(\frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z}$$

-> enkla att räkna ut i polärform

$$(z)^n = (r\, e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i n \cdot \varphi}$$

<u>Exempel</u> $z = \frac{3}{2} e^{-i\pi/3}$

$$\Rightarrow z^7 = \left(\frac{3}{2} \cdot e^{-i\pi/3}\right)^7 = \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot e^{-i7\pi/3}$$
$$= \frac{3^7}{2^7} \cdot e^{-i\pi/3} \cdot \underbrace{e^{-i\pi 2}}_{=1} = \frac{2187}{128}\, e^{-i\pi/3}$$

<u>För $z = x+iy$:</u>

$$z^n = (x+iy)^n$$

kolla om z har enkel polär form

annars använd binomialsats

Ersätta trigonometriska funktioner med e^{ix}

En viktig konsekvens av Eulers formel är

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}$$

Till exempel kan detta användas för trigonometriska formler

$$\sin(\theta)^3 = \left(\frac{-i}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)^3 = \frac{(-i)^3}{8}\cdot\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3$$

$$= \frac{(-i)^3}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3+3\left(e^{i\theta}\right)^2\left(-e^{-i\theta}\right)+3\,e^{i\theta}\left(-e^{-i\theta}\right)^2+\left(-e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$= \frac{i}{8}\left(e^{i3\theta}-3\,e^{i2\theta}e^{-i\theta}+3\,e^{i\theta}e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}\right)$$

$$= \frac{i}{8}\left(e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{i}{8}\left(2i\sin(3\theta)-3\left(2i\sin\theta\right)\right) = \frac{-1}{4}\left(\sin(3\theta)-3\sin\theta\right)$$

Eller för primitivfunktioner ...

Komplexvärdiga funktioner

En komplexvärdig funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto f(x) = \mathrm{Re}(f(x)) + i\,\mathrm{Im}(f(x))$$

kan ses som summan av två reellvärdiga funktioner för realdel och imaginärdel.

Till exempel

$$f(x) = e^{ix}$$

$\mathrm{Im}(f(x)) = \sin(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$$

$\mathrm{Re}(f(x)) = \cos(x)$

För derivatan använder vi sumregeln

$$D(f) = D(\mathrm{Re}(f)) + i\, D(\mathrm{Im}(x))$$

och deriverar realdel och imaginärdel för sig.

För exponentialfunktionen följes

$$\to\ D(e^{ix}) = D(\cos(x)) + i\, D(\sin(x)) = -\sin(x) + i\cos(x)$$
$$= (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot i = e^{ix}$$

$\to$ och för $w = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$ följes

$$D(e^{wx}) = D(e^{(a+ib)x}) = D(e^{(a+ib)x})$$
$$= D(e^{ax} e^{ibx}) = D(e^{ax})\, e^{ibx} + e^{ax} D(e^{ibx})$$
$$= e^{ax} \cdot e^{ibx}\, a + e^{ax} e^{ibx}\, ib$$
$$= e^{w \cdot x}(a+ib) = e^{wx} \cdot w$$

Vilket betyder att $\displaystyle\int e^{w\cdot x}\,dx = \frac{e^{wx}}{w} + C = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + C$

Sånt kan hjälpa med integraler

$$\int e^{2x}\sin(x)\,dx = \int e^{2x}\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2i}\int e^{(2+i)x} - e^{(2-i)x}\,dx = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(2+i)x}}{2+i} - \frac{e^{+(2-i)x}}{2-i}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2i}\,\frac{e^{(2+i)x}(2-i) - e^{(2-i)x}(2+i)}{(2-i)(2+i)} + C$$
$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{5}\left(2\left(e^{(2+i)x} - e^{(2-i)x}\right) - i\left(e^{(2+i)x} + e^{(2-i)x}\right)\right) + C$$
$$= \frac{1}{10i}\,e^{2x}\left(2\overbrace{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}^{2i\sin(x)} - i\overbrace{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}^{2\cos(x)}\right) + C$$
$$= \frac{1}{5}\,e^{2x}\left(2\sin(x) - \cos(x)\right) + C$$

Komplexa polynom

Algebrans fundamentalsats: Varje icke-konstant polynom har ett (komplext) nollställe!

Tillsammans med faktorsatsen:

Sats Låt
$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0$$
vara ett polynom med komplexa koefficienter $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$.
Då kan $p(z)$ faktoriseras som
$$p(z) = a_n \cdot (z - w_1) \cdot \dots \cdot (z - w_n)$$
där $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ är komplexa nollställen.

→ komplexa polynom är produkter bara av linjärfaktorer

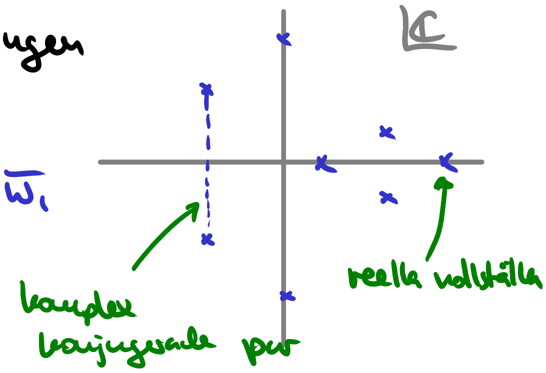
Detta har en viktig konsekvens för reella polynomer.

Sats Låt $p(z) = b_n \cdot z^n + \dots + b_0$ med $b_i \in \mathbb{R}$ vara ett polynom med reella koefficienter. Då gäller att om $p(w) = 0$ är ett nollställe då är också $p(\bar{w}) = 0$.

Bevis
$$\begin{aligned} p(\bar{w}) &= b_n \cdot \bar{w}^n + \dots + b_1 \cdot \bar{w} + b_0 \\ &= \bar{b}_n \cdot \bar{w}^n + \dots + \bar{b}_0 \\ &= \overline{b_n \cdot w_n + \dots + b_0} = \overline{p(w)} = \bar{0} = 0 \end{aligned}$$
$\bar{b}_i = b_i$, för att $b_i \in \mathbb{R}$

$\square$

⇒ Nollställen av reella polynom är antingen
- reella tal $x_1, x_2, \dots$
- eller komplex konjugerade par $w_1, \bar{w}_1$



Men ett par av komplex konjugerade linjärfaktorer ger

$$(x-w)(x-\overline{w}) = x^2 - x(w+\overline{w}) + w\cdot\overline{w}$$
$$= x^2 - 2x\,\mathrm{Re}\,w + |w|^2 = x^2 - 2x\,\mathrm{Re}(w) + \mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2$$
$$= (x-\mathrm{Re}(w))^2 + \mathrm{Im}(w)^2$$

ett reellt andragradspolynom utan (reellt) nollställe.

$\Rightarrow$ Alla reella polynom kan alltså faktoriseras i produkt av linjärfaktorer och andragradspolynomer.

ges reella nollställen

utan reella nollställen

Som viktigt och vackert sista exempel och polynom i kursen

$$p(z) = z^n - 1:$$

Vad är dess nollställen? Dvs. vad löser $z^n = 1$?

Enhetsrötter

Ekvationen $z^n = 1$ har n komplexa lösningar

$$z^n = 1 \iff z = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

De kallas (n-te) <u>enhetsrot</u>.

<u>Exempel</u>

$$z^8 = 1 \iff z = e^{i\frac{2\pi}{8}\cdot k} = e^{i\frac{\pi}{4}k}, \quad k = 0, 1, \dots, 7$$