Talföljder och summor (Kap 4.3 & 4.1 "Endimensionell analys")

Definition En talföljd av reella tal är en funktion från de naturliga talen till de reella talen.

definitionsmängd — bildmängd

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n$$

t. ex. n: månad
a_n: månadens utbetalning

Denna definition är mycket formell. I praktiken skriver vi talföljder som en sekvens av reella tal

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

För att bestämma en talföljd finns det två sätt

a) explicit formel som bestämmer hur a_n beräknas från n

exempel $a_n = \frac{2}{n+1}$. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \ldots$
$= 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$

b) rekursionsformel som bestämmer hur a_n beräknas från föregående element a_{n-1} (ett eller flera).
Bara första elementet a_0 (eller tillräckligt många) anges explicit.

exempel $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

$$\Rightarrow a_2 = -1-2 = -3$$
$$a_3 = -3+1 = -2$$
$$a_4 = -2+3 = 1$$
$$a_5 = 1+2 = 3$$
$$\vdots$$

Hur kommer det här att fortsätta tror du ...?

Nu betraktar vi två typer av talföljder som är viktiga.

Aritmetisk talföljd har samma differens mellan på varandra följande element: $a_{n+1} - a_n = d$ för ett $d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ den rekursiva formeln för en aritmetisk talföljd har formen

$$a_0 = \dots \quad , \quad a_n = a_{n-1} + d$$

där värden för a_0 och d anges

exempel $\quad a_0 = 4, \quad a_n = a_{n-1} + 2 \quad \Rightarrow \quad (a_n)_{n=0}^{\infty} = 4, 6, 8, 10, \dots$

$\Rightarrow$ den explicita formeln för en aritmetisk talföljd har form

$$a_n = a_0 + d \cdot n$$

exempel $\quad a_n = 4 + 2 \cdot n \quad \Rightarrow \quad (a_n)_{n=0}^{\infty} = 4, 6, 8, 10, 12, \dots$

Följden kallas aritmetisk för att $a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$ är "aritmetisk medelvärde".

⚠ Den viktigaste aritmetiska talföljden är de naturliga talen $\mathbb{N}$

$$a_n = n \quad , \quad (a_n)_{n=0}^{\infty} = 0, 1, 2, 3, \dots \quad !$$

$\rightarrow$ Alla andra aritmetiska talföljder är egentligen bara $\mathbb{N}$ som har

- blivit multiplicerad med d

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \xrightarrow{d = \frac{-1}{3}} 0, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{-2}{3}, -1, -\tfrac{4}{3}, \tfrac{-5}{3}, \dots$$

- och flyttad med b_0

$$0, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{-2}{3}, -1, \tfrac{-4}{3}, \tfrac{-5}{3} \xrightarrow{+b_0 = \frac{10}{3}} \tfrac{10}{3}, \tfrac{9}{3}, \tfrac{8}{3}, \tfrac{7}{3}, \tfrac{6}{3}, \dots$$

$$b_n = \frac{10}{3} + \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot n \quad \Rightarrow \quad (b_n)_{n=0}^{\infty} = \tfrac{10}{3}, \tfrac{9}{3}, \tfrac{8}{3}, \tfrac{7}{3}, \tfrac{6}{3}, \dots$$

I en geometrisk talföljd får vi nästa element genom att multiplicera föregående med en bestämd faktor: kvoten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ är konstant!

rekursionsformel $a_n = a_{n-1} \cdot q \quad , \; q \in \mathbb{R}$

explicit formel $a_n = a_0 \cdot q^n$

Namnet används för att $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$ är geometriska medelvärdet, om $q \geq 0$.

Exempel

$q_0 = 16$ $\qquad a_k = 16 \cdot \frac{1}{2^k}$

$q = \frac{1}{2}$ $\qquad (a_k)_{k=0}^{\infty} = 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

$b_0 = 3$ $\qquad (b_k)_{k=0}^{\infty} = 3, 3\sqrt{2}, \underbrace{6}_{3\sqrt{2}\sqrt{2}}, 6\sqrt{2}, \underbrace{12}_{6\cdot\sqrt{2}\sqrt{2}}, \dots$

$q = \sqrt{2}$

Notera att när $-1 < q < 1$ så närmar sig $a_k \to 0$ när k växer!

$\longrightarrow$ "gränsvärdet av a_k är 0 när $k \to \infty$"

En naturlig fråga är vad händer om jag summerar upp en talföljds element ...?

Summor

Definition Låt $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ vara en talföljd. Vi definierar dess n^{te} delsumma S_n som summan

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

I definitionen använde vi **summatecknet** $\sum$

Exempel

1) sista index; $7-2+1 = 6$ termer

$$\sum_{k=2}^{7} a_k = \underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}$$

första index

2) $$\sum_{k=1}^{3} k^2 = \underset{k=1}{1^2} + \underset{k=2}{2^2} + \underset{k=3}{3^2} = 1+4+9 = 14$$

3) $$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underset{k=3}{\frac{1}{3}} + \underset{k=4}{\frac{1}{4}} = \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{25}{12}$$

4) $$\sum_{k=0}^{3} 2 = 2+2+2+2 = 8$$

summanden är oberoende av k → för varje $k = 0,1,2,3$ blir det en "2" i summan

För några summor har vi slutna formler, t.ex. för aritmetiska och geometriska summan.

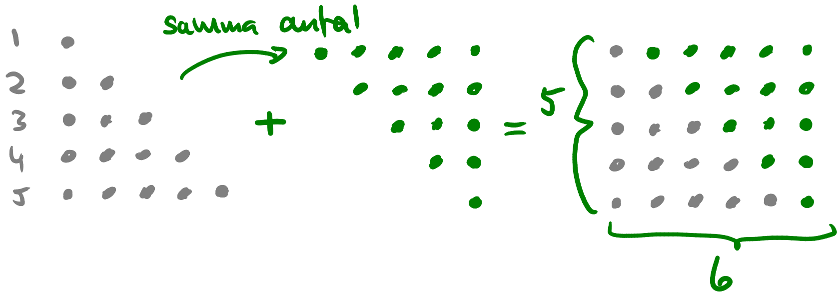
Aritmetisk summa

Vad är summan av alla naturliga tal

$$S_n = 0+1+2+3+\dots+n = \sum_{k=0}^{n} k \quad ?$$

Exempel

$n=5$



$5 \cdot 6 = 30$

$$\Rightarrow S_5 = 1+2+3+4+5 = \frac{30}{2} = 15$$

Baserad på exemplet kan vi förmoda att $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Det kan vi faktiskt bevisa också!

Sats (Aritmetisk summa)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bevis

alla dessa par ger $(n+1)$

$$2S_n = S_n + S_n = (1+2+3+\ldots+n-2+n-1+n)+(1+2+3+\ldots+n-2+n-1+n)$$

$$= \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n \text{ termer}} = n\cdot(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \square$$

Denna formel kan vi använda för att beräkna summan för vilken aritmetisk talföljd som helst! Eftersom en aritmetisk talföljd har formeln

$$a_k = a_0 + k\cdot d$$

ser vi att

$$\sum(\ldots+\ldots) = \sum\ldots+\sum\ldots$$

$$\boxed{S_n =} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_0 + k\cdot d = \sum_{k=0}^{n} a_0 + \sum_{k=0}^{n} k\cdot d$$

$$= (n+1)\cdot a_0 + \sum_{k=0}^{n} k\cdot d \overset{(*)}{=} (n+1)a_0 + d\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\text{satsen ovanför}}$$

$$= \boxed{(n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\cdot d}.$$

$(*)$ eftersom $(d\cdot 0+d\cdot 1+d\cdot 2+d\cdot 3) = d\cdot(0+1+2+3)$

är $\sum_{k=0}^{n} d\cdot k = d\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)$

Geometrisk summa

Sats (geometrisk summa) Låt $q \in \mathbb{R}$ och $q \neq 1$, då är

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Bevis Vi skriver ut s_n och multiplicerar med $(q-1)$

$$s_n(q-1) = (1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+q^n)(q-1)$$

$$= (\cancel{q}+\cancel{q^2}+\cancel{q^3}+\cancel{\dots}+\cancel{q^n}+q^{n+1}) - (1+\cancel{q}+\cancel{q^2}+\cancel{\dots}+\cancel{q^{n-1}}+\cancel{q^n})$$

$$= q^{n+1}-1$$

$$\Rightarrow \quad s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

obs: $q-1 \neq 0$!

$\square$

Igen kan vi använda satsen för allmänna geometriska summor

$$a_k = a_0 \cdot q^k$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n} = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot q^k = a_0 \cdot 1 + a_0 \cdot q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^n)$$

$$= a_0 \cdot (1+q+\dots+q^n) = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k \boxed{= a_0 \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}}$$

Vad händer egentligen för stora n

om $q > 1$

och om $0 < q < 1$?