子模函数与贪心算法

http://www.tensory.online

January 14, 2020

Contents

关键词： 子模函数；贪心算法；优化理论

1 子模函数的等价定义(Submodular function)

1.1 定义

给定一个有限集合Ω，函数$f: 2^{\Omega} \to R$，如果满足如下三条等价条件之一，则被称为子模函数(submodular function):

- 定义1: 对任意$X \subseteq Y \subsetneq \Omega$和任意的$e \in \Omega / Y$, 满足$f(X \cup \{e\}) - f(X) \geq f(Y \cup \{e\}) - f(Y)$;
- 定义2: 对任意$S, T \subseteq \Omega$, 满足$f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T)$;
- 定义3: 对任意的$X \subseteq \Omega$和任意的$e_1, e_2 \in \Omega / X$，$e_1 \neq e_2$满足$f(X \cup \{e_1\}) + f(X \cup e_2) \geq f(X \cup \{e_1, e_2\}) + f(X)$.

1.2 等价证明

下面，证明这三个条件，是等价的。

- 定义2→ 定义1

  令$S = X \cup \{e\}, T = Y, X \subseteq Y \subsetneqq \Omega, e \in \Omega / Y$，代入2即可。

- 定义2→定义3

  令$S = X \cup \{e_1\}, T = X \cup \{e_2\}, e_1, e_2 \in \Omega / X, e_1 \neq e_2$，代入2即可。

- 定义1→定义2

  由定义1可知，

$$f(X \cup \{e_1\}) - f(X) \geq f(Y \cup \{e_1\}) - f(Y).$$

$$f(X \cup \{e_1, e_2\}) - f(X \cup \{e_1\}) \geq f(Y \cup \{e_1, e_2\}) - f(Y \cup e_1).$$

其中,$X \subseteq Y \subseteq \Omega, e_1, e_2 \in \Omega / Y$，两式相加可得

$$f(X \cup \{e_1, e_2\}) - f(X) \geq f(Y \cup \{e_1, e_2\}) - f(Y).$$

现在由$\{e_1\}$推到了$\{e_1, e_2\}$，于是，定义1从一个元素e可以推广为一个集合M，如下

$$f(X \cup M) - f(X) \geq f(Y \cup M) - f(Y).$$

其中$M \cap Y = \varnothing$，即有

$$f(X \cup M) + f(Y) \geq f(X) + f(Y \cup M). \tag{1}$$

对于任意两个集合S和T,均可以表示成$S = X \cup M$和$T = Y$，其中$X \subseteq Y, M \cap Y = \varnothing$

所以，$S \cap T = X$，且$S \cup T = X \cup M \cup Y = Y \cup M$，代入到(1)有

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T), \forall S, T \subseteq \Omega.$$

1.3 子模函数的单调性

1.3.1 定义

如果$S \subseteq T \subseteq \Omega$，存在$f(S) \leq f(T)$，那么称$f$是单调的。

实际上，集合函数f的单调，类似数域函数的“单调递增函数”，只不过集合函数的单调性就是这么定义的。

1.3.2 非单调的子模函数的一个例子

不是所有的子模函数都是单调的，此处给出一个非单调的子模函数的例子。

$\Omega = \{a, b\}$,所以$2^\Omega = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$。

定义$f(\varnothing) = 1, f(\{a\}) = 1, f(\{b\}) = 2, f(\{a, b\}) = 1$，所以函数$f$不是单调的，下面验证$f$是子模函数。

- 当$X = Y$，定义1一定成立。

- 当$X = \varnothing$，$Y = \{a\}$或$Y = \{b\}$。如，$Y = \{a\}$，可以验证定义1成立。同理$Y = \{b\}$时也成立。

- 当$X=\{a\}$, Y只能为$\{a\}$，二者相同，定义1一定成立。
- 当$X=\{b\}$，Y只能为$\{b\}$，二者相同，定义1一定成立。

所以，如上定义的f是一个非单调的子模函数。

1.4 一个引理

1.4.1 引理

如果$f(S)$是Ω上的子模函数，那么对于任意$S\subseteq\Omega$和$B\subseteq\Omega$，只要满足$S\cap B=\varnothing$,就有不等式成立：

$$f(S\cup B)-f(S)\leq\sum_{i=1}^{k}f(S\cup\{b_i\}-f(S),$$

成立，其中$B=\{b_1,b_2,...,b_k\}$。

1.4.2 证明

令$B_i=\{b_1,b_2,...,b_i\}, i=1,2,...,k$，并记$B_0=\varnothing$,$X=S$，$Y=S\cup B_{i-1}$,则有如下不等式成立

$$f(X\cup\{b_i\})-f(X)\geq f(Y\cup\{b_i\})-f(Y),$$

即

$$f(S\cup\{b_i\})-f(S)\geq f(S\cup B_i)-f(S\cup B_{i-1}), i=1,2,...,k.$$

那么k项这样的不等式求和有

$$\sum_{i=1}^{k}f(S\cup\{b_i\})-f(S)\geq\sum_{i=1}^{k}f(S\cup B_i)-f(S\cup B_{i-1}),$$

整理得到

$$f(S\cup B_k)-f(S)\leq\sum_{i=1}^{k}f(S\cup\{b_i\})-f(S).$$

证明完毕。

2 单调子模函数问题的贪心算法

2.1 贪心算法

如果函数f是Ω上的单调子模函数，给定$1\leq k\leq|\Omega|$，那么对于如下问题：

$$\max_{S\subseteq\Omega,|S|=k}f(S).$$

使用贪心算法(Greedy Climbing)，即从一个空集$\varnothing$开始，逐个往从Ω中选择元素添加到解集合中，直到得到k个，选择的标准是，每次选择使得目标函数$f(S)$增加最大的元素。如当前的解集合为S_i，包含i个元素，那么下一个选择元素为

$$u_{i+1}=\arg\max_{u\in\Omega\setminus S_i}f(S_i\cup\{u\})-f(S_i).$$

$$S_{i+1}\leftarrow S_i\cup\{u_{i+1}\}.$$

构成集合S_{i+1}，直到集合大小满足k。

2.2 结论

利用上述描述的贪心算法，可以求得一个具有精度保证的解S_k，其精度至少为$(1-1/e)$，即如果最优解为S_k^*，那么有$f(S_k) \geq (1-1/e)f(S_k^*)$。

2.3 证明

假定问题的最优解为$S_k^* = \{u_1^*, u_2^*, ..., u_k^*\}$，用贪心法求得解为$S_k = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$，记$S_0 = \varnothing$那么有

$$f(S_i \cup u_{i+1}) \geq f(S_i \cup \{u^x\}).$$

其中$u^x \in \Omega$为任意元素。因为，既然是贪心法，那么第$i+1$次往解集合中添加的元素u_{i+1}一定是使得$f(S_{i+1})$最大的元素，比其他任何元素都大。

由于f的单调性有，

$$\begin{aligned} f(S_k^*) &\leq f(S_k^* \cup S_i) = f(S_k^* \cup S_i) - f(S_i) + f(S_i) \\ &\leq^n \sum_{j=1}^{k}[f(S_i \cup \{u_j^*\}) - f(S_i)] + f(S_i) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k}[f(S_i \cup \{u_{i+1}\}) - f(S_i)] + f(S_i) \\ &\leq k[f(S_{i+1}) - f(S_i)] + f(S_i) \end{aligned} \tag{2}$$

那么，对$i \geq 0$有

$$\begin{aligned} f(S_{i+1}) &\geq \frac{1}{k}[(k-1)f(S_i) + f(S_k^*)] \\ &= \frac{k-1}{k}f(S_i) + \frac{1}{k}f(S_k^*). \end{aligned} \tag{3}$$

所以，

$$f(S_k) \geq \frac{k-1}{k}f(S_{k-1}) + \frac{1}{k}f(S_k^*)$$

$$f(S_{k-1}) \geq \frac{k-1}{k}f(S_{k-2}) + \frac{1}{k}f(S_k^*)$$

$$f(S_{k-2}) \geq \frac{k-1}{k}f(S_{k-3}) + \frac{1}{k}f(S_k^*)$$

......

$$f(S_1) \geq \frac{k-1}{k}f(S_0) + \frac{1}{k}f(S_k^*)$$

左右统一乘以$\frac{k-1}{k}$的若干次项后

$$f(S_k) \geq \frac{k-1}{k}f(S_{k-1}) + \frac{1}{k}f(S_k^*)$$

$$\frac{k-1}{k}f(S_{k-1}) \geq (\frac{k-1}{k})^2 f(S_{k-2}) + (\frac{k-1}{k})\frac{1}{k}f(S_k^*)$$

$$(\frac{k-1}{k})^2 f(S_{k-2}) \geq (\frac{k-1}{k})^3 f(S_{k-3}) + (\frac{k-1}{k})^2\frac{1}{k}f(S_k^*)$$

......

$$(\frac{k-1}{k})^{k-1}f(S_1) \geq (\frac{k-1}{k})^{k}f(S_0) + (\frac{k-1}{k})^{k-1}\frac{1}{k}f(S_k^*)$$

上面k个不等式相加得到

$$\begin{aligned} f(S_k) &\geq (\frac{k-1}{k})^k f(S_0) + \frac{1}{k}f(S_k^*)\sum_{i=0}^{k-1}(\frac{k-1}{k})^i \\ &= (\frac{k-1}{k})^k f(S_0) + [1-(1-\frac{1}{k})^k]f(S_k^*). \end{aligned} \tag{4}$$

如果$f(S_0) \geq 0$，那么有

$$\begin{aligned} f(S_k) &\geq [1-(1-(\frac{1}{k})^k)]f(S_k^*) \\ &\geq (1-1/e)f(S_k^*). \end{aligned} \tag{5}$$

证明完毕。

参考文献