信号処理のための数学 365 本ノック

Yuma Kinoshita

問 1. てすと

(1) まず，標準内積 $<\cdot,\cdot>_{\mathbb{C}^n}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ を持つ n 次元計量ベクトル空間 $(\mathbb{C}^n, <\cdot,\cdot>_{\mathbb{C}^n})$ の場合について証明する．

エルミート行列 $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_i, \lambda_j (i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j)$ とそれぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j$ を考える．

$$\boldsymbol{u}_i^* \mathbf{A} \boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{u}_i, \tag{1}$$

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{u}_i = (\lambda_i \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{u}_i = \overline{\lambda_i} \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{u}_i \tag{2}$$

および

$$\boldsymbol{u}_i^* \mathbf{A} \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i^* \mathbf{A}^* \boldsymbol{u}_i = (\mathbf{A}\boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{u}_i \tag{3}$$

より，$\lambda_i = \overline{\lambda}_i$．したがって，エルミート行列 $\mathbf{A}$ の固有値は実数である．

また，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ について $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>_{\mathbb{C}^n} = \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y}$ であるから，

$$<\boldsymbol{u}_i, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_j>_{\mathbb{C}^n} = \boldsymbol{u}_i^* \mathbf{A} \boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{u}_j, \tag{4}$$

$$<\mathbf{A}\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j>_{\mathbb{C}^n} = \overline{\lambda_i} \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{u}_j = \lambda_i \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{u}_j \tag{5}$$

となる．ここで，

$$<\boldsymbol{u}_i, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_j>_{\mathbb{C}^n} \tag{6}$$

$$= \boldsymbol{u}_i^* \mathbf{A} \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_i^* \mathbf{A}^* \boldsymbol{u}_j = (\mathbf{A}\boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{u}_j, \tag{7}$$

$$= <\mathbf{A}\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j>_{\mathbb{C}^n} \tag{8}$$

より，$\lambda_j \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{u}_j = \lambda_i \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{u}_j$．$\lambda_i \neq \lambda_j$ だから $\boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{u}_j = <\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j>_{\mathbb{C}^n} = 0$．したがって，固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j$ は標準内積のもとで直交する．

次に，任意の内積 $<\cdot,\cdot>: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ を持つ n 次元計量ベクトル空間 $V = (\mathbb{C}^n, <\cdot,\cdot>)$ の場合について証明する．

V の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ に関する $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の座標をそれぞれ $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top, \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^\top$ とすれば，

$$<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}> \tag{9}$$

$$= <x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n, y_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{e}_m> \tag{10}$$

$$= \sum_{i,j=1,\cdots,n} <x_i \boldsymbol{e}_i, y_j \boldsymbol{e}_j> = <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>_{\mathbb{C}^n} \tag{11}$$

が成り立つ．式 (8) および式 (11) から，エルミート行列 $\mathbf{A}$ について

$$<\mathbf{A}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}> = <\mathbf{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>_{\mathbb{C}^n} = <\boldsymbol{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{y}>_{\mathbb{C}^n} = <\boldsymbol{a}, \mathbf{A}\boldsymbol{b}> \tag{12}$$

が成立する．また，内積は $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ について以下の性質を満たす．

$$<\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}> = \overline{\alpha} <\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}> \tag{13}$$

$$<\boldsymbol{a}, \beta \boldsymbol{b}> = \beta <\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}> \tag{14}$$

したがって，$\mathbf{A}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j$ について

$$< \boldsymbol{u}_i, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_j > = < \boldsymbol{u}_i, \lambda_j \boldsymbol{u}_j > = \lambda_j < \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j >, \tag{15}$$

$$< \mathbf{A}\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j > = < \lambda_i \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j > = \lambda_i < \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j >, \tag{16}$$

$$< \boldsymbol{u}_i, \mathbf{A}\boldsymbol{u}_j > = < \mathbf{A}\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j > \tag{17}$$

が成り立つから，$\lambda_i \neq \lambda_j$ より $< \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j > = 0$．したがって，固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j$ は任意の内積について直交する．

(2) 固有値分解 $\mathbf{A} = \mathbf{U\Lambda U}^{-1}$ における行列 $\mathbf{U}$ は，$\mathbf{A}$ の固有ベクトルを並べた行列である．1 の結果から，$\mathbf{A}$ の固有ベクトルは直交するため，長さが 1 となるように固有ベクトルを選べば $\mathbf{U}$ は正規直交基底を並べたベクトルとなる．したがって $\mathbf{U}$ はユニタリ行列であり，$\mathbf{A} = \mathbf{U\Lambda U}^*$ として与えられる．

(3) $\mathbf{X} = \mathbf{U\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^*$ とすると

$$\mathbf{XA} = \mathbf{U\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^*\mathbf{U\Lambda U}^* = \mathbf{E}. \tag{18}$$

同様に，$\mathbf{AX} = \mathbf{E}$．以上より，$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$．