信号処理 100 本ノック 解答

Yuma Kinoshita

1　線形代数の基礎

問 1　連立方程式

(i) 拡大係数行列 $\tilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{A}|b)$ に対し，拡大係数行列の左側が以下のような行列 (対角に相当する成分のみ 1 を含み，他の成分がすべて 0 である行列) となるよう，行基本変形を施す．

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

この結果得られる拡大係数行列の右側が元の方程式の解に相当する．よって解 x は,

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

である．

(ii)• (i) と同様に拡大係数行列 $\tilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{A}|b)$ を変形すると以下を得る (変形を途中でやめていることに注意).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \tag{3}$$

このことから，$\mathrm{rank}(\mathrm{A}) \neq \mathrm{rank}(\tilde{\mathrm{A}})$ であり，$Ax - b = 0$ は解を持たない．

• $\|\mathrm{A}x - b\|$ を最小とする x は，$\|\mathrm{A}x - b\|^2$ を最小とする x と等しい．よって，$\|\mathrm{A}x - b\|^2$ を最小とする x を考える．$\|\mathrm{A}x - b\|^2$ は二次式だから,

$$\frac{\partial}{\partial x}\|\mathrm{A}x - b\|^2 = 0 \tag{4}$$

を満たす x を求めればよい．上式を解くと,

$$x = (\mathrm{A}^\top \mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top b \tag{5}$$

を得る．したがって,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

別解 1 $\|\mathrm{A}x - b\|^2$ を x の各要素について平方完成して最小値を求める

別解 2 $\|\mathrm{A}x - b\|^2$ を x の各要素について微分して,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\|\mathrm{A}x - b\|^2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\|\mathrm{A}x - b\|^2 = 0 \tag{7}$$

を解き，最小値を求める．

(iii)• (i) と同様に拡大係数行列 $\tilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{A}|b)$ を変形すると以下を得る．

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{8}$$

よって，解 x は，任意の $t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$x = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

として与えられる．

• $\|x\|$ を最小とする x は，$\|x\|^2$ を最小とする x と等しい．よって，$\|x\|^2$ を最小とする x を考える．$\|x\|^2$ は二次式だから，

$$\frac{d}{dt}\|x\|^2 = 0 \tag{10}$$

を満たす x を求めればよい．上式を解くと，

$$t = -\frac{2}{7} \tag{11}$$

を得る．したがって，

$$x = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

別解 1 $\|\mathrm{A}x - b\|^2$ を t について平方完成して最小値を求める

問 2　線形変換

(i) $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_\perp$ より，$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^\top (a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_\perp) = a\|\boldsymbol{x}\|^2$．$a$ について整理すると，

$$a = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} \tag{13}$$

を得る．

(ii) $\mathrm{A}\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x}$ に (i) の結果を代入することで，

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top \tag{14}$$

を得る．

問 3　行列式と逆行列の存在条件

(i)

$$
\begin{aligned}
\det(\mathrm{V}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) \\ 0 & x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix} && (15) \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) \\ x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix} && (16) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} && (17) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ 0 & x_3(x_3 - x_2) & x_4(x_3 - x_2) \end{vmatrix} && (18) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} && (19) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) && (20)
\end{aligned}
$$

(ii) 行列 V が逆行列を持つための必要十分条件は，$\det(\mathrm{V}) \neq 0$ であることである．

$$\det(\mathrm{V}) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \neq 0 \tag{21}$$

より，$i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ かつ $i \neq j$ であるすべての (i, j) について $x_i \neq x_j$ を満たすとき，行列 V は逆行列を持つ．

問 4　回転行列

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

(i) $\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

(ii)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 \end{pmatrix} = \mathrm{R}_\theta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

より，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathrm{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

したがって，

$$\mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{24}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &= \mathrm{R}_\phi \mathrm{R}_\theta \boldsymbol{e}_1 && (25) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 && (26) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} && (27) \end{aligned}$$

(iv)

$$\mathrm{R}_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{28}$$

であり，

$$\mathrm{R}_\theta \mathrm{R}_{-\theta} = \mathrm{R}_\theta \mathrm{R}_\theta = \mathrm{I} \tag{29}$$

（I は単位行列）より，$\mathrm{R}_\theta^{-1} = \mathrm{R}_{-\theta}$.