信号処理100本ノック

Yuma Kinoshita

1　Unix コマンドの基礎

2　線形代数の基礎

問 1. 連立方程式

(i)

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -29 \\ 12 \\ -17 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

とする．このとき，方程式 $\mathrm{A}x - b = 0$ を解け．

(ii)

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

とする．

- このとき，方程式 $\mathrm{A}x - b = 0$ を解け．
- n 次元ベクトル v のノルム $\|v\|$ を $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$ とする $\|\mathrm{A}x - b\|$ が最小となる x を求めよ．

(iii)

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^4 \tag{3}$$

とする．

- このとき，方程式 $\mathrm{A}x - b = 0$ を解け．
- n 次元ベクトル v のノルム $\|v\|$ を $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$ とする．$\mathrm{A}x - b = 0$ の解 x のうち，$\|x\|$ が最小となるものを求めよ．

問 2. 線形変換

$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ を互いに線形独立な縦ベクトルとする．いま $\boldsymbol{y}$ を，

$$\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_{\perp} \tag{4}$$

のように表したい．ここで，a はスカラー，$\boldsymbol{x}_{\perp}$ は $\boldsymbol{x}$ と直交するベクトルを表す．すなわち，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\perp} = 0$ である．

(i) a を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{y}$ から $a\boldsymbol{x}$ を得る演算は，ある行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x}$ とかくことができる．$\boldsymbol{A}$ を求めよ．

問 3. 行列のランク

2 つの行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の積として，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ で表される行列 $\boldsymbol{C}$ のランクについて考える．ただし，行列 $\boldsymbol{C}$ のサイズは 5×4 である．

(i) 行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ として，それぞれ 5×1，1×4 の適当な行列を自分で考え，$\boldsymbol{C}$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ は零行列（すべての要素が 0 の行列）ではないものとします．

(ii) (i) のとき、行列 $\boldsymbol{C}$ のランクを求めなさい．理由をつけて答えても，1) の答えを階段化するなどして答えても結構です．

(iii) 行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ として，それぞれ 5×2，2×4 の適当な行列を自分で考え，$\boldsymbol{C}$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ はフルランクの行列（$m\times n$ 行列のランクが m と n の小さいほうに等しいとき，この行列をフルランクであるという）であるものとします．

(iv) (iii) のとき、行列 $\boldsymbol{C}$ のランクを求めなさい．理由をつけて答えても，3) の答えを階段化するなどして答えても結構です．

(v) 行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ が，それぞれ $5\times N$，$N\times 4$ のサイズであったとき，行列 $\boldsymbol{C}$ のランクがいくつになるか答えなさい．証明なしでも結構です．ただし，$N\in\mathbb{N}$ で，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ はフルランクの行列であるとします．必要であれば、N で場合分けしてください．

問 4. 逆行列，固有値分解

ベクトル $x\in\mathbb{R}^2$ を原点中心に θ だけ（反時計回りに）回転させたベクトル y は，行列 $\mathbf{R}_\theta$ を用いて $y=\mathbf{R}_\theta x$ と与えられる．

(i) $\mathbf{R}_\theta$ を求めよ．

(ii) $\mathbf{R}_\theta$ の逆行列を求めよ．

(iii) $\mathbf{R}_\theta$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(iv) 正則行列 $\mathbf{U}$ および対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ を用いて，$\mathbf{R}_\theta=\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$ の形で $\mathbf{R}_\theta$ を表せ．

問 5. エルミート行列の性質

エルミート行列 A の固有値分解 $\mathrm{A}=\mathrm{U}\Lambda\mathrm{U}^{-1}$ を考える．

(i) 任意の複素ベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_n)^\top$ のとき，$\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{v}\geq 0$ を証明せよ．

(ii) もしくはエルミート行列の固有値 λ が実数になることを証明せよ．

(iii) エルミート行列 A の固有値分解が $\mathrm{A}=\mathrm{U}\Lambda\mathrm{U}^\dagger$ として与えられることを示せ．ここで，$\cdot^\dagger$ はエルミート転置を表す．

(iv) フルランクを持つエルミート行列 A の逆行列 A^{-1} が，$\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{U}\Lambda^{-1}\mathrm{U}^\dagger$ として与えられることを示せ．

問 6. 特異値分解

行列 A は，各行が直交する行列 U,V，および対角行列 Σ を用いて $\mathrm{A}=\mathrm{U}\Sigma\mathrm{V}^*$ の形に分解できる．これを特異値分解と呼ぶ．ここで，$\cdot^\dagger$ はエルミート転置を表す．

(i)

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}\tag{5}$$

の特異値分解を求めよ．

(ii)

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&4&1&-1\\1&2&-1&1\\2&1&1&2\\1&3&2&-3\end{pmatrix}\tag{6}$$

の特異値分解を求めよ．ただし，この特異値分解に限り，プログラム等を用いて解答してもよい．

問 7. Moore-Penrose の擬似逆行列

行列 A について，以下の 4 条件

- $\mathrm{A}\mathrm{A}^\dagger\mathrm{A}=\mathrm{A}$,
- $\mathrm{A}^\dagger\mathrm{A}\mathrm{A}^\dagger=\mathrm{A}^\dagger$,

- $(\mathrm{AA}^\dagger)^* = \mathrm{AA}^\dagger$,
- $(\mathrm{A}^\dagger\mathrm{A})^* = \mathrm{A}^\dagger\mathrm{A}$

を満たす行列 $\mathrm{A}^\dagger$ を Moore-Penrose の擬似逆行列と呼ぶ．ここで，A が正則行列ならば，$\mathrm{A}^\dagger = \mathrm{A}^{-1}$ を満たす．また，A の特異値分解が $\mathrm{A} = \mathrm{U}\Sigma\mathrm{V}^*$ として与えられるとき，$\mathrm{A}^\dagger = \mathrm{V}\Sigma^\dagger\mathrm{U}^*$ が成り立つ．第 17 問の結果を用いて以下の問いに答えよ．

(i)

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

について，$\mathrm{A}^\dagger$ を求めよ．また，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{A}^\dagger b$ を計算し，その結果を第 3 問で計算した x と比較せよ．

(ii)

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

について，$\mathrm{A}^\dagger$ を求めよ．また，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{A}^\dagger b$ を計算し，その結果を第 6 問で計算した x と比較せよ．ただし，この計算に限り，プログラム等を利用して解答してもよい．

3　微積分

問 1. 勾配ベクトル

関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ のベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に関する微分（勾配）を，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^\top \tag{9}$$

と定義します．また，関数 $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ のベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に関する微分（勾配）を，

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^\top \tag{10}$$

と定義します．ベクトル

$$a, x \in \mathbb{R}^n$$

を縦ベクトルとし，行列 $\mathrm{A}, \mathrm{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ をそれぞれ対称行列，単位行列とするとき，以下の等式を証明してください．

(i) $\frac{\partial}{\partial x}x^\top = \mathrm{E}$

(ii) $\frac{\partial}{\partial x}x^\top a = a$

(iii) $\frac{\partial}{\partial x}a^\top x = a$

(iv) $\frac{\partial}{\partial x}x^\top \mathrm{A}x = 2\mathrm{A}x$

問 2. 勾配，行列

実数のスカラー関数 $g(\mathbf{X})$ の行列 $\mathbf{X}$ についての偏微分が

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_{1N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_{M1}} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_{MN}} \end{bmatrix} \tag{11}$$

で定義されるとき，以下の等式を証明せよ．

(i) $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\mathrm{tr}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$

(ii) $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\mathrm{tr}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^\top$

(iii) $\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\mathrm{tr}(\mathbf{AX}^\top) = \mathbf{A}$

(iv) $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\mathrm{tr}(\mathbf{AXB}) = \mathbf{A}^\top\mathbf{B}^\top$

ただし，$\mathbf{A}$ は各行列積が定義できるサイズとする．

問 3. 微分の連鎖律

$f = f_2(\mathrm{W}_2 f_1(\mathrm{W}_1 x + b_1) + b_2)$ とします．

(i) $\frac{\partial f}{\partial A_2}, \frac{\partial f}{\partial b_2}$ を計算してください．

(ii) $\frac{\partial f}{\partial A_1}, \frac{\partial f}{\partial b_1}$ を計算してください．

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ を計算してください

4　線形時不変システム

問 1. てすと

(i) フィルタのインパルス応答が $h[0] = 1, h[1] = -0.97$ であることより，周波数応答 $H(\omega)$(インパルス応答の離散時間フーリエ変換) は

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \tag{12}$$
$$= 1 - 0.97e^{-j\omega} \tag{13}$$

となる．ここで，j は虚数単位，ω は正規化角周波数をそれぞれ表す．このフィルタの振幅特性 $|H(\omega)|$ は,

$$|H(\omega)| = |1 - 0.97e^{-j\omega}| \tag{14}$$
$$= |1 - 0.97(\cos\omega - j\sin\omega)| \tag{15}$$
$$= \sqrt{(1 - 0.97\cos\omega)^2 + (0.97j\sin\omega)^2} \tag{16}$$
$$= \sqrt{1 - 2 \times 0.97\cos\omega + 0.97^2\cos^2\omega + 0.97^2\sin^2\omega} \tag{17}$$
$$= \sqrt{(1 + 0.97^2) - 2 \times 0.97\cos\omega} \tag{18}$$

である．$H(\omega)$ は周期 2π を持ち，$|H(\omega)|$ は偶対象である．よって，$0 \leq \omega < \pi$ の範囲のみを考える．$|H(\omega)|$ は $0 \leq \omega\pi$ の範囲で単調増加し，$\omega = 97/200 < \pi$ のとき $|H(\omega) = 1|$ となる．したがって，このフィルタ h は，$\omega > 97/200$ の周波数成分を強調し $\omega < 97/200$ の周波数成分を減衰させる高域強調フィルタである．