

# 信号処理 100 本ノック

Yuma Kinoshita

## 1 Unix コマンドの基礎

## 2 線形代数の基礎

### 問 1. 連立方程式

(i)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -29 \\ 12 \\ -17 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

とする. このとき, 方程式  $Ax - b = 0$  を解け.

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

とする.

- このとき, 方程式  $Ax - b = 0$  を解け.
- $n$  次元ベクトル  $v = (v_1, \dots, v_n)$  のノルム  $\|v\|$  を  $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$  とする  $\|Ax - b\|$  が最小となる  $x$  を求めよ.

(iii)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^4 \quad (3)$$

とする.

- このとき, 方程式  $Ax - b = 0$  を解け.
- $n$  次元ベクトル  $v = (v_1, \dots, v_n)$  のノルム  $\|v\|$  を  $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$  とする.  $Ax - b = 0$  の解  $x$  のうち,  $\|x\|$  が最小となるものを求めよ.

### 問 2. 線形変換

$\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  を互いに線形独立な縦ベクトルとする. いま  $\mathbf{y}$  を,

$$\mathbf{y} = a\mathbf{x} + \mathbf{x}_\perp \quad (4)$$

のように表したい. ここで,  $a$  はスカラー,  $\mathbf{x}_\perp$  は  $\mathbf{x}$  と直交するベクトルを表す. すなわち,  $\mathbf{x}^T \mathbf{x}_\perp = 0$  である.

(i)  $a$  を求めよ.

(ii)  $\mathbf{y}$  から  $a\mathbf{x}$  を得る演算は, ある行列  $\mathbf{A}$  を用いて,  $\mathbf{A}\mathbf{y} = a\mathbf{x}$  とかくことができる.  $\mathbf{A}$  を求めよ.

### 問 3. 行列のランク

2 つの行列  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  の積として,  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  で表される行列  $\mathbf{C}$  のランクについて考える. ただし, 行列  $\mathbf{C}$  のサイズは  $5 \times 4$  である.

- 行列  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  として, それぞれ  $5 \times 1$ ,  $1 \times 4$  の適当な行列を自分で考え,  $\mathbf{C}$  を計算しなさい. ただし,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  は零行列 (すべての要素が 0 の行列) ではないものとします.
- (i) のとき, 行列  $\mathbf{C}$  のランクを求めなさい. 理由をつけて答えても, 1) の答えを階段化するなどして答えても結構です.

- (iii) 行列  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  として、それぞれ  $5 \times 2$ ,  $2 \times 4$  の適当な行列を自分で考え、 $\mathbf{C}$  を計算しなさい。ただし、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  はフルランクの行列 ( $m \times n$  行列のランクが  $m$  と  $n$  の小さいほうに等しいとき、この行列をフルランクであるという) であるものとします。
- (iv) (iii) のとき、行列  $\mathbf{C}$  のランクを求めなさい。理由をつけて答えても、3) の答えを階段化するなどして答えても結構です。
- (v) 行列  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  が、それぞれ  $5 \times N$ ,  $N \times 4$  のサイズであったとき、行列  $\mathbf{C}$  のランクがいくつになるか答えなさい。証明なしでも結構です。ただし、 $N \in \mathbb{N}$  で、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  はフルランクの行列であるものとします。必要であれば、 $N$  で場合分けしてください。

#### 問 4. 逆行列, 固有値分解

ベクトル  $x \in \mathbb{R}^2$  を原点中心に  $\theta$  だけ (反時計回りに) 回転させたベクトル  $y$  は、行列  $\mathbf{R}_\theta$  を用いて  $y = \mathbf{R}_\theta x$  と与えられる。

- (i)  $\mathbf{R}_\theta$  を求めよ。
- (ii)  $\mathbf{R}_\theta$  の逆行列を求めよ。
- (iii)  $\mathbf{R}_\theta$  の固有値, 固有ベクトルを求めよ。
- (iv) 正則行列  $\mathbf{U}$  および対角行列  $\mathbf{\Lambda}$  を用いて、 $\mathbf{R}_\theta = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$  の形で  $\mathbf{R}_\theta$  を表せ。

#### 問 5. エルミート行列の性質

エルミート行列  $\mathbf{A}$  の固有値分解  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$  を考える。

- (i) 任意の複素ベクトル  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top$  のとき、 $\mathbf{v}^H \mathbf{v} \geq 0$  を証明せよ。
- (ii) もしくはエルミート行列の固有値  $\lambda$  が実数になることを証明せよ。
- (iii) エルミート行列  $\mathbf{A}$  の固有値分解が  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\dagger$  として与えられることを示せ。ここで、 $\cdot^\dagger$  はエルミート転置を表す。
- (iv) フルランクを持つエルミート行列  $\mathbf{A}$  の逆行列  $\mathbf{A}^{-1}$  が、 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^\dagger$  として与えられることを示せ。

#### 問 6. 特異値分解

行列  $\mathbf{A}$  は、各行が直交する行列  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ , および対角行列  $\mathbf{\Sigma}$  を用いて  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$  の形に分解できる。これを特異値分解と呼ぶ。ここで、 $\cdot^\dagger$  はエルミート転置を表す。

(i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

の特異値分解を求めよ。

(ii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

の特異値分解を求めよ。ただし、この特異値分解に限り、プログラム等を用いて解答してもよい。

#### 問 7. Moore-Penrose の擬似逆行列

行列  $\mathbf{A}$  について、以下の 4 条件

- $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A}$ ,
- $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger$ ,

- $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$ ,
- $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$

を満たす行列  $A^\dagger$  を Moore-Penrose の擬似逆行列と呼ぶ。ここで、 $A$  が正則行列ならば、 $A^\dagger = A^{-1}$  を満たす。また、 $A$  の特異値分解が  $A = U\Sigma V^*$  として与えられるとき、 $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*$  が成り立つ。第 17 問の結果を用いて以下の問いに答えよ。

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

について、 $A^\dagger$  を求めよ。また、 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  のとき、 $A^\dagger b$  を計算し、その結果を第 3 問で計算した  $x$  と比較せよ。

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

について、 $A^\dagger$  を求めよ。また、 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  のとき、 $A^\dagger b$  を計算し、その結果を第 6 問で計算した  $x$  と比較せよ。ただし、この計算に限り、プログラム等を利用して解答してもよい。

### 3 微積分

#### 問 1. 勾配ベクトル

関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  のベクトル  $x \in \mathbb{R}^n$  に関する微分（勾配）を,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^\top \quad (9)$$

と定義します. また, 関数  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  のベクトル  $x \in \mathbb{R}^n$  に関する微分（勾配）を,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^\top \quad (10)$$

と定義します. ベクトル

$$a, x \in \mathbb{R}^n$$

を縦ベクトルとし, 行列  $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  をそれぞれ対称行列, 単位行列とすると, 以下の等式を証明してください.

- (i)  $\frac{\partial}{\partial x} x^\top = E$
- (ii)  $\frac{\partial}{\partial x} x^\top a = a$
- (iii)  $\frac{\partial}{\partial x} a^\top x = a$
- (iv)  $\frac{\partial}{\partial x} x^\top A x = 2Ax$

#### 問 2. 勾配, 行列

実数のスカラー関数  $g(\mathbf{X})$  の行列  $\mathbf{X}$  についての偏微分が

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_{1N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_{M1}} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_{MN}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

で定義されるとき, 以下の等式を証明せよ.

- (i)  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$
- (ii)  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{A}^\top$
- (iii)  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{X}^\top) = \mathbf{A}$
- (iv)  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}) = \mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top$

ただし,  $\mathbf{A}$  は各行列積が定義できるサイズとする.

#### 問 3. 微分の連鎖律

$f = f_2(W_2 f_1(W_1 x + b_1) + b_2)$  とします.

- (i)  $\frac{\partial f}{\partial A_2}, \frac{\partial f}{\partial b_2}$  を計算してください.
- (ii)  $\frac{\partial f}{\partial A_1}, \frac{\partial f}{\partial b_1}$  を計算してください.
- (iii)  $\frac{\partial f}{\partial x}$  を計算してください

## 4 線形時不変システム

問 1. てすと

- (i) フィルタのインパルス応答が  $h[0] = 1, h[1] = -0.97$  であることより, 周波数応答  $H(\omega)$  (インパルス応答の離散時間フーリエ変換) は

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \quad (12)$$

$$= 1 - 0.97e^{-j\omega} \quad (13)$$

となる. ここで,  $j$  は虚数単位,  $\omega$  は正規化角周波数をそれぞれ表す. このフィルタの振幅特性  $|H(\omega)|$  は,

$$|H(\omega)| = |1 - 0.97e^{-j\omega}| \quad (14)$$

$$= |1 - 0.97(\cos \omega - j \sin \omega)| \quad (15)$$

$$= \sqrt{(1 - 0.97 \cos \omega)^2 + (0.97 \sin \omega)^2} \quad (16)$$

$$= \sqrt{1 - 2 \times 0.97 \cos \omega + 0.97^2 \cos^2 \omega + 0.97^2 \sin^2 \omega} \quad (17)$$

$$= \sqrt{(1 + 0.97^2) - 2 \times 0.97 \cos \omega} \quad (18)$$

である.  $H(\omega)$  は周期  $2\pi$  を持ち,  $|H(\omega)|$  は偶対象である. よって,  $0 \leq \omega < \pi$  の範囲のみを考える.  $|H(\omega)|$  は  $0 \leq \omega < \pi$  の範囲で単調増加し,  $\omega = 97/200 < \pi$  のとき  $|H(\omega)| = 1$  となる. したがって, このフィルタ  $h$  は,  $\omega > 97/200$  の周波数成分を強調し  $\omega < 97/200$  の周波数成分を減衰させる高域強調フィルタである.