



DIPARTIMENTO DI FISICA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

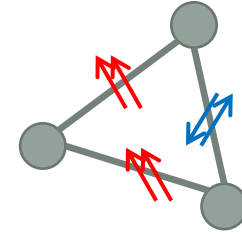
A TWO STEP RSB ALGORITHM ON BETHE LATTICE SPIN GLASS

Relatore: Prof. Giorgio Parisi,

Candidato: Andrea Mazzei,

A.A. 2012/2013

Introduzione alla RSB

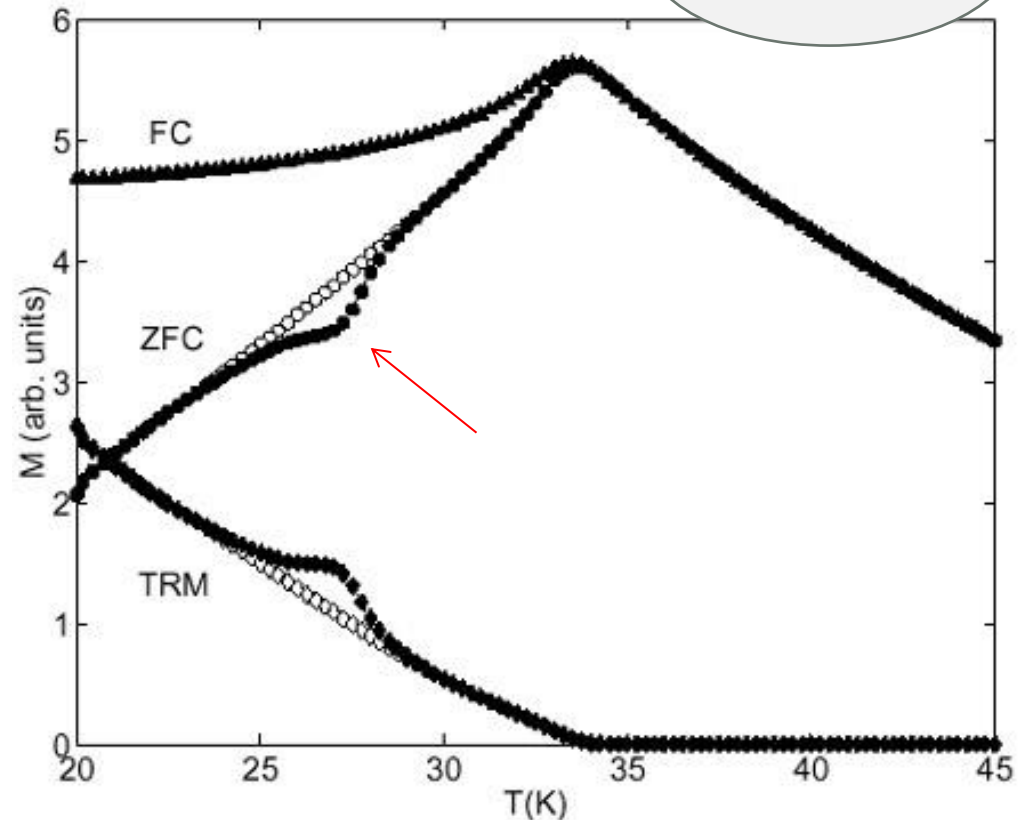


- Spin glass: sistema con interazioni in competizione.
- Tanti stati a basse temperature.
- **ROTTURA DI ERGODICITÀ**
- **ROTTURA DI SIMMETRIA DI REPLICHE**

RSB nella fisica sperimentale

Cu:Mn13.5%

- RSB evidence: La suscettività magnetica del sistema dipende dalla sua storia.
- FC e ZFC dipendono dalla distribuzione di overlap $q(x)$ in due modi differenti.

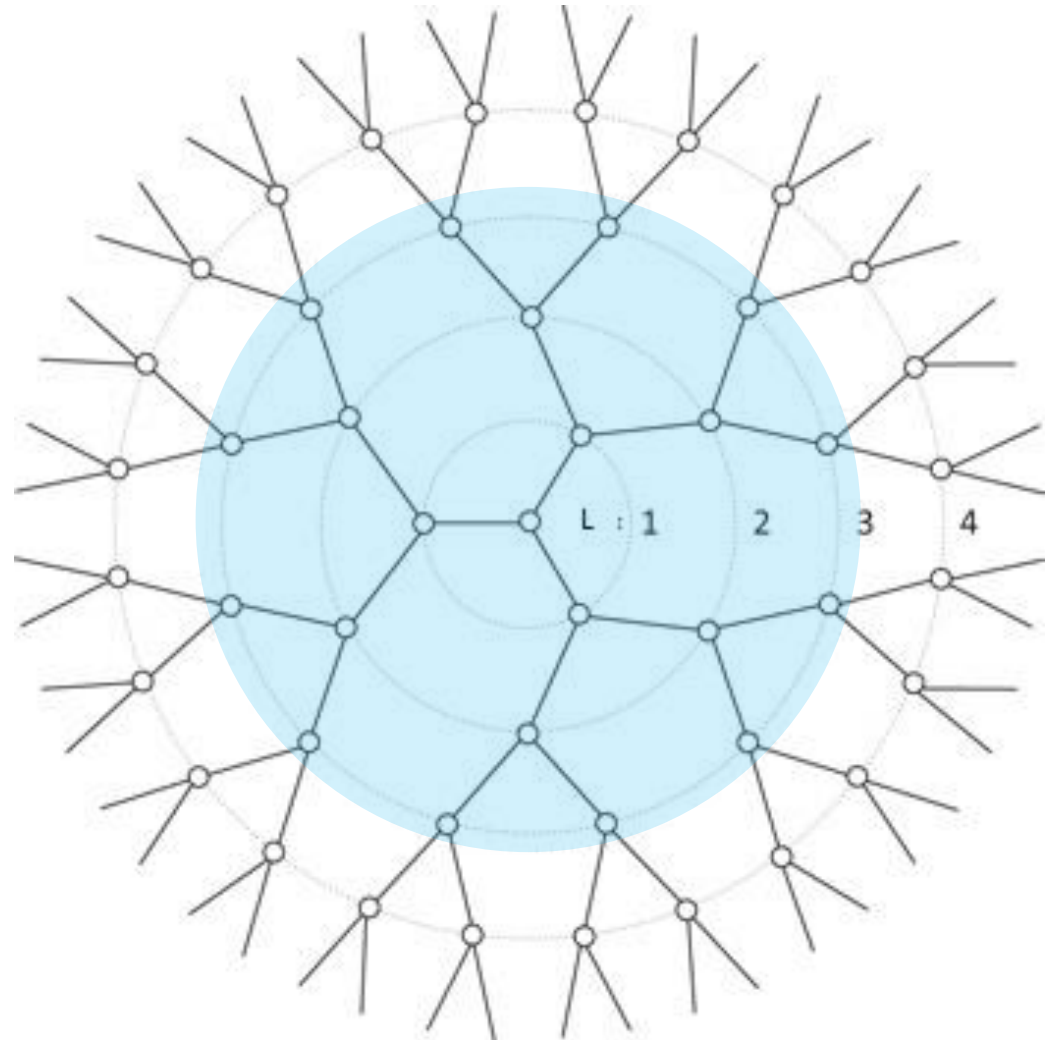


[Djurberg C., Jonason K., Nordblad P.]

Bethe lattice

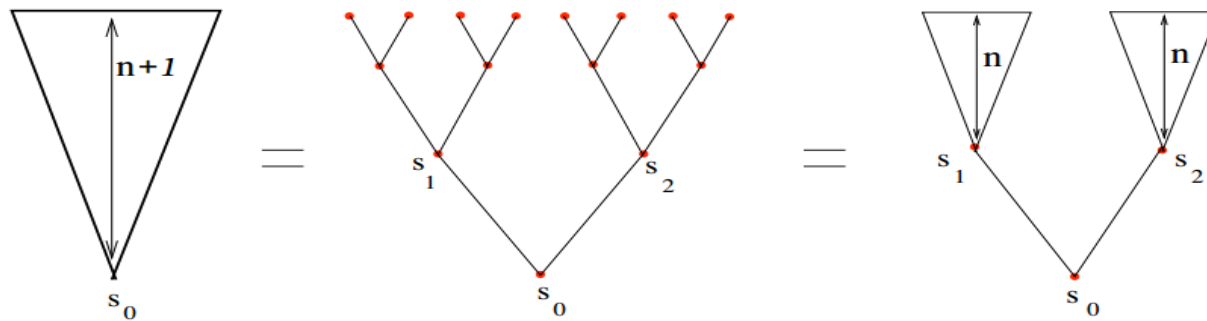
- Coordinazione fissata.
- Connessione con un numero finito di (nuovi) vicini.
- Presenta una struttura ad albero.

$$\frac{L' \rightarrow \infty}{L \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$



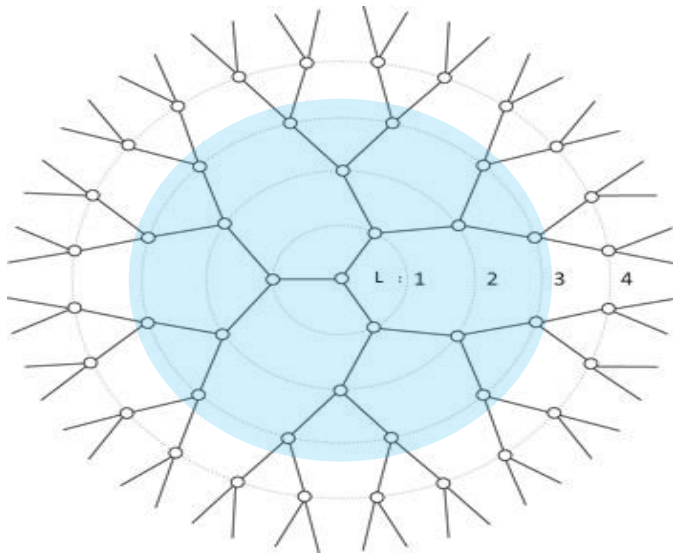
Perché Bethe lattice?

- Un modello intermedio tra il modello long range e modelli sensibilmente più complicati
- ~~Teorema del limite centrale~~ → Complicazioni matematiche...
- L'approssimazione di Bethe è esatta su strutture ad albero



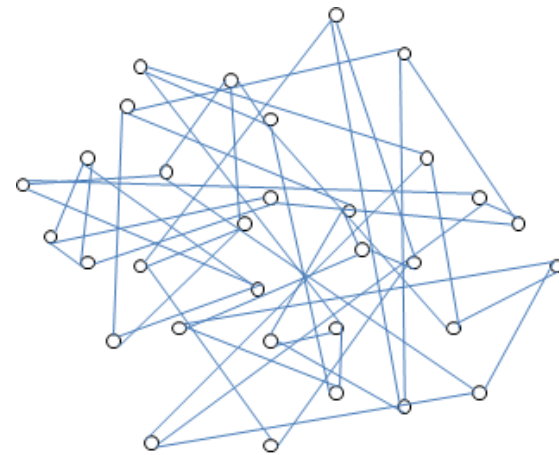
Perché Bethe lattice?

Dal Bethe lattice...



No loops

...al grafo random.



Taglia dei loop $O(\log N)$

I due modelli sono localmente equivalenti

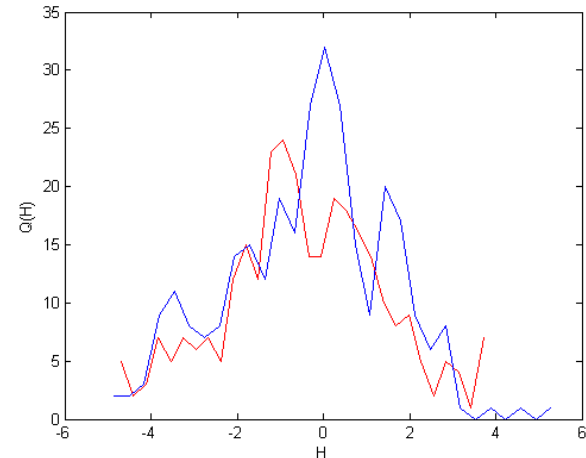
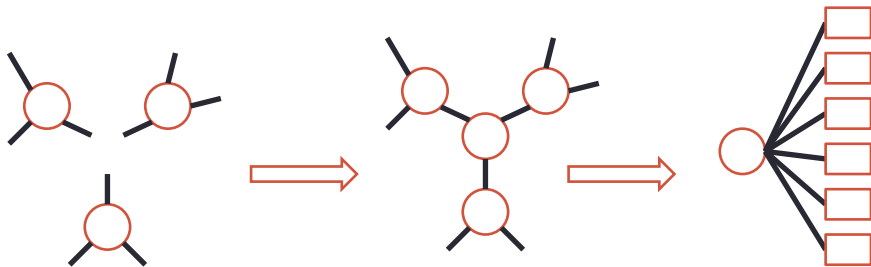
Bethe lattice Ising spin glass

- Alte temperature: soluzione RS stabile.
- Basse temperature: Fase di spin glass.
- Soluzione approssimata ad uno step di RSB, valida ad ogni temperatura e distribuzione del disordine.

[M. Mezard, G. Parisi, 2001]

- È possibile aumentare la precisione della soluzione?

RSB su Bethe lattice



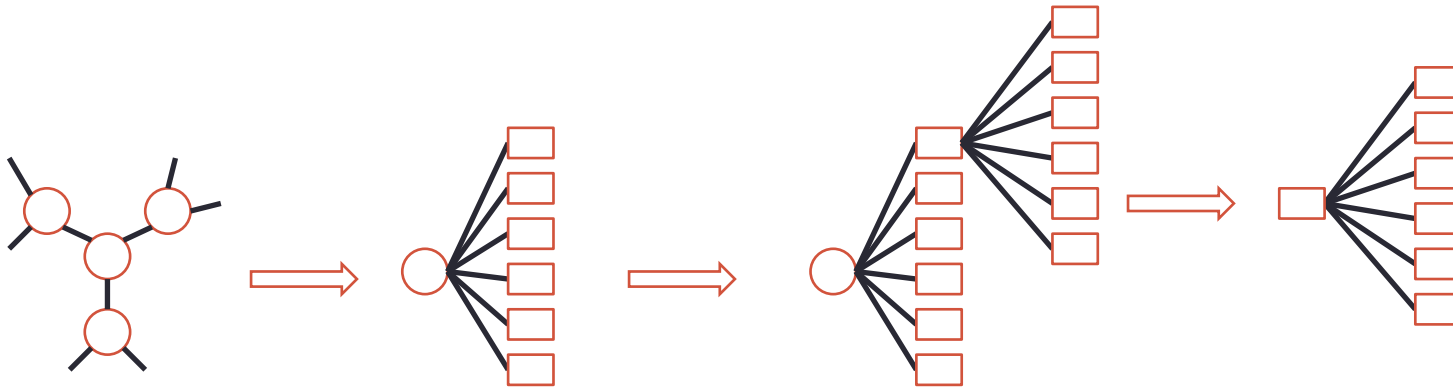
L'inserimento dello spin di cavità modifica la distribuzione degli stati.

[M.Mezard, G.Parisi]

$$Q_0(h_0) = C \int d\Delta F P_0(h_0, \Delta F) \exp(-\beta x \Delta F)$$

$$\text{con } h_0 = \frac{1}{\beta} \text{atanh}(\langle \sigma_0 \rangle)$$

RSB su Bethe lattice



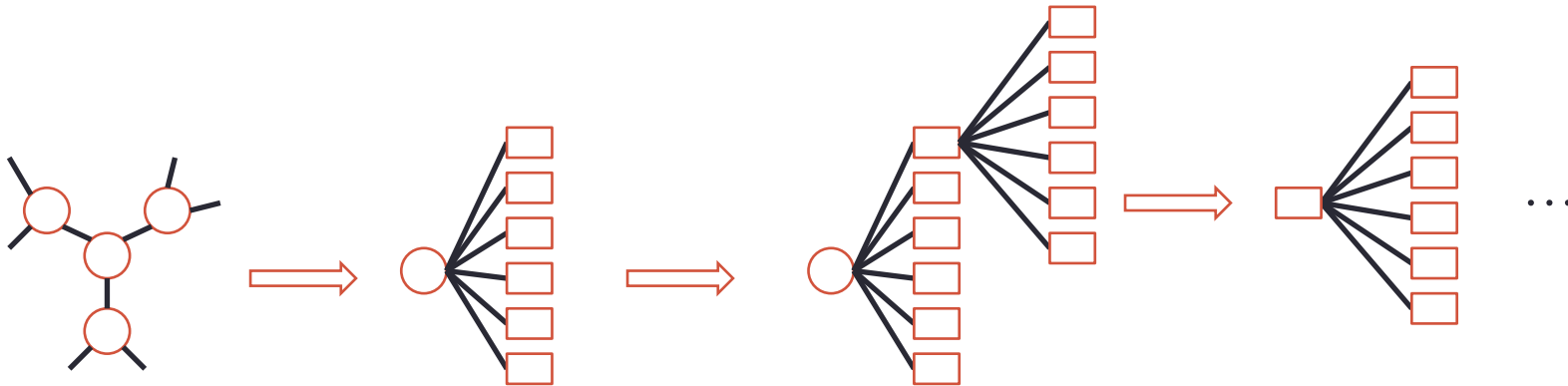
N siti: ad ogni sito \bigcirc sono associati M stati \square

Ogni stato contiene una famiglia di M substatì.

Ogni substatò a sua volta...

Dallo studio dell'overlap tra le famiglie ai vari livelli deduciamo $q(x)$.

RSB su Bethe lattice



Ogni volta che aggiungiamo un livello di RSB si aggiunge un parametro x .
Il ripeso degli stati deve essere eseguito a tutti i livelli.

Il valore corretto della n -upla dei valori di x è quello che massimizza F .

Algoritmo a due step

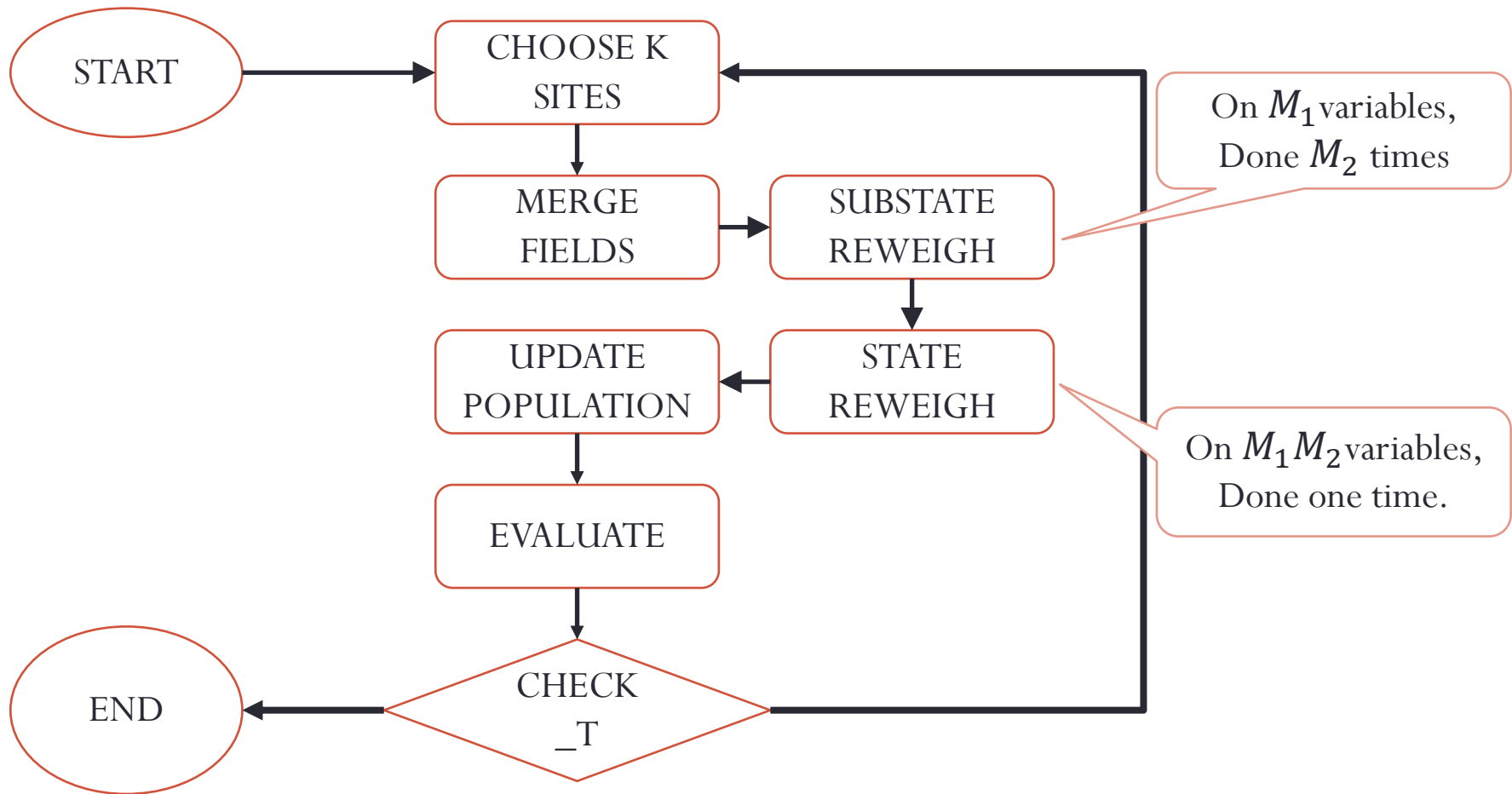
- È possibile controllare se questa procedura è corretta:

MCMC sulla distribuzione dei campi locali

$2\text{RSB} \rightarrow NM_1M_2$ campi locali

$K = 6 \quad T = 0.8$
[Carrus et al.]

Algoritmo a due step



Massimizzazione dell'energia libera e corretta distribuzione degli stati

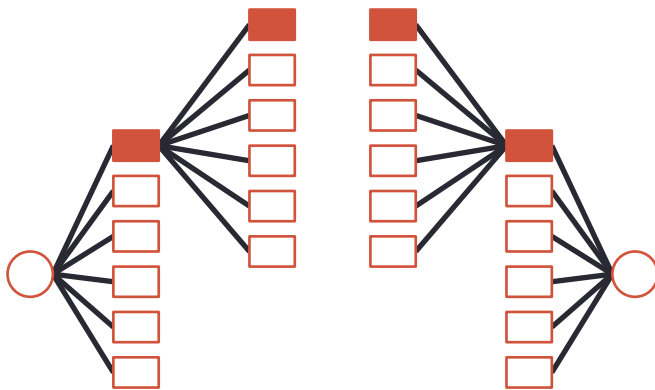
- Per poter misurare energia ed overlap dobbiamo trovare la coppia di parametri in $([0,1] \times [0,1])$ che massimizza F .

$$x_1 = 0.07 \quad x_2 = 0.35$$

Overlaps

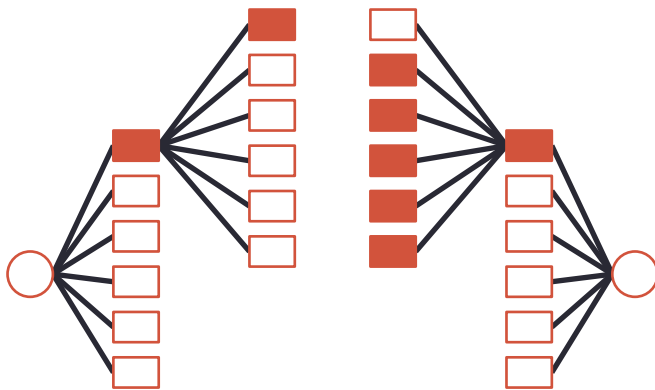
- A due step di RSB \rightarrow tre overlaps: self overlap q_0

$$q_0 = \sum_{\alpha\gamma} \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma}) \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma})$$



Overlaps

- A due step di RSB \rightarrow tre overlaps: samestate overlap q_1

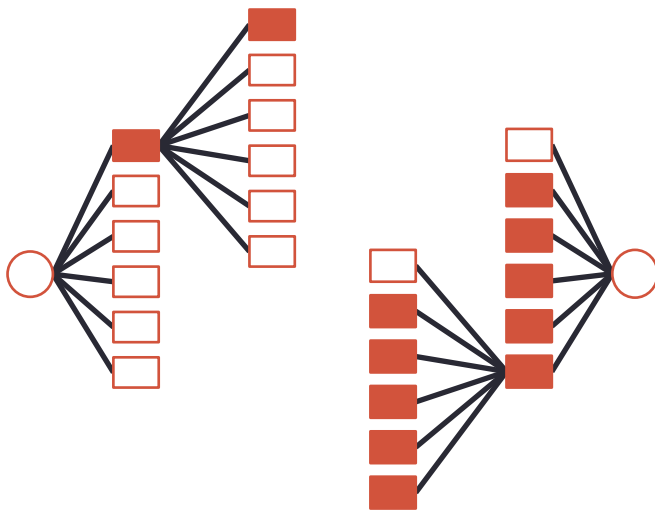


$$q_0 = \sum_{\alpha\gamma} \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma}) \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma})$$

$$q_1 = \sum_{\gamma' \neq \gamma} \sum_{\alpha\gamma} \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma}) \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma'})$$

Overlaps

- A due step di RSB \rightarrow tre overlaps: interstate overlap q_2



$$q_0 = \sum_{\alpha\gamma} \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma}) \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma})$$

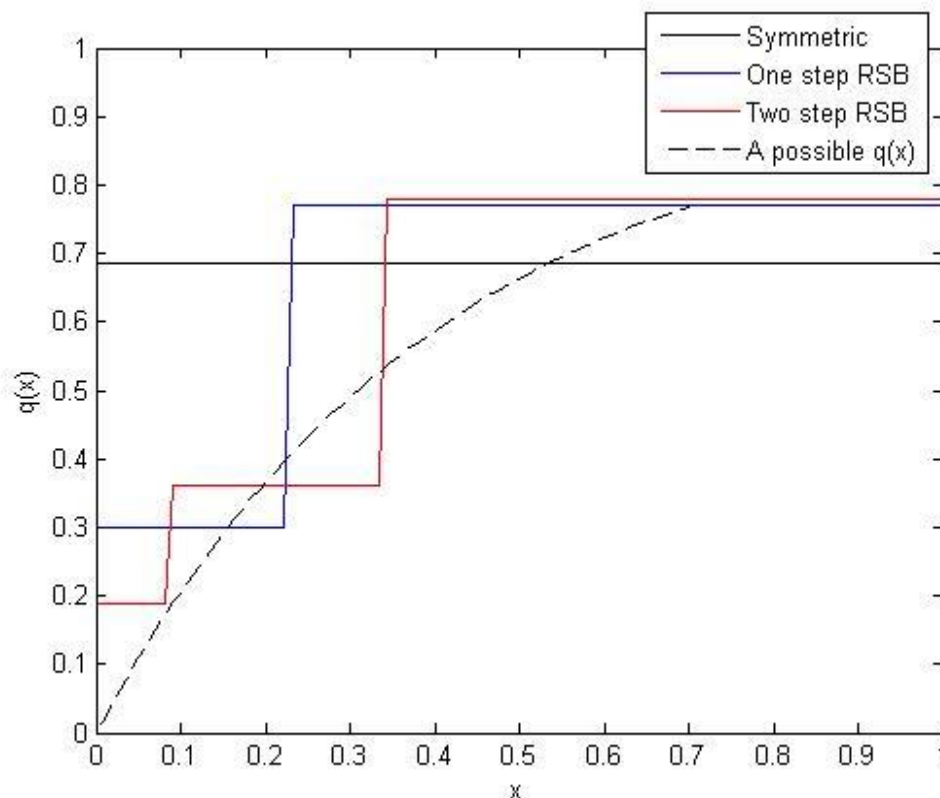
$$q_1 = \sum_{\gamma' \neq \gamma} \sum_{\alpha\gamma} \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma}) \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma'})$$

$$q_2 = \sum_{\substack{\gamma' \neq \gamma \\ \alpha' \neq \alpha}} \sum_{\alpha\gamma} \tanh(\beta h_i^{\alpha\gamma}) \tanh(\beta h_i^{\alpha'\gamma'})$$

Forma di $q(x)$

Approssimazione della
funzione di overlap:

q_0	0.79
q_1	0.36
q_2	0.19



$$P(q) = \delta(q - q_0)(1 - x_2) + \delta(q - q_1)(x_2 - x_1) + \delta(q - q_2)(x_1 - 0)$$

Confronti

	U	F	q			R
RS*	-1.816	-1.863	0.686			0
1RSB**	-1.800	-1.858	0.779	0.304		0.047
2RSB	-1.80	-1.85	0.79	0.36	0.19	0.06
SIM.***	-1.7999		q(x)			0.055

* [Bethe, Peierls]

** [Mezard, Parisi]

*** [Carrus et al.]

Conclusioni

1. Le fluttuazioni sulle misure delle osservabili sono alte, data la taglia non molto grande del sistema (fino a $150 \times 150 \times 150$), tuttavia..
2. ...i risultati ottenuti indicano che l'estensione a più livelli di RSB fornisce le corrette osservabili per il BLSG.
3. L'estensione a livelli maggiori di 2 comporta un alto utilizzo di risorse di calcolo, data la struttura dell'algoritmo

Grazie per l'attenzione,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Andrea Mazzei', is written on a light gray rectangular background.

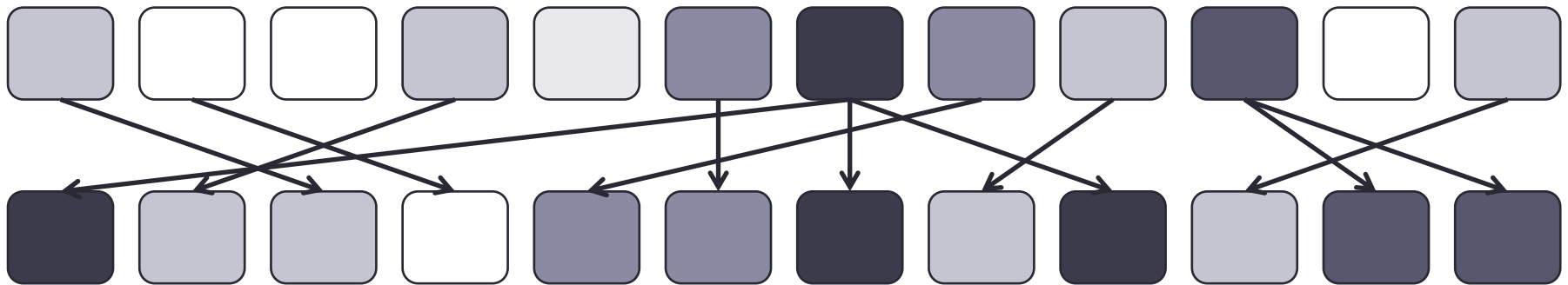
Email: andreamazzei88@gmail.com

Appendice A: Tecnica di ripeso

La più semplice: i nuovi stati vengono scelti tra quelli già esistenti, con una probabilità assegnata in funzione del peso.

Ogni peso è dato da

$$p_{\alpha} = \frac{\exp(-\beta x \Delta F^{\alpha})}{\sum_{\alpha'} \exp(-\beta x \Delta F^{\alpha'})}$$



Si possono pensare procedure alternative,
Migliore precisione, a scapito di una maggiore richiesta di operazioni

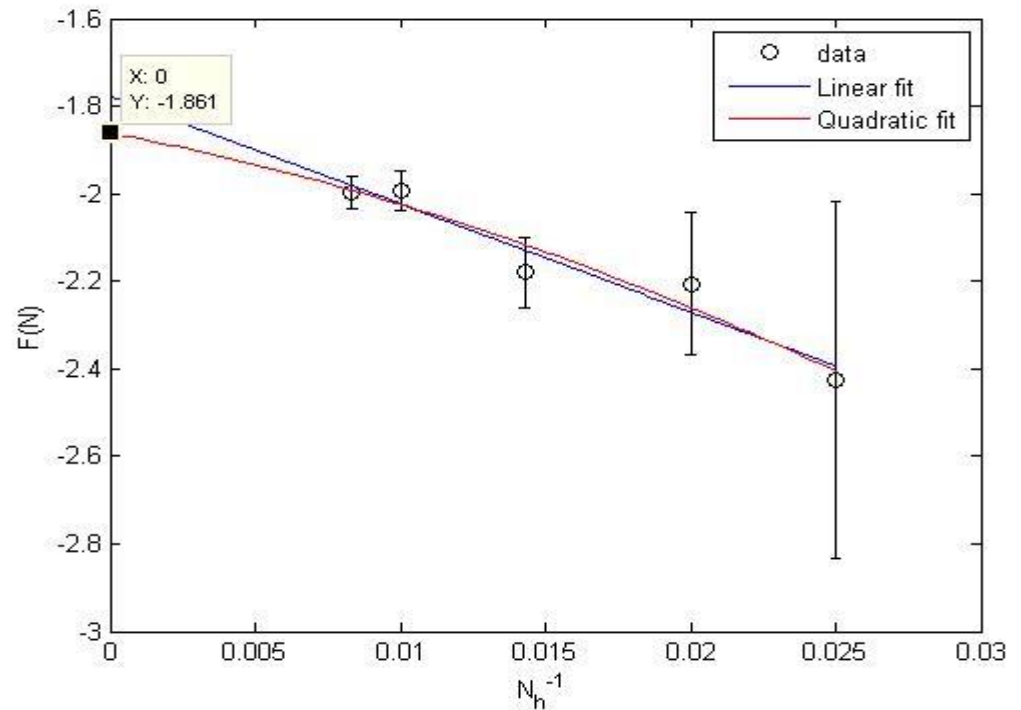
Appendice B: Effetti di taglia finita

$$\text{Errore} \sim 1/\sqrt{N}$$

$$\text{Errore} \sim 1/\sqrt{M_i}$$

Limite termodinamico
estrapolato da un fit.

Da quali taglie dipende
maggiormente l'errore?



Appendice C: Alcuni aspetti matematici

Media di F per il livello l

$$\langle F \rangle_l = -\frac{1}{\beta x_l} \log \left(\sum_{\alpha} \exp(-\beta x_l F^{\alpha}) \right)$$

Calcolo di F al livello zero

$$F = \frac{k+1}{2} F_{link} - k F_{sito}$$

Calcolo di F sulle foglie

$$F_{site} = \sum_i \log \left(\frac{\cosh(\beta J_i)}{\cosh(\beta u_i)} \right) + \log(2 \cosh(\beta \sum_i u_i))$$

$$F_{link} = \sum_i \log \left(\frac{\cosh(\beta J_i) \cosh(\beta K_i)}{\cosh(\beta u_i) \cosh(\beta v_i)} \right) + \log \sum_{\sigma_0, \tau_0} \exp(\beta J \sigma_0 \tau_0 + \beta \sigma_0 \sum u_i + \beta \tau_0 \sum v_i)$$

Appendice C: Alcuni aspetti matematici

Distribuzione dei campi locali prima dell'inserimento dello spin di cavità

$$P_0(h_0) = \int \prod_{i=1}^k [Q_i(h_i) dh_i] \delta(h_0 - \sum_{i=1}^k u(J_i, h_i))$$

$$\tanh(\beta u(J, h)) = \tanh(\beta J) \tanh(\beta h)$$

Appendice D: Una prima sottostima

